И. М. Никонов, Универсальные характеристические классы Каруби аппроксимативно конечных алгебр,
*Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 2, 85–96

2005 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Том 196, №2

УДК 514.745.5

**И. М. Никонов**

# Универсальные характеристические классы Каруби аппроксимативно конечных алгебр

В работе вычислено ядро характера Конна–Черна для аппроксимативно конечных алгебр и алгебр фон Неймана.

Библиография: 16 названий.

## § 1. Введение

Некоммутативные характеристические классы как инварианты проективных модулей произвольных ассоциативных алгебр появились в начале 80-х гг. в рамках развития некоммутативной геометрии. В течение нескольких лет было предложено несколько способов построения характеристических классов. В основе каждого из них лежит конструкция Черна–Вейля, в которой характеристические классы определяются посредством введения связности на расслоении как следы соответствующей кривизны. Первое применение конструкции Черна–Вейля в некоммутативной геометрии принадлежит А. Конну [1], который для произвольной $C^*$-динамической системы определил характеристические классы, принимающие значения в когомологиях алгебры Ли дифференцирований, задающей динамическую систему. Первоначальное определение Конна не позволяло получить обычные характеристические классы Черна как частный случай. Этот недостаток был устранен в конструкции М. Каруби [2] и конструкции А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьева и Ю. Й. Жураева [3], [4]. В обеих конструкциях характеристические классы строятся для произвольного конечно порожденного модуля, который играет роль расслоения над некоторой, вообще говоря, некоммутативной алгеброй, играющей роль алгебры функций на "некоммутативном многообразии". Эти же параметры являются входными данными для характера Конна–Черна [5], [6], который отображает $K$-группу алгебры в ее циклические гомологии. Различные определения характеристических классов связаны естественными отображениями

$$\begin{matrix}\text{характер} \\ \text{Конна–Черна}\end{matrix} \to \begin{matrix}\text{характеристические} \\ \text{классы Каруби}\end{matrix} \to \begin{matrix}\text{характеристические классы} \\ \text{Жураева–Мищенко–Соловьева.}\end{matrix}$$

В настоящее время известно не так много примеров вычисления характеристических классов. Для алгебр гладких функций на многообразии и алгебры иррационального вращения на торе подобные вычисления были проделаны Конном [6]. В [7] Е. В. Корнеева исследовала характеристические классы Жураева–Мищенко–Соловьева для комплексных полупростых алгебр и показала, что все они тривиальны.

В настоящей работе рассматриваются характеристические классы Каруби двух семейств топологических алгебр: аппроксимативно конечных $C^*$-алгебр и алгебр фон Неймана. Основное внимание уделятся вопросу о том, как много информации несут характеристические классы о проективном модуле.

Содержание статьи таково. В § 2 определяются характеристические классы Каруби (п. 2.1), вводится отображение периодичности $S$, связывающее классы Каруби с характером Конна–Черна (п. 2.2), и демонстрируется, как в случае ядерных $C^*$-алгебр отображение $S$ позволяет свести вычисление характеристических классов Каруби к вычислению следа проектора (п. 2.3). В § 3 мы находим ядро характера Конна–Черна и универсальных характеристических классов Каруби для аппроксимативно конечных $C^*$-алгебр. В § 4 то же делается для алгебр фон Неймана.

## § 2. Конструкция характеристических классов Каруби

В качестве основного поля здесь и далее рассматривается поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Символ $\widehat{\otimes}$ обозначает проективное тензорное произведение банаховых пространств.

**2.1. Определение характеристических классов.** В работе [2] была предложена следующая конструкция характеристических классов.

Пусть $A$ есть банахова алгебра с единицей. *Дифференциальным исчислением над алгеброй* $A$ называется дифференциальная градуированная банахова алгебра $\Omega^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n$ такая, что $\Omega^0 = A$.

Важным примером дифференциального исчисления является *универсальное дифференциальное исчисление* $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n_{\mathrm{univ}}(A)$:

$$\Omega^n_{\mathrm{univ}}(A) = A \,\widehat{\otimes}\, \overline{A}^{\widehat{\otimes} n}, \qquad \overline{A} = A/\Bbbk 1.$$

Элементы пространства $\Omega^n_{\mathrm{univ}}(A)$ обычно обозначаются через $a_0 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n$ или же $a_0 da_1 \cdots da_n$. Формулы для умножения и дифференциала $d_u$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&d_u(a_0 da_1 \cdots da_n) = 1\, da_0 da_1 \cdots da_n,\\
&a_0 da_1 \cdots da_n \cdot b_0 db_1 \cdots db_m = a_0 da_1 \cdots d(a_n b_0) db_1 \cdots db_m\\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} a_0 da_1 \cdots da_{k-1} d(a_k a_{k+1}) da_{k+2} \cdots da_n db_0 \cdots db_m\\
&\qquad\qquad + (-1)^n a_0 a_1 da_2 \cdots da_n db_0 \cdots db_m.
\end{aligned}$$

Заметим, что выражение для умножения получается формальным применением тождества Лейбница.

Для произвольного дифференциального исчисления $\Omega^*$ на алгебре $A$ имеется единственный морфизм $\varphi\colon \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^*$ дифференциальных градуированных алгебр такой, что $\varphi_0 = \mathrm{id}_A$ (см. [2]).

Пусть $\Omega^*$ есть некоторое дифференциальное исчисление над $A$ и $E$ – конечно порожденный проективный правый $A$-модуль. Тогда *ковариантным дифференцированием* или *связностью на модуле* $E$ называется $\mathbb{C}$-линейное отображение $\nabla\colon E \to E \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \Omega^1$, обладающее свойством

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da \qquad \forall\, s \in E, \quad a \in A.$$

Каждый проективный модуль имеет хотя бы одну связность (см. [2]).

Ковариантное дифференцирование однозначно продолжается до отображения $\nabla\colon E \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \Omega^* \to E \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \Omega^{*+1}$ с помощью формулы $\nabla(s \otimes \omega) = (\nabla s)\omega + s \otimes d\omega$, где $s \in E$, $\omega \in \Omega^*$. Отображение $R = \nabla^2\colon E \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \Omega^* \to E \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \Omega^{*+2}$ называется *кривизной связности* $\nabla$. Оно оказывается эндоморфизмом конечно порожденного проективного правого $\Omega^*$-модуля $E \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \Omega^*$, т.е. для всех $\varphi \in E \mathbin{\widehat{\otimes}_A} \Omega^*$, $\omega \in \Omega^*$ выполняется соотношение $R(\varphi\omega) = R(\varphi)\omega$. Любая степень $R^n$, $n \in \mathbb{N}$, отображения кривизны также оказывается эндоморфизмом, поэтому можно рассмотреть след $\operatorname{Tr}(R^n)$ (определение следа эндоморфизма проективного модуля можно найти в [2]) и дать следующее определение характеристических классов.

Определение 1. *Характеристическими классами модуля $E$ со значениями в дифференциальном исчислении* $\Omega^*$ называются элементы $c_n(E, \Omega^*) = [\operatorname{Tr} R^n] \in H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*)$, причем $\widetilde{\Omega}^* = \Omega^*/(\operatorname{Im} \operatorname{ad} + \mathbb{C}1)$, где отображение $\operatorname{ad}\colon \Omega^* \mathbin{\widehat{\otimes}} \Omega^* \to \Omega^*$ задается формулой

$$\operatorname{ad}(\omega_1 \otimes \omega_2) = \omega_1\omega_2 - (-1)^{|\omega_1|\,|\omega_2|}\omega_2\omega_1, \qquad \omega_1, \omega_2 \in \Omega^*.$$

Построенные характеристические классы определяют серию гомоморфизмов

$$c_n(\,\cdot\,, \Omega^*)\colon \widetilde{K}_0(A) \to H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*)$$

из приведенной $K$-группы $\widetilde{K}_0(A)$ в когомологии абелинизации дифференциального исчисления $\Omega^*$.

Из свойства универсальности исчисления $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)$ следует, что $c_n(E, \Omega^*) = \psi_* c_n(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A))$, где отображение $\psi_*\colon H^*(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)) \to H^*(\widetilde{\Omega}^*)$ индуцировано каноническим морфизмом дифференциальных исчислений $\psi\colon \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^*$. Мы будем называть классы $c_n(E) = c_n(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A))$ *универсальными характеристическими классами модуля* $E$.

Поскольку нашей целью является исследование, насколько сильными инвариантами являются характеристические классы, ниже мы будем рассматривать только универсальные классы.

**2.2. Циклические гомологии.** Следуя работе [2], опишем связь между характеристическими классами $c_n(\,\cdot\,)$ и циклическими гомологиями.

Введем в рассмотрение оператор Хохшильда $b_{n+1}\colon \Omega^{n+1}_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^n_{\mathrm{univ}}(A)$,

$$b_{n+1}(\omega da) = (-1)^n(\omega a - a\omega) = (-1)^{\omega}[\omega, a], \qquad \omega \in \Omega^n_{\mathrm{univ}}(A), \quad a \in A,$$

и оператор Каруби $\sigma = 1 - (db + bd)$. Легко проверяются соотношения

$$b^2 = 0, \qquad [b, \sigma] = [d, \sigma] = 0.$$

Гомологии $HH_*(A)$ комплекса $(\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A), b)$ называются *хохшильдовыми гомологиями алгебры* $A$. *Приведенными циклическими гомологиями алгебры* $A$ называются гомологии $\overline{HC}_*(A)$ факторкомплекса $\overline{C}^\lambda_* = \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)/(\mathrm{Im}(1-\sigma) + \mathrm{Im}\, d + \mathbb{C}1)$ с дифференциалом $b$.

Хохшильдовы и циклические гомологии связаны точной последовательностью Конна [6]:

$$\overline{HC}_{n+2}(A) \xrightarrow{S} \overline{HC}_n(A) \xrightarrow{B} HH_{n+1}(A) \xrightarrow{I} \overline{HC}_{n+1}(A) \xrightarrow{S} \overline{HC}_{n-1}(A).$$

Теорема [2]. 1) *Имеется естественный изоморфизм*

$$H^*(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)) \simeq \ker B = \mathrm{Im}\, S \subset \overline{HC}_*(A).$$

2) *При подходящей нормировке оператора $S$ имеем $Sc_n(E) = c_{n-1}(E)$ для любого проективного конечно порожденного модуля $E$ и любого натурального $n$.*

Композиция $\overline{\mathrm{ch}}_n \colon \widetilde{K}_0(A) \xrightarrow{c_n} H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)) \hookrightarrow \overline{HC}_{2n}(A)$ называется *приведенным характером Конна–Черна*. Рассматривая унитализацию $\overline{A}$ алгебры $A$, получаем неприведенный *характер Конна–Черна* $\mathrm{ch}_n$

$$\mathrm{ch}_n \colon K_0(A) \simeq \widetilde{K}_0(\overline{A}) \xrightarrow{\overline{\mathrm{ch}}_n} \overline{HC}_{2n}(\overline{A}),$$

который принимает значения в *циклических гомологиях* $HC_*(A) \equiv \overline{HC}_*(\overline{A})$ алгебры $A$.

**2.3. Ядерные и аменабельные $C^*$-алгебры.** Пусть дан банахов бимодуль над алгеброй $A$, т.е. некоторое банахово пространство $E$ вместе с ограниченными билинейными отображениями $m_l \colon A \times E \to E$, $m_r \colon E \times A \to E$, которые задают на $E$ структуру алгебраического $A$-бимодуля. Рассмотрим комплекс

$$E \xleftarrow{b} E \mathbin{\widehat{\otimes}} A \xleftarrow{b} E \mathbin{\widehat{\otimes}} A \mathbin{\widehat{\otimes}} A \xleftarrow{b} \cdots$$

с дифференциалом $b$, определенным равенством

$$\begin{aligned} b(e \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= ea_1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i e \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + (-1)^n a_n e \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

для всех $e \in E, a_1, \dots, a_n \in A$.

Определение 2. Гомологии $HH_*(A, E)$ комплекса $(E \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\widehat{\otimes} n}, b)$ называются *гомологиями Хохшильда алгебры* $A$ с коэффициентами в банаховом бимодуле $E$.

Если $E = A$, то мы получаем хохшильдовы гомологии, определенные выше.

По отношению к хохшильдовым гомологиям с коэффициентами естественно выделяется следующий класс алгебр (см. [8]).

Определение 3. Банахова алгебра $A$ с единицей называется *аменабельной алгеброй*, если для каждого банахова $A$-бимодуля $X$

1) пространство $HH_0(A,X)$ является хаусдорфовым;
2) $HH_n(A,X)=0$ для всех $n\geqslant 1$.

Следующая теорема описывает класс аменабельных $C^*$-алгебр.

Теорема [9], [10]. *Пусть $A$ – $C^*$-алгебра. Тогда $A$ аменабельна $\Longleftrightarrow$ $A$ ядерная.*

Напомним, что $C^*$-алгебра $A$ называется *ядерной*, если для произвольной $C^*$-алгебры $B$ на алгебраическом тензорном произведении $A\otimes B$ (которое является $*$-алгеброй) имеется единственная $C^*$-норма.

Пусть $A$ есть ядерная $C^*$-алгебра. Тогда из точности последовательности Конна и теорем Каруби и Конна–Хагерупа следует, что все отображения

$$A/\overline{[A,A]}=HH_0(A)\xrightarrow{I}HC_0(A)\xleftarrow{S^n}HC_{2n}(A),$$
$$A/(\overline{[A,A]}+\mathbb{C}1)=\overline{HH}_0(A)\xrightarrow{I}\overline{HC}_0(A)\xleftarrow{S^n}\overline{HC}_{2n}(A)\hookleftarrow H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A))$$

суть изоморфизмы полных преднормированных пространств и все пространства хаусдорфовы, т.е. банаховы. Это значит, что все универсальные характеристические классы отождествляются с помощью изоморфизма $S$ с нулевым классом $c_0$, который сопоставляет проектору $p$ его приведенный след в пространстве $A/(\overline{[A,A]}+\mathbb{C}1)$. Точно так же характер Конна–Черна сводится к следу

$$\mathrm{ch}_0=\mathrm{Tr}\colon K_0(A)\to A/\overline{[A,A]}.$$

Пример 1 (характеристические классы коммутативных $C^*$-алгебр). Пусть $A$ – коммутативная $C^*$-алгебра с единицей. Тогда $A=C(X)$ – алгебра непрерывных функций на компактном топологическом пространстве $X$. По теореме Такесаки (см. [11]) алгебра $A$ ядерна. Так как $A$ коммутативна, то $HH_0(A)=A$. Посмотрим, чему равен нулевой характеристический класс конечно порожденного проективного модуля $E$. По теореме Серра–Суона $E=\Gamma(\xi)$ – модуль сечений некоторого локально тривиального векторного расслоения $\xi$. Тогда $\mathrm{ch}_0(E)=\mathrm{Tr}(\xi)$ является локально постоянной функцией, принимающей значения в $\mathbb{N}\cup\{0\}$, которая равна размерности слоя расслоения в конкретной точке. Предположим, что $X$ связно. Тогда $\mathrm{ch}_0(E)=\dim\xi$ – постоянная функция. В этом случае все универсальные характеристические классы, а вместе с ними и все остальные харклассы Каруби равны нулю.

Замечание 1. Если $A=C^\infty(M,\mathbb{C})$ – алгебра Фреше гладких функций на многообразии $M$, то, как показал А. Конн [6], группа гомологий $H^n(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A))$ изоморфна прямой сумме $\bigoplus_{k\geqslant 0}\overline{H}^{n-2k}(M,\mathbb{C})$. При этом $n$-й универсальный характеристический класс проективного модуля $E=\Gamma(\xi)$ совпадает с точностью до скалярного множителя с суммой первых $n$ членов обычного характера Черна расслоения $\xi$.

В следующем параграфе мы рассмотрим другой пример – класс $C^*$-алгебр, называемых аппроксимативно конечными алгебрами.

## § 3. Характеристические классы AF-алгебр

Определение 4. *Аппроксимативно конечной алгеброй* (или AF-*алгеброй*) называется $C^*$-алгебра $A$, которая содержит счетное возрастающее семейство конечномерных $C^*$-подалгебр $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, такое, что $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Все AF-алгебры являются ядерными (см. [11]), так что к ним применимы рассуждения п. 2.3. К аппроксимативно конечным алгебрам относятся, например, конечномерные $C^*$-алгебры, алгебра компактных операторов $K(H)$ в гильбертовом пространстве $H$ и бесконечномерная алгебра Клиффорда $\mathbb{C}\mathbf{l}$, которую можно определить как прямой предел конечномерных алгебр Клиффорда

$$\mathbb{C}\mathbf{l}_1 \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbf{l}_2 \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbf{l}_3 \hookrightarrow \cdots .$$

Заметим, что алгебра $\mathbb{C}\mathbf{l}$ изоморфна алгебре канонических антикоммутационных соотношений (см. [12; пример III.5.4]).

Пусть $K_0(A)^+$ обозначает положительный конус $K$-группы, т.е. множество классов стабильной эквивалентности проекторов.

Определение 5. Пусть дана некоторая унитальная AF-алгебра $A$. Элемент $\alpha \in K_0(A)$ называется *бесконечно малым*, если $1+n\alpha \in K_0^+(A)$ для всех целых $n$. Бесконечно малые элементы образуют подгруппу $K_{\mathrm{inf}}(A)$ в $K_0(A)$.

Элемент $\alpha \in K_0(A)$ называется *приближенно скалярным*, если для любого натурального $n$ существуют рациональное число $r$ и натуральное $l$ такие, что $rl \in \mathbb{Z}$ и $l(1 \pm n(\alpha - r \cdot 1)) \geqslant 0$. Приближенно скалярные элементы также образуют подгруппу, которую мы будем обозначать $K_{\mathrm{as}}(A)$. Образ $K_{\mathrm{as}}(A)$ при проекции на $\widetilde{K}_0(A)$ будет обозначаться $\widetilde{K}_{\mathrm{as}}(A)$.

Пример 2. Пусть $A = \widetilde{K(H)}$ – алгебра компактных операторов с добавленной единицей. Тогда $K_0(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Конус положительных элементов равен $K_0(A)^+ = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x > 0 \text{ или } x = 0,\ y \geqslant 0\}$. Тогда множество бесконечно малых элементов есть $K_{\mathrm{inf}}(A) = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$. Оно порождается классами эквивалентности конечномерных проекторов $p \in K(H) \subset A$. Заметим, что для любого функционала $\tau \in A^*$ типа следа, т.е. обладающего свойством $\tau(ab) = \tau(ba)$ для всех $a, b \in A$, его ограничение на $K(H)$ есть тождественный нуль (см. [11; замечание 6.2.2]). Подгруппа $K_{\mathrm{as}}(A)$ в данном случае совпадает со всей группой $K_0(A)$.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1. *Пусть $A$ есть некоторая унитальная* AF-*алгебра и*

$$\mathrm{ch}_n \colon K_0(A) \to HC_{2n}(A)$$

*есть ее характер Черна. Тогда для каждого $n \geqslant 0$*

1) $\ker \mathrm{ch}_n = K_{\mathrm{inf}}(A)$;
2) *линейное пространство, порожденное* $\mathrm{Im}\, ch_n$, *плотно в* $HC_{2n}(A)$.

*Универсальные классы Каруби $c_n \colon \widetilde{K}_0(A) \to H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A))$ в этом случае обладают аналогичными свойствами*:

1′) $\ker c_n = \widetilde{K}_{\mathrm{as}}(A)$;
2′) *линейное пространство, порожденное* $\mathrm{Im}\, c_n$, *плотно в* $H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A))$.

Доказательство. Так как $A$ ядерная, достаточно рассмотреть только случай $n=0$, т.е. убедиться в том, что отображение

$$\mathrm{Tr}\colon K_0(A)\to A/\overline{[A,A]}$$

обладает нужными свойствами.

Пусть $A=\lim_{n\to\infty}A_n,\ A_n\subset A_{n+1}$, – плотное семейство конечномерных подалгебр. Тогда имеем $K_0(A)=\lim_n K_0(A_n)$. Обозначим $\varphi_n\colon K_0(A_n)\to K_0(A)$ – отображение, индуцированное вложением $A_n\to A$, а $\varphi_{mn}\colon K_0(A_m)\to K_0(A_n)$, $m<n$, – гомоморфизм, индуцированный вложением $A_m\subset A_n$.

Рассмотрим отображения следа $\mathrm{Tr}_n\colon K_0(A_n)\to A_n/[A_n,A_n]$. Легко увидеть, что след $\mathrm{Tr}_n$ инъективен и порожденное его образом линейное пространство совпадает со всем $\widetilde{A}_n=A_n/[A_n,A_n]$.

Введем на множествах $K_0(A)$ и $K_0(A_n)$ следующие нормы ("алгебраические" и "топологические" (со штрихом)):

$$\begin{aligned}
&\|\cdot\|_n, && \|\alpha\|_n=\inf\Bigl\{r\in\mathbb{Q}^+\ \Bigm|\ \exists\, l\in\mathbb{N}\colon\ l\pm\frac{l}{r}\,\alpha\in K_0^+(A_n)\Bigr\},\\
&\|\cdot\|_\infty, && \|\alpha\|_\infty=\inf\Bigl\{r\in\mathbb{Q}^+\ \Bigm|\ \exists\, l\in\mathbb{N}\colon\ l\pm\frac{l}{r}\,\alpha\in K_0^+(A)\Bigr\},\\
&\|\cdot\|'_n, && \|\alpha\|'_n=\|\,\mathrm{Tr}_n(\alpha)\|_{\widetilde{A}_n},\\
&\|\cdot\|'_\infty, && \|\alpha\|'_\infty=\|\,\mathrm{Tr}(\alpha)\|_{\widetilde{A}},
\end{aligned}$$

где $\alpha\in K_0(A)$. Заметим, что $\alpha\in K_{\mathrm{inf}}(A)\iff\|\alpha\|_\infty=0$, а $K_{\mathrm{as}}(A)$ есть пересечение $K_0(A)\subset K_0(A)\otimes\mathbb{Q}$ с замыканием в $K_0(A)\otimes\mathbb{Q}$ множества скаляров $\lambda\cdot 1$, $\lambda\in\mathbb{Q}$, относительно естественного продолжения нормы $\|\cdot\|_\infty$.

Для каждого $\alpha\in K_0(A)$ определим число $\lim_n\|\alpha\|_n$ как предел

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_{mn}(\alpha_m)\|_n,$$

где $\alpha_m\in K_0(A_m),\ \varphi_m(\alpha_m)=\alpha$. Из равенства $\varphi_m=\varphi_n\varphi_{nm}$ следует корректность определения, т.е. независимость от выбора представителя $\alpha_m$. Аналогично определяется $\lim_n\|\alpha\|'_n$.

Покажем, что $\|\alpha\|_\infty=\lim_n\|\alpha\|_n=\lim_n\|\alpha\|'_n=\|\alpha\|'_\infty$. Тогда в силу хаусдорфовости $HC_n(A)$

$$\ker\mathrm{Tr}=\{\alpha\in K_0(A)\mid\|\alpha\|'_\infty=0\}=\{\alpha\in K_0(A)\mid\|\alpha\|_\infty=0\}=K_{\mathrm{inf}}(A),$$

что доказывает первую часть теоремы.

1) Проверим равенство $\|\alpha\|_\infty=\lim_n\|\alpha\|_n$. Пусть $\alpha=\varphi_m(\alpha_m)$, $\alpha_m\in K_0(A_m)$. Если $l+lr\alpha_m\in K_0^+(A_m)$, $r\in\mathbb{Q}$, то $l+lr\alpha=\varphi_m(l+lr\alpha_m)\in K_0^+(A)$, так как $\varphi_m(K_0^+(A_m))\subset K_0^+(A)$. Поэтому $\|\alpha\|_\infty\leqslant\|\alpha_m\|_m$, откуда $\|\alpha\|_\infty\leqslant\lim_n\|\alpha\|_n$.

Обратно, пусть $\alpha\in K_0(A)$ и $l\pm lr\alpha\geqslant 0$, $r\in\mathbb{Q}^+$. Тогда найдутся натуральное число $n$ и элементы $\alpha_n\in K_0(A_n)$, $\beta_n^\pm\in K_0^+(A_n)$ такие, что $\varphi_n(\alpha_n)=\alpha$, $\varphi_n(\beta_n^\pm)=l\pm lr\alpha$. Так как $\varphi_n(l\pm lr\alpha_n)=\varphi_n(\beta_n^\pm)$, то существует $m\geqslant n$ такое, что элементы $\alpha_m=\varphi_{nm}(\alpha_n)\in K_0(A_m)$ и $\beta_m^\pm=\varphi_{nm}(\beta_n^\pm)\in K_0^+(A_m)$

связаны соотношением $l \pm lr\alpha_m = \beta_m^{\pm}$. Тогда $\|\alpha_m\|_m \leqslant r^{-1}$, так что $\lim_m \|\alpha\|_m = \lim_m \|\varphi_{nm}(\alpha_n)\|_m \leqslant r^{-1}$. Отсюда следует обратное неравенство $\|\alpha\|_\infty \geqslant \lim_n \|\alpha\|_n$.

2) Рассмотрим конечномерную алгебру $A_n$. Тогда $A_n = \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}(\mathbb{C})$. Пусть $a = \sum_k a_k$, $a_k \in M_{n_k}(\mathbb{C})$, есть некоторый элемент из $A_n$. Пусть $\pi_n \colon A_n \to \widetilde{A}_n = A_n/[A_n, A_n]$ – естественная проекция.

Лемма 2. *Пусть $A = M_m(\mathbb{C})$, $\|\cdot\|$ – $C^*$-норма на ней и $\pi\colon A \to \widetilde{A} = A/[A,A]$ – проекция. Тогда для любого $a \in A$*

$$\|\pi(a)\|_{\widetilde{A}} = \frac{1}{m}|\operatorname{Tr}(a)|.$$

Доказательство. Рассмотрим функционал $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f(a) = \frac{1}{m}\operatorname{Tr}(a)$. Функционал $f$ положителен и $f(1) = 1$, так что $\|f\| = 1$. Следовательно (см. [13; теорема 7D]), для любого $a \in A$ выполнено $\|\pi(a)\|_{\widetilde{A}} \equiv \|a + \ker f\|_{\widetilde{A}} = |f(a)|$.

Из леммы следует, что $\|\pi_n(a)\|_{\widetilde{A}_n} = \max_k n_k^{-1}|\operatorname{Tr}(a_k)|$. Пусть $\alpha_n \in K_0(A_n)$. Тогда $\alpha_n = \sum \mu_k p_k$, где $\mu_k \in \mathbb{Z}$ и $p_k = [e_{11}^{(k)}]$ – класс стабильной эквивалентности матричной единицы $e_{11}^{(k)} \in M_{n_k}$, поскольку $K_0(A_n) = \mathbb{Z}p_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}p_N$ и $K_0^+(A_n) = \mathbb{N}p_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}p_N$. В результате применения следа получаем элемент $\operatorname{Tr}_n(\alpha_n) = \sum_k \mu_k \pi_n(e_{11}^{(k)})$, откуда

$$\begin{aligned}\|\alpha_n\|_n' &= \Bigl\|\sum_k \mu_k \operatorname{Tr}_n(p_k)\Bigr\|_{\widetilde{A}_n} = \Bigl\|\sum_k \mu_k \pi_n(e_{11}^{(k)})\Bigr\|_{\widetilde{A}_n} = \max_{k=1,\dots,N} \frac{1}{n_k}\bigl|\operatorname{Tr}(\mu_k e_{11}^{(k)})\bigr| \\ &= \max_{k=1,\dots,N}\left|\frac{\mu_k}{n_k}\right|.\end{aligned}$$

С другой стороны, имеем цепь эквивалентных условий:

$$\begin{aligned}l(1 \pm r\alpha_n) = \sum_k l(n_k \pm r\mu_k)p_k \geqslant 0 \iff n_k \pm r\mu_k \geqslant 0 \ \text{ и } \ lr\mu_k \in \mathbb{Z} \\ \iff |r^{-1}| \geqslant \max_k \frac{|\mu_k|}{n_k} \ \text{ и } \ lr\mu_k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Условие целочисленности можно снять подходящим выбором $l \in \mathbb{N}$. Поэтому получаем равенство

$$\|\alpha_n\|_n = \max_{k=1,\dots,N}\left|\frac{\mu_k}{n_k}\right| = \|\alpha_n\|_n'.$$

Переход к пределу дает второе доказываемое тождество $\lim_n \|\alpha\|_n = \lim_n \|\alpha\|_n'$.

3) Пусть $x \in A_n$ для некоторого $n$. Так как $\bigcup_n A_n$ плотно в $A$, то $\bigcup_n [A_n, A_n]$ плотно в $[A,A]$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|x\|_{\widetilde{A}} &= \inf_{y \in [A,A]} \|x+y\|_A = \inf_{y \in [A_m, A_m],\ m \geqslant n} \|x+y\|_A \\ &= \inf_{y \in [A_m, A_m],\ m \geqslant n} \|x+y\|_{A_m} = \inf_{m \geqslant n} \|x\|_{\widetilde{A}_m} = \lim_{m\to\infty} \|x\|_{\widetilde{A}_m},\end{aligned}$$

где третье равенство следует из изометричности вложения $A_m \hookrightarrow A$, а пятое вытекает из изометричности гомоморфизма $A_n \hookrightarrow A_m$ и вложения $[A_n, A_n] \subset [A_m, A_m]$, в силу чего последовательность $\|x\|_{\widetilde{A}_m}$ монотонно убывает. Таким образом, оказывается справедливым последнее равенство для норм $\|\cdot\|'_\infty = \lim_n \|\cdot\|'_n$.

Покажем теперь, что $\ker c_0 = \widetilde{K}_{\mathrm{as}}(A)$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] \arrow[d, "p_K"'] & A/[A,A] \arrow[d, "p_A"] \\ \widetilde{K}_0(A) \arrow[r, "c_0"] & A/([A,A]+\mathbb{C}1) \end{tikzcd}$$

следует, что $p_K^{-1}(\ker c_0) = \ker(c_0 p_K) = \ker(p_A \operatorname{Tr}) = \operatorname{Tr}^{-1}(\mathbb{C}1)$. Отображение Tr естественно продолжается до отображения $\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}$ из $K_0(A) \otimes \mathbb{Q}$ в $\widetilde{A}$. Равенство $\|\cdot\| = \|\cdot\|'$ также естественно распространяется на $K_0(A) \otimes \mathbb{Q}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \alpha \in \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mathbb{C}1) &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}\colon\ \|\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(\alpha) - \lambda 1\|_{\widetilde{A}} = 0 \\ &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, r \in \mathbb{Q}\colon\ \|\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(\alpha) - r1\|_{\widetilde{A}} = \|\operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}(\alpha - r1)\|_{\widetilde{A}} \\ &\qquad = \|\alpha - r1\|' = \|\alpha - r1\| < \frac{1}{n} \\ &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, r \in \mathbb{Q},\quad \exists\, l \in \mathbb{N}\colon \\ &\qquad lr \in \mathbb{N},\quad l\alpha \in K_0(A)\ \text{ и }\ l \pm ln(\alpha - r1) \in K_0^+(A). \end{aligned}$$

Поэтому $\operatorname{Tr}^{-1}(\mathbb{C}1) = K_0(A) \cap \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mathbb{C}1) = K_{\mathrm{as}}(A)$ и $\ker c_0 = p_K(K_{\mathrm{as}}(A)) = \widetilde{K}_{\mathrm{as}}(A)$.

Для завершения доказательства остается показать плотность пространства, порожденного образом отображения Tr. Но это следует из плотности в $\widetilde{A}$ объединения образов канонических отображений $\widetilde{A}_n \to \widetilde{A}$ и того факта, что для конечномерной алгебры $A_n = \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}(\mathbb{C})$ образ $\operatorname{Tr}_n$ есть решетка максимального ранга в $\widetilde{A}_n = \mathbb{C}^N$ и, таким образом, содержит некоторый базис пространства $\widetilde{A}_n$.

Пример 3. Пусть $A$ – конечномерная $C^*$-алгебра. Тогда $A$ имеет вид $A = \bigoplus_{k=1}^N M_{n_k}(\mathbb{C})$. Ее $K$-теория равна $K_0(A) = \mathbb{Z}^N$ и $K_0(A)^+ = \mathbb{N}^N$. Из теоремы следует, что для любого $n$ характер Конна $\mathrm{ch}_n$ мономорфоно отображает $K_0(A)$ в $HC_{2n}(A) = \mathbb{C}^N$. Универсальные классы Каруби в данном случае имеют ядро $\widetilde{K}_{\mathrm{as}}(A) = \operatorname{Tor}(\widetilde{K}_0(A)) \simeq \mathbb{Z}_l$, где $l$ – наибольший общий делитель чисел $n_1, \dots, n_N$.

Пример 4. Пусть $A = \mathbb{C}\mathbf{l}$ – бесконечномерная алгебра Клиффорда. Тогда в силу непрерывности $K$-теории

$$K_0(\mathbb{C}\mathbf{l}) = \lim_{n\to\infty} K_0(\mathbb{C}\mathbf{l}_n) = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right], \qquad K_0(\mathbb{C}\mathbf{l})^+ = \lim_{n\to\infty} K_0(\mathbb{C}\mathbf{l}_n)^+ = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q}_+.$$

Отсюда получаем $K_{\mathrm{inf}}(A) = 0$, $K_{\mathrm{as}}(A) = K_0(A)$, так что все характеристические классы Каруби тривиальны.

Пример 5. Пусть $G$ – компактная группа. Тогда ее $C^*$-групповая алгебра $C^*(G)$ является AF-алгеброй, поскольку содержит плотное семейство конечномерных подалгебр, составленных из матричных элементов неприводимых представлений. В этом случае $K_0(C^*(G))$ совпадает с кольцом представлений $R(G)$. Рассмотрим унитализацию $A = \widetilde{C^*(G)}$. Тогда $A$ – унитальная AF-алгебра и $K_0(A) = K_0(C^*(G)) \oplus \mathbb{Z}$, так что $\overline{K}_0(A) = K_0(C^*(G))$. Нетрудно проверить, что $K_{\mathrm{as}}(A) = 0 \oplus \mathbb{Z}$, откуда $\widetilde{K}_{\mathrm{as}}(A) = 0$. Следовательно, приведенный характер Черна инъективен, т.е. различает все проективные модули. Этот результат есть переформулировка известного утверждения о том, что представление компактной группы однозначно определяется своим характером.

Пример 6. Возьмем произвольное иррациональное число $\theta \in (0, 1)$. Рассмотрим абелеву группу

$$G_\theta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta = \{m + n\theta \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

с порядком, индуцируемым вложением $\rho\colon G_\theta \hookrightarrow \mathbb{R}$. Конструкцию AF-алгебры $A_\theta$ с упорядоченной $K_0$-группой, изоморфной $G_\theta$, можно найти в [14]. Из теоремы 1 следует, что $K_{\mathrm{as}}(A_\theta) = K_0(A_\theta)$, и все характеристические классы Каруби равны нулю. Вторая часть теоремы показывает, что на $A_\theta$ имеется единственный (с точностью до нормировки) след $\tau$.

## § 4. Характеристические классы алгебр фон Неймана

В этом параграфе мы используем теорему 1, чтобы вычислить ядро характера Конна–Черна и универсальных характеристических классов Каруби для алгебр фон Неймана. Заметим, что алгебры фон Неймана, вообще говоря, не являются ядерными $C^*$-алгебрами.

Пусть $A$ – алгебра фон Неймана. Тогда алгебра распадается в прямое произведение $A = A_i \times A_f$, где $A_f$ – конечная алгебра фон Неймана (типа $\mathrm{I}_n$, $\mathrm{II}_1$), а $A_i$ – собственно бесконечная (типа $\mathrm{I}_\infty$, $\mathrm{II}_\infty$, III) (см. [15]). Тогда $K_0(A) = K_0(A_i) \oplus K_0(A_f)$ и $HC_n(A) = HC_n(A_i) \oplus HC_n(A_f)$. Поэтому можно рассматривать конечный и собственно бесконечный случаи по отдельности. Посмотрим сначала на $K$-теорию алгебр фон Неймана.

Теорема 3 [16]. *Пусть $A$ – собственно бесконечная алгебра фон Неймана. Тогда $K_0(A) = 0$.*

Пусть $A$ – конечная алгебра фон Неймана и $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}(A)$ – ее центр. Тогда существует единственное нормальное отображение $\tau\colon A \to \mathscr{Z}$, $\|\tau\| = 1$, обладающее свойствами

1) $\tau(ab) = \tau(ba)$ для любых $a, b \in A$;
2) $\tau(za) = z\tau(a)$ для всех $a \in A$, $z \in \mathscr{Z}$.

При этом для любого ненулевого положительного элемента $a \in A^+$ $\tau(a) \neq 0$ (см. [15]). Отображение $\tau$ называется *каноническим $\mathscr{Z}$-следом конечной алгебры $A$*.

Пусть $A = A_0 \times \prod_{n=1}^\infty A_n$, где $A_0$ имеет тип $\mathrm{II}_1$, $A_n$ – тип $\mathrm{I}_n$, – ее разложение по типам и $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_0 \times \prod_{n=1}^\infty \mathscr{Z}_n$ – соответствующее разложение ее центра. Пусть

$\tau\colon A\to\mathscr{Z}$ – ее канонический $\mathscr{Z}$-след. Коммутативная алгебра фон Неймана $\mathscr{Z}_n$ отождествляется с $L^\infty_{\mathbb{C}}(Z_n,\nu_n)$ для некоторого пространства $Z_n$ с мерой $\mu_n$, а $\mathscr{Z}$ – с $L^\infty_{\mathbb{C}}\bigl(\coprod_{n=0}^\infty Z_n,\coprod_{n=0}^\infty \nu_n\bigr)$.

Теорема 4 [16]. *Канонический след $\tau$ индуцирует изоморфизм $\tau_*$ группы $K_0(A)$ на подмножество*

$$M=\biggl\{f\in L^\infty_{\mathbb{C}}\biggl(\coprod_{n=0}^\infty Z_n,\coprod_{n=0}^\infty \nu_n\biggr)\biggm| f(x)\in F_n\quad\text{для всех}\ \ x\in Z_n,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\biggr\}$$

*в $\mathscr{Z}$, где $F_0=\mathbb{R}$, $F_n=\{m/n\mid m\in\mathbb{Z}\}$, $n\in\mathbb{N}$.*

Замечание 2. Если $p\in M_n(A)$ есть некоторый проектор и $[p]$ – его класс в $K_0(A)$, то $\tau_*([p])=\tau(\operatorname{Tr}(p))$, где $\operatorname{Tr}\colon M_n(A)\to A$ есть обычный матричный след.

Введем следующее обозначение.

Определение 6. Пусть $A$ – конечная алгебра фон Неймана. Назовем элемент $\alpha\in K_0(A)$ *скалярным*, если $\tau_*(\alpha)=\lambda\cdot 1$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$. Множество всех скалярных элементов обозначим через $K_{\mathrm{sc}}(A)$.

Теорема 5. *Пусть $A$ – алгебра фон Неймана. Тогда*

1) *характер Черна* $\operatorname{ch}_n\colon K_0(A)\to HC_{2n}(A)$ *инъективен*;
2) $\ker\bigl\{c_n\colon K_0(A)\to H^{2n}(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A))\bigr\}=K_{\mathrm{sc}}(A_f)$.

Доказательство. Можно ограничиться рассмотрением случая, когда $A$ конечна.

Пусть $\alpha\in K_0(A)$, $\alpha\ne 0$. По теореме 4 $\tau_*(\alpha)\ne 0$ в $\mathscr{Z}=\mathscr{Z}(A)$. По теореме Хана–Банаха существует непрерывный функционал $\varphi\in\mathscr{Z}^*$ такой, что $\varphi(\tau_*(\alpha))\ne 0$. Отображение $\varphi\circ\tau$ является следом на $A$, поэтому представляется в виде композиции $\varphi\circ\tau=\widetilde{\varphi}\circ\pi$, где $\pi\colon A\to HC_0(A)=A/[A,A]$ – естественная проекция. Тогда из определения отображений $\operatorname{ch}_0$ и $\tau_*$ вытекает равенство $\varphi\circ\tau_*=\widetilde{\varphi}\circ\operatorname{ch}_0$. Следовательно, $\widetilde{\varphi}(\operatorname{ch}_0(\alpha))\ne 0$, поэтому $\operatorname{ch}_0(\alpha)\ne 0$. Таким образом, $\operatorname{ch}_0$, а вместе с ним и все $\operatorname{ch}_n$, $n\in\mathbb{N}$, суть инъективные отображения. Отсюда также следует, что $\ker c_n\subset K_{\mathrm{sc}}(A)$. Покажем обратное включение.

Пусть $\alpha\in K_{\mathrm{sc}}(A)$. Если $A$ не является непрерывной, т.е. ее разложение содержит блоки типа $\mathrm{I}_n$, то, как следует из теоремы 4, $\tau(\alpha)=\lambda 1$, где $\lambda\in\mathbb{Q}$. Отсюда получаем

$$c_n(\alpha)=\lambda c_n(1)=0.$$

Предположим, что $A$ непрерывна. Тогда имеется вложение $j\colon\mathscr{R}\to A$ гиперфинитного фактора $\mathscr{R}$ типа $\mathrm{II}_1$ в $A$, которое, как нетрудно заметить, отображает $K_0(\mathscr{R})$ на $K_{\mathrm{sc}}(A)$ (см. [15]). В силу естественности характеристических классов это замечание сводит доказательство к случаю $A=\mathscr{R}$. Пусть $\alpha\in K_0(\mathscr{R})$. Тогда $\tau(\alpha)=\lambda\in\mathbb{R}$. Если $\lambda\in\mathbb{Q}$, то $\alpha\in\operatorname{Tor}\widetilde{K}_0(\mathscr{R})$, так что $c_n(\alpha)=0$. Пусть $\lambda\notin\mathbb{Q}$. Можно считать, что $\lambda\in[0,1]$. Рассмотрим AF-алгебру $A_\lambda$ из примера 6. Отметим, что $A_\lambda$ проста (см. [12; следствие IV.5.2]) и обладает единственным состоянием типа следа. Отсюда следует, что ГНС-представление, ассоциированное с этим состоянием, инъективно и является факторным типа $\mathrm{II}_1$ (доказательство, данное в [11; теорема 6.2.5], дословно переносится на этот случай). Соответствующий фактор будет гиперфинитным, так как $A_\lambda$ аппроксимативно конечна. Таким образом, имеется вложение $\varphi\colon A_\lambda \to \mathscr{R}$, которое индуцирует отображение $\varphi_*\colon K_0(A_\lambda) \to K_0(\mathscr{R})$, совпадающее с гомоморфизмом $\rho$ в примере 6. Поэтому $\alpha = \varphi_*(\beta)$ для некоторого $\beta \in K_0(A_\lambda)$. Следовательно,

$$c_n(\alpha) = \varphi_*(c_n(\beta)) = \varphi_*(0) = 0.$$

**Список литературы**

1. *Connes A.* $C^*$-algebres et geometrie differentielle // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1980. V. 290. P. 599–604.
2. *Karoubi M.* Homologies cycliques et $K$-théorie. Paris: Soc. Math. France, 1987. (Astérisque. V. 149.)
3. *Жураев Ю. Й.* Характеристические классы модулей над некоммутативными алгебрами // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1987.
4. *Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П.* О характеристических классах в алгебраической $K$-теории // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1986. №1. С. 75–76.
5. *Connes A.* Non-commutative differential geometry // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1985. V. 62. P. 41–144.
6. *Connes A.* Noncommutative geometry. San Diego, CA: Academic Press, 1994.
7. *Корнеева Е. В.* Характеристические классы в некоммутативной дифференциальной геометрии // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2003.
8. *Хелемский А. Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986.
9. *Connes A.* On the cohomology of operator algebras // J. Funct. Anal. 1978. V. 28. №2. P. 248–253.
10. *Haagerup U.* All nuclear $C^*$-algebras are amenable // Invent. Math. 1983. V. 74. №2. P. 305–319.
11. *Мёрфи Дж.* $C^*$-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
12. *Davidson K. R.* $C^*$-algebras by example. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.
13. *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармоничекий анализ. М.: ИЛ, 1956.
14. *Effros E. G., Shen S. L.* Approximately finite $C^*$-algebras and continued fractions // Indiana Univ. Math. J. 1980. V. 29. №2. P. 191–204.
15. *Dixmier J.* Von Neumann algebras. Amsterdam: North-Holland, 1981.
16. *Blackadar A.* $K$-theory for operator algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
*E-mail*: nikonov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
22.10.2003 и 18.03.2004