Ю. Б. Орочко, Индексы дефекта одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка, вырождающегося внутри интервала,
*Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 5, 53–82

УДК 517.98

**Ю. Б. Орочко**

# Индексы дефекта одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка, вырождающегося внутри интервала

Пусть $a(x) \in C^\infty[-h,h]$, $h > 0$, – действительная функция такая, что $a(x) \neq 0$ для любого $x \in [-h,h]$. Рассмотрим дифференциальное выражение $s_p[f] = (-1)^n(x^p a(x) f^{(n)})^{(n)}$ произвольного порядка $2n \geqslant 2$, зависящее от натурального числа $p$ и вырождающееся при $x = 0$. Обозначим через $H_p$ действительный симметрический оператор в $L^2(-h,h)$, отвечающий $s_p[f]$, и через $\operatorname{Def} H_p$ – его индекс дефекта в верхней (или нижней) комплексной полуплоскости. Статья содержит доказательство формулы $\operatorname{Def} H_p = 2n + p$, $1 \leqslant p \leqslant n$. Этот результат дополняет формулы $\operatorname{Def} H_p = 2n$ при $p \geqslant 2n$ и $\operatorname{Def} H_p = 4n - p$ при $p = 2n-2, 2n-1$, полученные автором ранее.

Библиография: 5 названий.

## § 1. Введение

Зафиксируем отрезок $[-h,h]$ и действительную функцию

$$a(x) \in C^\infty[-h,h], \qquad a(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in [-h,h]. \tag{1.1}$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное выражение

$$s_p[f](x) = (-1)^n (x^p a(x) f^{(n)})^{(n)}(x)$$

произвольного порядка $2n \geqslant 2$, имеющее во внутренней точке $x = 0$ отрезка $[-h,h]$ вырождение натуральной степени $p$. Символом $H_p$ будем обозначать симметрический минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $s_p[f](x)$ в гильбертовом пространстве $L^2(-h,h)$; мы понимаем его как замыкание оператора $f(x) \to s_p[f](x)$ с областью определения $C_0^\infty(-h,h)$. Так как оператор $H_p$ действителен, то его индексы дефекта в верхней и нижней открытых комплексных полуплоскостях совпадают. Их значение мы обозначаем символом $\operatorname{Def} H_p$. Настоящая работа посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. *При $p = 1, 2, \dots, n$ справедлива формула* $\operatorname{Def} H_p = 2n + p$.

---

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00997).

При $n = 1$ этот результат был получен в [1; лемма 1]. Поэтому мы будем доказывать теорему 1, предполагая, что $n \geqslant 2$.

Вместе с теоремой 1 будет почти полностью доказана общая формула

$$\operatorname{Def} H_p = \begin{cases} 2n + p, & 1 \leqslant p \leqslant n, \\ 4n - p, & n + 1 \leqslant p \leqslant 2n - 1, \\ 2n, & p \geqslant 2n. \end{cases} \tag{1.2}$$

В части, относящейся к значениям $p \geqslant 2n$, она следует из теоремы 1 статьи [2]. Мы также проверили, что эта формула верна для $p = 2n - 1$ и $p = 2n - 2$, однако доказательство последнего результата не опубликовано. В настоящее время формальное доказательство части формулы (1.2), относящейся к случаю, когда $n \geqslant 4$, $n + 1 \leqslant p \leqslant 2n - 3$ (при $1 \leqslant n \leqslant 3$ множество таких $p$ является пустым), не получено. Препятствием является то, что получение этого результата в рамках известных нам методик требует проведения большого количества громоздких вычислений; их объем неограниченно возрастает, когда $n \to +\infty$. Вместе с тем, автор убежден в том, что формула (1.2) верна в полной общности.

Очевидным следствием теоремы 1 является неравенство $\operatorname{Def} H_p \geqslant 2n + 1$ при $1 \leqslant p \leqslant n$. Для значений $p$, удовлетворяющих неравенству $n \leqslant p \leqslant 2n-1$, оно было получено раньше; теорема 2 статьи [2] содержит более общий результат. В статье [3] указанное неравенство применялось для получения условий бесконечности индексов дефекта симметрического минимального оператора $T$ в $L^2(\mathbb{R})$, порожденного дифференциальным выражением $\sigma[f](x) = (-1)^n(c(x)f^{(n)})^{(n)}(x)$ с действительным коэффициентом $c(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, множество нулей которого бесконечно.

С помощью рассуждений, опирающихся на неравенство $\operatorname{Def} H_p \geqslant 2n + 1$ и повторяющих доказательство теоремы 1 статьи [3], легко выводится

Теорема 2. *Пусть множество нулей коэффициента $c(x)$ дифференциального выражения $\sigma[f](x)$ содержит бесконечную последовательность нулей, кратность $p$ каждого из которых удовлетворяет неравенству $1 \leqslant p \leqslant 2n-1$. Тогда индексы дефекта соответствующего оператора $T$ бесконечны.*

Теорема 2 дополняет теорему 1 статьи [3], из которой справедливость сформулированного утверждения следует только в случае, когда $p \geqslant n$.

Зафиксируем отрезок $[a, b]$ и обозначим символом $T_{a,b}$ симметрический минимальный оператор в $L^2(a, b)$, порожденный дифференциальным выражением $\sigma[f](x)$. Если формула (1.2) справедлива в полной общности, то она имеет интересное следствие.

Теорема 3. *Пусть $c(a) \neq 0$, $c(b) \neq 0$. Предположим, что кратность каждого нуля коэффициента $c(x)$ конечна и множество его нулей, содержащихся в интервале $(a, b)$, непусто. Для любого натурального числа $p$ обозначим через $m_p$ число нулей коэффициента $c(x)$, принадлежащих интервалу $(a, b)$, кратности которых равны $p$. Тогда справедлива формула*

$$\operatorname{Def} T_{a,b} = \sum_{p=1}^{n} p m_p + \sum_{p=n+1}^{2n-1} (2n - p) m_p + 2n.$$

Доказательство теоремы 3 производится методом, применявшимся в доказательстве теоремы 1 статьи [3], с заменой в этом доказательстве неравенства $\operatorname{Def} H_p \geqslant 2n+1$ точной формулой (1.2). Автор убежден в том, что теорема 3 справедлива в полной общности.

## § 2. Обозначения. Формулировки вспомогательных предложений

Начнем доказательство теоремы 1 с того, что свяжем с рассматриваемым дифференциальным выражением $s_p[f](x)$ два вспомогательных дифференциальных выражения:

$$\begin{aligned} s_{p,-}[f](x) &= (-1)^n (x^p a(x) f^{(n)})^{(n)}(x), \qquad x \in (-h,0); \\ s_{p,+}[f](x) &= (-1)^n (x^p a(x) f^{(n)})^{(n)}(x), \qquad x \in (0,h). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Зафиксируем комплексное число $z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, и рассмотрим дифференциальные уравнения

$$s_{p,-}[y](x) = zy(x), \qquad x \in (-h,0); \tag{2.2}$$
$$s_{p,+}[y](x) = zy(x), \qquad x \in (0,h). \tag{2.3}$$

В силу свойства (1.1) функции $a(x)$ решения первого из этих уравнений принадлежат классу $C^\infty(-h,0)$, а решения второго – классу $C^\infty(0,h)$.

Пусть $[\alpha,\beta]$ –отрезок, вложенный в один из интервалов $(-h,0)$, $(0,h)$. Обозначим символом $Q[f,g](x)$ билинейную форму от функций $f(x)$, $g(x) \in C^\infty[\alpha,\beta]$, значения которой при $x=\alpha,\beta$ задают вид внеинтегральных членов в тождестве Лагранжа

$$\int_\alpha^\beta s_p[f](x)\overline{g(x)}\,dx = \int_\alpha^\beta f(x) s_p[\overline{g}](x)\,dx + Q[f,g](\beta) - Q[f,g](\alpha).$$

Нам также понадобятся квазипроизводные

$$f^{[l]}(x) = \begin{cases} f^{(l)}(x), & 0 \leqslant l \leqslant n-1, \\ (-1)^{l-n}(x^p a(x) f^{(n)})^{(l-n)}(x), & n \leqslant l \leqslant 2n, \end{cases} \tag{2.4}$$

от функции $f(x) \in C^\infty(-h,h)$, порожденные дифференциальным выражением $s_p[f](x)$. Хорошо известно (см., например, [4; гл. 5, § 15, формула (6)]), что наиболее просто билинейная форма $Q[f,g](x)$ выражается через квазипроизводные от $f(x)$ и $g(x)$; такое представление имеет вид

$$\begin{aligned} Q[f,g](x) &= -Q_1[f,g](x) + Q_2[f,g](x); \\ Q_1[f,g](x) &= \sum_{j=1}^{n} f^{[2n-j]}(x)\overline{g}^{[j-1]}(x), \\ Q_2[f,g](x) &= \sum_{j=n+1}^{2n} f^{[2n-j]}(x)\overline{g}^{[j-1]}(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Основную роль в доказательстве теоремы 1 играют следующие вспомогательные предложения, в которых используются обозначения

$$Q[f,g](-0)=\lim_{x\to -0}Q[f,g](x),\qquad Q[f,g](+0)=\lim_{x\to +0}Q[f,g](x).$$

Предложение 1. *При $p=1,2,\dots,n$ у дифференциального уравнения* (2.3) *есть фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant 2n$, каждое из которых принадлежит гильбертовому пространству $L^2(0,h)$ и таких, что односторонние пределы $Q[f,y_k](+0)$, $1\leqslant k\leqslant 2n$, существуют для любой функции $f(x)\in C_0^\infty(-h,h)$. Их значения вычисляются по формуле*

$$Q[f,y_k](+0)=\begin{cases}\alpha_k f^{[2n-k]}(0), & 1\leqslant k\leqslant n-p,\\ 0, & n-p+1\leqslant k\leqslant n,\\ \alpha_k f^{[2n-k-p]}(0), & n+1\leqslant k\leqslant 2n-p,\\ \alpha_k f^{[3n-k-p]}(0), & 2n-p+1\leqslant k\leqslant 2n,\end{cases}\tag{2.6}$$

*в которой через $\alpha_k$ обозначены действительные числа, зависящие только от $k$, $p$ и $n$ и такие, что $\alpha_k\neq 0$ при $1\leqslant k\leqslant n-p$ и при $n+1\leqslant k\leqslant 2n$.*

Предложение 2. *При $p=1,2,\dots,n$ дифференциальное уравнение* (2.2) *имеет фундаментальное семейство решений $\eta_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant 2n$, принадлежащих $L^2(-h,0)$, для которых односторонние пределы $Q[f,\eta_k](-0)$, $1\leqslant k\leqslant 2n$, существуют при любой функции $f(x)\in C_0^\infty(-h,h)$. Их значения вычисляются по формуле*

$$Q[f,y_k](-0)=\begin{cases}\beta_k f^{[2n-k]}(0), & 1\leqslant k\leqslant n-p,\\ 0, & n-p+1\leqslant k\leqslant n,\\ \beta_k f^{[2n-k-p]}(0), & n+1\leqslant k\leqslant 2n-p,\\ \beta_k f^{[3n-k-p]}(0), & 2n-p+1\leqslant k\leqslant 2n,\end{cases}$$

*в которой через $\beta_k$ обозначены действительные числа, зависящие только от $k$, $p$ и $n$, обладающие свойством $\beta_k\neq 0$ при $1\leqslant k\leqslant n-p$ и при $n+1\leqslant k\leqslant 2n$.*

Обозначим через $\widetilde{s}_{p,+}[f](x)$ второе из дифференциальных выражений (2.1) с коэффициентом $\widetilde{a}(x)=(-1)^p a(-x)$ вместо $a(x)$ и через $\widetilde{Q}[f,g](x)$ – билинейную форму $Q[f,g](x)$, отвечающую дифференциальному выражению $\widetilde{s}_{p,+}[f](x)$. Легко проверяется справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *При замене аргумента $x$ на $-x$ дифференциальное уравнение* (2.2) *преобразуется в дифференциальное уравнение $\widetilde{s}_{p,+}[y](x)=zy(x)$, $x\in(0,h)$, а билинейная форма $Q[f,g](x)$, рассматриваемая при $x\in(-h,0)$ с функциями $f(x),g(x)\in C^\infty(-h,0)$, переходит в выражение $-\widetilde{Q}[\widetilde{f},\widetilde{g}](x)$, $x\in(0,h)$, с функциями $\widetilde{f}(x)=f(-x)$, $\widetilde{g}(x)=g(-x)\in C^\infty(0,h)$.*

Если предложение 1 доказано, то оно справедливо не только для дифференциального уравнения (2.3), но также для дифференциального уравнения $\widetilde{s}_{p,+}[y](x)=zy(x)$, $x\in(0,h)$, и соответствующей ему билинейной формы $\widetilde{Q}[f,g](x)$. Следовательно, при $p=1,2,\dots,n$ у этого уравнения существует фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, обладающих свойствами, указанными в предложении 1, причем в рассматриваемом случае следует заменить выражение $Q[f,y_k](+0)$ выражением $\widetilde{Q}[f,y_k](+0)$. В силу леммы 1 функции $\eta_k(x) = y_k(-x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, определенные на интервале $(-h,0)$, образуют фундаментальное семейство решений дифференциального уравнения (2.2), обладающее всеми свойствами, перечисленными в предложении 2. Это означает, что предложение 2 является следствием предложения 1. Поэтому достаточно доказать только предложение 1.

Обоснование справедливости предложения 1 является наиболее трудоемкой частью доказательства теоремы 1. После того как оно доказано (и вместе с ним предложение 2), доказательство теоремы 1 сводится к рассуждениям, изложению которых посвящен следующий параграф. Доказательство предложения 1 мы приводим в §§ 4–8.

## § 3. Теорема 1 как следствие предложений 1, 2

Зафиксируем комплексное число $z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Обозначим символом $\mathscr{N}_p$ дефектное подпространство симметрического оператора $H_p$, отвечающее числу $\overline{z}$. В доказательстве теоремы 1 существенно используются определенные свойства этого подпространства. Для описания их нам понадобятся симметрические минимальные операторы $H_{p,-}$ и $H_{p,+}$, порожденные дифференциальными выражениями $s_{p,-}[f](x)$ и $s_{p,+}[f](x)$ в $L^2(-h,0)$ и соответственно в $L^2(0,h)$. Через $\mathscr{N}_{p,-}$ и $\mathscr{N}_{p,+}$ обозначим дефектные подпространства этих вспомогательных операторов в соответствующих гильбертовых пространствах, отвечающие указанному числу $\overline{z}$.

Хорошо известно, что дефектное подпространство $\mathscr{N}_{p,+}$ оператора $H_{p,+}$ – это линейное многообразие, состоящее из, вообще говоря, обобщенных решений $y(x)$ дифференциального уравнения (2.3), принадлежащих $L^2(0,h)$. По условию (1.1) интервал $(0,h)$ не содержит точек вырождения этого уравнения. Поэтому его решения, образующие указанное многообразие, являются классическими. Аналогично, дефектное подпространство $\mathscr{N}_{p,-}$ оператора $H_{p,-}$ есть множество всех классических решений дифференциального уравнения (2.2), принадлежащих $L^2(-h,0)$. Полученное в предложении 1 фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, дифференциального уравнения (2.3) является базисом в подпространстве $\mathscr{N}_{p,+}$; точно так же, фундаментальное семейство решений $\eta_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, дифференциального уравнения (2.2), полученное в предложении 2, является базисом в подпространстве $\mathscr{N}_{p,-}$.

Интересующие нас свойства дефектного подпространства $\mathscr{N}_p$ оператора $H_p$ мы приведем в формулируемой ниже лемме. В ней (а также в дальнейшем) используются обозначения $y_-(x)$ и $y_+(x)$ для ограничений на интервалы $(-h,0)$ и $(0,h)$ функции $y(x)$, заданной на интервале $(-h,h)$.

Лемма 2. *При любом натуральном $p$ дефектное подпространство $\mathscr{N}_p$ оператора $H_p$ совпадает с линейным многообразием, состоящим из функций $y(x) \in L^2(-h,h)$, обладающих тремя свойствами*:

1) $y_-(x) \in \mathscr{N}_{p,-}$, $y_+(x) \in \mathscr{N}_{p,+}$;

2) *для любой функции* $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$ *существуют односторонние пределы* $Q[f,y](-0)$ *и* $Q[f,y](+0)$;
3) *в точке* $x = 0$ *для любой* $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$ *выполняется условие сопряжения* $Q[f,y](-0) = Q[f,y](+0)$.

Доказательство леммы 2 имеет элементарный характер. Ранее она формулировалась и использовалась в статьях [2; лемма 2] и [3; лемма 4].

Опираясь на предложения 1 и 2, уточним лемму 2 в ее части, относящейся к $p = 1, 2, \dots, n$. Так как фундаментальные семейства решений дифференциальных уравнений (2.2), (2.3), полученные в них, образуют базисы в дефектных подпространствах $\mathscr{N}_{p,-}$ и $\mathscr{N}_{p,+}$, то множество функций из $L^2(-h,h)$, обладающих свойством 1 леммы 2, есть совокупность функций $y(x)$, заданных на интервале $(-h,h)$, для которых справедливы представления

$$\begin{aligned} y_-(x) &= \sum_{k=1}^{2n} d_k \eta_k(x), \qquad x \in (-h, 0), \\ y_+(x) &= \sum_{k=1}^{2n} c_k y_k(x), \qquad x \in (0, h), \end{aligned} \tag{3.1}$$

с произвольными комплексными коэффициентами $c_k$, $d_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$.

Так как форма $Q[f,g](x)$ линейна (со знаком сопряжения над численными коэффициентами) по второму аргументу, то из предложений 1, 2 следует, что любая функция $y(x) \in L^2(-h,h)$, допускающая представления (3.1), обладает свойством 2 леммы 2. Таким образом, совокупность функций $y(x) \in L^2(-h,h)$, обладающих свойствами 1 и 2 леммы 2, совпадает с множеством функций $y(x) \in L^2(-h,h)$, имеющих только первое из них, т.е. допускающих представления (3.1) с произвольными коэффициентами $c_k$, $d_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$. В силу предложений 1, 2 для каждой такой функции $y(x)$ и любой функции $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} Q[f,y_-](-0) = \sum_{k=1}^{n-p} \overline{d}_k \beta_k f^{[2n-k]}(0) &+ \sum_{k=n+1}^{2n-p} \overline{d}_k \beta_k f^{[2n-k-p]}(0) \\ &+ \sum_{k=2n-p+1}^{2n} \overline{d}_k \beta_k f^{[3n-k-p]}(0), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} Q[f,y_+](+0) = \sum_{k=1}^{n-p} \overline{c}_k \alpha_k f^{[2n-k]}(0) &+ \sum_{k=n+1}^{2n-p} \overline{c}_k \alpha_k f^{[2n-k-p]}(0) \\ &+ \sum_{k=2n-p+1}^{2n} \overline{c}_k \alpha_k f^{[3n-k-p]}(0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Согласно лемме 2 для получения интересующего нас дефектного подпространства $\mathscr{N}_p$ оператора $H_p$ остается выделить из множества таких функций совокупность тех из них, которые дополнительно обладают свойством 3 этой леммы, т.е. таких, для которых выражения (3.2) и (3.3) совпадают для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$.

Для выяснения сути последнего свойства воспользуемся следующим фактом, характеризующим поведение квазипроизводных (2.4) от рассматриваемых функций $f(x)$.

Лемма 3. 1) *Для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$ при $n \leqslant l \leqslant p+n-1$ справедливы равенства $f^{[l]}(0)=0$ и асимптотические оценки $f^{[l]}(x)=O(x^{p+n-l})$ при $x \to 0$.*

2) *Для произвольных $2n-p$ комплексных чисел, разделенных на две группы, первая из которых состоит из чисел $b_l$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, а вторая – из чисел $b_l$, $n+p \leqslant l \leqslant 2n-1$, можно подобрать функцию $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$, удовлетворяющую условиям $f^{[l]}(0)=b_l$ для каждого из указанных $2n-p$ значений индекса $l$.*

Доказательство леммы 3 мы опускаем.

Легко проверить, что порядки квазипроизводных $f^{[l]}(0)$, присутствующих в каждом из выражений (3.2), (3.3) ($l=2n-k$ при $1 \leqslant k \leqslant n-p$, $l=2n-k-p$ при $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$ и $l=3n-k-p$ при $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$), попарно различны и удовлетворяют одному из неравенств: $0 \leqslant l \leqslant n-1, n+p \leqslant l \leqslant 2n-1$. Поэтому из второго утверждения леммы 3 следует, что выполнение для функции $y(x)$, допускающей представления (3.1), равенства $Q[f,y_-](-0)=Q[f,y_+](+0)$ с произвольной функцией $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$ равносильно системе $2n-p$ ограничений

$$\alpha_k c_k = \beta_k d_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-p \quad \text{и} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \tag{3.4}$$

на $4n$ коэффициентов $c_k$, $d_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, присутствующих в указанных представлениях.

Итак, по лемме 2 при $p=1,2,\dots,n$ дефектное подпространство $\mathscr{N}$ оператора $H_p$ есть линейное многообразие функций $y(x)$, допускающих представления (3.1) с коэффициентами $c_k$, $d_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, которые связаны соотношениями (3.4) с отличными от нуля (в силу предложений 1, 2) константами $\alpha_k$, $\beta_k$, а в остальном произвольными. Очевидно, что размерность $\operatorname{Def} H_p$ этого подпространства равна количеству тех из перечисленных $4n$ коэффициентов, которые при этих условиях могут принимать произвольные значения. Так как в соотношениях (3.4) коэффициенты $c_k, d_k, n-p+1 \leqslant k \leqslant n$, отсутствуют, то эти $2p$ коэффициентов произвольны. Из $4n-2p$ коэффициентов $c_k$, $d_k$, связанных соотношениями (3.4), произвольны $2n-p$ (например, $c_k$ при $1 \leqslant k \leqslant n-p$ и $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$). Поэтому общее число рассматриваемых коэффициентов, принимающих произвольные значения, равно $2p+2n-p=2n+p$. Следовательно, $\operatorname{Def} H_p = 2n+p$ при $p=1,2,\dots,n$.

Проведенные выше рассуждения говорят о том, что теорема 1 будет доказана, если мы установим справедливость предложения 1. К доказательству предложения 1 мы приступим в следующем параграфе.

## § 4. Вспомогательные понятия

Доказательство предложения 1 состоит из следующих трех этапов.

На *первом* этапе мы проводим преобразование дифференциального уравнения (2.3), зависящего от параметра $p$, в эквивалентную СДУ (систему дифференциальных уравнений), в которой сразу же делаем замену аргумента $x=e^{-t}$, переводящую точку вырождения $x=0$ этой системы в точку $t=+\infty$. В результате этих действий дифференциальное уравнение (2.3) переходит в СДУ вида $\mathbf{u}' = A_p(t)\mathbf{u}$ относительно $2n$-координатной вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ с матричным коэффициентом $A_p(t)$ специального вида, зависящим от параметра $p$. Решения $y(x)$ дифференциального уравнения (2.3) связаны с первыми координатами решений $\mathbf{u}(t) = \{u_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ указанной СДУ формулой $y(x) = u_1(-\ln x)$; свойство $y(x) \in L^2(0,h)$ равносильно свойству $u_1(t)e^{-t/2} \in L^2(-\ln h, +\infty)$. Поэтому в доказательстве предложения 1 центральное место принадлежит исследованию поведения решений СДУ $\mathbf{u}' = A_p(t)\mathbf{u}$ на бесконечности для значений параметра $p = 1, 2, \ldots, n$.

Мы проводим это исследование, применяя классические асимптотические методы, восходящие к Перрону и Шпету; их изложение можно найти, например, в монографиях [4], [5]. Эти методы дают алгоритм построения одного из фундаментальных семейств решений $\mathbf{u}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, вышеупомянутой СДУ и одновременно вычисления главного члена асимптотики каждого из этих решений при $t \to +\infty$. При переходе от них к соответствующим решениям дифференциального уравнения (2.3) мы получаем его фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, каждое из которых принадлежит $L^2(0,h)$.

Проверка существования для функций $y_k(x)$ пределов $Q[f, y_k](+0)$, присутствующих в предложении 1, наталкивается на значительные препятствия. *Второй* этап доказательства предложения 1 состоит в их преодолении, основанном на следующих соображениях.

Наряду с фундаментальным семейством решений СДУ $\mathbf{u}' = A_p(t)\mathbf{u}$, которое можно построить в рамках вышеупомянутых классических асимптотических методов, у этой СДУ существуют другие фундаментальные семейства решений с такими же главными членами асимптотики на бесконечности. Любая пара фундаментальных семейств, связанных этим свойством, может различаться скоростями стремления к нулю при $t \to +\infty$ остаточных членов указанных асимптотик. На втором этапе конструируется фундаментальное семейство решений рассматриваемой СДУ, остаточные члены асимптотики которых на бесконечности имеют достаточно высокий порядок малости. Подчеркнем, что специфические особенности этой СДУ играют в указанной конструкции определяющую роль.

На *третьем* заключительном этапе доказательства предложения 1 мы переходим при каждом $p = 1, 2, \ldots, n$ от фундаментального семейства решений СДУ $\mathbf{u}' = A_p(t)\mathbf{u}$, построенного на втором этапе, к соответствующему фундаментальному семейству решений $y_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, дифференциального уравнения (2.3). Получив это семейство, мы проверяем, что оно обладает всеми свойствами, указанными в предложении 1.

В следующем параграфе мы перейдем к первому этапу доказательства предложения 1, на котором придется иметь дело с простыми и, в то же время, громоздкими алгебраическими конструкциями. Чтобы несколько облегчить изложение этого материала, в конце данного параграфа мы введем ряд специальных обозначений и изложим результаты некоторых предварительных вычислений.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $D = \{d_{jk}\}_{j,k=1}^{2n}$ порядка $2n \geqslant 4$. В наших вычислениях будет удобно разбивать совокупность столбцов или строк таких матриц на несколько групп. В связи с этим мы будем использовать *блочную* форму записи матрицы $D$ вида

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array}\right) \tag{4.1}$$

с квадратными блоками порядка $n$.

Особое значение для нас имеют специальные матрицы

$$A_p = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & C \\ \hline 0 & A_{22}^p \end{array}\right), \qquad \mathscr{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \mathscr{B} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right), \tag{4.2}$$

составленные из блоков

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$A_{22}^p = \begin{pmatrix} n-p & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n+1-p & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+2-p & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-3-p & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2n-2-p & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2n-1-p \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

и остальных нулевых блоков, обозначенных нулем. Мы будем рассматривать матрицу $A_p$ при значениях параметра $p = 1, 2, \dots, n$.

Введем *обобщенные степени* $r^{\{l\}}$ неотрицательных чисел $r$, определяемые по формулам $r^{\{0\}} = 1$, $r^{\{l\}} = l(l-1)(l-2)\cdots(r-l+1)$ при $l = 1, 2, \dots$. Заметим, что обобщенные степени целых чисел $r \geqslant 0$ обладают свойством

$$r^{\{r\}} = r!\,, \quad r^{\{l\}} \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant l \leqslant r, \quad r^{\{l\}} = 0 \quad \text{при} \quad l \geqslant r+1. \tag{4.6}$$

Простые вычисления показывают, что начальное условие $u_1 = 1$ определяет собственный вектор $\mathbf{u} = \{u_j\}_{j=1}^{2n}$, отвечающий собственному значению $\lambda$ матрицы $A_p$, однозначно, причем его координаты $u_j$ имеют вид $\lambda^{\{j-1\}}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$ и $(-1)^{\{j-n-1\}}(\lambda-(n-p))^{\{j-n-1\}}\lambda^{\{n\}}$ при $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$. Это означает, что все собственные подпространства матрицы $A_p$ одномерны. Так как собственные значения треугольной матрицы $A_p$ совпадают с ее диагональными элементами, то она имеет $2n-p$ попарно различных собственных значений $\lambda_k = k-1$, $1 \leqslant k \leqslant 2n-p$; $2n-2p$ из них, отвечающие значениям индекса $1 \leqslant k \leqslant n-p$ и $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$, однократны, а остальные $p$, для которых $n-p+1 \leqslant k \leqslant n$, двукратны. В жордановой форме этой матрицы ее двукратным собственным значениям отвечают двумерные жордановы клетки.

Введем последовательность из $2n-p$ собственных векторов $\mathbf{u}_k = \{u_{jk}\}_{j=1}^{2n}$ матрицы $A_p$, отвечающих ее собственным значениям $\lambda_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n-p$, и удовлетворяющих начальному условию $u_{1k} = 1$. Добавим к ней еще $p$ векторов $\mathbf{u}_k = \{u_{jk}\}_{j=1}^{2n}$, $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$, присоединенных к собственным векторам $\mathbf{u}_{k-n}$ (отвечающим двукратным собственным значениям $\lambda_{k-n}$ матрицы $A_p$) и удовлетворяющих начальному условию $u_{1k} = 0$. Эти векторы также определяются однозначно, причем можно проверить, что их координаты $u_{jk} \neq 0$, если $2 \leqslant j \leqslant k+p-n$, и $u_{jk} = 0$, если $k+p-n+1 \leqslant j \leqslant 2n$.

Рассмотрим матрицу $U = \{u_{jk}\}_{j,k=1}^{2n}$, столбцами которой с последовательными номерами $k$ являются линейно независимые векторы $\mathbf{u}_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$. Если учесть свойства (4.6) обобщенных степеней, через которые выражаются элементы матрицы $U$, то их можно записать в следующем виде:

$$u_{jk} = \begin{cases} (k-1)^{\{j-1\}}, & 1 \leqslant j \leqslant k, \\ 0, & k+1 \leqslant j \leqslant 2n, \end{cases} \tag{4.7}$$

если $1 \leqslant k \leqslant n$;

$$u_{jk} = \begin{cases} (k-1)^{\{j-1\}}, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ (-1)^{j-n-1}(k-1)^{\{n\}} & \\ \qquad \times (k+p-n-1)^{\{j-n-1\}}, & n+1 \leqslant j \leqslant k+p, \\ 0, & k+p+1 \leqslant j \leqslant 2n, \end{cases} \tag{4.8}$$

если $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$;

$$\begin{aligned} &u_{jk} = 0, && j = 1, \\ &u_{jk} \neq 0, && 2 \leqslant j \leqslant k+p-n, \\ &u_{jk} = 0, && k+p-n+1 \leqslant j \leqslant 2n, \end{aligned} \tag{4.9}$$

если $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$. Точные значения присутствующих в последней формуле ненулевых элементов $u_{jk}$, $2 \leqslant j \leqslant k+p-n$, не играют существенной роли в наших рассуждениях. Поэтому мы их не приводим.

Нам будет удобно разбить столбцы матрицы $U$ на четыре группы. Первая из них будет состоять из $n-p$ столбцов с индексами $1 \leqslant k \leqslant n-p$, вторая – из $p$ столбцов, для которых $n-p+1 \leqslant k \leqslant n$, к третьей группе отнесем $n-p$ столбцов с индексами $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$ и, наконец, к четвертой – последние $p$ столбцов матрицы $U$. Столбцы, входящие в первую и третью группы, являются собственными векторами матрицы $A_p$, отвечающими ее однократным собственным значениям $\lambda_k$, где $1 \leqslant k \leqslant n-p$ и $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$ соответственно. Столбцы, принадлежащие к второй группе, – это собственные векторы, отвечающие двукратным собственным значениям $\lambda_k$, $n-p+1 \leqslant k \leqslant n$, матрицы $A_p$; четвертая группа состоит из векторов, присоединенных к соответствующим собственным векторам второй группы.

Заметим, что описанное разбиение столбцов матрицы $U$ на группы существенно зависит от $p$. В частности, при $p = n$ первая и третья группы столбцов являются пустыми.

Из формул (4.7), (4.8), (4.9) следует, что блочная форма матрицы $U$ является треугольной: $U = \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & U_{22} \end{array}\right)$. К сожалению, такая форма записи матрицы $U$ не учитывает различий в свойствах ее столбцов, отраженных в описанном выше разбиении их на четыре качественно различные группы. Для того чтобы указанное разбиение было учтено, мы разложим (при $p = 1, 2, \ldots, n$) каждый из четырех $n$-мерных квадратных блоков $D_{lm}$, $1 \leqslant l, m \leqslant 2$, блочной формы (4.1) произвольной квадратной матрицы $D$ порядка $2n$ на четыре подблока, форматы которых зависят от $p$. Более точно, введем представление

$$D_{lm} = \begin{pmatrix} D_{lm}^{(11)} & D_{lm}^{(12)} \\ D_{lm}^{(21)} & D_{lm}^{(22)} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant l, m \leqslant 2, \tag{4.10}$$

в котором через $D_{lm}^{(11)}$ и $D_{lm}^{(22)}$ обозначены квадратные подблоки порядков $n-p$ и $p$ соответственно, прямоугольный подблок $D_{lm}^{(12)}$ имеет $n-p$ строк и $p$ столбцов, а прямоугольный подблок $D_{lm}^{(21)}$ – $p$ строк и $n-p$ столбцов. Разлагая каждый из блоков, присутствующих в формуле (4.1), на подблоки (4.10), мы получаем новую форму записи матрицы $D$, которую в дальнейшем будем называть *ультраблочной*. С учетом формул (4.7), (4.8), (4.9) ультраблочная форма записи матрицы $U$ выглядит так:

$$U = \left(\begin{array}{cc|cc} U_{11}^{(11)} & U_{11}^{(12)} & U_{12}^{(11)} & U_{12}^{(12)} \\ 0 & U_{11}^{(22)} & U_{12}^{(21)} & U_{12}^{(22)} \\ \hline 0 & 0 & U_{22}^{(11)} & U_{22}^{(12)} \\ 0 & 0 & U_{22}^{(21)} & U_{22}^{(22)} \end{array}\right). \tag{4.11}$$

Заметим, что разложение первого из этих блоков на подблоки имеет треугольный вид.

Матрица $J$, связанная с матрицей $A_p$ равенством

$$A_p U = UJ, \tag{4.12}$$

является модификацией жордановой формы матрицы $A_p$. При принятом нами нестандартном порядке следования столбцов матрицы $U$ матрица $J$, записанная в ультраблочной форме, имеет вид

$$J = J_0 + \mathscr{E}, \tag{4.13}$$

$$J_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{Diag}\{i\}_{i=0}^{n-p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Diag}\{i\}_{i=n-p}^{n-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Diag}\{i\}_{i=n}^{2n-p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Diag}\{i-n\}_{i=2n-p}^{2n-1} \end{array}\right), \tag{4.14}$$

$$\mathscr{E} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Diag}\{1\}_{i=n-p}^{n-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{4.15}$$

$i = j-1$. В этом представлении (а также в дальнейшем) мы обозначаем символом $\mathrm{Diag}\{\mu_j\}_{j=j_1+1}^{j_2}$ квадратную диагональную матрицу порядка $j_2 - j_1$ с диагональными элементами $\mu_j$. В частности, $\mathrm{Diag}\{1\}_{j=j_1+1}^{j_2}$ – это единичная матрица порядка $j_2 - j_1$.

Квадратные матрицы порядка $2n$, представленные в ультраблочной форме, нам придется умножать на $2n$-мерные вектор-столбцы $\mathbf{h} = \{h_j\}_{j=1}^{2n}$. Это умножение упрощается, если вектор $\mathbf{h}$ разложить на четыре *векторные компоненты*, представляя его в форме

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix};$$

векторными компонентами указанного вектора мы называем вектор-столбцы $\mathbf{r} = \{h_j\}_{j=1}^{n-p}$, $\mathbf{s} = \{h_j\}_{j=n-p+1}^{n}$, $\boldsymbol{\rho} = \{h_j\}_{j=n+1}^{2n-p}$, $\boldsymbol{\sigma} = \{h_j\}_{j=2n-p+1}^{2n}$; размерность первого и третьего из них равна $n-p$, а второго и четвертого – $p$.

Замечание 1. В дальнейшем мы будем изучать асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ определенных вектор-функций

$$\mathbf{h}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{s}(t) \\ \boldsymbol{\rho}(t) \\ \boldsymbol{\sigma}(t) \end{pmatrix},$$

асимптотики разных векторных компонент которых могут иметь различный вид. В наших рассмотрениях параметр $p$ принимает значения $1, 2, \ldots, n$. Следует обратить внимание на то, что при $p = n$ первая и третья из указанных векторных компонент имеют нулевой порядок, т.е. являются пустыми. Аналогичным свойством обладает ультраблочная форма записи рассматриваемых нами квадратных матриц порядка $2n$; при $p = n$ определенные ее подблоки также являются пустыми. Вид некоторых формул, рассматриваемых в дальнейшем, также зависит от значений параметра $p$. При $p = n$ определенные части этих формул оказываются пустыми для значений индекса $k$ (или индекса $j$), изменяющихся от 1 до $n-p$ или от $n+1$ до $2n-p$. Описанная особенность формул, присутствующих в дальнейших вычислениях, не влияет на полученные результаты в том смысле, что при $p = n$ те из них, которые относятся к указанным выше значениям индексов $k$ и $j$, следует отбросить.

## § 5. Преобразование дифференциального уравнения в почти диагональную СДУ

Приступая к первому этапу доказательства предложения 1, преобразуем дифференциальное уравнение (2.3), вырождающееся при $x = 0$, в эквивалентную СДУ. Для этого каждому его решению $y(x)$ поставим в соответствие вектор-столбец $\mathbf{v}(x) = \{v_j(x)\}_{j=1}^{2n}$ с координатами

$$v_j(x) = \begin{cases} x^{j-1}y^{[j-1]}(x), & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ x^{j-p-1}y^{[j-1]}(x), & n+1 \leqslant j \leqslant 2n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Из определения (2.4) квазипроизводных и того, что уравнение (2.3) допускает запись в виде $y^{[2n]}(x) = zy(x)$, $x \in (0,h)$, следует, что функция $y(x)$ является решением этого дифференциального уравнения тогда и только тогда, когда вектор-функция $\mathbf{v}(x)$ удовлетворяет СДУ

$$\begin{aligned} xv_j' &= (j-1)v_j + v_{j+1}, && 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ xv_n' &= (n-1)v_n + \frac{1}{a(x)}v_{n+1}, && \\ xv_j' &= (j-p-1)v_j - v_{j+1}, && n+1 \leqslant j \leqslant 2n-1, \\ xv_{2n}' &= (2n-p-1)v_{2n} - zx^{2n-p}v_1, && x \in [0,h], \end{aligned} \tag{5.2}$$

для которой точка $x = 0$ также является точкой вырождения.

Изучение асимптотических свойств решений дифференциального уравнения (2.3) при $x \to +0$ равносильно исследованию асимптотики в нуле решений СДУ (5.2). При проведении такого исследования будет удобно разложить коэффициент $1/a(x)$, присутствующий в $n$-м уравнении этой системы, по формуле Тейлора–Маклорена порядка $2n-p$, т.е. представить его в виде

$$\frac{1}{a(x)} = \sum_{l=0}^{2n-p-1} b_l x^l + (b_{2n-p} + \varphi(x))x^{2n-p}, \qquad x \in (-h,h),$$

с коэффициентами $b_l = \frac{1}{l!}(a^{-1}(x))^{(l)}\big|_{x=0}$, $0 \leqslant l \leqslant 2n-p$, и функцией $\varphi(x) = o(1)$ при $x \to 0$. Без ущерба для общности наших выводов из дальнейших вычислений можно ввести условие нормировки $a(0) = 1$, $b_0 = 1/a(0) = 1$. Начиная с этого места будем считать его выполненным.

Если в СДУ (5.2) функцию $1/a(x)$, удовлетворяющую условию нормировки $a(0) = 1$, представить в указанном виде, а затем сделать в ней замену аргумента $x = e^{-t}$, то мы получим СДУ

$$\mathbf{w}' = -\biggl\{A_p + \biggl(\sum_{l=1}^{2n-p-1} b_l e^{-lt}\biggr)\mathscr{A} + e^{-(2n-p)t}[(b_{2n-p} + \psi(t))\mathscr{A} - z\mathscr{B}]\biggr\}\mathbf{w}, \qquad t \in [-\ln h, +\infty], \tag{5.3}$$

с матрицами $A_p$, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, описание которых приведено ранее в формулах (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), и функцией $\psi(t) = \varphi(e^{-t}) = o(1)$ при $t \to +\infty$. Решения $\mathbf{w}(t) = \{w_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ полученной системы связаны с решениями $\mathbf{v}(x)$ СДУ (5.2) формулой

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(x), \qquad x = e^{-t}. \tag{5.4}$$

Замечание 2. В связи с введением вектор-функций $\mathbf{v}(x)$, координаты которых связаны с решениями $y(x)$ дифференциального уравнения (2.3) формулой (5.1), заметим, что вычисление предела при $x \to +0$ билинейного выражения (2.5) с функциями $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$ и $g(x) = y(x)$ упрощается, если в каждой из сумм $Q_1[f,y](x), Q_2[f,y](x)$ выразить присутствующие в них квазипроизводные от функции $y(x)$ через координаты (5.1) соответствующего решения $\mathbf{v}(x)$ СДУ (5.2). При этом для указанных сумм получаются выражения

$$\begin{aligned} Q_1[f,y](x) &= \sum_{j=1}^{n} f^{[2n-j]}(x) x^{-(j-1)} \overline{v}_j(x), \\ Q_2[f,g](x) &= \sum_{j=n+1}^{2n} f^{[2n-j]}(x) x^{-(j-p-1)} \overline{v}_j(x). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Переход от дифференциального уравнения (2.3), зависящего от параметра $p$, к соответствующей СДУ типа (5.3) проводился ранее в статье [2] без использования квазипроизводных, из-за чего полученный в ней аналог СДУ (5.3) имел более сложную структуру. При этом асимптотика на бесконечности его решений изучалась для “больших” значений параметра $p \geqslant 2n - 1/2$. Этот случай качественно отличен от рассматриваемого в настоящей статье случая “малых” значений $p = 1, 2, \ldots, n$.

Для любого решения $\mathbf{w}(t)$ СДУ (5.3) последние $n$ координат вектор-функции $\mathscr{A}\mathbf{w}(t)$ равны нулю. Поэтому второе слагаемое матричного коэффициента этой системы не оказывает существенного влияния на последние $n$ координат ее решений. Вместе с тем, при изучении поведения на бесконечности их первых $n$ координат нам будет достаточно записывать СДУ (5.3) в упрощенной форме

$$\mathbf{w}' = -\{A_p + e^{-t}(b_1 + \theta(t))\mathscr{A} + e^{-(2n-p)t}[(b_{2n-p} + \psi(t))\mathscr{A} - z\mathscr{B}]\}\mathbf{w},$$
$$\theta(t) = \sum_{l=2}^{2n-p-1} b_l e^{-(l-1)t} = O(e^{-t}) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Матричный коэффициент линейной однородной СДУ (5.3) является суммой постоянной матрицы $-A_p$ и двух ее возмущений, экспоненциально стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ с разными скоростями. Вычисление асимптотики на бесконечности решений подобных систем естественно проводить путем сведения их к почти диагональному виду; изложение этого метода можно найти, например, в монографиях [4; гл. 7], [5; гл. 1]. Первым шагом в этом направлении является замена

$$\mathbf{w}(t) = U\mathbf{y}(t) \tag{5.6}$$

с матрицей $U$, сплетающей матрицу $A_p$ с ее модифицированной жордановой формой $J$ по формуле (4.12).

С учетом формулы (4.13) указанная замена преобразует СДУ (5.3), представленную в упрощенной форме, в СДУ

$$\mathbf{y}' = -\{J_0 + \mathscr{E} + e^{-t}(b_1 + \theta(t))\Lambda + e^{-(2n-p)t}[(b_{2n-p} + \psi(t))\Lambda - zM]\}\mathbf{y}, \quad t \in [-\ln h, +\infty), \tag{5.7}$$

с матрицами
$$\Lambda = U^{-1}\mathscr{A}U, \qquad M = U^{-1}\mathscr{B}U. \tag{5.8}$$

Так как ультраблочное представление (4.11) матрицы $U$ содержит четыре нулевых блока, расположенных на пересечении его двух первых столбцов и двух последних строк, то таким же свойством обладает матрица $U^{-1}$. Из формулы (4.2) следует, что в ультраблочном представлении матрицы $\mathscr{A}$ отличны от нуля только четыре подблока, расположенные на пересечении его двух последних столбцов и двух первых строк. Перемножая матрицы, присутствующие в первой из формул (5.8), с учетом указанных свойств матриц $U$, $U^{-1}$ и $\mathscr{A}$ и представляя результат этих действий в ультраблочной форме, получим:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \Lambda_{12}^{(11)} & \Lambda_{12}^{(12)} \\ 0 & 0 & \Lambda_{12}^{(21)} & \Lambda_{12}^{(22)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5.9}$$

Замечание 3. К сожалению, матрица $M$, введенная в формуле (5.8), не обладает аналогичным свойством. Все подблоки $M_{lm}^{(rs)}$, входящие в ее ультраблочное представление, вообще говоря, являются ненулевыми.

Для приведения СДУ (5.7) к почти диагональному виду достаточно избавиться от матрицы $\mathscr{E}$ в ее матричном коэффициенте. Из определений (4.13), (4.15) матриц $J_0$ и $\mathscr{E}$ следуют их свойства: $\mathscr{E}^2 = 0$, $J_0\mathscr{E} = \mathscr{E}J_0$, $\mathscr{E}J_0\mathscr{E} = 0$, которые, в свою очередь, влекут за собой равенства $(E + t\mathscr{E})J_0^k(E - t\mathscr{E}) = J_0^k$, $k = 0, 1$, и $(E+t\mathscr{E})\mathscr{E}(E-t\mathscr{E}) = \mathscr{E}$. Учитывая перечисленные факты, для приведения СДУ (5.7) к почти диагональному виду достаточно сделать в ней подстановку

$$\mathbf{y}(t) = (E - t\mathscr{E})\mathbf{h}(t), \tag{5.10}$$

после чего умножить полученную таким способом новую СДУ относительно вектор-функции $\mathbf{h}(t)$ слева на матрицу $E + t\mathscr{E}$. Проводя эти действия и принимая во внимание свойства $\Lambda\mathscr{E} = \mathscr{E}\Lambda = \mathscr{E}\Lambda\mathscr{E} = 0$, вытекающие из формулы (5.9) и определения (4.15) матрицы $\mathscr{E}$, получим почти диагональную СДУ

$$\begin{gathered} \mathbf{h}' = -\{J_0 + e^{-t}(b_1 + \theta(t))\Lambda + e^{-(2n-p)t}[(b_{2n-p} + \psi(t))\Lambda \\ - z(M + t[\mathscr{E}, M] - t^2\mathscr{E}M\mathscr{E})]\}\mathbf{h}, \\ t \in [-\ln h, +\infty), \qquad [\mathscr{E}, M] = \mathscr{E}M - M\mathscr{E}. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Вычисление матриц $[\mathscr{E}, M]$ и $\mathscr{E}M\mathscr{E}$ с помощью ультраблочного представления (4.15) матрицы $\mathscr{E}$ и с учетом замечания 3 приводит к следующей структуре этих матриц:

$$[\mathscr{E}, M] = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -M_{11}^{(12)} \\ M_{21}^{(21)} & M_{21}^{(22)} & M_{22}^{(21)} & M_{22}^{(22)} - M_{11}^{(22)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -M_{21}^{(12)} \\ 0 & 0 & 0 & -M_{21}^{(22)} \end{array}\right), \tag{5.12}$$

$$\mathscr{E}M\mathscr{E} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{21}^{(22)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5.13}$$

Преобразование дифференциального уравнения (2.3) в СДУ (5.11) завершает первый этап доказательства предложения 1. Объединяя формулы (5.4), (5.6), (5.10) и принимая во внимание то, что координаты вектор-функции $\mathbf{v}(x)$ выражаются через $y(x)$ по формуле (5.1), получаем взаимно однозначное соответствие

$$\mathbf{v}(x) = U(E - t\mathscr{E})\mathbf{h}(t), \qquad t = -\ln x, \tag{5.14}$$

между решениями $\mathbf{h}(t)$ полученной СДУ и решениями $y(x)$ указанного дифференциального уравнения.

## § 6. Подготовка к построению решений специальной СДУ

На втором этапе доказательства предложения 1 мы построим некоторое фундаментальное семейство решений СДУ (5.11) с помощью асимптотических методов теории систем линейных дифференциальных уравнений. Точкой опоры в этом построении является вспомогательный результат, относящийся к системе $2n$ дифференциальных уравнений

$$\eta_j' = a_j\eta + e^{-b_j t}(D(t)\boldsymbol{\eta})_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2n, \tag{6.1}$$

относительно координат $\eta_j(t)$ вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(t) = \{\eta_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ с некоторыми числами $a_j \in \mathbb{R}$ и $b_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$. Символом $D(t)$ в этой системе обозначена матрица $\{d_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2n}$, элементы которой непрерывны в окрестности точки $t = +\infty$ и обладают свойством

$$d_{jk}(t) = O(t^m), \qquad t \to +\infty, \quad 1 \leqslant j, k \leqslant 2n, \quad m \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Через $(D(t)\boldsymbol{\eta})_j$ мы обозначаем $j$-ю координату вектора $D(t)\boldsymbol{\eta}(t)$.

Известно (см., например, [4; гл. 7, § 22, теорема 1]), что у СДУ (6.1) есть фундаментальное семейство решений $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, с асимптотикой при $t \to +\infty$ вида

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = e^{a_k t}(\boldsymbol{\Delta}_k + \mathbf{o}(1)), \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2n; \tag{6.3}$$

присутствующие в ней векторы $\mathbf{\Delta}_k$ определяются по формуле

$$\mathbf{\Delta}_k = \{\delta_{jk}\}_{j=1}^{2n}, \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

а через $\mathbf{o}(1)$ обозначены вектор-функции, бесконечно малые при $t \to +\infty$.

Если в СДУ (5.11) положить $\mathbf{h}(t) = \boldsymbol{\eta}(t)$, то эту систему можно представить в форме (6.1) с матрицей $D(t)$, удовлетворяющей условию (6.2) при $m \leqslant 2$. Следовательно, у СДУ (5.11) существует фундаментальное семейство решений $\mathbf{h}_k(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, с асимптотикой (6.3) на бесконечности. Целью вычислений, проводимых ниже, является уточнение этого результата, в котором будут получены дополнительные сведения о векторных бесконечно малых $\mathbf{o}(1)$, присутствующих в формуле (6.3). Мы будем существенно использовать специфические особенности матричного коэффициента СДУ (5.11), а также следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Зафиксируем какое-нибудь натуральное число $k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$. Предположим, что числа $a_j$, $b_j$, присутствующие в СДУ* (6.1), *удовлетворяют условиям*

$$a_k = 0, \tag{6.4}$$

$$b_j > 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2n, \tag{6.5}$$

*а элементы матрицы $D(t)$ обладают свойством* (6.2) *на некоторой полуоси $[T, +\infty)$. Тогда СДУ* (6.1) *имеет решение $\boldsymbol{\eta}(t)$, обладающее свойством*

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \mathbf{\Delta}_k + \mathbf{o}(1), \qquad t \to +\infty, \tag{6.6}$$

*и удовлетворяющее системе интегральных уравнений*

$$\eta_j(t) = \delta_{jk} + e^{a_j t} \int_{\omega_j}^{t} e^{-(a_j+b_j)\tau} (D(\tau)\boldsymbol{\eta})_j \, d\tau, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2n, \tag{6.7}$$

*с нижними пределами интегрирования*

$$\omega_j = \begin{cases} +\infty, & \textit{если } a_j + b_j > 0, \\ T < +\infty, & \textit{если } a_j + b_j \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Лемма 4 является вариантом более общего результата (см. [4; гл. 7, § 22, лемма 1]), приспособленным к изучению поведения на бесконечности решений специальных СДУ вида (6.1). Для проверки ее справедливости достаточно повторить доказательство упомянутого более общего утверждения в частном случае, рассматриваемом в лемме 4.

Для того чтобы лемму 4 можно было использовать при построении решений СДУ (5.11), обладающих интересующими нас свойствами на бесконечности, сделаем в этой системе подстановку

$$\mathbf{h}(t) = V_{\mu,\nu}(t)\eta(t) \tag{6.9}$$

с диагональной матрицей

$$V_{\mu,\nu}(t)=\left(\begin{array}{c|c} e^{-\mu t}\operatorname{Diag}\{1\}_{j=1}^{n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-\nu t}\operatorname{Diag}\{1\}_{j=1}^{n} \end{array}\right), \tag{6.10}$$

зависящей от двух действительных параметров $\mu,\nu$. Конкретный выбор их значений будет сделан в дальнейшем в леммах 5–7.

Наряду с матрицей $V_{\mu,\nu}(t)$, зависящей от $t$, нам понадобится постоянная диагональная матрица

$$L_{\mu,\nu}=\left(\begin{array}{c|c} \mu\operatorname{Diag}\{1\}_{j=1}^{n} & 0 \\ \hline 0 & \nu\operatorname{Diag}\{1\}_{j=n+1}^{2n} \end{array}\right).$$

Очевидны следующие свойства первой из этих матриц:

$$V_{\mu,\nu}^{-1}(t)=V_{-\mu,-\nu}(t),\qquad V_{\mu,\nu}'(t)=-V_{\mu,\nu}(t)L_{\mu,\nu}. \tag{6.11}$$

Из формулы (4.14) следует, что

$$\begin{gathered} J_0-L_{\mu,\nu}=\left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Diag}\{j-1-\mu\}_{j=1}^{n} & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{Diag}\{j-\varkappa_j-1-\nu\}_{j=n+11}^{2n} \end{array}\right); \\ \varkappa_j=\begin{cases} 0, & n+1\leqslant j\leqslant 2n-p, \\ n, & 2n-p+1\leqslant j\leqslant 2n. \end{cases} \end{gathered} \tag{6.12}$$

Если в СДУ (5.11) сделать подстановку (6.9), а затем умножить полученную таким способом новую СДУ относительно вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(t)$ слева на матрицу $V_{\mu,\nu}^{-1}(t)$, то (с учетом второй из формул (6.11)) последняя система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}'=-\{&J_0-L_{\mu,\nu}+e^{-t}(b_1+\theta(t))\Lambda_{\mu,\nu}(t)+e^{-(2n-p)t}[(b_{2n-p}+\psi(t))\Lambda_{\mu,\nu}(t) \\ &-z(M_{\mu,\nu}+t[\mathscr{E},M]_{\mu,\nu}(t)-t^2(\mathscr{E}M\mathscr{E})_{\mu,\nu}(t))]\}\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Присутствующие в ней матрицы, зависящие от индексов $\mu,\nu$, получаются из матрицы $D$, принимающей одно из значений $\Lambda$, $M$, $[\mathscr{E},M]$, $\mathscr{E}M\mathscr{E}$, с помощью преобразования, переводящего ее в матрицу $D_{\mu,\nu}(t)=V_{\mu,\nu}^{-1}(t)DV_{\mu,\nu}(t)$. Легко проверить, что при записи матрицы $D$ в блочной форме (4.1) аналогичное представление матрицы $D_{\mu,\nu}(t)$ имеет структуру

$$D_{\mu,\nu}(t)=\left(\begin{array}{c|c} D_{11} & 0 \\ \hline 0 & D_{22} \end{array}\right)+e^{(\mu-\nu)t}\left(\begin{array}{c|c} 0 & D_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)+e^{(\nu-\mu)t}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline D_{21} & 0 \end{array}\right). \tag{6.14}$$

Для получения ультраблочного представления матрицы $D_{\mu,\nu}(t)$ достаточно разложить каждый из блоков, присутствующих в последней формуле, на подблоки по правилу (4.10).

В дальнейшем мы будем рассматривать СДУ (6.13) только в случае, когда значения параметров $\mu$, $\nu$ удовлетворяют условию

$$0 \leqslant \nu - \mu < 2n - p. \tag{6.15}$$

При замене присутствующих в СДУ (6.13) матриц, зависящих от $\mu$, $\nu$, их выражениями, вытекающими из формулы (6.14), правая часть этой системы становится более громоздкой. Группируя ее третье и следующие слагаемые по скоростям стремления к нулю на бесконечности присутствующих в них экспонент, можно придать рассматриваемой СДУ более компактную форму

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}' = -\big[J_0 - L_{\mu,\nu} + e^{-(2n-p)t}P_1(t) + e^{-(\nu-\mu+1)t}P_2(t)\\ + e^{-(2n-p-(\nu-\mu))t}P_3(t)\big]\boldsymbol{\eta}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Матрицы $P_l(t)$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, присутствующие в ней, имеют следующую форму:

$$P_1(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} p_{11}^{(11)}(t) & p_{11}^{(12)}(t) & 0 & 0 \\ tp_{11}^{(21)}(t) & tp_{11}^{(22)}(t) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & p_{22}^{(11)}(t) & tp_{22}^{(12)}(t) \\ 0 & 0 & p_{22}^{(21)}(t) & tp_{22}^{(22)}(t) \end{array}\right),$$

$$P_2(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & p_{12}^{(11)}(t) & p_{12}^{(12)}(t) \\ 0 & 0 & p_{12}^{(21)}(t) & p_{12}^{(22)}(t) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$P_3(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline p_{21}^{(11)}(t) & p_{21}^{(12)}(t) & 0 & 0 \\ p_{21}^{(21)}(t) & p_{21}^{(22)}(t) & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Элементами $p_{lm}^{(rs)}(t)$ этих матриц являются функции, обладающие свойством

$$p_{lm}^{(rs)}(t) = O(1), \qquad t \to +\infty, \quad 1 \leqslant l, m, r, s \leqslant 2. \tag{6.17}$$

Если расписать СДУ (6.16) покоординатно, учитывая при этом формулу (6.12), то она примет вид (6.1) с коэффициентами

$$a_j = \begin{cases} \mu + 1 - j, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ \nu + 1 - j, & n + 1 \leqslant j \leqslant 2n - p, \\ \nu + n + 1 - j, & 2n - p + 1 \leqslant j \leqslant 2n. \end{cases}$$

Мы будем использовать лемму 4 для получения при каждом $k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, решения $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t)$ этой СДУ, обладающего свойством (6.6). В рассматриваемом случае ее условие (6.4) равносильно ограничению на параметры $\mu$, $\nu$, имеющему вид $\mu = \mu_k = k-1$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, $\nu = \nu_k = k-1$ при $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$, $\nu = \nu_k = k-n-1$ при $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$. В каждом из этих трех случаев однозначно определяется значение только одного из параметров $\mu, \nu$ и остается большая степень свободы в выборе значения другого параметра. Единственным ограничением на него является условие (6.15). Такую свободу выбора мы используем для минимизации громоздкости дальнейших вычислений. Конкретный выбор значения указанного свободного параметра будет сделан в рассматриваемых ниже леммах 5–7.

## § 7. Построение семейства решений специальной СДУ

Приступим к построению для каждого $k$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, решения $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ СДУ (6.16) со значениями параметров $\mu, \nu$, зависящими от $k$, обладающего асимптотикой (6.6) на бесконечности. Основной задачей будет уточнение остаточного члена этой асимптотической формулы. Результаты, полученные при ее решении, изложены в леммах 5–7 настоящего параграфа.

После того, как будут построены указанные $2n$ вектор-функции $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, преобразование (6.9) переведет их в семейство решений

$$\mathbf{h}_k(t) = V_{\mu_k,\nu_k}(t)\eta_k(t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2n, \tag{7.1}$$

СДУ (5.11). Переходя по формуле (5.14) от семейства решений (7.1) к набору вектор-функций

$$\mathbf{v}_k(x) = U(E - t\mathscr{E})\mathbf{h}_k(t), \qquad x = e^{-t} \in (0,h), \quad 1 \leqslant k \leqslant 2n, \tag{7.2}$$

и обозначая через $y_k(x)$ их первые координаты, мы получаем фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, дифференциального уравнения (2.3).

Информация об асимптотическом поведении вектор-функций $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ при $t \to +\infty$, которую мы получим в леммах 5–7, позволит вывести из нее с помощью формулы (7.2) важные сведения о поведении вектор-функций $\mathbf{v}_k(x)$ при $x \to +0$.

Построение решений $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, СДУ (6.16), рассматриваемой с значениями $\mu$, $\nu$, зависящими от $k$, нам придется проводить сначала в случае, когда $1 \leqslant k \leqslant n$, затем при условии $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$ и, наконец, в случае, когда $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$.

Начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма 5. *При любом значении $k$, удовлетворяющем условию $1 \leqslant k \leqslant n$, СДУ (6.16), рассматриваемая со значениями параметров $\mu = \mu_k = k-1$, $\nu = \nu_k = k-1+2n-p-1/2$, имеет решение $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ с асимптотикой на бесконечности вида*

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k(t) \\ \mathbf{e}_k(t) \\ \boldsymbol{\delta}_k(t) \\ \boldsymbol{\epsilon}_k(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Delta}_k + \begin{pmatrix} O(e^{-(2n-p)t}) \\ O(te^{-(2n-p)t}) \\ O(e^{-t/2}) \\ O(e^{-t/2}) \end{pmatrix}, \qquad t \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Подставим в СДУ (6.16) значения параметров $\mu = \mu_k$, $\nu = \nu_k$, указанные в лемме 5. Так как $\nu_k - \mu_k + 1 = 2n - p + 1/2 > 2n - p$, $2n - p - (\nu_k - \mu_k) = 1/2$ и при рассматриваемых значениях $\mu$, $\nu$ диагональные элементы матрицы (6.12) имеют вид $j - 1 - \mu_k = j - k$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, $j - 1 - \nu_k = j - k - (2n - p - 1/2)$ при $n + 1 \leqslant j \leqslant 2n - p$, $j - n - 1 - \nu_k = j - k - (3n - p - 1/2)$ при $2n - p + 1 \leqslant j \leqslant 2n$, то при записи СДУ, полученной таким способом, в координатной форме (6.1) для чисел $a_j$, $b_j$ получаются выражения

$$a_j = \begin{cases} k - j, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ k - j + 2n - p - \dfrac{1}{2}, & n + 1 \leqslant j \leqslant 2n - p, \\ k - j + 3n - p - \dfrac{1}{2}, & 2n - p + 1 \leqslant j \leqslant 2n; \end{cases} \tag{7.3}$$

$$b_j = \begin{cases} 2n - p, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ \dfrac{1}{2}, & n + 1 \leqslant j \leqslant 2n; \end{cases}$$

матрица $D(t)$ принимает вид

$$D(t) = \left( \begin{array}{cc|cc} p_{11}^{(11)}(t) & p_{11}^{(12)}(t) & e^{-t/2} p_{12}^{(11)}(t) & e^{-t/2} p_{12}^{(12)}(t) \\ t p_{11}^{(21)}(t) & t p_{11}^{(22)}(t) & e^{-t/2} p_{12}^{(21)}(t) & e^{-t/2} p_{12}^{(22)}(t) \\ \hline p_{21}^{(11)}(t) & p_{21}^{(12)}(t) & e^{-(2n-p-1/2)t} p_{22}^{(11)}(t) & t e^{-(2n-p-1/2)t} p_{22}^{(12)}(t) \\ p_{21}^{(21)}(t) & p_{21}^{(22)}(t) & e^{-(2n-p-1/2)t} p_{22}^{(21)}(t) & t e^{-(2n-p-1/2)t} p_{22}^{(22)}(t) \end{array} \right). \tag{7.4}$$

Числа (7.3) удовлетворяют всем условиям, предъявляемым к ним в лемме 4. Из формулы (6.17) следует, что условие (6.2), предъявляемое в этой лемме к элементам матрицы $D(t)$, также выполняется.

После того как СДУ (6.16) с рассматриваемыми значениями параметров $\mu = \mu_k$, $\nu = \nu_k$ представлена в координатной форме (6.1), применим к ней лемму 4. По этой лемме она имеет решение $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t) = \{\eta_j\}_{j=1}^{2n}$, удовлетворяющее условию (6.6). Если представить вектор-функцию $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ через ее векторные компоненты, то условие (6.6) будет равносильно следующему свойству при $t \to +\infty$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\eta}_k(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_k^{(1)} + \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n - p; \\ \boldsymbol{\eta}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{o}(1) \\ \boldsymbol{\delta}_k^{(2)} + \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n - p; \\ \boldsymbol{\delta}_k^{(1)} = \{\delta_{jk}\}_{j=1}^{n-p}, \qquad \boldsymbol{\delta}_k^{(2)} = \{\delta_{jk}\}_{j=n-p+1}^{n}. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Для выяснения характера поведения на бесконечности вектор-функций

$$D(t)\boldsymbol{\eta}(t) = D(t)\boldsymbol{\eta}_k(t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

умножим матрицу $D(t)$, представленную в ультраблочной форме (7.4), на приведенное выше асимптотическое выражение каждой из вектор-функций $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Если учесть свойство (6.17) функций $p_{lm}^{(rs)}(t)$, то из полученных асимптотических представлений указанных вектор-функций с помощью простых вычислений получается асимптотическая оценка их координат при $\tau \to +\infty$ вида $(D(t)\boldsymbol{\eta})_j = O(\tau^l)$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, с показателем $l = 0$ или $l = 1$. Последние выражения подставим в правые части системы интегральных уравнений (6.7), которой удовлетворяет $\boldsymbol{\eta}(t)$. Нижние пределы интегрирования $\omega_j$ интегралов, под знаком которых делается указанная подстановка, вычислим по формуле (6.8). В рассматриваемом случае, когда $1 \leqslant k \leqslant n$ и числа $a_j$, $b_j$ имеют вид (7.3), нетрудно проверить, что

$$\omega_j = +\infty, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2n. \tag{7.6}$$

После проведения перечисленных действий интегралы из правых частей равенств (6.7) приобретают вид

$$\begin{gathered} \int_{+\infty}^{t} e^{-(a_j+b_j)\tau} O(\tau^l)\, d\tau = e^{-(a_j+b_j)t} O(t^l), \qquad t \to +\infty, \\ 1 \leqslant j \leqslant 2n, \qquad l \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Для того чтобы вычислить асимптотику на бесконечности координат $\eta_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, решений $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, СДУ (6.16), рассматриваемой со значениями параметров $\mu = \mu_k$, $\nu = \nu_k$, достаточно заменить интегралы, присутствующие в правых частях равенств (6.7), их асимптотическими оценками (7.7) с константами $a_j$, $b_i$, указанными в формуле (7.3). Если записать полученный результат через векторные компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, то получим утверждение леммы 5.

Замечание 4. В дальнейшем будет использоваться вариант формулы (7.7), получаемый путем замены в ней выражений $O(t^l)$, $O(\tau^l)$ выражениями $o(t^l)$, $o(\tau^l)$. Справедливость обеих асимптотических формул очевидна.

Перейдем к доказательству аналога леммы 5 для значений индекса $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$.

Лемма 6. *При каждом $k$, $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$, у СДУ (6.16), рассматриваемой с параметрами $\mu = \mu_k = k-1-1/2$, $\nu = \nu_k = k-1$, есть решение $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ с асимптотикой*

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \boldsymbol{\Delta}_k + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k(t) \\ \mathbf{e}_k(t) \\ \boldsymbol{\delta}_k(t) \\ \boldsymbol{\epsilon}_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(e^{-3t/2}) \\ O(e^{-3t/2}) \\ O(e^{-(2n-p)t}) \\ O(e^{-(2n-p)t}) \end{pmatrix}, \qquad t \to +\infty.$$

Доказательство. Будем использовать схему рассуждений, примененную выше при доказательстве леммы 5. Предположив, что $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$, подставим в СДУ (6.16) значения параметров $\mu = \mu_k$, $\nu = \nu_k$, указанные в лемме 6. Полученную таким способом систему уравнений можно представить в координатной форме (6.1) с числами

$$a_j = \begin{cases} k-j-\dfrac{1}{2}, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ k-j, & n+1 \leqslant j \leqslant 2n-p, \\ k+n-j, & 2n-p+1 \leqslant j \leqslant 2n; \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ 2n-p-\dfrac{1}{2}, & n+1 \leqslant j \leqslant 2n. \end{cases} \tag{7.8}$$

Присутствующую в ней матрицу $D(t)$ легко найти, рассматривая СДУ (6.16) с $\mu = \mu_k, \nu = \nu_k$. При выполнении условий леммы 6 ее ультраблочная форма записи имеет следующую структуру:

$$D(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} e^{-\left(2n-p-\frac{3}{2}\right)t} p_{11}^{(11)}(t) & e^{-\left(2n-p-\frac{3}{2}\right)t} p_{11}^{(12)}(t) & p_{12}^{(11)}(t) & p_{12}^{(12)}(t) \\ te^{-\left(2n-p-\frac{3}{2}\right)t} p_{11}^{(21)}(t) & te^{-\left(2n-p-\frac{3}{2}\right)t} p_{11}^{(22)}(t) & p_{12}^{(21)}(t) & p_{12}^{(22)}(t) \\ \hline p_{21}^{(11)}(t) & p_{21}^{(12)}(t) & e^{-\frac{t}{2}} p_{22}^{(11)}(t) & te^{-\frac{t}{2}} p_{22}^{(12)}(t) \\ p_{21}^{(21)}(t) & p_{21}^{(22)}(t) & e^{-\frac{t}{2}} p_{22}^{(21)}(t) & te^{-\frac{t}{2}} p_{22}^{(22)}(t) \end{array}\right). \tag{7.9}$$

Из формулы (6.17) следует, что элементы матрицы $D(t)$ обладают свойством (6.2) с показателем степени $m = 1$. Легко проверить, что константы (7.8) удовлетворяют условиям (6.4), (6.5) леммы 4.

Лемма 4 дает для рассматриваемых значений индекса $k$ решение $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t)$ СДУ (6.16) с $\mu = \mu_k$, $\nu = \nu_k$, обладающее свойством (6.6) и удовлетворяющее системе интегральных уравнений (6.7) с числами (7.8). В силу того что $k \geqslant n+1$, нижние пределы интегрирования $\omega_j$ интегралов, присутствующих в этих уравнениях, имеют значения (7.6).

Для уточнения остаточного члена асимптотики (6.6) этого решения следует использовать систему интегральных уравнений (6.7) аналогично тому, как она ранее применялась в доказательстве леммы 5. При этом аналогом матрицы (7.4) является матрица (7.9), а роль формулы (7.5), дающей асимптотику на бесконечности векторных компонент вектор-функции (6.6) при $1 \leqslant k \leqslant n$, играет асимптотическое выражение при $t \to +\infty$ вида

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \\ \boldsymbol{\delta}_k^{(3)} + \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \end{pmatrix}, \qquad n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p; \quad \boldsymbol{\delta}_k^{(3)} = \{\delta_{jk}\}_{j=n+1}^{2n-p}. \tag{7.10}$$

Как и при доказательстве леммы 5, указанные действия позволяют улучшить оценки на бесконечности векторных компонент остаточного члена асимптотики (6.6), используя формулу (7.7) с константами $a_j$, $b_j$ вида (7.8) и замечание 4 к ней.

Вычисления, проведенные по описанному плану действий (мы их опускаем ввиду того, что они имеют вполне элементарный характер), приводят к уточнению

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \boldsymbol{\Delta}_k + \begin{pmatrix} O(e^{-3t/2}) \\ O(e^{-3t/2}) \\ o(e^{-(2n-p-1/2)t}) \\ o(e^{-(2n-p-1/2)t}) \end{pmatrix}, \qquad t \to +\infty,$$

асимптотики (6.6). Две последние векторные компоненты второго слагаемого этой асимптотики также можно уточнить. Такое уточнение получается повторением вычислений, которые привели нас к последней формуле, если в них заменить первоначальную грубую асимптотику (6.6) полученным более точным ее вариантом.

Указанные действия приводят к асимптотическому выражению

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \boldsymbol{\Delta}_k + \begin{pmatrix} O(e^{-3t/2}) \\ O(e^{-3t/2}) \\ o(te^{-(2n-p)t}) \\ o(te^{-(2n-p)t}) \end{pmatrix}, \qquad t \to +\infty.$$

Еще раз улучшая полученный результат тем же методом итераций (при этом рассматривая последнее выражение как точку опоры), приходим к асимптотической формуле леммы 6.

Нам осталось получить утверждение, аналогичное леммам 4, 5, для значений индекса $k$, удовлетворяющих условию $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$. Оно состоит в следующем.

Лемма 7. *Рассмотрим СДУ* (6.16) *со значениями параметров* $\mu = \mu_k = k-n-1$, $\nu = \nu_k = k-n-1$. *Для каждого значения индекса* $k$, *удовлетворяющего условию* $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$, *у такой системы есть решение* $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, *асимптотика которого на бесконечности имеет вид*

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k(t) \\ \mathbf{e}_k(t) \\ \boldsymbol{\delta}_k(t) \\ \boldsymbol{\epsilon}_k(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Delta}_k + \begin{pmatrix} O(e^{-t}) \\ O(te^{-t}) \\ O(e^{-t}) \\ O(te^{-(2n-p)t}) \end{pmatrix}, \qquad t \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$. Подставим в СДУ (6.16) указанные в лемме 7 значения параметров $\mu = \mu_k$, $\nu = \nu_k$. Как и раньше, когда доказывались леммы 5, 6, систему уравнений относительно вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(t)$, полученную в результате такой подстановки, можно представить в координатной форме (6.1). Простые подсчеты показывают, что числа $a_j$, $b_j$, присутствующие в таком представлении, вычисляются по формулам

$$a_j = \begin{cases} k-j-n, & 1 \leqslant j \leqslant 2n-p, \\ k-j, & 2n-p+1 \leqslant j \leqslant 2n, \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ 2n-p, & n+1 \leqslant j \leqslant 2n; \end{cases} \tag{7.11}$$

они удовлетворяют условиям (6.4), (6.5). Ультраблочное представление матрицы $D(t)$, присутствующей в рассматриваемой СДУ, записанной в координатной форме (6.1), имеет вид

$$D(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} e^{-(2n-p-1)t}p_{11}^{(11)}(t) & e^{-(2n-p-1)t}p_{11}^{(12)}(t) & p_{12}^{(11)}(t) & p_{12}^{(12)}(t) \\ te^{-(2n-p-1)t}p_{11}^{(21)}(t) & te^{-(2n-p-1)t}p_{11}^{(22)}(t) & p_{12}^{(21)}(t) & p_{12}^{(22)}(t) \\ \hline p_{21}^{(11)}(t) & p_{21}^{(12)}(t) & p_{22}^{(11)}(t) & tp_{22}^{(12)}(t) \\ p_{21}^{(21)}(t) & p_{21}^{(22)}(t) & p_{22}^{(21)}(t) & tp_{22}^{(22)}(t) \end{array}\right). \quad (7.12)$$

Из этой формулы, а также из свойства (6.17) функций $p_{lm}^{(rs)}(t)$ следует выполнение условия (6.2) для элементов матрицы $D(t)$ при $m = 1$.

Так как для координатной формы (6.1) рассматриваемой СДУ условия леммы 4 выполнены, то по этой лемме при каждом $k$, $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$, у нее есть решение $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t)$, обладающее асимптотическим свойством (6.6).

По лемме 4 координаты $\eta_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, этого решения удовлетворяют системе интегральных уравнений (6.7) с нижними пределами $\omega_j$ содержащихся в ней интегралов, вычисленными по формуле (6.8). Так как при $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$ числа $a_j$, $b_j$ имеют вид (7.11), то $a_j + b_j > 0$, если $1 \leqslant j \leqslant k-n$ или $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$, и $a_j + b_j \leqslant 0$, если $k-n+1 \leqslant j \leqslant n$. Поэтому

$$\omega_j = \begin{cases} +\infty, & 1 \leqslant j \leqslant k-n, \\ T < +\infty, & k-n+1 \leqslant j \leqslant n, \\ +\infty, & n+1 \leqslant j \leqslant 2n. \end{cases} \quad (7.13)$$

Применяя последнюю формулу, следует иметь в виду, что в рассматриваемом случае имеет место неравенство $n-p+1 \leqslant k-n \leqslant n$.

При $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$ аналог представлений (7.5), (7.10) асимптотики (6.6) вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t)$ выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \\ \mathbf{o}(1) \\ \boldsymbol{\delta}_k^{(4)} + \mathbf{o}(1) \end{pmatrix}, \qquad t \to +\infty;$$

при этом $\boldsymbol{\delta}_k^{(4)} = \{\delta_{jk}\}_{j=2n-p+1}^{2n}$. Используя последнюю формулу вместе с формулами (6.17), (7.12) для оценки поведения на бесконечности векторных компонент вектор-функции $D(t)\boldsymbol{\eta}(t)$, приходим к асимптотической оценке

$$D(t)\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{pmatrix} O(1) \\ O(1) \\ tO(1) \\ tO(1) \end{pmatrix}, \qquad t \to +\infty.$$

Заменим ею вектор-функцию $D(t)\boldsymbol{\eta}(t)$ в правых частях равенств (6.7), справедливых (со значениями (7.11) констант $a_j$, $b_j$) для координат $\eta_j(t)$ решения $\boldsymbol{\eta}(t)$

СДУ, рассматриваемой в лемме 7. При $1 \leqslant j \leqslant k-n$ и $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$ (когда $\omega_j = +\infty$ в силу формулы (7.13)) для получения оценок на бесконечности интегралов $\displaystyle\int_{\omega_j}^{t} \dots d\tau$, возникающих в результате такой замены, достаточно применить формулу (7.7) (или ее вариант, описанный в замечании 4). Если $k-n+1 \leqslant j \leqslant n$, то $\omega_j = T < +\infty$. В этом случае вместо асимптотической оценки (7.7) следует использовать не менее очевидное (для рассматриваемых $a_j$, $b_j$) свойство

$$\int_T^t e^{|a_j+b_j|\tau} O(\tau^l)\, d\tau = \begin{cases} O(t^{l+1}), & j = k-n+1, \\ e^{|a_j+b_j|t} O(t^l), & k-n+2 \leqslant j \leqslant n; \end{cases} \qquad l \geqslant 0, \quad t \to +\infty.$$

Завершение доказательства леммы 7 состоит в вычислении асимптотики на бесконечности преобразованных указанным способом правых частей равенств (6.7) с применением перечисленных технических средств.

Замечание 5. Строго говоря, формула (7.13), используемая в доказательстве леммы 6, верна, если $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n-1$. При $k = 2n$ из нее нужно удалить часть, относящуюся к пустому множеству индексов $j$, для которых $n+1 = k-n+1 \leqslant j \leqslant n$. Такое же удаление следует сделать в дальнейших результатах, относящихся к значению индекса $k = 2n$.

## § 8. Завершение доказательства предложения 1

На завершающем этапе доказательства предложения 1 мы используем полученные в леммах 5–7 вектор-функции $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, для построения фундаментального семейства решений дифференциального уравнения (2.3), обладающего всеми свойствами, перечисленными в предложении 1.

В первую очередь построим семейство решений $\mathbf{h}_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, СДУ (5.11) по формуле (7.1) и найдем асимптотику каждого из них при $t \to +\infty$, используя определение (6.10) матрицы $V_{\mu,\nu}(t)$ и значения параметров $\mu_k$, $\nu_k$, рассматриваемые в леммах 5–7. Согласно формуле (6.10) умножение матрицы $V_{\mu,\nu}(t)$ на вектор-функцию $\eta(t)$ равносильно умножению двух первых векторных компонент этой вектор-функции на $e^{-\mu t}$, а ее двух последних векторных компонент – на $e^{-\nu t}$. С учетом этого замечания и выражений для чисел $\mu_k$, $\nu_k$, указанных в леммах 5–7, непосредственным следствием этих лемм являются формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_k(t) &= e^{-(k-1)t}(\boldsymbol{\Delta}_k + \boldsymbol{\rho}_k(t)), \qquad && 1 \leqslant k \leqslant 2n-p, \\ \mathbf{h}_k(t) &= e^{-(k-n-1)t}(\boldsymbol{\Delta}_k + \boldsymbol{\rho}_k(t)), && 2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n; \end{aligned}$$

асимптотика при $t \to +\infty$ их остаточных членов имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\rho}_k(t) = \begin{pmatrix} O(e^{-(2n-p)t}) \\ O(te^{-(2n-p)t}) \\ O(e^{-(2n-p)t}) \\ O(e^{-(2n-p)t}) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

$$\boldsymbol{\rho}_k(t) = \begin{pmatrix} O(e^{-t}) \\ O(e^{-t}) \\ O(e^{-(2n-p)t}) \\ O(e^{-(2n-p)t}) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p;$$

$$\boldsymbol{\rho}_k(t) = \begin{pmatrix} O(e^{-t}) \\ O(te^{-t}) \\ O(te^{-(2n-p)t}) \\ O(te^{-(2n-p)t}) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad 2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n.$$

Нашим следующим шагом является построение набора вектор-функций $\mathbf{v}_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, $\mathbf{v}_k(x) = \{v_{jk}(x)\}_{j=1}^{2n}$, $x \in (0,h)$, по формуле (7.2) и затем нахождение асимптотики при $x \to +0$ их координат $v_{jk}(x)$.

Для получения указанной асимптотики следует заменить в формуле (7.2) решения $\mathbf{h}_k(t)$ СДУ (5.11) их асимптотическими выражениями, приведенными выше, после чего провести диктуемые этой формулой элементарные вычисления, используя ультраблочные представления (4.11) и (4.15) матриц $U$ и $\mathscr{E}$ соответственно. В этих вычислениях также используются элементы столбцов $\mathbf{u}_{jk}(t) = \{u_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n}$ матрицы $U$, свойства которых приведены в формулах (4.7), (4.8), (4.9).

С помощью указанных элементарных вычислений получаются следующие асимптотические формулы, в которых $x \to +0$:

1) при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$v_{jk}(x) = \begin{cases} x^{k-1}[(k-1)^{\{j-1\}} + o(1)], & 1 \leqslant j \leqslant k, \\ O(x^{k-1+2n-p}\ln x), & k+1 \leqslant j \leqslant n, \\ O(x^{k-1+2n-p}), & n+1 \leqslant j \leqslant 2n; \end{cases} \tag{8.1}$$

2) при $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$

$$v_{jk}(x) = \begin{cases} x^{k-1}[(k-1)^{\{j-1\}} + o(1)], & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ x^{k-1}[(-1)^{j-n-1}(k-1)^{\{n\}} & \\ \qquad \times (k-n+p-1)^{\{j-n-1\}} + o(1)], & n+1 \leqslant j \leqslant k+p, \\ O(x^{k-1+2n-p}), & k+p+1 \leqslant j \leqslant 2n; \end{cases} \tag{8.2}$$

3) при $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$

$$v_{jk}(x) = \begin{cases} x^{k-n-1}\ln x[(k-n-1)^{\{j-1\}} + o(1)], & 1 \leqslant j \leqslant k-n, \\ O(x^{k-n-1}), & k-n+1 \leqslant j \leqslant n, \\ x^{k-n-1}[u_{jk} + O(x^{2n-p}\ln x)], & n+1 \leqslant j \leqslant k-n+p, \\ O(x^{k+n-p-1}\ln x), & k-n+p+1 \leqslant j \leqslant 2n. \end{cases} \tag{8.3}$$

Свойства элементов $u_{jk}$ матрицы $U$, индексы которых удовлетворяют условиям $n+1 \leqslant j \leqslant k-n+p$, $2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n$, описаны в формуле (4.9).

Согласно схеме рассуждений, изложенной в начале §5, $2n$ функций $y_k(x) = v_{1k}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, образуют набор решений дифференциального уравнения (2.3). Из формул (8.1), (8.2), (8.3) следует, что

$$y_k(x) = \begin{cases} x^{k-1}(1+o(1)), & 1 \leqslant k \leqslant 2n-p, \\ x^{k-n-1}\ln x, & 2n-p+1 \leqslant k \leqslant 2n, \end{cases}$$

при $x \to +0$. Поэтому построенные решения $y_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, дифференциального уравнения (2.3) линейно независимы и образуют его фундаментальное семейство решений. Так как каждое из них принадлежит $L^2(0,h)$, то построенное фундаментальное семейство решений дифференциального уравнения (2.3) обладает первым из свойств, указанных в предложении 1.

Перейдем к проверке существования для фундаментального семейства решений $y_k(x) = v_{1k}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, дифференциального уравнения (2.3) пределов, указанных в предложении 1.

1) Сначала рассмотрим случай, когда $1 \leqslant k \leqslant n$. Считая это условие выполненным, возьмем связанную с $y_k(x)$ вектор-функцию $\mathbf{v}_k(x) = \{v_{jk}(x)\}_{j=1}^{2n}$, асимптотика координат которой при $x \to +0$ имеет вид (8.1). Из формулы (2.5) следует равенство

$$Q[f,y_k](+0) = -\lim_{x\to+0} Q_1[f,y_k](x) + \lim_{x\to+0} Q_2[f,y_k](x). \tag{8.4}$$

Если подставить в формулу (5.5) функцию $y(x) = y_k(x)$, то в ней следует понимать под функциями $v_j(x)$ координаты $v_{jk}(x)$ вектор-функции $\mathbf{v}_k(x)$. Заменяя эти координаты их асимптотиками (8.1), получим формулы

$$\begin{aligned} Q_1[f,y_k](x) &= \sum_{j=1}^{k} f^{[2n-j]}(x) x^{k-j}[(k-1)^{\{j-1\}} + o(1)] \\ &\qquad + \sum_{j=k+1}^{n} f^{[2n-j]}(x) O(x^{k-j+2n-p}\ln x), \\ Q_2[f,y_k](x) &= \sum_{j=n+1}^{2n} f^{[2n-j]}(x) O(x^{k-j+2n}), \end{aligned}$$

$x \to +0$. При $p = 1,2,\ldots,n$ очевидным следствием последних асимптотических выражений для компонент формулы (8.4) является равенство $Q[f,y_k](+0) = \alpha_k f^{[2n-k]}(0)$, $\alpha_k = -(k-1)^{\{k-1\}} = -(k-1)!$ (см. формулу (4.6)) для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(-h,h)$. Так как $f^{[2n-k]}(0) = 0$ при $n-p+1 \leqslant k \leqslant n$ по первому утверждению леммы 3, то полученное равенство означает справедливость формулы (2.6) в ее части, относящейся к случаям, когда $1 \leqslant k \leqslant n-p$ и $n-p+1 \leqslant k \leqslant n$. Заметим, что при $1 \leqslant k \leqslant n-p$ константы $\alpha_k = -(k-1)!$ обладают свойством, указанным в предложении 1.

2) Предположим, что $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-p$. В этом случае асимптотические выражения для $Q_1[f,y_k](x)$ и $Q_2[f,y_k](x)$ при $x \to +0$, которые получаются, если в формуле (5.5) положить $y(x) = y_k(x)$, $v_j(x) = v_{jk}(x)$ и заменить последние функции их асимптотиками (8.2), имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1[f,y_k](x) &= \sum_{j=1}^{n} f^{[2n-j]}(x) x^{k-j}[(k-1)^{\{j-1\}} + o(1)], \\ Q_2[f,y_k](x) &= \sum_{j=n+1}^{k+p} f^{[2n-j]}(x) x^{k+p-j}[(-1)^{j-n-1}(k-1)^{\{n\}} \\ &\qquad \times (k-n+p-1)^{\{j-n-1\}} + o(1)] + \sum_{j=k+p+1}^{2n} f^{[2n-j]}(x) O(x^{k-j+2n}), \end{aligned}$$

$x \to +0$. Из этих формул следует, что при $p = 1, 2, \dots, n$ и $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n - p$ предел (8.4) существует и справедливо равенство $Q[f, y_k](+0) = \alpha_k f^{[2n-k-p]}(0)$, $\alpha_k = (-1)^{k-n+p-1}(k-1)^{\{n\}}(k-n+p-1)^{\{k-n+p-1\}} = (-1)^{k-n+p-1}(k-1)^{\{n\}} \times (k - n + p - 1)! \neq 0$. Таким образом, утверждения предложения 1 верны для значений индекса $k$, удовлетворяющих условию $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n - p$.

3) Докажем утверждение предложения 1, относящееся к значениям индекса $2n - p + 1 \leqslant k \leqslant 2n$. Для этого применим формулу (5.5) с функциями $y(x) = y_k(x)$, $v_j(x) = v_{jk}(x)$, после чего заменим в ней функции $v_{jk}(x)$ их асимптотиками (8.3). В результате этих действий получим выражения

$$
\begin{aligned}
Q_1[f, y_k](x) = &\sum_{j=1}^{k-n-1} f^{[2n-j]}(x) x^{k-n-j} \ln x[(k-n-1)^{\{j-1\}} + o(1)] \\
&+ f^{[3n-k]}(x) \ln x[(k-n-1)^{\{k-n-1\}} + o(1)] \\
&+ \sum_{j=k-n+1}^{n} f^{[2n-j]}(x) O(x^{k-n-j}), \\
Q_2[f, y_k](x) = &\sum_{j=n+1}^{k-n+p} f^{[2n-j]}(x) x^{k-n+p-j}[u_{jk} + O(x^{2n-p} \ln x)] \\
&+ \sum_{j=k-n+p+1}^{2n} f^{[2n-j]}(x) O(x^{k+n-j} \ln x),
\end{aligned}
$$

$x \to +0$.

Для вычисления предела при $x \to +0$ первого из полученных выражений положим $l = 2n - j$ и заметим, что $n \leqslant l \leqslant 3n - k \leqslant p + n - 1$, если $2n - p + 1 \leqslant k \leqslant 2n$. По первому утверждению леммы 3 для таких $l$ справедливы асимптотические оценки $f^{[l]}(x) = f^{[2n-j]}(x) = O(x^{p+j-n})$, $x \to +0$. Они означают, что каждое слагаемое выражения для $Q_1[f, y_k](x)$ с номером $j$, $k - n \leqslant j \leqslant n$, имеет при $x \to +0$ оценку $O(x^{k-2n+p} \ln x)$ или $O(x^{k-2n+p})$. Так как $k \geqslant 2n - p + 1$, то все такие слагаемые являются бесконечно малыми при $x \to +0$; поэтому $Q_1[f, y_k](+0) = \lim_{x\to+0} Q_1[f, y_k](x) = 0$. Вместе с тем, при $p = 1, 2, \dots, n$ и $2n - p + 1 \leqslant k \leqslant 2n$ слагаемые полученного выражения для $Q_2[f, y_k](x)$ с номерами $j \neq k - n + p$ стремятся к нулю, когда $x \to +0$. Это означает, что $Q_2[f, y_k](+0) = \lim_{x\to+0} Q_2[f, y_k](x) = u_{k-n+p\,k} f^{[3n-k-p]}(0)$ и, следовательно, предел (8.4) равен $\alpha_k f^{[3n-k-p]}(0)$ с константой $\alpha_k = u_{k-n+p\,k}$, отличной от нуля в силу формулы (4.9). Таким образом, предложение 1 верно также в его части, относящейся к случаю, когда $2n - p + 1 \leqslant k \leqslant 2n$, т.е. оно справедливо в полной общности.

## Список литературы


1. *Орочко Ю. Б.* Примеры симметрических дифференциальных операторов на прямой с бесконечными индексами дефекта // Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. №2. С. 69–72.
2. *Орочко Ю. Б.* Условия непроницаемости точки вырождения одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка // Матем. сб. 2003. Т. 194. №5. С. 109–138.

3. *Орочко Ю. Б.* Индексы дефекта симметрического обыкновенного дифференциального оператора с бесконечным числом точек вырождения // Функц. анализ и его прилож. 2004. Т. 38. №2. С. 55–65.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
5. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954.

Московский государственный институт
электроники и математики,
технический университет (МГИЭМ)
*E-mail*: matan@miem.edu.ru for Orochko

Поступила в редакцию
17.08.2004