С. А. Степин, Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса,
*Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 1, 139–160

УДК 517.9

**С. А. Степин**

# Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса

В работе изучается диссипативный интегро-дифференциальный оператор $L$, возникающий при линеаризации уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса частиц. В предположениях, обеспечивающих конечность точечного спектра $L$, найдено скалярное кратное характеристической функции оператора $L$ и указано условие отсутствия спектральных особенностей. С помощью техники нестационарной теории рассеяния и с использованием функциональной модели Сёкефальви-Надя и Фояша построены прямой и обратный волновые операторы со свойством полноты. Изучена структура оператора $L$ в инвариантном подпространстве, отвечающем его непрерывному спектру.

Библиография: 21 название.

Линейная теория переноса излучения является частью общей кинетической теории, которая связана с фундаментальными принципами классической статистической механики (см. [1], [2]). Используемое в этой теории основное уравнение (уравнение переноса) представляет собой вариант линеаризованного кинетического уравнения Больцмана. Математическое исследование уравнения переноса в односкоростном случае, т.е. в предположении, что изменяется лишь направление распространения излучения при постоянной энергии кванта, впервые было проведено В. С. Владимировым [3]. Обзор различных аспектов теоретических исследований уравнения Больцмана и его применений содержится в [4]. Линейной теории переноса посвящены монографии [5], [6].

В настоящей работе изучается интегро-дифференциальный оператор, возникающий при линеаризации уравнения Больцмана в рамках односкоростной модели переноса нейтронов. Рассматривается случай плоской симметрии, когда количественные характеристики рассеяния нейтронов зависят лишь от одной пространственной координаты, скажем $x$. При этом процесс рассеяния описывается функцией распределения $\Psi(x,\mu,t)$, имеющей смысл плотности числа частиц, находящихся в момент времени $t$ в точке с координатой $x$ и таких, что косинус угла между скоростью частицы и осью $x$ равен $\mu$. Линеаризованное уравнение эволюции функции распределения $\Psi(x,\mu,t)$ имеет следующий вид (см., например, [4]):

$$\left(\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial x}+\sigma\right)\Psi(x,\mu,t)=\sigma\frac{b(x)}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(x,\mu,t)\,d\mu. \qquad (1)$$

Здесь $v$ – скорость нейтронов, $\sigma$ – величина, обратно пропорциональная средней длине свободного пробега нейтронов между столкновениями. Не ограничивая общности, будем считать скорость $v$ и параметр $\sigma$ единичными. Коэффициент $b(x)\in \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R})$ – среднее число частиц, появляющихся в результате столкновения нейтрона с ядром в точке с координатой $x$.

С уравнением (1) связан оператор

$$L = L_0 + iV = i\mu\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{b(x)}{2}\int_{-1}^{1} \cdot \, d\mu,$$

действующий в пространстве $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R} \times [-1,1])$, с областью определения $D(L) = \{\psi \in \mathscr{H} : \psi(\,\cdot\,,\mu)$ абсолютно непрерывна для п.в. $\mu \in [-1,1]$, $L_0\psi \in \mathscr{H}\}$, где

$$L_0 := i\mu\frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad V := b(x)K, \qquad K := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cdot \, d\mu.$$

В рассматриваемой здесь постановке вопрос об исследовании спектральных свойств и построении спектрального разложения для оператора $L$ восходит к К. О. Фридрихсу (см. [7], [8]).

В серии работ [8]–[10] были детально изучены спектральные свойства оператора $L$ в случае, когда функция $b(x)$ пропорциональна индикатору интервала. Для произвольной финитной неотрицательной функции $b(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ в [11] показано, что непрерывный спектр оператора $L$ заполняет вещественную ось, точечный спектр состоит из нормальных полупростых собственных значений, принадлежащих $i\mathbb{R}_+$. В работе автора [12] показано, что при условиях $b(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ и $b(x) \geqslant 0$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$ у оператора $L$ сохраняется указанная выше структура спектра; при условии $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ суммарная кратность $N(b)$ собственных значений оператора $L$ конечна.

Для финитных функций $b(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ в работе [11] в представлении функциональной модели оператора $L$ изучается компонента $L_c$, отвечающая его непрерывному спектру, и, в частности, получен ответ на вопрос, когда оператор $L_c$ подобен самосопряженному. При этом установлено, что препятствием для такого подобия служит спектральная особенность оператора $L$, а также выделено множество $\mathscr{E} \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ такое, что оператор $L = L_0 + iV$ (в случае финитной $b(x)$) имеет спектральную особенность в том и только том случае, если $b(x) \in \mathscr{E}$.

В работе [12] применительно к рассматриваемой там ситуации получено новое (по сравнению с [11]) описание "исключительного" множества $\mathscr{E}$ в терминах однопараметрического семейства операторов $L(\tau) = L_0 + i\tau V$. А именно $b(x) \in \mathscr{E}$ в том и только том случае, если $N(\tau b) > N(b)$ для $\tau > 1$. При этом требование $b(x) \notin \mathscr{E}$ снова является необходимым и достаточным условием отсутствия спектральных особенностей у оператора $L = L_0 + iV$.

Цель настоящей работы – построение и изучение свойств волновых операторов, осуществляющих подобие $L_c$ и $L_0$ в случае нефинитной функции $b(x)$. На этом пути оказывается продуктивным соединение техники нестационарной теории рассеяния и подхода, использующего функциональную модель Сёкефальви-Надя и Фояша. Отметим, что к оператору $L = L_0 + iV$ метод "гладкой теории возмущений" (см. [13]) неприменим.

Теорема 1. *Пусть $b(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, $b(x) \geqslant 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$ и сходится интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}\biggl(\int_{|x|\geqslant t} b^2(x)\,dx\biggr)^{1/2}.$$

*Тогда существует волновой оператор*

$$\Omega = \operatorname{s-}\lim_{t\to\infty} \exp(itL)\exp(-itL_0).$$

*Для плотного в $\mathscr{H}$ множества векторов $\varphi$ матричные элементы $(\Omega\varphi,\psi)$, $\psi\in\mathscr{H}$, вычисляются по формуле*

$$(\Omega\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(\sqrt{V}\,R_0(\tau+i0)\varphi,\sqrt{V}\,R^*(\tau-i0)\psi\bigr)\,d\tau.$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\sigma(A)$ – спектр оператора $A$, $\sigma_c(A)$ – непрерывный спектр, $\sigma_p(A)$ – точечный спектр оператора $A$, $R(\lambda):=(L-\lambda I)^{-1}$, $R_0(\lambda):=(L_0-\lambda I)^{-1}$, $R^*(\lambda):=(R(\lambda))^*$.

Как показывает следующее предложение, в случае, когда оператор $L$ не имеет спектральных особенностей, существуют полные волновые операторы, реализующие подобие $L_c$ и $L_0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, $b(x)(\ln|x-y|)^2b(y)\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Предположим также, что оператор $L=L_0+iV$ вполне несамосопряженный и $b(x)\notin\mathscr{E}$. Тогда $\Omega\mathscr{H}=(I-P)\mathscr{H}$, где $P$ – проектор Рисса, отвечающий $\sigma_p(L)$. При этом на подпространстве $(I-P)\mathscr{H}$ существует ограниченный волновой оператор*

$$\widetilde{\Omega}=\text{s-}\lim_{t\to\infty}\exp(itL_0)\exp(-itL)$$

*и справедливо соотношение*

$$L_c=\Omega L_0\widetilde{\Omega},$$

*где $L_c$ – сужение $L$ на подпространство $(I-P)\mathscr{H}$.*

Эта теорема для рассматриваемого в работе класса функций $b(x)$ дает ответ на вопрос, поставленный Фридрихсом, в том смысле, что с помощью прямого и обратного волновых операторов $\Omega$ и $\widetilde{\Omega}$ явно строится спектральное представление оператора $L$. Требование полной несамосопряженности оператора $L$ не является ограничительным с точки зрения теории возмущений (см. [14]) и налагается для простоты изложения.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в заметке [15].

## § 1. Структура спектра оператора $L$

Здесь приведена сводка результатов из работы [12], а также некоторые вспомогательные сведения, которые потребуются в дальнейшем.

Пусть $b(x)\in\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ и $b(x)\geqslant 0$ при п.в. $x\in\mathbb{R}$. Поскольку оператор $V\geqslant 0$ ограничен, то $L=L_0+iV$ – максимальный диссипативный оператор (см. [16]) и, таким образом,

$$\sigma(L)\cap\mathbb{C}_-=\varnothing.$$

Важную роль при исследовании расположения спектра $\sigma(L)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ играет следующее тождество:

$$R(\lambda)=R_0(\lambda)-iR_0(\lambda)\sqrt{V}\,(I+Q(\lambda))^{-1}\sqrt{V}\,R_0(\lambda), \tag{2}$$

где $Q(\lambda)=\sqrt{b}\,E(\lambda)\sqrt{b}$ и через $E(\lambda)$ обозначено сужение оператора $iKR_0(\lambda)$ на образ $K$, совпадающий с пространством $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, естественным образом вложенным в $\mathscr{H}$. Известно (см. [8], [11]), что $Q(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}_+$ представляет собой интегральный оператор с ядром

$$q(x,y;\lambda) := \frac{1}{2}\sqrt{b(x)}\ \mathrm{Ei}(i\lambda|x-y|)\sqrt{b(y)}\,;$$

здесь $\mathrm{Ei}(z)$ – интегральная показательная функция, определяемая формулой

$$\mathrm{Ei}(z) = -\int_1^\infty \frac{e^{zt}}{t}\,dt = \ln(-z) + \gamma + \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n\cdot n!}\,, \tag{3}$$

где $\gamma$ – постоянная Эйлера. Из тождества (2) следует, что

$$\sigma(L)\cap\mathbb{C}_+ = \bigl\{\lambda\in\mathbb{C}_+ : -1\in\sigma(Q(\lambda))\bigr\}. \tag{4}$$

Оператор $E(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, унитарно эквивалентен (см. [9]) оператору умножения на функцию

$$\Lambda(s;\lambda) = \frac{i}{2s}\ln\frac{\lambda-s}{\lambda+s}\,,$$

причем указанная эквивалентность осуществляется преобразованием Фурье по переменной $x$. Далее, поскольку $\operatorname{Re}\lambda\cdot\operatorname{Im}\Lambda(s;\lambda)<0$ и $(Q(\lambda)\psi,\psi) = (E(\lambda)\sqrt{b}\,\psi,\sqrt{b}\,\psi)$, то

$$\operatorname{Re}\lambda\cdot\operatorname{Im}(Q(\lambda)\psi,\psi)<0, \tag{5}$$

если $\operatorname{Re}\lambda\neq 0$ и $\sqrt{b}\,\psi\neq 0$ как элемент $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, и, стало быть,

$$\sigma_p(L)\subset i\mathbb{R}_+.$$

Допустим, что $[Q(\lambda)]^l$ при некотором $l\in\mathbb{N}$ и всех $\lambda\in\mathbb{C}_+$ принимает значения в классе $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов. Тогда согласно аналитической альтернативе Фредгольма оператор-функция $(I+Q(\lambda))^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}_+$, причем ее вычеты в полюсах суть операторы конечного ранга. Ввиду соотношения (2) то же верно для резольвенты $R(\lambda)$, и поэтому спектр оператора $L$ в открытой верхней полуплоскости представляет собой дискретное множество конечнократных собственных значений.

Следующее утверждение дает достаточное условие компактности оператора $Q(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, и, сверх того, принадлежности $Q(\lambda)$ классу $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта–Шмидта.

Предложение 1 [12]. *Если $b(x)\in\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ и $b(x)\geqslant 0$ при п.в. $x\in\mathbb{R}$, то $Q(\lambda)\in\mathfrak{S}_2$ для каждого $\lambda\in\mathbb{C}_+$.*

Доказательство этого предложения основано на следующих оценках ядра $q(x,y;\lambda)$ интегрального оператора $Q(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$:

$$|q(x,y;\lambda)|\leqslant M\sqrt{b(x)b(y)}, \qquad |x-y|\geqslant\delta, \tag{6}$$

$$|q(x,y;\lambda)|\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{b(x)}\,\bigl(\bigl|\ln|x-y|\bigr|+K(\lambda)\bigr)\sqrt{b(y)}, \quad |x-y|\leqslant\delta, \tag{7}$$

где $M\geqslant 1$, $K(\lambda)=\bigl|\ln|\lambda|\bigr|+\mathrm{const}$, $\delta=\min\bigl\{|\operatorname{Re}\lambda|^{-1},(\operatorname{Im}\lambda)^{-1}\bigr\}$, если $\operatorname{Re}\lambda\neq 0$, и $\delta=(\operatorname{Im}\lambda)^{-1}$ при $\operatorname{Re}\lambda=0$.

Отметим, что установленная в [10] применительно к рассматриваемому там случаю оценка

$$\|Q(\lambda)\|^2_{\mathfrak{S}_2}\leqslant\mathrm{const}\,|\operatorname{Re}\lambda|^{-1} \tag{8}$$

для $\lambda\in\mathbb{C}_+$ таких, что $|\operatorname{Re}\lambda|\geqslant 1$ и $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 1$, справедлива и в предположении $b(x)\in\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Доказательство этого факта вполне аналогично проведенному в [10] в случае, когда функция $b(x)$ пропорциональна индикатору интервала.

Предложение 2 [12]. *Пусть* $b(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *и* $b(x) \geqslant 0$ *при п.в.* $x \in \mathbb{R}$. *Тогда непрерывный спектр оператора* $L$ *заполняет вещественную ось, а точечный спектр состоит из нормальных полупростых собственных значений, принадлежащих* $i\mathbb{R}_+$. *Суммарная кратность* $N(b)$ *собственных значений оператора* $L$ *допускает оценку*

$$N(b) \leqslant 1 + \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\,dx\,dy.$$

## § 2. Построение прямого волнового оператора

Ниже с помощью метода Кука строится прямой волновой оператор $\Omega$, сплетающий $L$ и $L_0$, и найдено стационарное представление для матричных элементов оператора $\Omega$.

Через $U(t)$ обозначим однопараметрическое семейство операторов

$$U(t)\psi(x,\mu) = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{iLt}{n}\right)^{-n} \psi(x,\mu)$$

(область определения $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, состоит из тех $\psi \in \mathscr{H}$, для которых существует указанный предел); при $t \geqslant 0$ операторы $U(t)$ образуют сжимающую полугруппу $U(t) = \exp(itL)$. Действие унитарной группы $U_0(t) = \exp(itL_0)$ задается следующей формулой

$$U_0(t)\psi(x,\mu) = \psi(x-\mu t,\mu).$$

Теорема 1. *Пусть* $b(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, $b(x) \geqslant 0$ *при п.в.* $x \in \mathbb{R}$ *и сходится интеграл*

$$\int^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \left(\int_{|x|\geqslant t} b^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{9}$$

*Тогда существует волновой оператор* $\Omega = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} U(t)U_0(-t)$, *сплетающий* $L$ *и* $L_0$: $L\Omega = \Omega L_0$. *Для плотного в* $\mathscr{H}$ *множества векторов* $\varphi$ *матричные элементы* $(\Omega\varphi,\psi)$, $\psi \in \mathscr{H}$, *вычисляются по формуле*

$$(\Omega\varphi,\psi) = (\varphi,\psi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \bigl(\sqrt{V}\,R_0(\tau+i0)\varphi, \sqrt{V}\,R^*(\tau-i0)\psi\bigr)\,d\tau. \tag{10}$$

Доказательство. 1) Поскольку $\|U(t)U_0(-t)\| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, то достаточно доказать существование предела

$$\lim_{t\to\infty} U(t)U_0(-t)\varphi \tag{11}$$

для векторов $\varphi$ из плотного в $\mathscr{H}$ множества

$$\mathscr{D} = \mathrm{C}_0^\infty\bigl(\mathbb{R}\times\{(-1,0)\cup(0,1)\}\bigr).$$

Согласно методу Кука (см., например, [17]) существование предела (11) обеспечивается сходимостью интеграла

$$\int_0^\infty \|VU_0(-t)\varphi\|\,dt < \infty.$$

Здесь $\varphi \in \mathscr{D}$ и, следовательно, $\varphi(s,\mu) = 0$ при $|s| \geqslant a$ и $|\mu| \leqslant \varepsilon$ для некоторых $a > 0$ и $\varepsilon > 0$. Положим $M = \max|\varphi(s,\mu)|$ и выполним оценку нормы вектора $VU_0(-t)\varphi$. При $t > 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
\|VU_0(-t)\varphi\|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} b^2(x)\left|\int_{-1}^{1}\varphi(x+\mu t,\mu)\,d\mu\right|^2 dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} b^2(x)\int_{-1}^{1}|\varphi(x+\mu t,\mu)|^2\,d\mu\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} ds\int_{-1}^{1} b^2(s-\mu t)|\varphi(s,\mu)|^2\,d\mu \\
&\leqslant M^2\int_{-a}^{a} ds\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{1}\right)b^2(s+\mu t)\,d\mu.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует неравенство

$$
\int_0^\infty \|VU_0(-t)\varphi\|\,dt \leqslant M\sqrt{2a}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\left\{\left(\int_{-a-t}^{a-\varepsilon t}+\int_{-a+\varepsilon t}^{a+t}\right)b^2(x)\,dx\right\}^{1/2},
$$

где правая часть конечна при условии сходимости интеграла (9).

В результате установлены существование и ограниченность оператора $\Omega = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} U(t)U_0(-t)$, допускающего представление

$$
\Omega = I - \int_0^\infty U(t)VU_0(-t)\,dt. \tag{12}
$$

2) Проверим, что $\Omega$ сплетает операторы $L$ и $L_0$. В самом деле, для произвольного $t > 0$ имеем $U(t)\Omega = \Omega U_0(t)$. При $t \downarrow 0$ в равенстве

$$
\frac{U(t)-I}{t}\Omega\varphi = \Omega\frac{U_0(t)-I}{t}\varphi, \qquad \varphi \in D(L_0),
$$

предел справа существует и равен $i\Omega L_0\varphi$. Стало быть, существует предел слева

$$
\lim_{t\downarrow 0}\frac{U(t)-I}{t}\Omega\varphi = iL\Omega\varphi,
$$

где $\Omega\varphi \in D(L) = D(L_0)$ и $L\Omega\varphi = \Omega L_0\varphi$ для $\varphi \in D(L_0)$.

3) Повторяя выкладки, проведенные в ходе доказательства первой части теоремы, для элементов $\varphi$ из плотного в $\mathscr{H}$ множества $\mathscr{D}$ при $t > 0$ будем иметь:

$$
\|\sqrt{V}\,U_0(\pm t)\varphi\|^2 \leqslant \frac{\mathrm{const}}{t}\left(\int_{-a-t}^{a-\varepsilon t}+\int_{-a+\varepsilon t}^{a+t}\right)b(x)\,dx.
$$

С использованием неравенства Буняковского–Коши отсюда получаем оценку

$$
\|\sqrt{V}\,U_0(\pm t)\varphi\|^2 \leqslant \mathrm{const}\,\frac{\sqrt{t+2a}}{t}\left\{\left(\int_{-a-t}^{a-\varepsilon t}+\int_{-a+\varepsilon t}^{a+t}\right)b^2(x)\,dx\right\}^{1/2}
$$

и, таким образом, $\|\sqrt{V}\,U_0(t)\varphi\| \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ при условии сходимости интеграла (9). Учитывая известные (см. [13]) равенства

$$\int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{V}\,R_0(k\pm i\varepsilon)\varphi\|^2\,dk = 2\pi\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\|\sqrt{V}\,U_0(\mp t)\varphi\|^2\,dt,$$

где $\varepsilon>0$, заключаем, что

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{V}\,R_0(k\pm i\varepsilon)\varphi\|^2\,dk<\infty.$$

Как следствие этого существуют предельные значения $\sqrt{V}\,R_0(\kappa+i0)\varphi$ для п.в. $\kappa\in\mathbb{R}$ и в среднем квадратичном имеет место сходимость $\sqrt{V}\,R_0(\kappa+i\varepsilon)\varphi \to \sqrt{V}\,R_0(\kappa+i0)\varphi$, когда $\varepsilon\downarrow 0$.

Далее, поскольку $L$ – максимальный диссипативный оператор с ограниченной мнимой частью, то согласно [14] для произвольного вектора $\psi\in\mathscr{H}$:

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{V}\,R^*(k-i\varepsilon)\psi\|^2\,dk<\infty,$$

при п.в. $\kappa\in\mathbb{R}$ определены граничные значения $\sqrt{V}\,R^*(\kappa-i0)\psi$ и имеет место сходимость $\sqrt{V}\,R^*(\kappa-i\varepsilon)\psi\to\sqrt{V}\,R^*(\kappa-i0)\psi$ при $\varepsilon\downarrow 0$ в среднем квадратичном.

4) Согласно (12) для произвольных векторов $\varphi,\psi\in\mathscr{H}$ выполнено равенство

$$(\Omega\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)-\int_0^\infty\bigl(\sqrt{V}\,U_0(-t)\varphi,\sqrt{V}\,U^*(t)\psi\bigr)\,dt,$$

где $U^*(t)=\exp(-itL^*)$. В силу известной формулы, связывающей экспоненту и резольвенту оператора, имеем

$$i\int_0^\infty e^{i\kappa t}e^{-\varepsilon t}\sqrt{V}\,U_0(-t)\varphi\,dt=\sqrt{V}\,R_0(\kappa+i\varepsilon)\varphi,$$
$$i\int_0^\infty e^{i\kappa t}e^{-\varepsilon t}\sqrt{V}\,U^*(t)\psi\,dt=\sqrt{V}\,R^*(\kappa-i\varepsilon)\psi.$$

Таким образом, $\sqrt{V}\,R_0(\kappa+i\varepsilon)\varphi$ и $\sqrt{V}\,R^*(\kappa-i\varepsilon)\psi$ суть обратные преобразования Фурье вектор-функций $i\sqrt{2\pi}\,\rho(t)e^{-\varepsilon t}\sqrt{V}\,U_0(-t)\varphi$ и $i\sqrt{2\pi}\,\rho(t)e^{-\varepsilon t}\sqrt{V}\,U^*(t)\psi$, где $\rho(t)$ – функция Хевисайда.

Доказательство завершается следующей выкладкой, в которой используется равенство Парсеваля:

$$\begin{aligned}\bigl((I-\Omega)\varphi,\psi\bigr)&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}}e^{-2\varepsilon t}\bigl(\sqrt{V}\,U_0(-t)\varphi,\sqrt{V}\,U^*(t)\psi\bigr)\rho(t)\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}}\bigl(\sqrt{V}\,R_0(\kappa+i\varepsilon)\varphi,\sqrt{V}\,R^*(\kappa-i\varepsilon)\psi\bigr)\,d\kappa\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\bigl(\sqrt{V}\,R_0(\kappa+i0)\varphi,\sqrt{V}\,R^*(\kappa-i0)\psi\bigr)\,d\kappa.\end{aligned}$$

Замечание. Для сходимости интеграла (9) достаточным является, например, следующее условие: $b(x)=O(|x|^{-\alpha})$ при $|x|\to\infty$, где $\alpha>1$.

При условии малости возмущения в рамках так называемой "гладкой теории" стационарное представление типа (10) для билинейной формы волнового оператора установлено в [13]; отметим, что рассматриваемая здесь операторная модель не укладывается в схему работы [13].

## § 3. Функциональная модель оператора $L$

Для определенности далее ограничимся рассмотрением случая, когда оператор $L = L_0 + iV$ вполне несамосопряженный, т.е. $L$ не имеет нетривиальных приводящих подпространств, на которых он индуцирует самосопряженный оператор. Дадим краткое описание функциональной модели вполне несамосопряженного диссипативного оператора применительно к $L = L_0 + iV$. При этом будет использоваться так называемая симметричная форма записи модели (см. [14], [18]).

Обозначим $E = \operatorname{clos}_{\mathscr{H}}(V\mathscr{H})$ и ведем в рассмотрение характеристическую функцию $S(\lambda)\colon E \to E$ оператора $L$, задаваемую формулой

$$S(\lambda) = I + 2i\sqrt{V}\,(L^* - \lambda I)^{-1}\sqrt{V}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $S(\lambda)$ является там сжимающей и для п.в. $k \in \mathbb{R}$ имеет граничные значения $S(k) := S(k + i0)$ в смысле сильной сходимости. При $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \sigma(L)$ справедливо равенство

$$S^{-1}(\lambda) = I - 2i\sqrt{V}\,(L - \lambda I)^{-1}\sqrt{V}.$$

С операторным семейством $Q(\lambda)\colon E \to E$ характеристическая функция $S(\lambda)$ связана соотношением

$$S(\lambda) = \bigl(I + Q(\lambda)\bigr)\bigl(I - Q(\lambda)\bigr)^{-1}. \tag{13}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}$ гильбертово факторпространство функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $E \oplus E$ и скалярным произведением

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{g} \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} I & S^*(k) \\ S(k) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(k) \\ g(k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{f}(k) \\ \widetilde{g}(k) \end{pmatrix} \right)_{E\oplus E} dk$$

(подразумевается, что в множестве двухкомпонентных вектор-функций проведено отождествление элементов с нулевой нормой разности). В $\mathfrak{L}$ рассмотрим подпространство

$$\mathfrak{H} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} : f + S^* g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{C}_-; E), Sf + g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+; E) \right\}.$$

Здесь $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_\pm; E)$ – пространства Харди аналитических в $\mathbb{C}_\pm$ вектор-функций $h$ со значениями в гильбертовом пространстве $E$, для которых

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}} \|h(k \pm i\varepsilon)\|^2\,dk < \infty;$$

такие функции отождествляются с классами эквивалентности своих граничных значений на вещественной оси, образующими подпространства в $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; E)$. Непосредственно проверяется, что ортопроектор $\mathscr{P}$ на $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{L}$ имеет вид

$$\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - P_+(f + S^* g) \\ g - P_-(Sf + g) \end{pmatrix},$$

где $P_\pm$ – ортопроекторы на подпространства $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_\pm; E)$ в $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; E)$.

Вполне несамосопряженный оператор $L$ унитарно эквивалентен генератору сжимающей полугруппы

$$Z_t = \mathscr{P}U_t \,|\, \mathfrak{H}, \qquad t \geqslant 0,$$

где $\mathscr{U}_t$ – унитарная группа в $\mathfrak{L}$, действующая по формуле

$$\mathscr{U}_t \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (k) = \exp(ikt) \begin{pmatrix} f(k) \\ g(k) \end{pmatrix}.$$

Генератор полугруппы $Z_t$ называется *функциональной моделью* для $L$; изометрический оператор, осуществляющий переход в модельное представление, обозначим через $J\colon \mathscr{H} \to \mathfrak{H}$.

Абсолютно непрерывное (внешнее) подпространство $\mathscr{N}_e$ диссипативного оператора $L$ определяется как замыкание в $\mathscr{H}$ множества

$$\bigl\{\psi \in \mathscr{H} : \sqrt{V}\, R(\lambda)\psi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+; E)\bigr\}.$$

Сингулярное (внутреннее) подпространство $\mathscr{N}_i$ состоит из векторов $\psi \in \mathscr{H}$ таких, что

$$\bigl(\bigl(R(k+i\varepsilon) - R(k-i\varepsilon)\bigr)\psi, \varphi\bigr) \to 0, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

для всех $\varphi \in \mathscr{H}$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$. В модельном представлении оператора $L$ имеем

$$J\mathscr{N}_e = \operatorname{clos}_{\mathfrak{H}} \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{N} = \left\{ \mathscr{P} \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix},\ \sqrt{I - S^*S} f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; E) \right\},$$

$$J\mathscr{N}_i = \mathfrak{H} \ominus \left\{ \mathscr{P} \begin{pmatrix} -S^*g \\ g \end{pmatrix},\ \sqrt{I - SS^*} g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; E) \right\}.$$

Чтобы записать в модельном представлении волновой оператор $\Omega$, рассмотрим линеал

$$\mathfrak{Q} = \mathscr{P} \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} : f + S^*g + Sf + g = 0 \right\}$$

и, следуя [14], на элементах $\mathscr{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}$ зададим оператор $W(L, L_0)$ формулой

$$W(L, L_0) \mathscr{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathscr{P} \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Отметим, что для $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|Sf + g\|^2 &\leqslant (f, f) + (S^*g, f) + (Sf, g) + (g, g) \\ &= \left( \begin{pmatrix} I & S^* \\ S & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right)_{E \oplus E} \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(Sf + g) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; E) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{L}.$$

Таким образом, оператор $W(L, L_0)$ корректно определен на $\mathfrak{Q}$, причем $W(L, L_0)\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}$.

Лемма 1. *В предположениях теоремы* 1 *оператор* $W(L, L_0)$ *продолжается по непрерывности с* $\mathfrak{Q}$ *на все* $\mathfrak{H}$ *и это продолжение совпадает с оператором* $J\Omega J^{-1}$.

Доказательство. Согласно известным (см. [14]) формулам, задающим действие $U_0(t)$ и $U(t)$ в модельном представлении, для элементов $\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}$ имеем

$$JU_0(t)J^{-1}\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathscr{P}\exp(ikt)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$
$$JU(t)J^{-1}W(L,L_0)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathscr{P}\exp(ikt)\begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\|U(t)\| \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$, то

$$\begin{aligned}
&\left\| JU(t)U_0(-t)J^{-1}\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - W(L,L_0)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right\|_{\mathfrak{L}} \\
&\quad\leqslant \left\| JU_0(-t)J^{-1}\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - JU(-t)J^{-1}W(L,L_0)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right\|_{\mathfrak{L}} \\
&\quad= \left\| \mathscr{P}\exp(-ikt)\begin{pmatrix} 0 \\ Sf+g \end{pmatrix}\right\|_{\mathfrak{L}},
\end{aligned}$$

где $Sf+g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};E)$. В силу соотношений $P_+ + P_- = I$ и $P_+S^*P_- = (P_-SP_+)^* = 0$ для произвольного вектора $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};E)$ справедливы равенства

$$\mathscr{P}\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_+S^*h \\ P_+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_+S^*P_+h \\ P_+h \end{pmatrix} = \mathscr{P}\begin{pmatrix} 0 \\ P_+h \end{pmatrix}.$$

Учитывая это, выполним оценку

$$\left\| \mathscr{P}\exp(-ikt)\begin{pmatrix} 0 \\ Sf+g \end{pmatrix}\right\|_{\mathfrak{L}} \leqslant \|P_+\exp(-ikt)(Sf+g)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R};E)}$$

и заметим, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю, когда $t \to +\infty$.

Таким образом, на своей области определения $\mathfrak{Q}$ оператор $W(L,L_0)$ представи́м в виде $W(L,L_0) = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} JU(t)U_0(-t)J^{-1}$. Остается учесть, что множество

$$J^{-1}\mathfrak{Q} = \bigl\{\psi \in \mathscr{H} : \sqrt{V}\,R_0(\lambda)\psi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{C}_\pm;E)\bigr\}$$

плотно в $\mathscr{H}$ (см. доказательство теоремы 1), или, что эквивалентно, $\mathfrak{Q}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Стало быть, $W(L,L_0)$ продолжается по непрерывности на все $\mathfrak{H}$, и это продолжение совпадает с $J\Omega J^{-1}$. Попутно установлено, что $\Omega\mathscr{H} \subset \mathscr{N}_e$. Лемма доказана.

## § 4. Скалярное кратное характеристической функции

Дальнейшие рассмотрения используют наличие скалярного кратного у характеристической функции $S(\lambda)$, а также и у оператор-функции $I+S(\lambda)$. *Скалярным кратным* ограниченной аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ оператор-функции $D(\lambda)$ называется ограниченная аналитическая скалярная функция $\delta(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что

$$\Delta(\lambda)D(\lambda) = D(\lambda)\Delta(\lambda) = \delta(\lambda)I, \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

где $\Delta(\lambda)$ – аналитическая в $\mathbb{C}_+$ ограниченная оператор-функция.

Предложение 3. *Пусть $b(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, $b(x) \geqslant 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$ и $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Тогда $(S(\lambda)-I) \in \mathfrak{S}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, и определители $\det\bigl(I-(S(\lambda)-I)^2\bigr)$ и $\det\bigl(I-(S(\lambda)-I)^2/4\bigr)$ являются скалярными кратными для $S(\lambda)$ и $I+S(\lambda)$ соответственно.*

Доказательство. При сделанных относительно $b(x)$ предположениях оператор $Q(\lambda)$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта–Шмидта при любом $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (см. предложение 1). Далее, имеем равенство

$$\operatorname{Re} Q(\lambda) = -\operatorname{Im} \lambda \cdot \sqrt{V} R_0(\overline{\lambda}) R_0(\lambda) \sqrt{V} \colon E \to E,$$

откуда видно, что $\operatorname{Re} Q(\lambda) \leqslant 0$, когда $\lambda \in \mathbb{C}_+$, т.е. числовой образ оператора $Q(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, принадлежит полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$. Оценка резольвенты оператора через расстояние до его числового образа применительно к $Q(\lambda)$ приводит к неравенству $\|(I - Q(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1$, где $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Поскольку $S(\lambda) - I = 2Q(\lambda)(I - Q(\lambda))^{-1}$ в силу формулы (13), из сказанного выше следует, что $(S(\lambda) - I) \in \mathfrak{S}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, причем

$$\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant 2\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{15}$$

Для доказательства второй части сформулированного утверждения достаточно убедиться, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_+} \|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2} < \infty;$$

при этом согласно [19] оператор-функции $S(\lambda)$ и $I + S(\lambda)$ обладают скалярными кратными $\det\bigl(I - (S(\lambda) - I)^2\bigr)$ и $\det\bigl(I - (S(\lambda) - I)^2/4\bigr)$ соответственно. Проверка равномерной ограниченности $\mathfrak{S}_2$-нормы оператора $S(\lambda) - I$ осуществляется по той же схеме, что и в случае финитной функции $b(x)$ (см. [11]).

Для значений $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $|\operatorname{Re} \lambda| \geqslant 1$, $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 1$, в силу оценки (8) норма $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$ равномерно ограничена. Если $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 1$, то $|\operatorname{Ei}(i\lambda|x-y|)| \leqslant |\operatorname{Ei}(-|x-y|)|$ и, следовательно, справедливо неравенство

$$\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant \|Q(i)\|_{\mathfrak{S}_2}, \qquad \operatorname{Im} \lambda \geqslant 1.$$

Согласно (15) одновременно с $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$ величина $\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2}$ ограничена равномерно для значений $\lambda \in \mathbb{C}_+$ таких, что $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 1$ или $|\operatorname{Re} \lambda| \geqslant 1$.

Докажем теперь, что норма $\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2}$ ограничена, когда $\lambda \to 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Для этого рассмотрим интегральный оператор $\widetilde{Q}(\lambda)$ с ядром

$$\widetilde{q}(x, y; \lambda) := q(x, y; \lambda) \chi(x - y),$$

где $q(x, y; \lambda)$ – ядро интегрального оператора $Q(\lambda)$, $\chi$ – индикатор промежутка $[-|\lambda|^{-1/2}, |\lambda|^{-1/2}]$. Согласно формуле (3) ядро $\widetilde{q}(x, y; \lambda)$ допускает представление

$$\begin{aligned} \widetilde{q}(x, y; \lambda) = {} & \frac{1}{2} \sqrt{b(x)}\, (\ln|x - y|) \sqrt{b(y)}\, \chi(x - y) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{b(x)}\, (\ln(-i\lambda) + \gamma) \sqrt{b(y)}\, \chi(x - y) \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{b(x)}\, \operatorname{Ein}(-i\lambda|x - y|) \sqrt{b(y)}\, \chi(x - y); \end{aligned} \tag{16}$$

здесь $\operatorname{Ein}(z)$ – дополнительная интегральная показательная функция, определяемая формулой

$$\operatorname{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n \cdot n!}\,.$$

Покажем, что $\|Q(\lambda)-\widetilde{Q}(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} \to 0$ при $\lambda \to 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Вследствие неравенств (6) и (7) имеем

$$|q(x,y;\lambda)-\widetilde{q}(x,y;\lambda)|^2 \leqslant b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\{1-\chi(x-y)\} \\ + \widetilde{K}(\lambda)^2 b(x)b(y)\{1-\chi(x-y)\},$$

где $\widetilde{K}(\lambda)=O\bigl(|\ln|\lambda||\bigr)$, $\lambda\to 0$. Поскольку $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, то

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\{1-\chi(x-y)\}\,dx\,dy \to 0, \qquad \lambda\to 0.$$

Кроме того, при $|\lambda|<1$ имеем

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} b(x)b(y)\{1-\chi(x-y)\}\,dx\,dy \\ &\quad = \iint_{|x-y|>|\lambda|^{-1/2}} b(x)b(y)\,dx\,dy \\ &\quad \leqslant 4(\ln|\lambda|)^{-2}\iint_{|x-y|>|\lambda|^{-1/2}} b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\widetilde{K}(\lambda)^2\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} b(x)b(y)\{1-\chi(x-y)\}\,dx\,dy\to 0, \qquad \lambda\to 0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\|Q(\lambda)-\widetilde{Q}(\lambda)\|^2_{\mathfrak{S}_2} = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |q(x,y;\lambda)-\widetilde{q}(x,y;\lambda)|^2\,dx\,dy\to 0$$

при $\lambda\to 0$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$.

Далее, представим разность $S(\lambda)-I$ в виде

$$S(\lambda)-I = 2\widetilde{Q}(\lambda)\bigl(I-Q(\lambda)\bigr)^{-1} + 2\bigl(Q(\lambda)-\widetilde{Q}(\lambda)\bigr)\bigl(I-Q(\lambda)\bigr)^{-1}. \tag{17}$$

Из предыдущего следует, что второе слагаемое в правой части (17) стремится к нулю относительно $\mathfrak{S}_2$-нормы, когда $\lambda\to 0$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$. Рассмотрим первое слагаемое из правой части (17). В соответствии с формулой (16) имеем

$$2\widetilde{Q}(\lambda)\bigl(I-Q(\lambda)\bigr)^{-1} = \bigl(A(\lambda)-B(\lambda)\bigr)\bigl(I-Q(\lambda)\bigr)^{-1} + P(\lambda), \tag{18}$$

где $\operatorname{rank} P(\lambda)=1$, $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ – интегральные операторы с ядрами

$$\sqrt{b(x)}\,(\ln|x-y|)\sqrt{b(y)}\,\chi(x-y) \quad \text{и} \quad \sqrt{b(x)}\ \mathrm{Ein}(-i\lambda|x-y|)\sqrt{b(y)}\,\chi(x-y)$$

соответственно. При этом

$$\|A(\lambda)\|^2_{\mathfrak{S}_2} \leqslant \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\,dx\,dy < \infty$$

и, кроме того,

$$\|B(\lambda)\|^2_{\mathfrak{S}_2} \leqslant \iint_{|x-y|\leqslant|\lambda|^{-1/2}} b(x)(e^{|\lambda||x-y|}-1)b(y)\,dx\,dy$$
$$\leqslant (e^{|\lambda|^{1/2}}-1)\biggl(\int_{\mathbb{R}} b(x)\,dx\biggr)^2 \to 0, \qquad \lambda\to 0.$$

Поскольку $\|(I-Q(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, то вследствие (18) справедливо неравенство

$$\|P(\lambda)\| \leqslant 2\|\widetilde{Q}(\lambda)(I-Q(\lambda))^{-1}\| + \|A(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} + \|B(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}.$$

Учитывая, что норма левой части в соотношении (17) не превосходит 2, приходим к заключению об ограниченности величины $\|\widetilde{Q}(\lambda)(I-Q(\lambda))^{-1}\|$ в окрестности $\lambda=0$. Стало быть, норма $\|P(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}=\|P(\lambda)\|$, а вместе с ней и $\|S(\lambda)-I\|_{\mathfrak{S}_2}$, остается ограниченной при $\lambda\to 0$.

Остается показать, что величина $\|S(\lambda)-I\|_{\mathfrak{S}_2}$ равномерно ограничена, если значения $\lambda\in\mathbb{C}_+$ отделены от 0 и $\infty$; при этом ввиду неравенства (15) достаточно проверить ограниченность нормы $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$. Пусть $q_n(x,y;\lambda)=q(x,y;\lambda)$, если $|x|\leqslant n$, $|y|\leqslant n$, и $q_n(x,y;\lambda)=0$, если $|x|>n$ или $|y|>n$. Интегральный оператор $Q_n(\lambda)$ с ядром $q_n(x,y;\lambda)$ как функция со значениями в $\mathfrak{S}_2$ допускает (см. [11]) аналитическое продолжение на открытое множество, содержащее $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, и $\|Q(\lambda)-Q_n(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно по $\lambda\in\mathbb{C}_+$, если значения $\lambda$ отделены от 0 и $\infty$ (в силу оценок (6) и (7)). Поэтому оператор-функция $Q(\lambda)\in\mathfrak{S}_2$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, продолжается по непрерывности на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, причем $Q(\kappa+i0)\in\mathfrak{S}_2$.

Таким образом, норма $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$ и одновременно $\|S(\lambda)-I\|_{\mathfrak{S}_2}$ ограничены равномерно, если значения $\lambda\in\mathbb{C}_+$ отделены от 0 и $\infty$. Доказательство закончено. Попутно было установлено существование предельных значений $S(\kappa+i0)$ для всех $\kappa\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

## § 5. Условие отсутствия спектральных особенностей

Следуя [19], назовем точку $\lambda_0$ непрерывного спектра оператора $L$ *спектральной особенностью*, если

$$\sup_{|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon} \|S^{-1}(\lambda)\| = \infty$$

для произвольного $\varepsilon>0$. Ниже указаны условия на коэффициент $b(x)$, при которых оператор $L=L_0+iV$ не имеет спектральных особенностей и предельные значения оператор-функции $S^{-1}(\lambda)$ на вещественной оси равномерно ограничены. При этом "исключительным" является подмножество $\mathscr{E}\subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, выделенное следующим условием

$$0\leqslant b(x)\in\mathscr{E} \iff \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\{-1,\sigma(Q(i\varepsilon))\}=0.$$

Утверждение [12]. *Если $b(x)\notin\mathscr{E}$, то величина $N(\tau b)$ постоянна в окрестности значения $\tau=1$; если же $b(x)\in\mathscr{E}$, то $N(\tau b)>N(b)$ при $\tau>1$.*

Согласно сформулированному утверждению увеличение числа собственных значений у оператора $L(\tau)=L_0+i\tau V$ с ростом $\tau$ происходит при тех и только тех значениях параметра $\tau$, для которых $\tau b\in\mathscr{E}$. А именно существует счетный набор $\{\tau_n\}$ такой, что $\tau b\in\mathscr{E}$ в том и только том случае, если $\tau\in\{\tau_n\}$, и рождение новых собственных значений оператора $L(\tau)$ происходит из нуля при $\tau=\tau_n$. Отметим, что сама точка $\lambda=0$ не является собственным значением оператора $L(\tau_n)$.

Предложение 4. *Пусть выполнены условия предложения 3. Если функция $b(x)$ не принадлежит множеству $\mathscr{E}$, то оператор-функция $S(\kappa)$ обратима при $\kappa \neq 0$ и*

$$\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \|S^{-1}(\kappa)\| < \infty.$$

Доказательство. Ввиду соотношения (13) для $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \sigma(L)$ имеем

$$S^{-1}(\lambda) = 2(I + Q(\lambda))^{-1} - I. \tag{19}$$

Ниже будет установлена ограниченность нормы $\|(I + Q(\lambda))^{-1}\|$ в полосе $\Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta\}$, где $\delta \in (0,1)$ выбрано так, что $\Pi \cap \sigma_p(L) = \varnothing$. Такой выбор $\delta$ возможен, поскольку $N(b) < \infty$ при условии $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ (см. предложение 2). В силу оценки (8) найдется $R > 0$ такое, что норма $\|(I+Q(\lambda))^{-1}\|$ равномерно ограничена, если $|\operatorname{Re}\lambda| > R$ и $0 < \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta$.

Рассмотрим теперь оператор-функцию $(I + Q(\lambda))^{-1}$ вблизи нуля. Покажем сначала, что

$$\operatorname{Re} Q(\lambda) - Q(i|\lambda|) \to 0$$

и величина $\|\operatorname{Im} Q(\lambda)\|$ ограничена, когда $\lambda \to 0$. Как видно из представления (16) ядра $\widetilde{Q}(\lambda)$, для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ справедливы неравенства

$$\|\operatorname{Re}\widetilde{Q}(\lambda) - \widetilde{Q}(i|\lambda|)\| \leqslant \|B(\lambda)\| + \|B(i|\lambda|)\|,$$
$$\|\operatorname{Im}\widetilde{Q}(\lambda)\| \leqslant \int_{\mathbb{R}} b(x)\,dx + \|B(\lambda)\|,$$

где $B(\lambda)$ – оператор с ядром $\sqrt{b(x)}\,\operatorname{Ein}(-i\lambda|x-y|)\sqrt{b(y)}\,\chi(x-y)$. Поскольку $\|B(\lambda)\| \to 0$ и $\|Q(\lambda) - \widetilde{Q}(\lambda)\| \to 0$, когда $\lambda \to 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (см. доказательство предложения 3), отсюда следует, что оператор-функция $\operatorname{Im} Q(\lambda)$ равномерно ограничена в $\mathbb{C}_+$ вблизи точки $\lambda = 0$ и $\operatorname{Re} Q(\lambda) - Q(i|\lambda|) \to 0$ относительно операторной нормы при $\lambda \to 0$.

Допустим, что норма $\|(I + Q(\lambda))^{-1}\|$ неограничена, когда $\lambda \to 0$, т.е. существуют последовательности $\{\varphi_n\} \subset E$, $\|\varphi_n\| = 1$, и $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}_+$ такие, что $\lambda_n \to 0$ и

$$\big(I + Q(\lambda_n)\big)\varphi_n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

При этом $(\operatorname{Im} Q(\lambda_n)\varphi_n, \varphi_n) \to 0$, когда $n \to \infty$. Принимая во внимание равномерную ограниченность $\operatorname{Im} Q(\lambda)$ вблизи нуля и свойство (5) знакоопределенности $\operatorname{Im} Q(\lambda)$ (см. §1), заключаем, что $\operatorname{Im} Q(\lambda_n)\varphi_n \to 0$, $n \to \infty$. Тогда $(I + \operatorname{Re} Q(\lambda_n))\varphi_n \to 0$ и одновременно

$$\big(I + Q(i|\lambda_n|)\big)\varphi_n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

С учетом самосопряженности операторов $Q(it)$, $t \in \mathbb{R}_+$, будем иметь

$$\operatorname{dist}\big\{-1, \sigma(Q(i|\lambda_n|))\big\} = \big\|(I + Q(i|\lambda_n|))^{-1}\big\|^{-1} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

что противоречит условию $b(x) \notin \mathscr{E}$. Итак, при сделанных предположениях существует $\varepsilon > 0$ такое, что оператор-функция $(I + Q(\lambda))^{-1}$ равномерно ограничена для $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $|\lambda| < \varepsilon$.

Далее воспользуемся тем фактом (см. доказательство предложения 3), что оператор-функция $Q(\lambda)\colon E \to E$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, продолжается по непрерывности на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, причем $Q(\kappa + i0) \in \mathfrak{S}_\infty$, $\kappa \neq 0$. Свойство (5) знакоопределенности $\operatorname{Im} Q(\lambda)$, $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, распространяется на предельные значения $Q(\kappa + i0)$ и, следовательно, $\ker(I + Q(\kappa + i0)) = \{0\}$, если $\kappa \neq 0$. Таким образом, оператор $(I + Q(\lambda))$ обратим для всех $\lambda$ из замыкания $\Pi$, за исключением точки $\lambda = 0$, и, стало быть, норма $\|(I + Q(\lambda))^{-1}\|$ равномерно ограничена, если значения $\lambda \in \Pi$ отделены от 0 и $\infty$.

Суммируя сказанное, с учетом (19) можно утверждать, что оператор-функция $S(\kappa)$ обратима при $\kappa \neq 0$ и справедлива оценка

$$\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \|S^{-1}(\kappa)\| \leqslant 1 + 2 \sup_{\lambda \in \Pi} \|(I + Q(\lambda))^{-1}\| < \infty.$$

Отметим, что условие $b(x) \notin \mathscr{E}$ использовалось лишь при доказательстве ограниченности величины $\|S^{-1}(\kappa)\|$ в окрестности нуля.

## § 6. Существование левого обратного к $\Omega$

В представлении функциональной модели зададим оператор $W(L_0, L)$ следующим образом (см. [14]). Область определения $W(L_0, L)$ состоит из тех элементов $\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}$, для которых найдется единственная вектор-функция $h$ такая, что $\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}$ и

$$W(L_0, L)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия предложения* 3 *и* $b(x) \notin \mathscr{E}$. *Тогда оператор* $W(L_0, L)$ *определен и ограничен на множестве, плотном в* $\mathfrak{N}$, *а замыкание* $\widetilde{\Omega}$ *оператора* $J^{-1}W(L_0, L)J$ *представляет собой левый обратный к* $\Omega$.

Доказательство. Согласно предложению 3 существует ограниченная аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $\Delta(\lambda)\colon E \to E$ такая, что

$$\Delta(\lambda)\bigl(I + S(\lambda)\bigr) = \bigl(I + S(\lambda)\bigr)\Delta(\lambda) = d(\lambda)I,$$

где $d(\lambda) = \det\bigl(I - (S(\lambda) - I)^2/4\bigr)$. Одновременно для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и почти всюду на вещественной оси справедливы соотношения

$$\Delta^*(\lambda)\bigl(I + S^*(\lambda)\bigr) = \bigl(I + S^*(\lambda)\bigr)\Delta^*(\lambda) = \overline{d(\lambda)}I, \tag{21}$$

причем $d(k + i0) \neq 0$ для п.в. $k \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что компонента $h$ в правой части (20) однозначно определяется условием $\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}$.

Покажем (ср. с [14]), что оператор $W(L_0, L)$ определен на векторах из подпространства $\mathfrak{N}$, имеющих вид $\mathscr{P}\theta_n\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, где $g = -Sf$ и $\sqrt{I - S^*S}\, f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}; E)$, а скалярная функция $\theta_n(k)$ – индикатор множества

$$\left\{k \in \mathbb{R} : |d(k + i0)| > \frac{1}{n}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим $Y_n(k) := \theta_n(k)\Delta^*(k+i0)/\overline{d(k+i0)}$ и заметим, что

$$\begin{pmatrix} \theta_n f \\ -Y_n(I+S)f \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$$

всякий раз, когда $\sqrt{I-S^*S}\, f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};E)$. В самом деле, $\theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$ и в силу (21) имеем

$$\begin{pmatrix} \theta_n f \\ -Y_n(I+S)f \end{pmatrix} - \theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_n(I-S^*S)f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R};E) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{L}.$$

Кроме того, согласно (21) выполнено соотношение

$$(I+S)\theta_n f - (I+S^*)Y_n(I+S)f = 0$$

и, таким образом,

$$W(L_0,L)\colon \mathscr{P}\theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} \mapsto \mathscr{P} \begin{pmatrix} \theta_n f \\ -Y_n(I+S)f \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}.$$

Поскольку $d(k+i0) \neq 0$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$, множество векторов вида $\mathscr{P}\theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}$, $\sqrt{I-S^*S}\, f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};E)$, $n \in \mathbb{N}$, на которых определен оператор $W(L_0,L)$, плотно в $\mathfrak{N}$.

Согласно определению (20) оператора $W(L_0,L)$ и известным формулам, задающим действие $U(t)$ и $U_0(t)$ в представлении функциональной модели, для векторов $\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ из области определения $W(L_0,L)$ имеем

$$JU(t)J^{-1}\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathscr{P}\exp(ikt)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

$$JU_0(t)J^{-1}W(L_0,L)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathscr{P}\exp(ikt)\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}.$$

При этом $(g-h) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R};E)$ и справедлива оценка (ср. с доказательством леммы 1)

$$\begin{aligned}
&\left\| JU_0(t)U(-t)J^{-1}\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - W(L_0,L)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \\
&\quad = \left\| JU(-t)J^{-1}\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - JU_0(-t)J^{-1}W(L_0,L)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \\
&\quad = \left\| \mathscr{P}\exp(-ikt)\begin{pmatrix} 0 \\ g-h \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \leqslant \left\| P_+ \exp(-ikt)(g-h) \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R};E)}.
\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, стремится к нулю, когда $t \to +\infty$. Таким образом, установлено, что на своей области определения оператор $W(L_0,L)$ представи́м в виде

$$W(L_0,L)\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty} JU_0(t)U(-t)J^{-1}\mathscr{P}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Далее, поскольку

$$\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \|S^{-1}(k)\| < \infty$$

при выполнении условий предложения 4, то согласно [14] группа $U(t)$ равномерно ограничена на абсолютно непрерывном подпространстве оператора $L$. Как следствие этого оператор $J^{-1}W(L_0, L)J$ ограничен и продолжается по непрерывности на $J^{-1}\operatorname{clos}_{\mathfrak{H}}\mathfrak{N} = \mathscr{N}_e$. Полученный в результате этого продолжения ограниченный оператор $\widetilde{\Omega}$ представи́м в виде

$$\widetilde{\Omega}\varphi = \lim_{t\to\infty} U_0(t)U(-t)\varphi, \qquad \varphi \in \mathscr{N}_e.$$

Согласно формулам (14) и (20) оператор $\widetilde{\Omega}$ является левым обратным к прямому волновому оператору $\Omega = \text{s-}\lim_{t\to\infty} U(t)U_0(-t)\colon \mathscr{H} \to \mathscr{N}_e$ и одновременно правым обратным на подпространстве $\mathscr{N}_e$. Лемма доказана.

## § 7. Факторизация скалярного кратного характеристической функции

Согласно предложению 3 существует ограниченная аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $\Sigma(\lambda)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\Sigma(\lambda)S(\lambda) = S(\lambda)\Sigma(\lambda) = m(\lambda)I, \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

где $m(\lambda) = \det\bigl(I - (S(\lambda) - I)^2\bigr)$. Функция $m(\lambda) \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{C}_+)$ допускает (см. [20]) внешне-внутреннюю каноническую факторизацию

$$m(\lambda) = m_1(\lambda)\cdot m_2(\lambda)\cdot m_3(\lambda).$$

Здесь $m_1(\lambda)$ – произведение Бляшке, построенное по нулям $m(\lambda)$:

$$m_1(\lambda) = \prod_n \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \overline{\lambda}_n}\,;$$

$m_2(\lambda)$ – сингулярная внутренняя функция вида

$$m_2(\lambda) = e^{ia\lambda}\exp\biggl(i\int_{\mathbb{R}} \frac{t\lambda - 1}{\lambda + t}\,d\mu(t)\biggr),$$

где $\mu$ – конечная сингулярная мера и $a \geqslant 0$; $m_3(\lambda)$ – ограниченная в верхней полуплоскости внешняя функция, задаваемая следующей формулой

$$m_3(\lambda) = e^{i\omega}\exp\biggl\{\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \ln\bigl(|m(\kappa + i0)|\bigr)\frac{\kappa\lambda + 1}{\lambda - \kappa}\,\frac{d\kappa}{1 + \kappa^2}\biggr\}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия предложения 3. Если $b(x) \notin \mathscr{E}$, то характеристическая функция $S(\lambda)$ имеет скалярное кратное $m_1(\lambda)\cdot m_3(\lambda)$, где $m_1(\lambda)$ – конечное произведение Бляшке, построенное по набору $\{\lambda_n\} = \sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Нули определителя $m(\lambda)$ в верхней полуплоскости совпадают с собственными значениями оператора $L$. В самом деле, равенство $m(\lambda)=0$ означает, что $(S(\lambda)-I)^2\in\mathfrak{S}_1$ имеет собственное значение 1. Поскольку $\|S(\lambda)\|\leqslant 1$, это равносильно тому, что $\ker S(\lambda)\neq\{0\}$. Согласно соотношению (13) последнее выполнено в том и только том случае, когда $-1\in\sigma(Q(\lambda))$, что в силу (4) эквивалентно $\lambda\in\sigma_p(L)$. В силу предложения 2 при сделанных предположениях произведение Бляшке $m_1(\lambda)$ содержит конечное число дробно-линейных сомножителей.

Определитель $m(\lambda)$ продолжается по непрерывности на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, поскольку оператор-функция $Q(\lambda)\in\mathfrak{S}_2$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, допускает продолжение по непрерывности в классе $\mathfrak{S}_2$ на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (см. доказательство предложения 3). Как отмечалось в доказательстве предложения 4, при $\kappa\neq 0$ имеем $\ker(I+Q(\kappa+i0))=\{0\}$ и, следовательно, $m(\kappa+i0)\neq 0$, если $\kappa\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Согласно известному результату теории аналитических функций применительно к рассматриваемой ситуации внешний сомножитель $m_3(\lambda)$ одновременно с $m(\lambda)$ непрерывен вплоть до вещественной оси всюду, за исключением нуля, причем $|m_3(\kappa+i0)|=|m(\kappa+i0)|$, $\kappa\neq 0$. Отсюда следует, что $m_2(\lambda)$ продолжается по непрерывности на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, и поэтому носитель меры $\mu$ сосредоточен в нуле (см., например, [20; гл. 5]), т.е. сингулярный сомножитель в канонической факторизации $m(\lambda)$ имеет вид

$$m_2(\lambda)=\exp\left(ia\lambda-i\frac{c}{\lambda}\right),$$

где $a$ и $c$ – неотрицательные константы.

Покажем, что $m(i\tau)\to 1$ при $\tau\to\infty$. Для $\tau\geqslant 1$ справедливо неравенство $|q(x,y;i\tau)|\leqslant|q(x,y;i)|$, где $q(x,y;i)\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, и, кроме того, $q(x,y;i\tau)\to 0$, когда $\tau\to\infty$. По теореме Лебега о предельном переходе имеем

$$\|Q(i\tau)\|_{\mathfrak{S}_2}\to 0,\qquad \tau\to\infty.$$

Отсюда в силу (15) следует, что $\|S(i\tau)-I\|_{\mathfrak{S}_2}\to 0$ при $\tau\to\infty$ и, стало быть,

$$m(i\tau)=\det\bigl(I-\bigl(S(i\tau)-I\bigr)^2\bigr)\to 1,\qquad \tau\to\infty. \tag{22}$$

Последнее возможно лишь в том случае, если $a=0$. Иначе $m_2(i\tau)\to 0$, $\tau\to\infty$, что противоречит (22), поскольку в канонической факторизации $m(\lambda)$ сомножители $m_1(\lambda)$ и $m_3(\lambda)$ – ограниченные функции.

В силу условия $b(x)\notin\mathscr{E}$ оператор-функция $S^{-1}(\lambda)=(m(\lambda))^{-1}\Sigma(\lambda)$ равномерно ограничена в верхней полуокрестности точки $\lambda=0$ (см. доказательство предложения 4). Учитывая ограниченность $m_1(\lambda)$ и $m_3(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$, заключаем, что оператор-функция $(m_2(\lambda))^{-1}\Sigma(\lambda)$ аналитична и ограничена в верхней полуплоскости. Лемма доказана.

В следующем параграфе потребуются некоторые сведения об аналитических в круге сжимающих операторнозначных функциях (см. [16]). Ниже через $\mathrm{H}^2(\mathfrak{A})$ обозначается класс Харди аналитических в круге $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ функций $f(z)$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{A}$ таких, что

$$\sup_{r<1}\int_0^{2\pi}\|f(re^{i\varphi})\|_{\mathfrak{A}}^2\,d\varphi<\infty;$$

функции из $\mathrm{H}^2(\mathfrak{A})$ отождествляются с классами эквивалентности своих граничных значений на окружности $|z| = 1$, образующими подпространство в $\mathrm{L}^2(\mathfrak{A})$.

Аналитическая в круге $\mathbb{D}$ сжимающая оператор-функция $\Theta(z)$, действующая из гильбертова пространства $\mathfrak{A}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{A}'$, называется *внешней*, если $\operatorname{clos}_{\mathrm{L}^2(\mathfrak{A}')} \Theta H^2(\mathfrak{A}) = H^2(\mathfrak{A}')$. Оператор-функция $\Theta(z)\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ называется *внутренней*, если отображение $\Theta$ из $\mathrm{H}^2(\mathfrak{A})$ в $\mathrm{H}^2(\mathfrak{A}')$ является изометрическим. Сжимающая оператор-функция $\Theta(z)$ называется $*$-*внешней* ($*$-*внутренней*), если аналитическая в $\mathbb{D}$ оператор-функция $\Theta^*(\overline{z})\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ является внешней (соответственно внутренней).

Всякая сжимающая аналитическая оператор-функция $\Theta(z)\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ единственным образом представляется в виде $\Theta(z) = \Theta^0(z) \oplus \mathrm{const}$, где const означает изометрическую постоянную, а $\Theta^0(z)$ не содержит таких постоянных слагаемых. Оператор-функция $\Theta^0(z)$ называется *чистой частью* $\Theta(z)$.

## § 8. Свойство полноты волновых операторов

С помощью интеграла Рисса строится проектор

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda)\, d\lambda$$

на линейную оболочку $\mathscr{H}_d := P\mathscr{H}$ собственных векторов оператора $L$ параллельно подпространству $\mathscr{H}_c := (I - P)\mathscr{H}$; здесь $\Gamma \subset \mathbb{C}_+$ – положительно ориентированный замкнутый контур, разделяющий $\sigma_c(L)$ и $\sigma_d(L)$. Согласно [21] оператор $L$ разложи́м относительно прямой суммы $\mathscr{H} = \mathscr{H}_c \dotplus \mathscr{H}_d$:

$$PD(L) \subset D(L), \qquad L\mathscr{H}_c \subset \mathscr{H}_c, \qquad L\mathscr{H}_d \subset \mathscr{H}_d.$$

Ниже через $L_c$ обозначается сужение $L$ на подпространство $\mathscr{H}_c$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. *Предположим, что оператор* $L = L_0 + iV$ *вполне несамосопряженный и* $\lim_{\tau \to 1} N(\tau b) = N(b)$. *Тогда* $\Omega\mathscr{H} = \mathscr{H}_c$, *на подпространстве* $\mathscr{H}_c$ *существует обратный волновой оператор* $\widetilde{\Omega} = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} U_0(t)U(-t)$ *и справедливо соотношение*

$$L_c = \Omega L_0 \widetilde{\Omega}.$$

Доказательство. 1) Существование прямого волнового оператора $\Omega = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} U(t)U_0(-t)$ установлено в теореме 1. Построенный в лемме 2 левый обратный $\widetilde{\Omega} = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} U_0(t)U(-t)$ является одновременно правым обратным к $\Omega$ на абсолютно непрерывном подпространстве $\mathscr{N}_e$ оператора $L$ и, таким образом, $\Omega\mathscr{H} = \mathscr{N}_e$. Ниже будет установлено, что подпространство $\mathscr{N}_e$ совпадает с $\mathscr{H}_c$.

Согласно [18] в рассматриваемой здесь ситуации $\mathscr{H} = \mathscr{N}_e \dotplus \mathscr{N}_i$, причем проектор на $\mathscr{N}_i$ параллельно $\mathscr{N}_e$ ограничен (в силу предложения 4). Если $\varphi \in \mathscr{N}_e$, то вектор-функция $R(\lambda)\varphi$ аналитична в $\mathbb{C}_+$ (см. [14]) и, стало быть, $\varphi \in \mathscr{H}_c$, т.е. $\mathscr{N}_e \subset \mathscr{H}_c$. Покажем, что $\mathscr{N}_i \cap \mathscr{H}_c = \{0\}$, откуда будет следовать равенство $\mathscr{N}_e = \mathscr{H}_c$.

2) Обозначим через $T = (L - iI)(L + iI)^{-1}$ преобразование Кэли диссипативного оператора $L$ и рассмотрим характеристическую функцию $\Theta_T(z)$ сжатия $T$:

$$\Theta_T(z) = -T + z(I - TT^*)^{1/2}(I - zT^*)^{-1}(I - T^*T)^{1/2},$$

действующую из $\mathfrak{D} = \operatorname{clos}_{\mathscr{H}}(I - T^*T)^{1/2}\mathscr{H}$ в $\mathfrak{D}' = \operatorname{clos}_{\mathscr{H}}(I - TT^*)^{1/2}\mathscr{H}$. Оператор-функция $\Theta_T(z)\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ аналитична в круге $\mathbb{D}$, является там сжимающей и совпадает с $S\bigl(i(1+z)/(1-z)\bigr)$ (см. [16; гл. 9]). В соответствии с этим и вследствие леммы 3 оператор-функция $\Theta_T(z)$ обладает скалярным кратным $\alpha(z) \cdot \delta(z)$, где $\alpha(z) = m_3\bigl(i(1+z)/(1-z)\bigr)$ – ограниченная в $\mathbb{D}$ внешняя функция, задаваемая формулой

$$\alpha(z) = \exp\biggl\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\biggl(\biggl|m\biggl(-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + i0\biggr)\biggr|\biggr)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi\biggr\},$$

а $\delta(z) = m_1\bigl(i(1+z)/(1-z)\bigr)$ – конечное произведение Бляшке:

$$\delta(z) = \prod_n \frac{z - z_n}{1 - z_n z}\,, \qquad z_n = \frac{\lambda_n - i}{\lambda_n + i} \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим так называемую $*$-каноническую факторизацию характеристической функции $\Theta_T(z)$ (см. [16]):

$$\Theta_T(z) = \Theta_{*e}(z)\Theta_{*i}(z),$$

где $\Theta_{*e}(z)$ – $*$-внешняя, $\Theta_{*i}(z)$ – $*$-внутренняя оператор-функции. По теореме Сёкефальви-Надя и Фояша о внешне-внутренней факторизации оператор-функций, обладающих скалярным кратным, множитель $\Theta_{*i}(z)$ имеет скалярное кратное $\delta(z)$. Вследствие теоремы о триангуляции сжатия, порожденной факторизацией его характеристической функции (см. [16; гл. 7]), подпространство $\mathscr{N}_i$ инвариантно относительно $T$ и характеристическая функция $\vartheta(z)$ сужения $T|\mathscr{N}_i$ совпадает с чистой частью $\Theta_{*i}(z)$, а стало быть, обладает скалярным кратным $\delta(z)$.

3) Подпространство $\mathscr{G} = \mathscr{N}_i \cap \mathscr{H}_c = (I - P)\mathscr{N}_i$ инвариантно относительно $T$ и $\mathscr{N}_i = \mathscr{H}_d \dotplus \mathscr{G}$. Согласно общей теории функциональных моделей подпространству $\mathscr{G}$ отвечает факторизация характеристической функции $\vartheta(z)$ оператора $T|\mathscr{N}_i$:

$$\vartheta(z) = \vartheta_2(z)\vartheta_1(z) \tag{23}$$

такая, что характеристическая функция $T|\mathscr{G}$ совпадает с чистой частью $\vartheta_1(z)$. При этом подпространство $\mathscr{G}$ имеет в $\mathscr{N}_i$ конечную коразмерность и чистая часть $\vartheta_2(z)$ представляет собой сжимающую оператор-функцию в конечномерном пространстве, обладающую скалярным кратным. Поскольку в равенстве (23) левая часть $\vartheta(z)$ и сомножитель $\vartheta_2(z)$ обладают скалярными кратными, то и $\vartheta_1(z)$ обладает скалярным кратным. А именно $\vartheta_1(z)$ обладает скалярным кратным $\delta(z)$ и, следовательно, является внутренней оператор-функцией (см. [16; гл. 5]).

Учитывая, что $\sigma(L_c) \subset \mathbb{R}$, имеем $\sigma(T|\mathscr{H}_c) \cap \mathbb{D} = \varnothing$ и, стало быть, $\sigma(T|\mathscr{G}) \cap \mathbb{D} = \varnothing$; поэтому характеристическая функция $T|\mathscr{G}$, совпадающая с чистой частью $\vartheta_1(z)$, обратима в $\mathbb{D}$. Таким образом, оператор-функция $\vartheta_1(z)$ обратима всюду в $\mathbb{D}$ и обладает скалярным кратным $\delta(z)$. Отсюда следует, что $\vartheta_1^{-1}(z)$ равномерно ограничена и аналитична в $\mathbb{D}$ и, стало быть, $\vartheta_1(z)$ – внешняя. Оператор-функция, внутренняя и внешняя одновременно, является унитарной константой, что применительно к $\vartheta_1(z)$ возможно лишь в случае, когда $\mathscr{G}=\{0\}$.

4) Далее, согласно теореме 1 оператор $\Omega$ сплетает $L$ и $L_0$:

$$L\Omega=\Omega L_0, \qquad \Omega D(L_0)\subset D(L_0)=D(L).$$

Поскольку $\Omega\mathscr{H}=\mathscr{H}_c$ и $\Omega D(L_0)\subset D(L_0)$, то $\Omega D(L_0)\subset D(L_0)\cap\mathscr{H}_c$. Покажем, что $\Omega D(L_0)=D(L_0)\cap\mathscr{H}_c$.

Отметим, что $R(\lambda)\mathscr{H}_c\subset\mathscr{H}_c$ и, следовательно, $U(t)\mathscr{H}_c\subset\mathscr{H}_c$. Ввиду этого для произвольных $t>0$ и $\psi\in\mathscr{H}_c$ справедливо соотношение

$$\widetilde{\Omega}\psi=U_0(-t)\widetilde{\Omega}U(t)\psi$$

и, таким образом, $U_0(t)\widetilde{\Omega}=\widetilde{\Omega}U(t)$. Выполним предельный переход при $t\downarrow 0$ в равенстве

$$\widetilde{\Omega}\frac{U(t)-I}{t}\psi=\frac{U_0(t)-I}{t}\widetilde{\Omega}\psi,$$

где $\psi\in D(L_0)\cap\mathscr{H}_c$. Поскольку $L(D(L)\cap\mathscr{H}_c)\subset\mathscr{H}_c$, то предел слева существует и равен $i\widetilde{\Omega}L\psi$. Одновременно существует предел справа

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{U_0(t)-I}{t}\widetilde{\Omega}\psi=iL_0\widetilde{\Omega}\psi,$$

причем $\widetilde{\Omega}\psi\in D(L_0)$. Таким образом, $\widetilde{\Omega}(D(L_0)\cap\mathscr{H}_c)\subset D(L_0)$ и, стало быть, $D(L_0)\cap\mathscr{H}_c\subset\Omega D(L_0)$.

В результате установлено совпадение $\Omega D(L_0)=D(L_0)\cap\mathscr{H}_c$. С учетом этого из сплетающего соотношения $L\Omega=\Omega L_0$ следует, что $L\psi=\Omega L_0\widetilde{\Omega}\psi$ для произвольного $\psi\in D(L_0)\cap\mathscr{H}_c$, т.е. $L_c=\Omega L_0\widetilde{\Omega}$. Теорема доказана.

## Список литературы


1. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960.
2. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
3. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса нейтронов // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 1–158.
4. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
5. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
6. *Шихов С. Б.* Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. М.: Атомиздат, 1973.
7. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
8. *Lehner J.* The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab // J. Math. Mech. 1962. V. 11. №2. P. 173–181.
9. *Lehner J., Wing G. M.* On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 217–234.
10. *Lehner J., Wing G. M.* Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 125–142.
11. *Куперин Ю. А., Набоко С. Н., Романов Р. В.* Спектральный анализ односкоростного оператора переноса и функциональная модель // Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. №3. С. 47–58.

12. *Степин С.А.* Возмущение спектра и задача рассеяния в односкоростной теории переноса // Деп. в ВИНИТИ. 07.02.2000. №285-В00. Москва, 2000.
13. *Kato T.* Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators // Math. Ann. 1966. V. 162. P. 258–279.
14. *Набоко С.Н.* Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния // Труды МИАН. 1980. Т. 147. С. 86–114.
15. *Степин С.А.* Возмущение спектра и волновые операторы в линейной теории переноса // УМН. 1999. Т. 54. №5. С. 175–176.
16. *Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
17. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. М.: Мир, 1982.
18. *Павлов Б.С.* Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. №1. С. 123–148.
19. *Павлов Б.С.* Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шрёдингера и разложение по его собственным функциям // Матем. сб. 1977. Т. 120. №4. С. 511–536.
20. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
21. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
26.04.2000