А. В. Друца, Существование “в целом” решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана на многообразии,
Матем. сб., 2011, том 202, номер 10, 55–86

УДК 517.958

А. В. Друца

Существование “в целом” решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана на многообразии

В работе для системы примитивных уравнений на произвольном гладком ориентированном римановом многообразии в области-цилиндре доказана теорема существования и единственности “в целом”. А именно, доказано, что для произвольного промежутка времени $[0,T]$ в трехмерной области $\Omega\equiv\Omega'\times[-h,0]$, где $h=\mathrm{const}$, а Ω' – компактно вкладывающаяся область двумерного многообразия $\mathscr{M}$, для любых коэффициентов вязкости $\mu,\nu,\mu_1,\nu_1>0$ и любых начальных условий $\mathbf{u}_0\in\mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\displaystyle\int_{-h}^0\operatorname{div}\mathbf{u}_0\,dz=0$, $\rho_0\in W_2^2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение, для которого $\partial_z\mathbf{u}\in\mathbf{W}_2^1(Q_T)$, $\partial_z\rho\in W_2^1(Q_T)$ (z – вертикальная переменная) и нормы $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$, $\|\rho\|_{W_2^1(\Omega)}$ непрерывны по t.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: примитивные уравнения, уравнения динамики океана, нелинейные уравнения в частных производных, априорные оценки, существование “в целом”.

§ 1. Введение

Проблема доказательства существования и единственности решения “в целом” системы примитивных уравнений, описывающих крупномасштабную динамику океана (см. [1], [2]), в течение многих лет оставалась открытой. Недавно эта проблема была успешно решена в работах [3]–[5], в которых существование и единственность решения были доказаны для областей-цилиндров над плоскостью. В последующих работах было рассмотрено расширение класса областей на случай неровного дна для различных граничных условий – как для условий непротекания и прилипания, так и для условий непротекания и свободного скольжения (см. [6], [7]). Однако во всех указанных работах примитивные уравнения рассматривались в евклидовом пространстве на плоскости. В то же время Мировой океан располагается на Земном шаре и все уравнения, описывающие его динамику, рассматриваются на этой поверхности.

Как показано в [6], формальное использование методики работы Г. М. Кобелькова [3] для примитивных уравнений с переменным дном, не позволяет доказать теорему существования и единственности. Требуется несколько изменить постановку задачи. Поэтому неочевидно, что техника работы [3] может быть непосредственно применена для доказательства теоремы существования

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00415а).

и единственности на сфере. Это обстоятельство послужило стимулом для написания настоящей статьи. Как оказалось, метод работы [3] с небольшими изменениями может быть применен и в данном случае.

В настоящей работе с помощью общей методики работ [6] и [3] для системы примитивных уравнений в области, представляющей собой "цилиндр" над произвольным двумерным гладким ориентированным римановым многообразием, доказывается теорема существования и единственности "в целом".

§ 2. Постановка задачи

2.1. Основные обозначения.

2.1.1. *Основные понятия из тензорного анализа.* Мы всегда будем опускать знак суммирования по индексам, встречающимся вверху и внизу одного выражения, как это принято в тензорном анализе. Будем считать, что все индексы $i, j, k, l, m, \dots$ пробегают значения 1, 2; противное будет отдельно оговариваться.

Пусть $\mathscr{M}$ – двумерное гладкое ориентированное рипаново многообразие. Обозначим касательное расслоение через $\mathrm{T}\mathscr{M}$, атлас карт – через $\mathbf{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где $A_\lambda = (D_\lambda, \{x^i_\lambda\})$, $D_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, $\{x^i_\lambda\}$ – локальные координаты на ней, причем все карты атласа $\mathbf{A}$ имеют согласованную ориентацию.

Пусть в точке $M \in \mathscr{M}$ выбрана карта $A = (D, \{x^i\})$, ее покрывающая. Через $\{\boldsymbol{\partial}_i\}$, $\boldsymbol{\partial}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}(M) \in \mathrm{T}_M\mathscr{M}$, обозначим натуральный базис касательного пространства $\mathrm{T}_M\mathscr{M}$ в точке $M \in \mathscr{M}$ (см. [8]). Компоненты произвольного вектора $\mathbf{v} \in \mathrm{T}_M\mathscr{M}$ в этом базисе обозначим через v^i. Таким образом, $\mathbf{v} = v^i\boldsymbol{\partial}_i$. Через $\{dx^i\} \subset \mathrm{T}^*_M\mathscr{M}$ обозначим дуальный базис, а компоненты произвольного ковектора $f \in \mathrm{T}^*_M\mathscr{M}$ в этом базисе обозначим через f_i. Таким образом, $f = f_i\,dx^i$. Компоненты тензоров более высокого порядка будем обозначать аналогичным образом. Компоненты тензора будем называть тензором, если это не приводит к путанице.

Метрический тензор обозначим через g_{ij}, а через g^{ij} – контравариантный метрический тензор, $g = \det((g_{ij}))$. Таким образом, скалярное произведение двух векторов $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathrm{T}_M\mathscr{M}$ равно $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \equiv g_{ij}v^iu^j$. Аналогично задается и обозначается скалярное произведение для тензоров более высокого порядка. Длина вектора $\mathbf{v}$ обозначается так: $|\mathbf{v}| \equiv (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{1/2}$.

В силу того, что рассматриваемый атлас карт имеет согласованную ориентацию, все псевдотензоры будут являться обычными тензорами с точки зрения замены координат. Поэтому далее приставка "псевдо" будет опускаться. Пусть ε_{ij} – дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивита). Напомним, что это кососимметричный тензор и для его существенной компоненты верно равенство $\varepsilon_{12} = \sqrt{g}$. Введем операцию $\mathbf{u}\times\mathbf{v} \equiv \varepsilon_{ij}u^iv^j$, а также операцию $\mathbf{u}_\perp \equiv \varepsilon^{ij}g_{jk}u^k\boldsymbol{\partial}_i$, задающую вектор, перпендикулярный $\mathbf{u}$, причем $|\mathbf{u}_\perp| = |\mathbf{u}|$.

Через $\nabla_{\mathbf{h}} \equiv h^i\nabla_i$ обозначим оператор ковариантного дифференцирования вдоль вектора $\mathbf{h}$, а через $\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2}g^{jl}(\partial_i g_{kl} + \partial_k g_{il} - \partial_l g_{ik})$ – компоненты римановой связности (символы Кристоффеля). Таким образом, для скалярного поля f верно равенство $\nabla_i f = \partial_i f$, где ∂_i обозначает частное дифференцирование по локальной координате x_i. Для векторного аргумента имеет место равенство $(\nabla_i \mathbf{v})^j = \partial_i v^j + \Gamma^j_{ik} v^k$. Также введем обозначение оператора $\nabla G \equiv g^{ij} \nabla_j G \boldsymbol{\partial}_i$, где G – произвольное тензорное поле.

Градиент скалярного поля f и дивергенцию векторного поля $\mathbf{v}$ обозначим так:

$$\nabla f \equiv g^{ij} \partial_j f \boldsymbol{\partial}_i, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} \equiv (\nabla_i \mathbf{v})^i.$$

На двумерном многообразии существуют два оператора, которые называются ротором, один из них переводит векторное поле в скалярное, другой – наоборот, скалярное поле в векторное. Чтобы отличить один от другого, для обозначения последнего из них будем использовать полужирный шрифт.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv \varepsilon^{ij} \nabla_j (g_{ik} v^k) \equiv \varepsilon^{ij} \partial_j (g_{ik} v^k), \qquad \mathbf{rot} f \equiv \varepsilon^{ij} \nabla_i f \boldsymbol{\partial}_j \equiv \varepsilon^{ij} \partial_i f \boldsymbol{\partial}_j.$$

Для операторов Лапласа (см. [8], [9]) скалярного поля f и векторного поля $\mathbf{v}$ также будем использовать различные обозначения:

$$\Delta f \equiv g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = \operatorname{div} \nabla f, \qquad \nabla^2 \mathbf{v} \equiv g^{ij} \nabla_i \nabla_j \mathbf{v} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Имеют место следующие факты из курса дифференциальной геометрии:

$$g^{jl} \partial_k g_{il} = -g_{il} \partial_k g^{lj}, \tag{2.1}$$

$$\Gamma^i_{ik} = \partial_k \ln \sqrt{g}, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{nm} \varepsilon^{ij} = \delta^i_n \delta^j_m - \delta^j_n \delta^i_m, \qquad \varepsilon_{nm} \varepsilon^{nj} = \delta^j_m, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{rot} = 0, \qquad \operatorname{rot} \nabla = 0. \tag{2.4}$$

2.1.2. *Область и величины.* Рассмотрим область $\Omega \equiv \Omega' \times [-h, 0]$, где $h = \mathrm{const}$, а Ω' – компактно вкладывающаяся область двумерного многообразия $\mathscr{M}$ с границей, состоящей из конечного числа гладких дуг, пересекающихся под ненулевыми углами. Другими словами, можно сказать, что Ω – это цилиндр над многообразием с краем. Границу $\partial\Omega$ разобьем на две части: $S = \partial\Omega' \times [0, 1]$ – боковую поверхность и $S_1 = \Omega' \times \{0, -h\}$ – объединение верхнего и нижнего оснований цилиндра Ω. Через $Q_T \equiv \Omega \times [0, T]$ обозначим цилиндр по времени. Через (M, z) (или через (M, ζ)) обозначим точку в Ω.

Границу $\partial\Omega'$ можно параметризовать натуральным параметром s так, чтобы вектор нормали $\mathbf{n}$, определяемый равенством $n^i \equiv (\boldsymbol{\tau}_\perp)^i$, был внешним по отношению к области Ω'. Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – касательный вектор к границе, задаваемый параметром s. Таким образом, заданный вектор будет единичным в силу свойств $\boldsymbol{\tau}_\perp$ и натуральной параметризации. Очевидно, что вектор $\mathbf{n}$ является внешней единичной нормалью к S. На оставшейся части границы S_1 определим нормаль так: $n_3 = 1$, если $z = 0$, и $n_3 = -1$, если $z = -h$.

Для удобства введем обозначение $\nabla_3 \equiv (\nabla, \partial_z)$.

Если $\mathscr{X}$ – какое-то измеримое компактное подмногообразие $\mathscr{M} \times [-h, 0]$ с классической мерой Лебега, то через $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\mathscr{X}}$ обозначим скалярное произведение в $L_2(\mathscr{X})$, при этом индекс будет опускаться, если интегрирование ведется по всей области, т.е. $(\,\cdot\,,\cdot\,) \equiv (\,\cdot\,,\cdot\,)_\Omega$. Аналогично будем использовать следующие обозначения для норм:

$$\|\cdot\|_{q,\mathscr{X}} = \|\cdot\|_{L_q(\mathscr{X})}, \qquad \|\cdot\|_{\mathscr{X}} = \|\cdot\|_{2,\mathscr{X}},$$
$$\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{q,\Omega}, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_2, \qquad |\cdot|_q = \|\cdot\|_{q,\Omega'}, \quad |\cdot| = |\cdot|_2.$$

При этом нормы для $L_q(\mathscr{X})$ и $\mathbf{L}_q(\mathscr{X})$ будем обозначать одинаково. Отметим, что в силу того, что многообразия являются прямыми произведениями, меры на них являются прямыми произведениями мер, т.е. $\mu_L^4 \equiv \mu_L^3 \times \mu_L$ – мера на Q_T, $\mu_L^3 \equiv \mu_L^2 \times \mu_L$ – мера на Ω, μ_L – классическая мера Лебега на прямой, μ_L^2 – мера на Ω', причем $d\mu_L^2 = \sqrt{g}\,dx^1\,dx^2$ в координатном представлении.

Через $(\mathbf{u}, w)$ обозначим трехмерное векторное поле скоростей, где $\mathbf{u} \in \mathrm{T}\mathscr{M}$, а через p и ρ – давление и плотность соответственно.

Буквой c (с индексами и без них) обозначим в неравенствах положительные константы, которые не зависят от функций, участвующих в этих неравенствах, но зависят от длины интервала времени T, формы области Ω и норм начальных условий. Чаще всего разные константы будут обозначаться одной и той же буквой, если это не будет вводить в заблуждение.

Пространство Соболева функций, чьи первые производные интегрируемы в квадрате, обозначим через $W_2^1(\mathscr{X})$, а его подпространство, состоящее из функций, равных нулю (в смысле следа) на $\partial\mathscr{X}$, – через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathscr{X})$.

2.2. Система уравнений и краевые условия в инвариантной (тензорной) форме. Система примитивных уравнений рассматривается в области Q_T и состоит из одного векторного уравнения и трех скалярных:

$$\partial_t \mathbf{u} - \mu\nabla^2\mathbf{u} - \nu\partial_z^2\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + w\partial_z\mathbf{u} + \ell\mathbf{u} + \gamma\nabla p = \mathbf{0}, \tag{2.5}$$
$$\partial_z p = -\rho\widetilde{g}, \tag{2.6}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u} + \partial_z w = 0, \tag{2.7}$$
$$\partial_t\rho - \mu_1\Delta\rho - \nu_1\partial_z^2\rho + \nabla_{\mathbf{u}}\rho + w\partial_z\rho = 0. \tag{2.8}$$

Здесь μ, ν, μ_1, ν_1, γ, $\widetilde{g}$ – положительные вещественные константы, ℓ – линейный ограниченный оператор над $\mathrm{T}\mathscr{M}$ (тензор типа $(1,1)$).

Ставятся следующие граничные условия:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}\times\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}}\rho = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{2.9}$$
$$w = 0, \quad \partial_z\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \partial_z\rho = 0 \quad \text{на} \quad S_1. \tag{2.10}$$

Начальные условия задаются так:

$$\mathbf{u}(0,M,z) = \mathbf{u}_0(M,z), \qquad \rho(0,M,z) = \rho_0(M,z), \qquad \int_{-h}^{0}\operatorname{div}\mathbf{u}_0\,dz = 0. \tag{2.11}$$

Замечание 2.1. В классической записи примитивных уравнений (см. [10]) вместо уравнения для плотности ρ (2.8) используются два аналогичных уравнения для температуры T и для солености S. Плотность ρ, в свою очередь, линейно выражается через эти величины: $\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_r) - \beta_S(S - S_r))$, где $\rho_0 = \gamma^{-1}$ в наших обозначениях. Это отличие не играет существенной роли в доказательстве утверждений настоящей работы.

Замечание 2.2. Для случая $\mathscr{M} = \mathbb{R}^2$ задача (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) полностью идентична задаче, исследованной в работах [3], [4].

2.3. Система уравнений и краевые условия в координатной (тензорной) форме. Выпишем уравнения системы (2.5)–(2.8) в координатах некоторой карты многообразия $\mathscr{M}$, получив при этом пять скалярных уравнений:

$$\partial_t u^i - \mu\bigl(g^{ij}\partial_j(\partial_k u^k + \partial_k \ln\sqrt{g}u^k) + \varepsilon^{ij}\partial_j(\varepsilon^{kl}\partial_l(g_{km}v^m))\bigr) - \nu\partial_z^2 u^i \\ + u^j(\partial_j u^i + \Gamma^i_{jk}u^k) + w\partial_z u^i + \ell^i_j u^j + \gamma g^{ij}\partial_j p = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{2.12}$$

$$\partial_z p = -\rho\widetilde{g}, \tag{2.13}$$

$$\partial_i u^i + \partial_k \ln\sqrt{g}u^k + \partial_z w = 0, \tag{2.14}$$

$$\partial_t \rho - \mu_1\bigl(\partial_k(g^{kj}\partial_j\rho) + g^{kj}\partial_k \ln\sqrt{g}\partial_j\rho\bigr) - \nu_1\partial_z^2\rho + u^j\partial_j\rho + w\partial_z\rho = 0. \tag{2.15}$$

Краевые условия в координатах имеют следующий вид:

$$g_{ij}u^i n^j = 0, \quad \varepsilon^{ij}n^k(\partial_k u^i + \Gamma^i_{kl}u^l)n^i = 0, \quad n^i\partial_i\rho = 0 \quad \text{на} \ \ S, \tag{2.16}$$

$$w = 0, \quad \partial_z u^i = 0, \quad \partial_z\rho = 0 \quad \text{на} \ \ S_1. \tag{2.17}$$

§ 3. Подготовительные утверждения

3.1. Утверждения дифференциальной геометрии. Сформулируем, используя введенные выше обозначения, теоремы о перебрасывании производных, которые можно доказать явно через координатное представление или же сведе́нием к общей теореме Стокса на многообразии. Для полноты рассуждений приведем, например, доказательство последнего равенства.

Теорема 3.1. *Для любого векторного поля* $\mathbf{v}$ *верно равенство*

$$(\operatorname{div}\mathbf{v}, 1)_{\Omega'} = (\mathbf{v}, \mathbf{n})_{\partial\Omega'}. \tag{3.1}$$

Следствие 3.1. *Для любого векторного поля* $\mathbf{v}$ *и скалярного поля* f *верно равенство*

$$(\operatorname{div}\mathbf{v}, f)_{\Omega'} + (\mathbf{v}, \nabla f)_{\Omega'} = (f\mathbf{v}, \mathbf{n})_{\partial\Omega'}. \tag{3.2}$$

Следствие 3.2. *Для любых векторных полей* $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{h}$ *верно равенство*

$$(\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{v}, \mathbf{u})_{\Omega'} + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{u})_{\Omega'} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{h})_{\Omega'} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \mathbf{h}\cdot\mathbf{n})_{\partial\Omega'}. \tag{3.3}$$

Теорема 3.2. *Для любого векторного поля* $\mathbf{v}$ *и скалярного поля* f *верно равенство*

$$(\mathbf{rot} f, \mathbf{v})_{\Omega'} - (f, \operatorname{rot}\mathbf{v})_{\Omega'} = (f, \mathbf{v}\times\mathbf{n})_{\partial\Omega'}. \tag{3.4}$$

Теорема 3.3. *Для любых векторных полей* $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ *верно равенство*

$$(\nabla^2\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega'} + (\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})_{\Omega'} = (\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\partial\Omega'}. \tag{3.5}$$

Доказательство теоремы 3.3. Рассмотрим вектор $\mathbf{h} = g^{ij}(\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l \boldsymbol{\partial}_i$ и покажем, что формула перебрасывания производных из теоремы 3.1 для вектора $\mathbf{h}$ совпадает с (3.5):

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \big(g^{ij}(\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l\big) g_{im} n^m = n^j (\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l = \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Здесь мы воспользовались определением метрических тензоров, а также определением ковариантной производной вдоль вектора. Далее воспользуемся тем, что связность риманова, т.е. согласована с метрикой. Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{h} &= \big(\nabla_m (g^{ij}(\nabla_j \mathbf{u})^k g_{kl} v^l \boldsymbol{\partial}_i)\big)^m = g^{ij} g_{kl} (\nabla_i \nabla_j \mathbf{u})^k v^l + g^{ij} g_{kl} (\nabla_j \mathbf{u})^k (\nabla_i \mathbf{v})^l \\ &= \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

Предложение 3.1. *Если вектор $\mathbf{v}$ удовлетворяет на $\partial\Omega'$ краевым условиям вида* (2.9), *то для него верно равенство*

$$\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{3.6}$$

Доказательство. В фиксированной точке $\partial\Omega'$ рассмотрим локальную систему координат. Из второго краевого условия (2.9) следует равенство

$$(\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 n^2 = (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^2 n^1.$$

Без ограничения общности будем считать, что $n^1 \neq 0$ Таким образом, мы имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}g_{ij} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^i v^j &= \big(g_{1j} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 + g_{2j} n^2 (n^1)^{-1} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1\big) v^j \\ &= (n^1)^{-1} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 (g_{1j} n^1 + g_{2j} n^2) v^j = (n^1)^{-1} (\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v})^1 g_{ij} n^i u^j = 0,\end{aligned}$$

которая и доказывает предложение.

Предложение 3.2. *Пусть задано векторное поле $\boldsymbol{\tau}$ и перпендикулярное ему поле $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_\perp$, причем длина $\boldsymbol{\tau}$ равна единице. Тогда для любого векторного поля $\mathbf{h}$ выполняется тождество*

$$\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{h} \times \mathbf{n} = -\operatorname{rot} \mathbf{h} + \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{h}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку на многообразии и рассмотрим локальную систему координат в ней. Тогда

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{h} \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{h} &= \varepsilon_{ij} n^i n^k (\nabla_k \mathbf{h})^j + g_{ij} n^i g_{sm} \varepsilon^{km} n^s (\nabla_k \mathbf{h})^j \\ &= (\nabla_k \mathbf{h})^j n^i (\varepsilon_{ij} n^k + g_{ij} g_{sm} n^s \varepsilon^{km}).\end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу того, что связность риманова, $\operatorname{rot} \mathbf{h} = \varepsilon^{ik} g_{ij} (\nabla_k \mathbf{h})^j$. Проверим, что в формуле ротора и в выражении (3.8) множители при $(\nabla_k \mathbf{h})^j$ совпадают. В силу обратимости операций поднятия и опускания индексов нам необходимо проверить выполнение равенства

$$n_i (\varepsilon^{ij} n^k + \varepsilon^{ki} n^j) = \varepsilon^{kj}. \tag{3.9}$$

При $j = k$ правая часть равенства (3.9) равна нулю в силу косой симметрии дискриминантного тензора, а левая часть равна $n_2\varepsilon^{21}n^1 + n_2\varepsilon^{12}n^1 = 0$ при $j = k = 1$ также в силу косой симметрии. Пусть теперь j и k различны. Тогда без ограничения общности считаем, что $j = 1$ и $k = 2$. В этом случае левая часть (3.9) равна $-\varepsilon^{12}n^2n_2 - \varepsilon^{12}n^1n_1 = \varepsilon^{21}\mathbf{n}^2$. Поскольку $|\mathbf{n}| = |\boldsymbol{\tau}| = 1$, предложение доказано.

3.2. Утверждения функционального анализа. Выпишем несколько утверждений функционального анализа, которыми далее будем часто пользоваться. При этом их формулировки приведем в том виде, в котором мы будем их использовать.

Утверждение 3.1 (неравенство Юнга). *Пусть даны числа $a_1, a_2, a_3 > 0$, заданы любые числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и любые числа $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 \geqslant 1$, удовлетворяющие соотношениям $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1$, $q_1^{-1} + q_2^{-1} + q_3^{-1} = 1$. Тогда выполнены следующие два неравенства*:

$$a_1a_2 \leqslant \varepsilon_1 a_1^{p_1} + c(\varepsilon_1, p_1)a_2^{p_2}, \tag{3.10}$$

$$a_1a_2a_3 \leqslant \varepsilon_1 a_1^{q_1} + \varepsilon_2 a_2^{q_2} + c(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q_1, q_2)a_3^{q_3}. \tag{3.11}$$

Утверждение 3.2 (неравенство Гронуолла). *Если для функции $f(t) \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\partial_t f(t) \leqslant C_1(t)f(t) + C_2(t), \tag{3.12}$$

где $C_1(t), C_2(t) \geqslant 0$, то

$$f(t) \leqslant \exp\biggl(\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\biggr)\biggl(f(0) + \int_0^t C_2(\tau)\,d\tau\biggr). \tag{3.13}$$

Утверждение 3.3. *Пусть числа $p, q \in [1, \infty]$, достаточно гладкая функция $f(s)$ определена на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке существует точка, в которой f обращается в нуль. Тогда верна цепочка неравенств*

$$\|f\|_{p,[a,b]} \leqslant c\|f\|_{C[a,b]} \leqslant c\|\partial_s f\|_{q,[a,b]}, \qquad p, q \in [1, \infty]. \tag{3.14}$$

Утверждение 3.4 (неравенство Гёльдера). *Пусть числа $p_1, p_2, p_3 \in [1, \infty]$ таковы, что $p_1^{-1} + p_2^{-1} + p_3^{-1} = 1$, и даны функции $f_k \in L_{p_k}(\mathscr{X})$. Тогда*

$$\bigl|(1, f_1f_2f_3)_{\mathscr{X}}\bigr| \leqslant \|f_1\|_{p_1,\mathscr{X}}\,\|f_2\|_{p_2,\mathscr{X}}\,\|f_3\|_{p_3,\mathscr{X}}. \tag{3.15}$$

Утверждение 3.5. *Для функции $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ верно неравенство*

$$\|f\|_4 \leqslant c\|\nabla_3 f\|^{3/4}\,\|f\|^{1/4}. \tag{3.16}$$

Утверждение 3.6. *Для функции $f \in W_2^1(\Omega)$ верно неравенство*

$$\|f\|_4 \leqslant c\bigl(\|f\| + \|\nabla_3 f\|^{3/4}\,\|f\|^{1/4}\bigr). \tag{3.17}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Стокса (см. [8]), рассмотрим следующее разбиение единицы: $1 \equiv \sum_{\lambda\in\Lambda} \Xi_\lambda$, где Ξ_λ – гладкая функция на многообразии с компактным носителем в карте A_λ. Это разбиение позволяет представить поле в виде $f \equiv \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, где $f_\lambda = f\Xi_\lambda$, причем $\overline{\operatorname{supp} f_\lambda}$ лежит в карте A_λ.

Из результатов работы [3] следует, что в координатах каждой карты A_λ на области выполняется неравенство

$$\|f_\lambda\|_4 = \|f_\lambda\|_{4,A_\lambda} \leqslant c\bigl(\|f_\lambda\|_{A_\lambda} + \|\nabla_3 f_\lambda\|_{A_\lambda}^{3/4}\,\|f_\lambda\|_{A_\lambda}^{1/4}\bigr).$$

Отметим, что

$$\|\nabla_3 f_\lambda\|_{A_\lambda}^{3/4} \leqslant c\bigl(\|\nabla_3 f\Xi_\lambda\|_{A_\lambda}^{3/4} + \|\nabla_3\Xi_\lambda f\|_{A_\lambda}^{3/4}\bigr) \leqslant c\bigl(\|\nabla_3 f\|_{A_\lambda}^{3/4} + \|f\|_{A_\lambda}^{3/4}\bigr).$$

Следовательно,

$$\|f\|_4 \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda\|_{4,A_\lambda} \leqslant c\bigl(\|f_\lambda\| + \|\nabla_3 f_\lambda\|^{3/4}\|f_\lambda\|^{1/4}\bigr),$$

что доказывает утверждение.

Аналогичным образом может быть доказано утверждение для двумерного случая.

Утверждение 3.7 (см. [3]). *Для функции $f \in W_2^1(\Omega')$ верно неравенство*

$$|f|_4 \leqslant c\bigl(|f| + |\nabla f|^{1/2}\,|f|^{1/2}\bigr). \tag{3.18}$$

Утверждение 3.8 (см. [11]). *Для функции $f(M)$, удовлетворяющей условиям*

$$\nabla_{\mathbf{n}} f\big|_{\partial\Omega'} = 0, \qquad (f,1)_{\Omega'} = 0, \tag{3.19}$$

верны оценки

$$|\nabla\nabla f|_{4/3} \leqslant c|\Delta f|_{4/3}, \qquad |\nabla f|_{4/3} \leqslant c|\Delta f|_{4/3}. \tag{3.20}$$

Утверждение 3.9 (см. [12]). *Для функций $f \in W_{4/3}^1(\Omega')$ и $g \in W_2^1(\Omega')$ верны неравенства*

$$\|f\|_{4/3,\partial\Omega'} \leqslant c(|\nabla f|_{4/3} + |f|_{4/3}), \qquad \|g\|_{\partial\Omega'} \leqslant c(|\nabla g| + |g|). \tag{3.21}$$

§ 4. Априорные оценки

4.1. Оценки для скорости, давления и плотности. В этом пункте мы получим априорные оценки для вектора скоростей, давления и плотности. Далее предположим, что решение задачи существует и дифференцируемо достаточное количество раз.

4.1.1. *Оценки норм* $\max_t \|\rho\|_4$ *и* $\max_t \|\mathbf{u}\|$.

Лемма 4.1. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\rho(t)\|_4 \leqslant c, \qquad \int_0^T \|\rho\nabla_3\rho\|^2\,dt \leqslant c. \tag{4.1}$$

Доказательство. Так как техника доказательств большинства утверждений настоящей работы одинакова, то доказательство первых лемм разберем достаточно подробно, чтобы в получении последующих оценок не останавливаться на аналогичных простых деталях. Умножим уравнение (2.8) скалярно на ρ^3:

$$(\partial_t\rho,\rho^3) - (\mu_1\Delta\rho,\rho^3) - (\nu_1\partial_z^2\rho,\rho^3) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\rho,\rho^3) + (w\partial_z\rho,\rho^3) = 0. \tag{4.2}$$

Первое слагаемое может быть представлено так:

$$(\partial_t\rho,\rho^3) = \frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\|\rho\|_4^4.$$

Далее воспользуемся формулами перебрасывания производных: по вертикальной переменной – формулой Ньютона–Лейбница, а по горизонтали – выражением (3.2).

Сумма последних слагаемых равна нулю в силу краевых условий и уравнения для дивергенции (2.7):

$$\frac{1}{4}\big((\mathbf{u},\nabla\rho^4) + (w,\partial_z\rho^4)\big) = -\frac{1}{4}\big((\operatorname{div}\mathbf{u}+\partial_z w,\rho^4) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n},\rho^4)_S + (w,n_3\rho^4)_{S_1}\big) = 0.$$

Наконец, интегрируя по частям и используя краевые условия (3.6), преобразуем слагаемые с производными второго порядка. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\operatorname{div}\nabla\rho,\rho^3) + \nu_1(\partial_z^2\rho,\rho^3)\\
&\qquad = -\mu_1(\nabla\rho,3\nabla\rho\rho^2) - \nu_1(\partial_z\rho,3\partial_z\rho\rho^2) + \mu_1(\nabla\rho\rho^3,\mathbf{b})_S + \nu_1(\partial_z\rho,n_3\rho^3)_{S_1}\\
&\qquad = -\mu_1\frac{3}{4}(\nabla\rho\rho,\nabla\rho\rho) - \nu_1\frac{3}{4}(\partial_z\rho\rho,\partial_z\rho\rho).
\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (4.2) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\|\rho\|_4^4 + \mu_1\frac{3}{4}\|\rho\nabla\rho\|^2 + \nu_1\frac{3}{4}\|\rho\partial_z\rho\|^2 = 0. \tag{4.3}$$

Для функции $\|\rho(t)\|_4^4$ применим утверждение о неравенстве Гроноулла:

$$\|\rho(t)\|_4^4 \leqslant c\|\rho(0)\|_4^4 \leqslant c, \qquad t\in[0,T]. \tag{4.4}$$

Первое неравенство из требуемых доказано. Теперь, пользуясь (4.4), интегрируем по отрезку $[0,T]$ равенство (4.3). В результате получаем оценку

$$\int_0^T \big(\|\rho\nabla\rho\|^2 + \|\rho\partial_z\rho\|^2\big)\,dt \leqslant c,$$

что доказывает лемму.

Следствие 4.1. *Верна следующая оценка для производной давления по вертикали*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\partial_z p(t)\|_4 \leqslant c. \tag{4.5}$$

Доказательство этого утверждения следует из второго уравнения системы (2.6) и предыдущей леммы.

Предложение 4.1. *Для третьей компоненты скорости w верно соотношение*

$$\|w\|_q \leqslant c\|\nabla \mathbf{u}\|_q, \qquad q \in [1,\infty]. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пользуясь утверждением 3.3 о функции, имеющей нуль на отрезке, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\|w\|_q &= \left|\left(\int_{-h}^{0} |w(z)|^q\,dz\right)^{1/q}\right|_q \leqslant c\left|\left(\int_{-h}^{0} |\partial_z w(z)|^q\,dz\right)^{1/q}\right|_q = c\|\partial_z w\|_q \\ &= c\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_q \leqslant c\|\nabla\mathbf{u}\|_q.\end{aligned}$$

В последней строчке мы воспользовались уравнением для дивергенции. Таким образом, предложение доказано.

Лемма 4.2. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\| \leqslant c, \qquad \int_0^T \|\nabla_3\mathbf{u}\|^2\,dt \leqslant c. \tag{4.7}$$

Доказательство. Умножим уравнение (2.5) скалярно на $\mathbf{u}$:

$$(\mathbf{u}_t,\mathbf{u})-\mu(\nabla^2\mathbf{u},\mathbf{u})-\nu(\partial_z^2\mathbf{u},\mathbf{u})+(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u},\mathbf{u})+(w\partial_z\mathbf{u},\mathbf{u})+(\ell\mathbf{u},\mathbf{u})+\gamma(\nabla p,\mathbf{u}) = 0. \tag{4.8}$$

Первое слагаемое может быть представлено так:

$$(\mathbf{u}_t,\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2.$$

Сумма нелинейных слагаемых равна нулю. Сначала заметим, что при $U = \mathbf{u}^2$ выполнено следующее соотношение:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{u}}U = \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\nabla U.$$

Далее используем формулы Ньютона–Лейбница и перебрасывания производных (3.3), уравнение для дивергенции (2.7), а также краевые условия. Получаем, что

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u},\mathbf{u}) + (w\partial_z\mathbf{u},\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}\big((\mathbf{u},\nabla U) + (w,\partial_z U)\big) \\ &= -\frac{1}{2}\big((\operatorname{div}\mathbf{u},U) + (\partial_z w,U)\big) + \frac{1}{2}\big((\mathbf{u},\mathbf{n}U)_S + (wn_3,U)_{S_1}\big) = 0.\end{aligned}$$

Слагаемое с градиентом давления преобразуем следующим образом:

$$(\nabla p, \mathbf{u}) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{u}) = (p, \partial_z w) = -(\partial_z p, w).$$

Наконец, используя теорему 3.3 о перебрасывании производных, преобразуем слагаемые второго порядка к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&\mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) \\
&\qquad = -\mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) - \nu(\partial_z \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{u}) + \mu(\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \mathbf{u})_S + \nu(\partial_z \mathbf{u} n_3, \mathbf{u})_{S_1} \\
&\qquad = -\mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) - \nu(\partial_z \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Интегралы по границе цилиндра $\partial\Omega$ равны нулю в силу граничных условий и предложения 3.1.

Таким образом, из равенства (4.8) получаем выражение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \nu \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 = -(\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma(\partial_z p, w). \tag{4.9}$$

Теперь последовательно оценим правую часть этого равенства через нормы, стоящие в левой. Имеем

$$|\gamma(\partial_z p, w)| \leqslant \gamma \|\partial_z p\| \, \|w\| \leqslant c \|\partial_z p\| \, \|\nabla \mathbf{u}\| \leqslant \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + c \|\partial_z p\|^2 \leqslant \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + c.$$

Здесь мы воспользовались следствием 4.1, предложением 4.1, а также, как и в предыдущей лемме, неравенствами Гёльдера и Юнга. Слагаемое с линейным оператором оценивается очевидным образом, а именно, $|(\ell \mathbf{u}, \mathbf{u})| \leqslant c \|\mathbf{u}\|^2$.

Взяв $2\varepsilon = \mu/4$, в итоге получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\mu}{4} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_z \mathbf{u}\|^2 \leqslant c \|\mathbf{u}\|^2 + c. \tag{4.10}$$

Далее, как и в предыдущей лемме, для функции $\|\mathbf{u}(t)\|^2$ применяем утверждение о неравенстве Гронуолла:

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leqslant c \|\mathbf{u}(0)\|^2 + c \leqslant c, \qquad t \in [0, T]. \tag{4.11}$$

Первое неравенство из требуемых доказано. Теперь, пользуясь (4.11), интегрируем по отрезку $[0, T]$ неравенство (4.10). В результате получаем следующую оценку:

$$\int_0^T \bigl(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\partial_z \mathbf{u}\|^2\bigr) \, dt \leqslant c,$$

что доказывает лемму.

Из последней леммы и предложения 4.1 вытекает следствие 4.2.

Следствие 4.2. *Верна следующая оценка для третьей компоненты скорости и ее производной по вертикали*

$$\int_0^T \|w\|^2 + \|\partial_z w\|^2 \, dt \leqslant c. \tag{4.12}$$

4.1.2. *Оценка нормы* $\|p\|_4$. Следующая теорема играет одну из основных ролей в доказательстве априорных оценок и существования решения. Для ее доказательства применяется техника, значительно отличающаяся от способов доказательств остальных утверждений настоящей работы.

Теорема 4.1. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняется следующая оценка*

$$\|p\|_4 \leqslant c\big[(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})(\|U\|^{1/2} + 1) + 1\big], \tag{4.13}$$

где $U = \mathbf{u}^2$.

Доказательство. Сначала представим давление в виде $p = p_1 + p_2$, где

$$p_1(M) = \int_{-h}^{0} p(M,z)\,dz, \qquad M \in \Omega'.$$

Из этого представления следует, что

$$\int_{-h}^{0} p_2\,dz = 0, \qquad \partial_z p = \partial_z p_2. \tag{4.14}$$

В частности, так как интеграл равен нулю, то применимо утверждение 3.3 о функции с нулем на отрезке (аналогично доказательству предложения 4.1):

$$\|p_2\|_4 \leqslant c\|\partial_z p_2\|_4 = c\|\partial_z p\|_4 = c. \tag{4.15}$$

В силу того, что p из уравнений (2.5), (2.6) определяется с точностью до константы, выберем эту константу таким образом, чтобы $(p_1^3, 1) = 0$. Пусть функция $q = q(M)$ является решением следующей задачи в области Ω':

$$\Delta q = p_1^3, \qquad \nabla_{\mathbf{n}} q\big|_{\partial\Omega'} = 0, \qquad (q,1)_{\Omega'} = 0. \tag{4.16}$$

Тогда для q верны оценки норм (здесь используем утверждение 3.8):

$$|\nabla\nabla q|_{4/3} + |\nabla q|_{4/3} \leqslant c|\Delta q|_{4/3} = c|p_1^3|_{4/3} = c\|p_1^3\|_{4/3} = c\|p_1\|_4^3. \tag{4.17}$$

Продолжим доказательство теоремы. Теперь представим $\mathbf{u}$ в следующем виде: $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\mathbf{u}}}$, где

$$\overline{\mathbf{u}}(M) = \int_{-h}^{0} \mathbf{u}(M,z)\,dz, \qquad M \in \Omega'.$$

Из этого представления следует, что

$$\int_{-h}^{0} \overline{\overline{\mathbf{u}}}\,dz = 0, \qquad \operatorname{div}\overline{\mathbf{u}} = \int_{-h}^{0} \operatorname{div}\mathbf{u}\,dz = -\int_{-h}^{0} \partial_z w\,dz = 0.$$

В силу последнего равенства и выражения для векторного оператора Лапласа получаем, что $\nabla^2\overline{\mathbf{u}}$ представимо в следующем виде:

$$\nabla^2\overline{\mathbf{u}} = \nabla\operatorname{div}\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{rot}\operatorname{rot}\overline{\mathbf{u}} = -\mathbf{rot}\operatorname{rot}\overline{\mathbf{u}}.$$

Интегрируя краевые условия для $\mathbf{u}$ на боковой поверхности цилиндра S (2.9), получаем такие же условия для $\overline{\mathbf{u}}$, а именно,

$$\overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \ \ \partial\Omega'. \tag{4.18}$$

Дифференцируя первое граничное условие вдоль касательной, получаем, что

$$0 = \nabla_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{u}}) = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \overline{\mathbf{u}} + \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{u}}.$$

Из второго краевого условия для $\overline{\mathbf{u}}$ и предложения 3.2 следует, что

$$0 = \nabla_{\mathbf{n}} \overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{n} = -\operatorname{rot} \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \overline{\mathbf{u}}.$$

Из последних двух равенств выводим соотношение

$$-\operatorname{rot} \overline{\mathbf{u}} = \nabla_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{n}) \cdot \overline{\mathbf{u}}. \tag{4.19}$$

Таким образом, $|\operatorname{rot} \overline{\mathbf{u}}| \leqslant c|\overline{\mathbf{u}}|$ на $\partial\Omega'$.

Теперь, получив все предварительные оценки, переходим к оценке нормы p_1 в $L_4(\Omega)$. Для этого умножим первое уравнение системы (2.5) скалярно на ∇q:

$$\begin{gathered}(\partial_t \mathbf{u}, \nabla q) - \mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \nabla q) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \nabla q) + (\ell \mathbf{u}, \nabla q) + \gamma(\nabla p, \nabla q) \\ + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \nabla q) + (w \partial_z \mathbf{u}, \nabla q) = 0.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Первое слагаемое равно нулю. Чтобы это показать, воспользуемся независимостью q от координаты z и независимостью краевых условий системы от времени. Имеем

$$(\partial_t \mathbf{u}, \nabla q) = -(\operatorname{div} \partial_t \mathbf{u}, q) + (\partial_t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}), q)_S = (\partial_z w_t, q) = (w_t\big|_{z=-h}^{0}, q)_{\Omega'} = 0.$$

Далее оценим члены равенства (4.20) с производными второго порядка:

$$\begin{gathered}(\partial_z^2 \mathbf{u}, \nabla q) = (\partial_z \mathbf{u} n_3, \nabla q)_{S_1} = 0, \\ (\nabla^2 \mathbf{u}, \nabla q) = (\nabla^2(\overline{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\mathbf{u}}}), \nabla q) = (\nabla^2 \overline{\mathbf{u}}, \nabla q) = -h(\mathbf{rot} \operatorname{rot} \overline{\mathbf{u}}, \nabla q)_{\Omega'} \\ = -h(\operatorname{rot} \overline{\mathbf{u}}, \operatorname{rot} \nabla q)_{\Omega'} - h(\operatorname{rot} \overline{\mathbf{u}}, \nabla q \times \mathbf{n})_{\partial\Omega'} = h(\nabla_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{n}) \cdot \overline{\mathbf{u}}, \nabla q \times \mathbf{n})_{\partial\Omega'}.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Из равенства (4.19) следует, что

$$|(\nabla^2 \mathbf{u}, \nabla q)| \leqslant c\|\overline{\mathbf{u}}\|_{4,\partial\Omega'} \, \|\nabla q\|_{4/3,\partial\Omega'}.$$

Теперь воспользуемся утверждением 3.9. Получаем, что

$$\|\nabla q\|_{4/3,\partial\Omega'} \leqslant c|\nabla\nabla q|_{4/3} + c|\nabla q|_{4/3} \leqslant c\|p_1\|_4^3, \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\|\overline{\mathbf{u}}\|_{4,\partial\Omega'} &\leqslant c\biggl(\int_{\partial\Omega'} \int_{-h}^{0} \mathbf{u}^4 \, dz \, dl\biggr)^{1/4} = c\biggl(\int_{-h}^{0} \int_{\partial\Omega'} U^2 \, dl \, dz\biggr)^{1/4} \\ &= c\biggl(\int_{-h}^{0} \bigl(\|U\|_{\partial\Omega'}^{1/2}\bigr)^4 \, dz\biggr)^{1/4} \leqslant c\biggl(\int_{-h}^{0} \bigl(|\nabla U|^{1/2} + |U|^{1/2}\bigr)^4 \, dz\biggr)^{1/4} \\ &\leqslant c\biggl(\int_{-h}^{0} \bigl(|\nabla U|^{1/2}\bigr)^4 \, dz\biggr)^{1/4} + c\biggl(\int_{-h}^{0} \bigl(|U|^{1/2}\bigr)^4 \, dz\biggr)^{1/4} \\ &= c(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Таким образом, приходим к оценке

$$|(\nabla^2\mathbf{u}, \nabla q)| \leqslant c\big(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}\big)\|p_1\|_4^3.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
|(\ell\mathbf{u}, \nabla q)| &\leqslant c\|\mathbf{u}\|_4\, \|\nabla q\|_{4/3} \leqslant c\|U\|^{1/2}\, \|p_1\|_4^3,\\
(\nabla p, \nabla q) &= -(p, \operatorname{div}\nabla q) + (p, \nabla q\cdot\mathbf{n})_S = -(p, \Delta q)\\
&= -(p_1, p_1^3) - (p_2, p_1^3) = -\|p_1\|_4^4 - (p_2, p_1^3).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Последний член в этом выражении легко оценивается с помощью неравенства Гёльдера:

$$|(p_2, p_1^3)| \leqslant \|p_2\|_4\, \|p_1^3\|_{4/3} \leqslant c\|p_1\|_4^3.$$

Для преобразования нелинейных слагаемых будем использовать следствие 3.2 и уравнение для дивергенции (2.7). Имеем

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \nabla q) + (w\partial_z\mathbf{u}, \nabla q) &= -(\operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \nabla q) - (\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\nabla q) - (\partial_z w\mathbf{u}, \nabla q) - (\mathbf{u}, \partial_z\nabla q)\\
&+ ((\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{u}, \nabla q)_S + (wn_3\mathbf{u}, \nabla q)_{S_1} = -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\nabla q).
\end{aligned}$$

Таким образом, используя утверждение 3.7, получаем, что

$$\begin{aligned}
|(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + w\partial_z\mathbf{u}, \nabla q)| &\leqslant c\int_{-h}^0\int_{\Omega'} |\mathbf{u}\mathbf{u}|\, |\nabla\nabla q|\, d\mu_L^2\, dz \leqslant c\int_{-h}^0 |U|_4\, |p_1|_4^3\, dz\\
&\leqslant c\|p_1\|_4^3\int_{-h}^0 \big(|\nabla U|^{1/2} + |U|^{1/2}\big)|U|^{1/2}\, dz\\
&\leqslant c\|p_1\|_4^3\left[\left(\int_{-h}^0 |\nabla U|^2\, dz\right)^{1/4}\left(\int_{-h}^0 |U|^{2/3}\, dz\right)^{3/4} + \int_{-h}^0 |U|\, dz\right]\\
&\leqslant c\|p_1\|_4^3\big(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}\big)\|U\|^{1/2}.
\end{aligned}$$

В результате оценок всех слагаемых в равенстве (4.20) имеем следующее неравенство:

$$\|p_1\|_4^4 \leqslant c\big((\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})\|U\|^{1/2} + \|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2} + 1\big)\|p_1\|_4^3. \tag{4.25}$$

Из него и неравенства (4.15) следует оценка, требуемая в теореме. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 4.1. Отметим, что в работе [5] неверно утверждалось, что второе слагаемое в левой части уравнения (4.20) равно нулю. Это верно только лишь в случае, когда граница Ω' состоит из отрезков прямых и дуг окружностей. В частности, нетрудно показать, что для $\mathscr{M} = \mathbb{R}^2$ имеет место равенство, если выполнены равенства вида (4.18) и $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$,

$$(\nabla^2\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} \equiv (\nabla_{\boldsymbol{\tau}}\varkappa)\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau},$$

где $\varkappa$ – кривизна $\partial\Omega'$.

4.1.3. *Оценка нормы* $\max_t \|\mathbf{u}\|_4$.

Лемма 4.3. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\|_4 \leqslant c, \qquad \int_0^T \|\mathbf{u}\nabla_3\mathbf{u}\|^2\,dt \leqslant c. \tag{4.26}$$

Доказательство. Умножим уравнение (2.5) скалярно на $U\mathbf{u} = \mathbf{u}^2\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}(\partial_t\mathbf{u}, U\mathbf{u}) - \mu(\Delta\mathbf{u}, U\mathbf{u}) - \nu(\partial_z^2\mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (\ell\mathbf{u}, U\mathbf{u}) + \gamma(\nabla p, U\mathbf{u})&\\ + (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (w\partial_z\mathbf{u}, U\mathbf{u}) = 0.&\end{aligned} \tag{4.27}$$

По аналогии с доказательством предыдущих утверждений слагаемые этого равенства преобразуем следующим образом:

$$(\partial_t\mathbf{u}, U\mathbf{u}) = \frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_4^4,$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (w\partial_z\mathbf{u}, U\mathbf{u}) &= \frac{1}{4}(\mathbf{u}, \nabla U^2) + (w, \partial_z U^2)\\ &= -\frac{1}{4}(\operatorname{div}\mathbf{u} + \partial_z\mathbf{u}, U^2) + \frac{1}{4}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, U^2)_S + \frac{1}{4}(wn_3, U^2)_{S_1} = 0.\end{aligned}$$

Члены равенства (4.27) с производными второго порядка преобразуем к такому виду:

$$\begin{aligned}&(\mu\Delta\mathbf{u}, U\mathbf{u}) + (\nu\partial_z^2\mathbf{u}, U\mathbf{u})\\ &\quad= -\mu(\nabla\mathbf{u}, \nabla(U\mathbf{u})) - \nu(\partial_z\mathbf{u}, \partial_z(U\mathbf{u})) + \mu(\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}, U\mathbf{u})_S + \nu(\partial_z\mathbf{u}n_3, U\mathbf{u})_{S_1}\\ &\quad= -\frac{\mu}{2}\|\nabla U\|^2 - \frac{\nu}{2}\|\partial_z U\|^2 - \mu(U, (\nabla\mathbf{u})^2) - \nu(U, (\partial_z\mathbf{u})^2).\end{aligned}$$

В итоге равенство (4.27) сводится к равенству

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_4^4 + \frac{\mu}{2}\|\nabla U\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\partial_z U\|^2 + \mu(U, (\nabla\mathbf{u})^2) + \nu(U, (\partial_z\mathbf{u})^2)&\\ = -\gamma(\nabla p, U\mathbf{u}) - (\ell\mathbf{u}, U\mathbf{u}).&\end{aligned} \tag{4.28}$$

Как и ранее, оценим правую часть последнего равенства. Имеем

$$|(\nabla p, U\mathbf{u})| = |(p, \operatorname{div}(U\mathbf{u}))| = |(pU, \operatorname{div}\mathbf{u}) + (p\mathbf{u}, \nabla U)| \leqslant c(|p|U, |\nabla\mathbf{u}|). \tag{4.29}$$

Далее оценим правое выражение в (4.29), используя неравенство $|p| \leqslant |p_1| + |p_2|$, а также неравенство Гёльдера с показателями $(4,4,2)$, утверждение 3.6 и неравенство Юнга:

$$\begin{aligned}c(|p_2|U, |\nabla\mathbf{u}|) &\leqslant c\|p_2\|_4\,\|U\|_4\,\|\nabla\mathbf{u}\|\\ &\leqslant c\big(\|\nabla U\|^{3/4} + \|\partial_z U\|^{3/4} + \|U\|^{3/4}\big)\|U\|^{1/4}\|\nabla\mathbf{u}\|\\ &\leqslant \varepsilon\|\nabla U\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z U\|^2 + c\|U\|^2 + c\|\nabla\mathbf{u}\|^2.\end{aligned}$$

Далее также используем неравенство Гёльдера для двумерной области с теми же показателями, утверждением 3.7 и неравенством Юнга. Получаем, что

$$c(|p_1|U, |\nabla\mathbf{u}|) \leqslant c\int_{-h}^{0} |p_1|_4\, |U|_4\, |\nabla\mathbf{u}|\, dz \leqslant c|p_1|_4 \int_{-h}^{0} |U|_4\, |\nabla\mathbf{u}|\, dz,$$

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{0} |U|_4\, |\nabla\mathbf{u}|\, dz &\leqslant c\int_{-h}^{0} \big(|\nabla U|^{1/2} + |U|^{1/2}\big)|U|^{1/2}|\nabla\mathbf{u}|\, dz\\ &\leqslant c\bigg(\int_{-h}^{0} \big(|\nabla U| + |U|\big)|U|\, dz\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{-h}^{0} |\nabla\mathbf{u}|^2\, dz\bigg)^{1/2}\\ &\leqslant c\big(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}\big)\|U\|^{1/2}\, \|\nabla\mathbf{u}\|.\end{aligned}$$

Используя оценку для p (4.13), находим, что

$$\begin{aligned}c(|p_1|U, |\nabla\mathbf{u}|) &\leqslant c\|p_1\|_4\big(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}\big)\|U\|^{1/2}\, \|\nabla\mathbf{u}\|\\ &\leqslant c\big[(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})(\|U\|^{1/2} + 1) + 1\big]\big(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}\big)\|U\|^{1/2}\, \|\nabla\mathbf{u}\|\\ &\leqslant \varepsilon\|\nabla U\|^2 + c\|U\|^2(\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + 1) + c\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + c.\end{aligned}$$

Оставшееся слагаемое правой части равенства (4.28) оцениваем, используя технику, стандартную для настоящей работы.

Таким образом, взяв $2\varepsilon = \mu/4$ и $\varepsilon_1 = \nu/4$, из равенства (4.28) получаем неравенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_4^4 + \frac{1}{4}\big(\mu\|\nabla U\|^2 + \nu\|\partial_z U\|^2\big) + (U, \mu(\nabla\mathbf{u})^2 + \nu(\partial_z\mathbf{u})^2)&\\ \leqslant c(\|\mathbf{u}\|_4^4 + 1)(\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + 1).&\end{aligned} \tag{4.30}$$

Применяя неравенство Гронуолла и вторую оценку леммы 4.2, выводим неравенство $\|\mathbf{u}(t)\|_4^4 \leqslant c$, откуда следует первое неравенство доказываемой леммы. Из него и неравенства (4.30) следует и второе неравенство, стоящее в условии данной леммы, а значит, лемма доказана.

Следствие 4.3. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняется следующая оценка*:

$$\int_0^T \|\mathbf{u}\partial_z w\|^2\, dt \leqslant c. \tag{4.31}$$

Доказательство. Из третьего уравнения системы (2.7) следует равенство $\partial_z w = \operatorname{div}\mathbf{u}$. Оно и два неравенства предыдущей леммы доказывают это следствие.

Следствие 4.4. *Для функции давления выполняется следующая оценка*:

$$\int_0^T \|p\|_4^4\, dt \leqslant c. \tag{4.32}$$

Доказательство. Из теоремы 4.1 и леммы 4.3 вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\|p\|_4 \leqslant c\big[(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2})(\|U\|^{1/2} + 1) + 1\big] \leqslant c(\|\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\|^{1/2} + 1).$$

Она и второе неравенство леммы 4.3 завершают доказательство следствия.

4.2. Оценки для производных скорости и плотности по вертикали. В этом пункте мы получим оценки норм для $\partial_z \mathbf{u}$ и $\partial_z \rho$. Для этого введем дополнительные обозначения: $\mathbf{v} = \partial_z \mathbf{u}$, $w_z = \partial_z w$, $V = \mathbf{v}^2$ и $r = \rho_s$. Теперь продифференцируем по z систему уравнений (2.5)–(2.8), а также краевые условия на S и начальные условия (2.9)–(2.11):

$$\partial_t \mathbf{v} - \mu\nabla^2\mathbf{v} - \nu\partial_z^2\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + w_z\partial_z\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + w\partial_z\mathbf{v} + \ell\mathbf{v} + \gamma\nabla\partial_z p = \mathbf{0}, \tag{4.33}$$

$$\partial_z^2 p = -r\widetilde{g}, \tag{4.34}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} + \partial_z w_z = 0, \tag{4.35}$$

$$\partial_t r - \mu_1\Delta r - \nu_1\partial_z^2 r + \nabla_{\mathbf{v}}\rho + w_z\partial_z\rho + \nabla_{\mathbf{u}} r + w\partial_z r = 0, \tag{4.36}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{v}\times\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} r = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{v}(0,M,z) = \partial_z\mathbf{u}_0(M,z), \quad r(0,M,z) = \partial_z\rho_0(M,z), \quad \int_{-h}^0 \operatorname{div}\mathbf{v}_0\,dz = 0. \tag{4.38}$$

Отметим, что в силу условий (4.37) для $\mathbf{v}$ выполняется условие (3.7) на S.

4.2.1. *Оценка нормы* $\max_t\|\mathbf{u}_z\|$.

Лемма 4.4. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{v}(t)\| \leqslant c, \qquad \int_0^T \|\nabla_3\mathbf{v}\|^2\,dt \leqslant c. \tag{4.39}$$

Доказательство. Умножим уравнение (4.33) скалярно на $\mathbf{v}$:

$$(\partial_t\mathbf{v},\mathbf{v}) - \mu(\nabla^2\mathbf{v},\mathbf{v}) - \nu(\partial_z^2\mathbf{v},\mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ + (w_z\partial_z\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v},\mathbf{v}) + (w\partial_z\mathbf{v},\mathbf{v}) + (\ell\mathbf{v},\mathbf{v}) + \gamma(\nabla\partial_z p,\mathbf{v}) = 0. \tag{4.40}$$

Слагаемые с оператором Лапласа преобразуются следующим образом:

$$\mu(\nabla^2\mathbf{v},\mathbf{v}) + \nu(\partial_z^2\mathbf{v},\mathbf{v}) = -\mu(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{v}) - \nu(\partial_z\mathbf{v},\partial_z\mathbf{v}).$$

Здесь граничные интегралы равны нулю в силу граничных условий (4.37), предложения 3.2 и краевого условия $\mathbf{v} = 0$ на S_1.

Остальное преобразуем стандартным образом:

$$(\nabla\partial_z p,\mathbf{v}) = -(\partial_z p,\operatorname{div}\mathbf{v}),$$

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v},\mathbf{v}) + (w\partial_z\mathbf{v},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big((\mathbf{u},\nabla V) + (w,\mathbf{v})\big) = -\frac{1}{2}\big((\operatorname{div}\mathbf{u},V) + (\partial_z w,V)\big) = 0,$$

$$(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + (w_z\partial_z\mathbf{u},\mathbf{v}) = -(\operatorname{div}\mathbf{v},\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - (\partial_z w_z\mathbf{u},\mathbf{v}) - (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v},\mathbf{u}) - (w_z\partial_z\mathbf{v},\mathbf{u}) \\ = -(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v},\mathbf{u}) + (\operatorname{div}\mathbf{u},\partial_z\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}).$$

В итоге равенство (4.40) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|^2 + \mu\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + \nu\|\partial_z\mathbf{v}\|^2 \\ = -(\ell\mathbf{v},\mathbf{v}) + \gamma(\partial_z p,\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v},\mathbf{u}) - (\operatorname{div}\mathbf{u},\partial_z\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}). \tag{4.41}$$

Далее оценим правую часть этого равенства. Имеем

$$\gamma|(\partial_z p, \operatorname{div} \mathbf{v})| \leqslant c\|\partial_z p\| \, \|\nabla \mathbf{v}\| \leqslant \varepsilon\|\nabla \mathbf{v}\|^2 + c.$$

Здесь воспользовались оценкой из следствия 4.1, из которой следует, что $\|\partial_z p\| \leqslant c$. Далее,

$$|(\operatorname{div} \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v})| \leqslant c\|\partial_z \mathbf{v}\| \, \|\mathbf{u}\nabla \mathbf{u}\| \leqslant \varepsilon_1\|\partial_z \mathbf{v}\|^2 + c\|\mathbf{u}\nabla \mathbf{u}\|^2.$$

Для оценки оставшегося слагаемого воспользуемся неравенством Гёльдера с показателями $(4, 4, 2)$, а затем утверждением 3.6. Имеем

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \mathbf{u}) &\leqslant c\|\mathbf{u}\|_4 \, \|\mathbf{v}\|_4 \, \|\nabla \mathbf{v}\| \leqslant c\big(\|\nabla \mathbf{v}\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{v}\|^{3/4} + \|\mathbf{v}\|^{3/4}\big)\|\mathbf{v}\|^{1/4} \, \|\nabla \mathbf{v}\| \\ &\leqslant c\|\nabla \mathbf{v}\|^{7/4} \, \|\mathbf{v}\|^{1/4} + \|\partial_z \mathbf{v}\|^{7/4} \, \|\mathbf{v}\|^{1/4} + c\|\nabla \mathbf{v}\| \, \|\mathbf{v}\| \\ &\leqslant \varepsilon\|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z \mathbf{v}\|^2 + c\|\mathbf{v}\|^2.\end{aligned}$$

В последнем неравенстве воспользовались неравенствами Юнга с показателями $(8/7, 8)$, а также $(2, 2)$.

Таким образом, взяв $2\varepsilon = \mu/2$ и $2\varepsilon_1 = \nu/2$, из (4.41) получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\partial_z \mathbf{v}\|^2 \leqslant c\|\mathbf{v}\|^2 + c\|\mathbf{u}\nabla \mathbf{u}\|^2. \tag{4.42}$$

Так как в силу леммы 4.3 интеграл по отрезку времени от $\|\mathbf{u}\nabla \mathbf{u}\|^2$ ограничен константой, то, воспользовавшись неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\|\mathbf{v}\|^2 \leqslant c,$$

из которой следует первое неравенство условия доказываемой леммы. Из него и неравенства (4.42) следует вторая оценка условия леммы, что завершает доказательство леммы.

4.2.2. *Оценка нормы* $\max_t\|\mathbf{u}_z\|_4$.

Теорема 4.2. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{v}(t)\|_4 \leqslant c, \qquad \int_0^T \|\mathbf{v}\nabla_3 \mathbf{v}\|^2 \, dt \leqslant c. \tag{4.43}$$

Доказательство. Умножим уравнение (4.33) скалярно на $\mathbf{v}^2\mathbf{v} = V\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}(\partial_t \mathbf{v}, V\mathbf{v}) - \mu(\nabla^2 \mathbf{v}, V\mathbf{v}) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{v}, V\mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u}, V\mathbf{v}) + (w_z\partial_z \mathbf{u}, V\mathbf{v}) \\ + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, V\mathbf{v}) + (w\partial_z \mathbf{v}, V\mathbf{v}) + (\ell\mathbf{v}, V\mathbf{v}) + \gamma(\nabla\partial_z p, V\mathbf{v}) = 0.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Как и ранее, с помощью формул перебрасывания производных проведем некоторые преобразования. Имеем

$$\begin{aligned}(\mu\Delta \mathbf{v}, V\mathbf{v}) + (\nu\partial_z^2 \mathbf{v}, V\mathbf{v}) &= -\mu(\nabla \mathbf{v}, \nabla(V\mathbf{v})) - \nu(\partial_z \mathbf{v}, \partial_z(V\mathbf{v})) \\ &= -\frac{\mu}{2}\|\nabla V\|^2 - \frac{\nu}{2}\|\partial_z V\|^2 - \mu(V, (\nabla \mathbf{v})^2) - \nu(V, (\partial_z \mathbf{v})^2),\end{aligned}$$

$$(\nabla\partial_z p, V\mathbf{v}) = -(\partial_z p, \operatorname{div}(V\mathbf{v})),$$
$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, V\mathbf{v}) + (w\partial_z\mathbf{v}, V\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\big((\mathbf{u}, \nabla V^2) + (w, \partial_z V^2)\big)$$
$$= -\frac{1}{4}\big((\operatorname{div}\mathbf{u}, V^2) + (\partial_z w, V^2)\big) = 0,$$
$$(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}, V\mathbf{v}) + (w_z\partial_z\mathbf{u}, V\mathbf{v}) = -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V\mathbf{v})) - (\mathbf{u}, V\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{u}, V^2)$$
$$= -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V\mathbf{v})) - (\mathbf{u}, V\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \nabla(V^2)).$$

В результате равенство (4.44) сводится к следующему равенству:

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|_4^4 + \frac{\mu}{2}\|\nabla V\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\partial_z V\|^2 + \mu(V, (\nabla\mathbf{v})^2) + \nu(V, (\partial_z\mathbf{v})^2)$$
$$= -(\ell\mathbf{v}, V\mathbf{v}) + \gamma(\partial_z p, \operatorname{div}(V\mathbf{v})) + (\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V\mathbf{v})) + (\mathbf{u}, V\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \nabla(V^2)). \tag{4.45}$$

Теперь оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (4.45), через нормы, стоящие в левой части (4.45).

Пользуясь оценкой (4.5) для $\partial_z p$, получаем, что

$$\gamma|(\partial_z p, \operatorname{div}(V\mathbf{v}))| \leqslant c\|\partial_z p\|_4\,\|\nabla V\|\,\|\mathbf{v}\|_4 \leqslant \varepsilon\|\nabla V\|^2 + c\|\mathbf{v}\|_4^2.$$

Для оценки остальных слагаемых применяем неравенство Гёльдера с показателями $(4,4,2)$, утверждение 3.6 и неравенство Юнга с показателями $(8/7, 8)$. Имеем

$$\big|(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}(V\mathbf{v})) + (\mathbf{u}, V\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \nabla(V^2))\big| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_4\,\|\nabla V\|\,\|\mathbf{v}^2\|_4$$
$$\leqslant c(\|\nabla V\| + \|V\|)\big(\|\nabla V\|^{3/4} + \|\partial_z V\|^{3/4} + \|V\|^{3/4}\big)\|V\|^{1/4}$$
$$\leqslant \varepsilon\|\nabla V\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z V\|^2 + c\|\mathbf{v}\|_4^4 + c.$$

Взяв $2\varepsilon = \mu/4$ и $\varepsilon_1 = \nu/4$, из равенства (4.45) получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|_4^4 + \frac{\mu}{4}\|\nabla V\|^2 + \frac{\nu}{4}\|\partial_z V\|^2 + \mu(V, (\nabla\mathbf{v})^2) + \nu(V, (\partial_z\mathbf{v})^2) \leqslant c\|\mathbf{v}\|_4^4 + c. \tag{4.46}$$

Из неравенства Гроноулла следует первое неравенство доказываемой теоремы, с учетом которого интегрирование по $[0, T]$ неравенства (4.46) приводит ко второму неравенству из условия теоремы. Таким образом, теорема доказана.

4.2.3. *Оценка нормы* $\max_t\|\partial_z\rho\|$.

Лемма 4.5. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|r(t)\| \leqslant c, \qquad \int_0^T \|\nabla_3 r\|^2\,dt \leqslant c. \tag{4.47}$$

Доказательство. Умножим уравнение (4.36) скалярно на r:

$$(\partial_t r, r) - \mu_1(\Delta r, r) - \nu_1(\partial_z^2 r, r) + (\nabla_{\mathbf{v}}\rho, r) + (w_z\partial_z\rho, r) + (\nabla_{\mathbf{u}} r, r) + (w\partial_z r, r) = 0. \tag{4.48}$$

Используя формулы перебрасывания производных, преобразуем некоторые слагаемые. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\Delta r, r) + \nu_1(\partial_z^2 r, r)\\
&\qquad = -\mu_1(\nabla r, \nabla r) - \nu_1(\partial_z r, \partial_z r) + \mu_1(\nabla r, \mathbf{n} r)_S + \nu_1(\partial_z r, n_3 r)_{S_1}\\
&\qquad = -\mu_1\|\nabla r\|^2 - \nu_1\|\partial_z r\|^2,
\end{aligned}$$

$$(\nabla_{\mathbf{u}} r, r) + (w\partial_z r, r) = -\frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u} + \partial_z w, r^2) = 0,$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{v}}\rho, r) + (w_z\partial_z\rho, r) &= (\mathbf{v}, \nabla\rho r) - (\operatorname{div}\mathbf{u}\partial_z\rho, r)\\
&= -(\operatorname{div}\mathbf{v}, \rho r) - (\rho\mathbf{v}, \nabla r) + 2(\mathbf{u}r, \nabla r).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|r\|^2 + \mu_1\|\nabla r\|^2 + \nu_1\|\partial_z r\|^2 = (\operatorname{div}\mathbf{v}, \rho r) + (\rho\mathbf{v}, \nabla r) - 2(\mathbf{u}r, \nabla r). \tag{4.49}$$

Далее последовательно оценим все слагаемые, стоящие в правой части (4.49), через нормы левой части. Следующие скалярные произведения будем оценивать с помощью неравенства Гёльдера с показателями $(4, 4, 2)$. Имеем

$$\begin{aligned}
|(\operatorname{div}\mathbf{v}, \rho r)| &\leqslant c\|\nabla\mathbf{v}\|\,\|\rho\|_4\,\|r\|_4 \leqslant c\|\nabla\mathbf{v}\|\big(\|\nabla r\|^{3/4} + \|\partial_z r\|^{3/4} + \|r\|^{3/4}\big)\|r\|^{1/4}\\
&\leqslant \varepsilon\|\nabla r\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z r\|^2 + c\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + c\|r\|^2 + c.
\end{aligned}$$

Здесь воспользовались утверждением 3.6 и неравенством Юнга с показателями $(8/3, 8, 2)$. Далее,

$$|(\rho\mathbf{v}, \nabla r)| \leqslant c\|\rho\|_4\,\|\mathbf{v}\|_4\,\|\nabla r\| \leqslant c\|\nabla r\| \leqslant \varepsilon\|\nabla r\|^2 + c,$$

$$\begin{aligned}
|2(\mathbf{u}r, \nabla r)| &\leqslant c\|\mathbf{u}\|_4\,\|r\|_4\,\|\nabla r\| \leqslant c\|\nabla r\|\big(\|\nabla r\|^{3/4} + \|\partial_z r\|^{3/4} + \|r\|^{3/4}\big)\|r\|^{1/4}\\
&\leqslant \varepsilon\|\nabla r\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z r\|^2 + c\|r\|^2 + c.
\end{aligned}$$

Здесь также воспользовались утверждением 3.6 и неравенством Юнга с показателями $(8/7, 8)$.

Взяв $3\varepsilon = \mu/2$ и $2\varepsilon_1 = \nu_1/2$, из равенства (4.49) получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|r\|^2 + \mu_1\|\nabla r\|^2 + \nu_1\|\partial_z r\|^2 \leqslant c\|r\|^2 + c\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + c. \tag{4.50}$$

Далее, как и в предыдущих доказательствах, применение второго неравенства леммы 4.4 и неравенства Гронуолла приводит к оценкам, стоящим в условиях леммы. Лемма доказана.

4.3. Оценки для производных скорости и плотности по времени. В этом пункте мы получим оценки норм для $\mathbf{u}_t \equiv \partial_t\mathbf{u}$ и $\rho_t \equiv \partial_t\rho$. Для этого продифференцируем по t систему уравнений (2.5)–(2.8), а также граничные условия (2.9), (2.10):

$$\partial_t \mathbf{u}_t - \mu\nabla^2\mathbf{u}_t - \nu\partial_z^2\mathbf{u}_t + \nabla_{\mathbf{u}_t}\mathbf{u} + w_t\partial_z\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_t + w\partial_z\mathbf{u}_t + \ell\mathbf{u}_t + \gamma\nabla p_t = \mathbf{0}, \tag{4.51}$$

$$\partial_z p_t = -\rho_t\widetilde{g}, \tag{4.52}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_t + \partial_z w_t = 0, \tag{4.53}$$

$$\partial_t\rho_t - \mu_1\Delta\rho_t - \nu_1\partial_z^2\rho_t + \nabla_{\mathbf{u}_t}\rho + w_t\partial_z\rho + \nabla_{\mathbf{u}}\rho_t + w\partial_z\rho_t = 0, \tag{4.54}$$

$$\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}_t\times\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}}\rho_t = 0 \quad \text{на } \ S, \tag{4.55}$$

$$w_t = 0, \quad \partial_z\mathbf{u}_t = \mathbf{0}, \quad \partial_z\rho_t = 0 \quad \text{на } \ S_1. \tag{4.56}$$

Здесь $w_t \equiv \partial_t w$ и $p_t \equiv \partial_t p$. Отметим также, что в силу условий (4.55) для $\mathbf{u}_t$ выполняется условие (3.7) на S.

4.3.1. *Оценки норм* $\|\partial_t\mathbf{u}(0)\|$ *и* $\|\partial_t\rho(0)\|$. Отметим, что функции $\mathbf{u}_t(0)$ и $\rho_t(0)$ не являются исходными данными, поэтому перед тем как перейти к доказательству последних априорных оценок, оценим через нормы начальных данных производную по скорости функций $\mathbf{u}$ и ρ в начальный момент времени. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.6. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*:

$$\|\rho_t(0)\| \leqslant c\|\rho_0\|_{W_2^2}(1+\|\mathbf{u}_0\|_{W_2^2}), \qquad \|\mathbf{u}_t(0)\| \leqslant c(\|\rho_0\|_{W_2^2} + \|\mathbf{u}_0\|^2_{W_2^2}). \tag{4.57}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (2.8) для $t=0$ и умножим его на $\rho_{0t} \equiv \rho_t(0)$:

$$(\rho_t(0),\rho_t(0)) - (\mu_1\Delta\rho_0,\rho_t(0)) - (\nu_1\partial_z^2\rho_0,\rho_t(0)) + (\nabla_{\mathbf{u}}\rho_0,\rho_t(0)) + (w\partial_z\rho_0,\rho_t(0)) = 0. \tag{4.58}$$

Оцениваем слагаемое с оператором Лапласа:

$$\big|(\mu_1\Delta\rho_0,\rho_t(0)) + (\nu_1\partial_z^2\rho_0,\rho_t(0))\big| \leqslant c\|\rho_0\|_{W_2^2}\,\|\rho_{0t}\|.$$

Для оценки оставшегося слагаемого равенства (4.58) воспользуемся предложением 4.1, а также следующим неравенством (теорема вложения; см. [12]):

$$\|f\|_4 \leqslant c\|f\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{4.59}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \big|(\nabla_{\mathbf{u}(0)}\rho_0,\rho_{0t})\big| + \big|(w(0)\partial_z\rho_0,\rho_{0t})\big| &\leqslant c\big(\|\mathbf{u}_0\|_4\,\|\nabla\rho_0\|_4 + \|w(0)\|_4\,\|\partial_z\rho_0\|_4\big)\|\rho_{0t}\| \\ &\leqslant c\big(\|\mathbf{u}_0\|_4\,\|\nabla\rho_0\|_{W_2^1} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}_0\|_4\,\|\partial_z\rho_0\|_{W_2^1}\big)\|\rho_{0t}\| \leqslant c\|\mathbf{u}_0\|_{W_2^2}\,\|\rho_0\|_{W_2^2}\,\|\rho_{0t}\|. \end{aligned}$$

Из приведенных неравенств и тождества (4.58) следует, что

$$\|\rho_t(0)\| \leqslant c\|\rho_0\|_{W_2^2} + c\|\rho_0\|_{W_2^2}\,\|\mathbf{u}_0\|_{W_2^2}.$$

Для доказательства второго неравенства в (4.57) умножим первое уравнение системы (2.5) на $\mathbf{u}_t$:

$$\|\mathbf{u}_t\|^2 = \mu(\nabla^2\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + \nu(\partial_z^2\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\ell\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - \gamma(\nabla p, \mathbf{u}_t) - (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (w\partial_z\mathbf{u}, \mathbf{u}_t). \tag{4.60}$$

Затем оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (4.60):

$$|\mu(\nabla^2\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + \nu(\partial_z^2\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{W_2^2}\|\mathbf{u}_t\|, \qquad |(\ell\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| \leqslant c\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{u}_t\|,$$
$$(\nabla p, \mathbf{u}_t) = (\nabla p_1, \mathbf{u}_t) + (\nabla p_2, \mathbf{u}_t),$$
$$(\nabla p_1, \mathbf{u}_t) = (p_1\mathbf{n}, \mathbf{u}_t)_S - (p_1, \operatorname{div}\mathbf{u}_t) = (p_1, \partial_z w_t) = (p_1, w_t n_3)_{S_1} = 0.$$

Для получения последнего равенства мы воспользовались независимостью p_1 от переменной z. Далее, используя равенство (4.14), соотношения

$$0 = \nabla\int_{-h}^0 p_2\,dz = \int_{-h}^0 \nabla p_2\,dz,$$

а также утверждение 3.3 о функции, имеющей нуль на отрезке, получаем оценку $\|\nabla p_2\| \leqslant c\|\nabla\partial_z p_2\|$.

Из последнего неравенства следует, что

$$|(\nabla p_2, \mathbf{u}_t)| \leqslant c\|\nabla p_2\|\,\|\mathbf{u}_t\| \leqslant c\|\nabla\partial_z p_2\|\,\|\mathbf{u}_t\| \leqslant c\|\nabla\rho\|\,\|\mathbf{u}_t\|.$$

Для оценки оставшихся слагаемых правой части равенства (4.60) воспользуемся предложением 4.1, а также неравенством (4.59). Имеем

$$\begin{aligned}\big|(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (w\partial_z\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)\big| &\leqslant c\big(\|\mathbf{u}\|_4\,\|\nabla\mathbf{u}\|_4 + \|w\|_4\,\|\partial_z\mathbf{u}\|_4\big)\|\mathbf{u}_t\| \\ &\leqslant c\big(\|\mathbf{u}\|_4\,\|\nabla\mathbf{u}\|_4 + \|\nabla\mathbf{u}\|_4\,\|\partial_z\mathbf{u}\|_4\big)\|\mathbf{u}_t\| \leqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^2}\,\|\mathbf{u}_t\|.\end{aligned}$$

Из последних оценок и равенства (4.60), рассмотренного при $t = 0$, получаем второе неравенство в(4.57), что и требовалось доказать.

4.3.2. *Оценки норм* $\max_t\|\partial_t\mathbf{u}\|$ *и* $\max_t\|\partial_t\rho\|$. Теперь перейдем к доказательству основных априорных оценок этого пункта.

Теорема 4.3. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}_t(t)\| \leqslant c, \qquad \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\rho_t(t)\| \leqslant c, \tag{4.61}$$

$$\int_0^T \|\nabla_3\mathbf{u}_t\|^2\,dt \leqslant c, \qquad \int_0^T \|\nabla_3\rho_t\|^2\,dz \leqslant c. \tag{4.62}$$

Доказательство. Умножим уравнение (4.51) скалярно на $\mathbf{u}_t$:

$$\begin{aligned}(\partial_t\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) - \mu(\nabla^2\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) - \nu(\partial_z^2\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t}\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (w_t\partial_z\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)& \\ + (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (w\partial_z\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (\ell\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + \gamma(\nabla p_t, \mathbf{u}_t) = 0.&\end{aligned} \tag{4.63}$$

Преобразуем некоторые слагаемые этого равенства:

$$\mu(\nabla^2\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + \nu(\partial_z^2\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) = -\mu\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 - \nu\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2.$$

Здесь граничные интегралы равны нулю в силу краевого условия (4.55) и предложения 3.7. Далее,

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (w\partial_z\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2}\big((\mathbf{u}, \nabla(\mathbf{u}_t^2))\big) = -\frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u} + \partial_z w, \mathbf{u}_t^2) = 0,$$
$$(\nabla p_t, \mathbf{u}_t) = -(p_t, \operatorname{div}\mathbf{u}_t) = (p_t, \partial_z w_t) = -(\partial_z p_t, w_t),$$
$$(\nabla_{\mathbf{u}_t}\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) = -(\operatorname{div}\mathbf{u}_t\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\nabla_{\mathbf{u}_t}\mathbf{u}_t, \mathbf{u}).$$

Таким образом, получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_t\|^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + \nu\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2$$
$$= -(\ell\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + \gamma(\partial_z p_t, w_t) + (\operatorname{div}\mathbf{u}_t\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t}\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) - (w_t\partial_z\mathbf{u}, \mathbf{u}_t). \quad (4.64)$$

Далее, используя неравенства Гёльдера и Юнга, оцениваем все слагаемые, стоящие в правой части данной формулы. Имеем

$$\gamma|(\partial_z p_t, w_t)| \leqslant c\|\partial_z p_t\|\,\|w_t\| \leqslant c\|\rho_t\|\,\|\nabla\mathbf{u}_t\| \leqslant \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + c\|\rho_t\|^2.$$

Для получения последней оценки воспользовались неравенством $\|w_t\| \leqslant c\|\nabla\mathbf{u}_t\|$, которое доказывается аналогично предложению 4.1. Далее,

$$\big|(\operatorname{div}\mathbf{u}_t\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t}\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) - (w_t\partial_z\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)\big| \leqslant c\|\nabla\mathbf{u}_t\|\,\|\mathbf{u}\|_4\,\|\mathbf{u}_t\|_4 + c\|w_t\|\,\|\mathbf{u}\|_4\,\|\mathbf{u}_t\|_4$$
$$\leqslant c\big(\|\nabla\mathbf{u}_t\| + \|\mathbf{u}_t\|\big)\|\mathbf{u}_t\|_4$$
$$\leqslant c\big(\|\nabla\mathbf{u}_t\| + \|\mathbf{u}_t\|\big)\big(\|\nabla\mathbf{u}_t\|^{3/4} + \|\partial_z\mathbf{u}_t\|^{3/4} + \|\mathbf{u}_t\|^{1/4}\big)\|\mathbf{u}_t\|^{1/4}$$
$$\leqslant \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2 + c\|\mathbf{u}_t\|^2.$$

Здесь воспользовались утверждением 3.6, а также неравенствами Юнга с показателями $(8/7, 8)$ и показателями $(8/3, 8/5)$.

В результате из равенства (4.64) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_t\|^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + \nu\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2 \leqslant 2\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2 + c\|\mathbf{u}_t\|^2 + c\|\rho_t\|^2. \quad (4.65)$$

Отметим, что пока применить утверждение о неравенстве Гронуолла нельзя, так как в правой части (4.65) стоит норма плотности, для которой пока нет оценки. Поэтому сначала получим аналогичное неравенство, выведенное из уравнения для плотности. Умножим уравнение (4.54) скалярно на ρ_t:

$$(\partial_t\rho_t, \rho_t) - \mu_1(\Delta\rho_t, \rho_t) - \nu_1(\partial_z^2\rho_t, \rho_t) + (\nabla_{\mathbf{u}_t}\rho, \rho_t)$$
$$+ (w_t\partial_z\rho, \rho_t) + (\nabla_{\mathbf{u}}\rho_t, \rho_t) + (w\partial_z\rho_t, \rho_t) = 0. \quad (4.66)$$

Преобразуем некоторые слагаемые:

$$\mu_1(\Delta\rho_t, \rho_t) + \nu_1(\partial_z^2\rho_t, \rho_t) = -\mu_1\|\nabla\rho_t\|^2 - \nu_1\|\partial_z\rho_t\|^2,$$
$$(\nabla_{\mathbf{u}}\rho_t, \rho_t) + (w\partial_z\rho_t, \rho_t) = \frac{1}{2}\big((\mathbf{u}, \nabla(\rho_t^2)) + (w, \partial_z(\rho_t^2))\big) = -\frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u} + \partial_z w, \rho_t^2) = 0,$$
$$(\nabla_{\mathbf{u}_t}\rho, \rho_t) = -(\operatorname{div}\mathbf{u}_t, \rho\rho_t) - (\nabla_{\mathbf{u}_t}\rho_t, \rho).$$

Таким образом, равенство (4.66) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho_t\|^2+\mu_1\|\nabla\rho_t\|^2+\nu_1\|\partial_z\rho_t\|^2=(\operatorname{div}\mathbf{u}_t,\rho\rho_t)+(\nabla_{\mathbf{u}_t}\rho_t,\rho)-(w_t\partial_z\rho,\rho_t). \quad (4.67)$$

Теперь оценим слагаемые, стоящие в правой части данного равенства. Имеем

$$\begin{aligned}|(\nabla_{\mathbf{u}_t}\rho_t,\rho)| &\leqslant c\|\mathbf{u}_t\|_4\,\|\rho\|_4\,\|\nabla\rho_t\| \leqslant \varepsilon_2\|\nabla\rho_t\|^2+c\|\mathbf{u}_t\|_4^2\\ &\leqslant \varepsilon_2\|\nabla\rho_t\|^2+\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2+\varepsilon_1\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2+c\|\mathbf{u}_t\|^2.\end{aligned}$$

Здесь воспользовались утверждением 3.6, а также неравенствами Юнга с показателями $(8/7,8)$ и показателями $(4/3,4)$. Аналогично оцениваем следующий член равенства (4.67):

$$\begin{aligned}|(\operatorname{div}\mathbf{u}_t,\rho\rho_t)| &\leqslant c\|\operatorname{div}\mathbf{u}_t\|\,\|\rho\|_4\,\|\rho_t\|_4 \leqslant c\|\nabla\mathbf{u}_t\|\,\|\rho_t\|_4 \leqslant \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2+c\|\rho_t\|_4^2\\ &\leqslant \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2+\varepsilon_2\|\nabla\rho_t\|^2+\varepsilon_3\|\partial_z\rho_t\|^2+c\|\rho_t\|^2.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}|(w_t\rho_t,\partial_z\rho)| &= \left|\int_\Omega\int_{-h}^{z}\operatorname{div}\mathbf{u}_t\,d\zeta\,\rho_t\partial_z\rho\,d\mu_L^3\right| \leqslant \int_\Omega\int_{-h}^{0}\bigl|\operatorname{div}\mathbf{u}_t\bigr|\,d\zeta\,|\rho_t|\,|\partial_z\rho|\,d\mu_L^3\\ &\leqslant \left\|\int_{-h}^{0}\bigl|\operatorname{div}\mathbf{u}_t\bigr|\,dz\right\|_{\Omega'}\int_{-h}^{0}\|\rho_t\|_{4,\Omega'}\|\partial_z\rho\|_{4,\Omega'}\,dz.\end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой

$$\left\|\int_{-h}^{0}\bigl|\operatorname{div}\mathbf{u}_t\bigr|\,dz\right\|_{\Omega'}^2 \leqslant c\|\nabla\mathbf{u}_t\|,$$

а также оценкой из утверждения 3.7. Имеем

$$\begin{aligned}|(w_t\rho_t,\rho_s)| &\leqslant c\|\nabla\mathbf{u}_t\|\int_{-h}^{0}\bigl(|\nabla\rho_t|^{1/2}+|\rho_t|^{1/2}\bigr)|\rho_t|^{1/2}\bigl(|\nabla\partial_z\rho|^{1/2}+|\partial_z\rho|^{1/2}\bigr)|\partial_z\rho|^{1/2}\,dz\\ &\leqslant \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2+\varepsilon_2\|\nabla\rho_t\|^2+c(\|\nabla\partial_z\rho\|^2+1)\|\rho_t\|^2.\end{aligned}$$

В итоге из равенства (4.67) получаем неравенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho_t\|^2+\mu_1\|\nabla\rho_t\|^2+\nu_1\|\partial_z\rho_t\|^2 &\leqslant 3\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2+\varepsilon_1\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2\\ &+3\varepsilon_2\|\nabla\rho_t\|^2+\varepsilon_3\|\partial_z\rho_t\|^2+c\|\mathbf{u}_t\|^2+c(\|\nabla\partial_z\rho\|^2+1)\|\rho_t\|^2. \quad (4.68)\end{aligned}$$

Объединяя это неравенство с (4.65), взяв $6\varepsilon=\mu/2$, $2\varepsilon_1=\nu/2$, $4\varepsilon_2=\mu_1/2$ и $\varepsilon_3=\nu_1/2$, получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho_t\|^2+\frac{\mu}{2}\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2+\frac{\nu}{2}\|\partial_z\mathbf{u}_t\|^2+\frac{\mu_1}{2}\|\nabla\rho_t\|^2+\frac{\nu_1}{2}\|\partial_z\rho_t\|^2\\ \leqslant c\|\mathbf{u}_t\|^2+c(\|\nabla\partial_z\rho\|^2+1)\|\rho_t\|^2. \quad (4.69)\end{aligned}$$

Из неравенства Гронуолла для величины $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_t\|^2+\frac{1}{2}\|\rho_t\|^2$ и леммы 4.6 следует оценка

$$\|\mathbf{u}_t\|^2 + \|\rho_t\|^2 \leqslant c. \tag{4.70}$$

Таким образом, половина оценок из формулировки теоремы 4.3 доказана. Далее, используя полученные оценки и неравенство (4.69), выводим оценку

$$\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \|\partial_z \mathbf{u}_t\|^2 + \|\nabla \rho_t\|^2 + \|\partial_z \rho_t\|^2 \, dt \leqslant c, \tag{4.71}$$

которая завершает доказательство теоремы 4.3.

4.4. Итоговые априорные оценки. В конце этого параграфа получим более “сильные” оценки для ρ и $\mathbf{u}$, выведем некоторые следствия и выпишем еще раз все полученные оценки в одной формуле.

Лемма 4.7. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняется следующая оценка*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\nabla_3 \rho\| \leqslant c. \tag{4.72}$$

Доказательство. Умножим уравнение для плотности (2.8) скалярно на ρ и преобразуем его следующим образом:

$$\frac{1}{2}\mu_1\|\nabla\rho\|^2 + \frac{1}{2}\nu_1\|\partial_z\rho\|^2 = -(\rho_t,\rho). \tag{4.73}$$

Правая часть оценивается очевидным образом с помощью неравенств Гёльдера и Юнга, а именно:

$$|(\rho_t,\rho)| \leqslant c\|\rho_t\|\,\|\rho\| \leqslant c,$$

что доказывает лемму.

Лемма 4.8. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняется следующая оценка*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\nabla_3 \mathbf{u}\| \leqslant c. \tag{4.74}$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство (4.10), полученное при доказательстве леммы 4.2. Из него следует в силу леммы 4.2, что

$$\frac{\mu}{4}\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\partial_z\mathbf{u}\|^2 \leqslant -(\mathbf{u}_t,\mathbf{u}) + c. \tag{4.75}$$

Правую часть этого неравенства легко оценить, используя теорему 4.3, неравенства Гёльдера и Юнга:

$$|(\mathbf{u}_t,\mathbf{u})| \leqslant c\|\mathbf{u}_t\|\,\|\mathbf{u}\| \leqslant c.$$

Комбинация этой оценки с последним неравенством доказывает лемму.

Отсюда, из леммы 4.2 и предложения 4.1 вытекает следующий результат.

Следствие 4.5. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняется следующая оценка*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big(\|w\| + \|\partial_z w\|\big) \leqslant c. \tag{4.76}$$

Следствие 4.6. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *нормы*

$$\|\nabla_3 \mathbf{u}(t)\|, \qquad \|\nabla_3 \rho(t)\|, \qquad \|w(t)\| \tag{4.77}$$

непрерывны по t на $[0,T]$.

Доказательство. Верна следующая оценка:

$$2\|\nabla \mathbf{u}\| \frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}\| = \frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}\|^2 = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = 2(\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \mathbf{u}) \leqslant 2\|\nabla \mathbf{u}_t\|\,\|\nabla \mathbf{u}\|. \tag{4.78}$$

Из этой оценки вытекает, что в силу теоремы 4.3 выполнено $\partial_t \|\nabla \mathbf{u}\| \in L_2[0,T]$. Значит, $\|\nabla \mathbf{u}\| \in W_2^1[0,T]$. Для одномерного случая верно вложение $W_2^1[0,T] \subset C[0,T]$. Таким образом, доказана непрерывность нормы $\|\nabla \mathbf{u}(t)\|$. Аналогично доказывается непрерывность оставшихся норм для $\mathbf{u}$ и ρ. Из равенства $w(t) = -\int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{u}(t)\, d\zeta$ выводится непрерывность нормы $\|w\|$. Следствие доказано.

В следующей теореме объединим результаты, полученные в настоящем параграфе.

Теорема 4.4. *Для решения системы* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *выполняются следующие оценки*:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \bigl(\|\rho\|_4 + \|\mathbf{u}\|_4 + \|w\| + \|\partial_z w\| + \|\partial_z p\|_4 + \|\partial_z \rho\|_4 + \|\partial_z \mathbf{u}\|_4 + \|\rho_t\| + \|\mathbf{u}_t\| + \|\nabla \rho\| + \|\nabla \mathbf{u}\|\bigr) \leqslant c(\mathbf{u}_0, \rho_0, \Omega', \mu, \nu, \mu_1, \nu_1, h, T), \tag{4.79}$$

$$\int_0^T \bigl(\|\nabla_3 \rho^2\|^2 + \|\mathbf{u}\nabla_3 \mathbf{u}\|^2 + \|p\|_4^4 + \|\mathbf{u}\partial_z w\|^2 + \|\nabla_3 \partial_z \rho\|^2 + \|\nabla_3 \partial_z \mathbf{u}\|^2 + \|\partial_z \mathbf{u}\nabla_3 \partial_z \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla_3 \rho_t\|^2 + \|\nabla_3 \mathbf{u}_t\|^2\bigr)\, dt \leqslant c(\mathbf{u}_0, \rho_0, \Omega', \mu, \nu, \mu_1, \nu_1, h, T). \tag{4.80}$$

Доказательство теоремы следует из всех доказанных в этом параграфе оценок.

Замечание 4.2. Зависимость констант, стоящих в правых частях неравенств (4.79) и (4.80), от интервала времени T и коэффициентов μ, ν, μ_1, ν_1 имеет следующий вид:

$$\exp\left(cT\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\nu_1}\right)\right) + c.$$

Это вытекает из использованных нами неравенств Гроноулла и Юнга.

§ 5. Существование и единственность решения системы

5.1. Определение обобщенного решения. Сначала введем два пространства функций, $\mathbf{V}$ и R:

$$\mathbf{V} = \biggl\{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(Q_T) \mid \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S,\ \partial_z \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } S_1, \partial_z \mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(Q_T),\ \int_{-h}^{0} \operatorname{div} \mathbf{v}\, dz = 0\biggr\}, \tag{5.1}$$

$$R = \bigl\{r \in W_2^1(Q_T) \mid \partial_z r \in W_2^1(Q_T)\bigr\}. \tag{5.2}$$

Теперь перейдем к определению обобщенного решения задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11). Умножим равенство (2.5) скалярно в $\mathbf{L}_2(Q_{t_1})$ на $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, после чего воспользуемся формулами перебрасывания производных:

$$\int_{Q_{t_1}} \Big(-\mathbf{u}\partial_t \mathbf{v} + \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + w \partial_z \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \ell \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \gamma \nabla p \cdot \mathbf{v} \Big) d\mu_L^4$$
$$+ \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\big|_{t=t_1} d\mu_L^3 - \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}\big|_{t=0} d\mu_L^3 = 0. \tag{5.3}$$

Из этого равенства исключим вертикальную компоненту измененных скоростей w и давление p. Из третьего уравнения системы (2.7) и граничных условий (2.10) w выражается через $\mathbf{u}$ следующим образом:

$$w(t, M, z) = -\int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{u}(t, M, \zeta)\, d\zeta.$$

Преобразуем некоторые слагаемые:

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = -\left(p, \partial_z \int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\zeta\right) = \left(\widetilde{g}\rho, \int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\zeta\right),$$
$$(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (w \partial_z \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) - (w \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{v})$$
$$= -(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) + \left(\int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\zeta \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{v}\right).$$

Таким образом, равенство (5.3) преобразуется к виду

$$\int_{Q_{t_1}} \bigg(-\mathbf{u}\partial_t \mathbf{v} + \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\zeta \mathbf{u} \cdot \partial_z \mathbf{v} + \ell \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$
$$+ \gamma \widetilde{g} \rho \int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\zeta \bigg) d\mu_L^4 + \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\big|_{t=t_1} d\mu_L^3 - \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}\big|_{t=0} d\mu_L^3 = 0. \tag{5.4}$$

Умножим последнее уравнение системы (2.8) скалярно в $L_2(Q_{t_1})$ на $r \in R$, после чего воспользуемся формулами перебрасывания производных:

$$\int_{Q_{t_1}} \left(-\rho r_t + \mu_1 \nabla \rho \cdot \nabla r + \nu_1 \partial_z \rho \partial_z r - \rho \nabla_{\mathbf{u}} r + \int_{-h}^{z} \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\zeta \rho \partial_z r \right) d\mu_L^4$$
$$+ \int_\Omega \rho r\big|_{t=t_1} d\mu_L^3 - \int_\Omega \rho_0 r\big|_{t=0} d\mu_L^3 = 0. \tag{5.5}$$

Определение 5.1. *Обобщенным решением* задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) называется пара функций $(\mathbf{u}, \rho) \in \mathbf{V} \times R$ такая, что для любой пары $(\mathbf{v}, r) \in \mathbf{V} \times R$ и любого $t_1 \in [0, T]$ выполняются соотношения (5.4), (5.5).

5.2. Единственность решения.

Теорема 5.1. *Если существует обобщенное решение задачи* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11), *то оно единственно.*

Доказательство. Предположим противное: пусть существуют два обобщенных решения $(\mathbf{u}_1, w_1, p_1, \rho_1)$ и $(\mathbf{u}_2, w_2, p_2, \rho_2)$. Рассмотрим их разность

$$(\mathbf{u}, w, p, \rho) = (\mathbf{u}_1, w_1, p_1, \rho_1) - (\mathbf{u}_2, w_2, p_2, \rho_2),$$

которая будет удовлетворять следующим уравнениям, краевым и начальным условиям:

$$\mathbf{u} - \mu\nabla^2\mathbf{u} - \nu\partial_z^2\mathbf{u} + \ell\mathbf{u} + \gamma\nabla p + \nabla_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u} + w_1\partial_z\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}_2 + w\partial_z\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}, \tag{5.6}$$

$$\partial_z p = -\widetilde{g}\rho, \tag{5.7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} + \partial_z w = 0, \tag{5.8}$$

$$\rho_t - \mu_1\Delta\rho - \nu_1\partial_z^2\rho + \nabla_{\mathbf{u}_1}\rho + w_1\partial_z\rho + \nabla_{\mathbf{u}}\rho_2 + w\partial_z\rho_2 = 0, \tag{5.9}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}\times\mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}}\rho = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{5.10}$$

$$w = 0, \quad \partial_z\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \partial_z\rho = 0 \quad \text{на} \quad S_1, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{u}(0, M, z) = \mathbf{0}, \qquad \rho(0, M, z) = 0. \tag{5.12}$$

Умножим уравнение для плотности (5.9) скалярно на ρ:

$$(\rho_t, \rho) - \mu_1(\Delta\rho, \rho) - \nu_1(\partial_z^2\rho, \rho) + (\nabla_{\mathbf{u}_1}\rho, \rho) + (w_1\partial_z\rho, \rho) + (\nabla_{\mathbf{u}}\rho_2, \rho) + (w\partial_z\rho_2, \rho) = 0. \tag{5.13}$$

После преобразований это равенство примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\rho\|^2 &+ \mu_1\|\nabla\rho\|^2 + \nu_1\|\partial_z\rho\|^2 \\ &= -(\nabla_{\mathbf{u}_1}\rho, \rho) - (w_1\partial_z\rho, \rho) - (\nabla_{\mathbf{u}}\rho_2, \rho) - (w\partial_z\rho_2, \rho).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Далее,

$$\begin{gathered}(\nabla_{\mathbf{u}_1}\rho, \rho) + (w_1\partial_z\rho, \rho) = (\mathbf{u}_1, \nabla\rho^2) + (w_1, \partial_z\rho^2) = -(\operatorname{div}\mathbf{u}_1 + \partial_z w_1, \rho^2) = 0, \\ (\nabla_{\mathbf{u}}\rho_2, \rho) = -(\operatorname{div}\mathbf{u}, \rho_2\rho) - (\mathbf{u}\rho_2, \nabla\rho).\end{gathered} \tag{5.15}$$

Теперь оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (5.15). Воспользуемся неравенством Гёльдера, утверждением 3.6 и неравенствами Юнга:

$$\begin{aligned}|(\mathbf{u}\rho_2, \nabla\rho)| &\leqslant c\|\mathbf{u}\|_4\,\|\rho_2\|_4\,\|\nabla\rho\| \leqslant c\|\nabla\rho\|\big((\|\nabla\mathbf{u}\|^{3/4} + \|\partial_z\mathbf{u}\|^{3/4})\|\mathbf{u}\|^{1/4} + \|\mathbf{u}\|\big) \\ &\leqslant \varepsilon\|\nabla\rho\|^2 + \varepsilon_2\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon_3\|\partial_z\mathbf{u}\|^2 + c\|\mathbf{u}\|^2.\end{aligned}$$

Аналогичным методом оцениваем следующий член правой части равенства (5.15):

$$\begin{aligned}|(\operatorname{div}\mathbf{u}, \rho_2\rho)| &\leqslant c\|\rho\|_4\,\|\rho_2\|_4\,\|\nabla\mathbf{u}\| \leqslant c\|\nabla\mathbf{u}\|\big((\|\nabla\rho\|^{3/4} + \|\partial_z\rho\|^{3/4})\|\rho\|^{1/4} + \|\rho\|\big) \\ &\leqslant \varepsilon_2\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon\|\nabla\rho\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z\rho\|^2 + c\|\rho\|^2.\end{aligned}$$

Последнее слагаемое оценивается так:

$$\begin{aligned}|(w\partial_z\rho_2, \rho)| &= \left|\int_\Omega\int_{-h}^{z}\operatorname{div}\mathbf{u}\,d\zeta\,\partial_z\rho_2\rho\,d\mu_L^3\right| \leqslant \int_\Omega\int_{-h}^{0}\big|\operatorname{div}\mathbf{u}\big|\,d\zeta\,|\rho_s^2|\,|\rho|\,d\mu_L^3 \\ &\leqslant \left\|\int_{-h}^{0}\big|\operatorname{div}\mathbf{u}\big|\,d\zeta\right\|_{\Omega'}\int_{-h}^{0}\|\partial_z\rho_2\|_{4,\Omega'}\,\|\rho\|_{4,\Omega'}\,dz.\end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой

$$\left\| \int_{-h}^{0} \left|\operatorname{div} \mathbf{u}\right| d\zeta \right\|_{\Omega'} \leqslant c\|\nabla \mathbf{u}\|$$

и оценкой из утверждения 3.7:

$$\begin{aligned} &|(w\partial_z\rho_2, \rho)| \\ &\quad\leqslant c\|\nabla \mathbf{u}\| \int_{-h}^{0} \big(|\nabla\partial_z\rho_2|^{1/2} + |\partial_z\rho_2|^{1/2}\big)|\partial_z\rho_2|^{1/2}\big(|\nabla\rho|^{1/2} + |\rho|^{1/2}\big)|\rho|^{1/2}\, dz \\ &\quad\leqslant \varepsilon_2\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon\|\nabla\rho\|^2 + c\big(\|\nabla\partial_z\rho_2\|^2 + 1\big)\|\rho\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (5.14) получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\rho\|^2 + \mu_1\|\nabla\rho\|^2 + \nu_1\|\partial_z\rho\|^2 &\leqslant 3\varepsilon\|\nabla\rho\|^2 + \varepsilon_1\|\partial_z\rho\|^2 + 3\varepsilon_2\|\nabla \mathbf{u}\|^2 \\ &+ \varepsilon_3\|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c(\|\nabla\partial_z\rho_2\|^2 + 1)\|\rho\|^2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Теперь умножим уравнение (5.6) скалярно на $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) - \mu(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \nu(\partial_z^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma(\nabla p, \mathbf{u}) \\ + (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (w_1\partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + (w\partial_z \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

После преобразований это равенство примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \nu\|\partial_z \mathbf{u}\|^2 &= -(\ell \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma(\nabla p, \mathbf{u}) \\ &- (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (w_1\partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - (w\partial_z \mathbf{u}_2, \mathbf{u}). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Далее,

$$\begin{gathered} (\nabla_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (w_1\partial_z \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}_1, \nabla(\mathbf{u}^2)) + (w_1, \partial_z(\mathbf{u}^2)) = -(\operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \partial_z w, \mathbf{u}^2) = 0, \\ (\nabla p, \mathbf{u}) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{u}) = (p, \partial_z w) = -(\partial_z p, w), \\ (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) = -(\operatorname{div} \mathbf{u}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \mathbf{u}_2). \end{gathered}$$

Теперь оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (5.18):

$$\gamma|(\nabla p, \mathbf{u})| = \gamma|(\partial_z p, w)| \leqslant c\|\rho\|\,\|w\| \leqslant c\|\rho\|\,\|\nabla \mathbf{u}\| \leqslant \varepsilon_2\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + c\|\rho\|^2.$$

Используя неравенство Гёльдера, неравенство из утверждения 3.6 и неравенства Юнга, выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div} \mathbf{u}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \mathbf{u}_2)| &\leqslant c\|\nabla \mathbf{u}\|\,\|\mathbf{u}_2\|_4\,\|\mathbf{u}\|_4 \leqslant c\|\nabla \mathbf{u}\|\,\|\mathbf{u}\|_4 \\ &\leqslant c\|\nabla \mathbf{u}\|\big(\|\nabla \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\mathbf{u}\|^{3/4}\big)\|\mathbf{u}\|^{1/4} \\ &\leqslant \varepsilon_2\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon_3\|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c\|\mathbf{u}\|r^2, \\ |(w\partial_z \mathbf{u}_2, \mathbf{u})| &\leqslant c\|\partial_z \mathbf{u}_2\|_4\,\|\mathbf{u}\|_4\,\|w\| \leqslant c\|\mathbf{u}\|_4\,\|\nabla \mathbf{u}\| \\ &\leqslant c\|\nabla \mathbf{u}\|\big(\|\nabla \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\partial_z \mathbf{u}\|^{3/4} + \|\mathbf{u}\|^{3/4}\big)\|\mathbf{u}\|^{1/4} \\ &\leqslant \varepsilon_2\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon_3\|\partial_z \mathbf{u}\|^2 + c\|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (5.18) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2+\mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\nu\|\partial_z\mathbf{u}\|^2\leqslant 3\varepsilon_2\|\nabla\mathbf{u}\|^2+2\varepsilon_3\|\partial_z\mathbf{u}\|^2+c\|\rho\|^2+c\|\mathbf{u}\|^2. \quad (5.19)$$

Взяв $3\varepsilon=\mu_1/2$, $\varepsilon_1=\nu_1/2$, $6\varepsilon_2=\mu/2$, и $3\varepsilon_3=\nu/2$, объединяем неравенства (5.16) и (5.19):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\rho\|^2+\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2+\mu_1\|\nabla\rho\|^2+\nu_1\|\partial_z\rho\|^2+\mu\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\nu\|\partial_z\mathbf{u}\|^2\\ \leqslant c(\|\nabla\partial_z\rho_2\|^2+1)\big(\|\rho\|^2+\|\mathbf{u}\|^2\big).\end{aligned} \quad (5.20)$$

Применив здесь неравенство Гронуолла для величины $\|\rho\|^2+\|\mathbf{u}\|^2$, получаем оценку

$$\|\rho(t)\|^2+\|\mathbf{u}(t)\|^2\leqslant c(\|\rho(0)\|^2+\|\mathbf{u}(0)\|^2). \quad (5.21)$$

Из начальных условий на ρ и $\mathbf{u}$ (5.12) следует, что $\|\rho(t)\|^2=0$ и $\|\mathbf{u}(t)\|^2=0$. Отсюда получаем, что $(\mathbf{u}_1,\rho_1)=(\mathbf{u}_2,\rho_2)$. Из уравнения несжимаемости (5.8), краевых условий (5.11) и полученных соотношений также следует, что $w=0$. Значит, w_1 совпадает с w_2.

Из второго уравнения системы (5.7) следует, что $\partial_z p=0$. Таким образом, разность между p_1 и p_2 равна константе $\overline{p}$. Из уравнений системы (2.5) и (2.6) давление определяется с точностью до константы, а в теореме 4.1 эта константа однозначно определяется условием $(p^3,1)=0$. Значит, $\overline{p}=0$, т.е. $p_1=p_2$. Таким образом, единственность решения доказана.

5.3. Существование решения “в малом”. В работе [10] для случая сферы, т.е. при $\mathscr{M}=\mathbb{S}^2_a$, показано, что найдется $t_*>0$, при котором существует классическое решение задачи (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) на Q_{t_*} (существование решения “в малом”). Это доказательство нетрудно обобщить на случай произвольного двумерного гладкого ориентированного риманова многообразия.

5.4. Существование решения “в целом”. Теперь докажем, что обобщенное решение существует на всем промежутке $[0,T]$, т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Для любого $T>0$ на Q_T существует обобщенное решение задачи* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11).

Доказательство. Для случая гладких начальных условий покажем, что $t_*=T$. Предположим противное. Тогда в силу непрерывности норм $\|\nabla_3\mathbf{u}\|$ и $\|\nabla_3\rho\|$ существует $t_1\in(0,T)$ такое, что

$$\|\nabla_3\mathbf{u}\|+\|\nabla_3\rho\|\xrightarrow[t\to t_1-0]{}+\infty. \quad (5.22)$$

Но это соотношение противоречит априорным оценкам (4.79).

Далее для случая начальных условий из пространств Соболева $\mathbf{W}^2_2(\Omega)\times W^2_2(\Omega)$ доказательство проводится стандартным образом. Строится последовательность гладких начальных условий, стремящихся к заданным условиям. В силу неравенства (5.20) последовательность классических решений будет сходится к обобщенному решению исходной задачи. Теорема доказана.

Таким образом, в настоящей работе получен следующий результат.

Теорема 5.3. *Пусть* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0, \rho_0$ *удовлетворяют граничным условиям* (2.9)–(2.11) *и* $\int_{-h}^{0} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \, dz = 0$. *Тогда для любых* $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 > 0$ *и произвольного* $T > 0$ *задача* (2.5)–(2.8), (2.9)–(2.11) *имеет единственное обобщенное решение* $(\mathbf{u}, \rho) \in \mathbf{V} \times R$ *на* Q_T, *причем*

$$\mathbf{u}^2,\ (\partial_z \mathbf{u})^2,\ \mathbf{u}\nabla_3\mathbf{u},\ \partial_z\mathbf{u}\nabla_3(\partial_z\mathbf{u}),\ \mathbf{u}_t, \nabla_3\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}_2(Q_T) \tag{5.23}$$

и норма $\|\nabla_3 \mathbf{u}\|$ *непрерывна по* t.

Доказательство этой теоремы следует из предыдущих теорем.

Список литературы

[1] J.-L. Lions , R. Temam, S. Wang, “On the equations of the large-scale ocean”, *Nonlinearity*, **5**:5 (1992), 1007–1053.

[2] Г. И. Марчук, А. С. Саркисян, *Математическое моделирование циркуляции океана*, Наука, М., 1988; англ. пер.: G. I. Marchuk, A. S. Sarkisyan, *Mathematical modelling of ocean circulation*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[3] G. M. Kobelkov, “Existence of a solution “in the large” for ocean dynamics equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **9**:4 (2007), 588–610.

[4] G. M. Kobelkov, “Existence of a solution “in the large” for the 3D large-scale ocean dynamics equations”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **343**:4 (2006), 283–286.

[5] C. Cao, E. S. Titi, “Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics”, *Ann. of Math.* (2), **166**:1 (2007), 245–267.

[6] A. V. Drutsa, “Existence “in the large” of a solution to primitive equations in a domain with uneven bottom”, *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **24**:6 (2009), 515–542.

[7] I. Kukavica, M. Ziane, “On the regularity of the primitive equations of the ocean”, *Nonlinearity*, **20**:12 (2007), 2739–2753.

[8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part* I. *The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[9] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Grad. Texts in Math., **94**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.

[10] R. Temam, M. Ziane, “Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics”, *Handbook of mathematical fluid dynamics*, v. 3, North-Holland, Amsterdam, 2004, 535–658.

[11] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.

[12] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

А. В. Друца (A. V. Drutsa)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: alexey@adrutsa.ru

Поступила в редакцию
02.07.2010