Общероссийский математический портал

Ю. Ф. Коробейник, О правом обратном для оператора свертки, действующего в пространствах ростков на связных множествах в $\mathbb{C}$, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 55–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 04:21:56

УДК 517.9

Ю. Ф. Коробейник

О правом обратном для оператора свертки, действующего в пространствах ростков на связных множествах в $\mathbb{C}$

В работе устанавливается несколько общих предложений относительно существования линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) у линейного непрерывного оператора. Эти результаты позволяют получить сначала (в более общей ситуации) необходимые, а потом достаточные условия (в ряде случаев – и критерий) того, что оператор свертки L_b с символом $b(z)$ – целой функцией минимального типа при порядке 1 – имеет ЛНПО в пространствах аналитических ростков на некоторых классах связных множеств.

Библиография: 39 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ – векторное пространство (аналитических) ростков на $\mathcal{Q}$ (см. [1]). В случае, когда $\mathcal{Q}$ – область, $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ отождествляется с пространством $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ всех аналитических в $\mathcal{Q}$ функций, с топологией Фреше равномерной сходимости на каждом компакте $\mathcal{G}$. Далее, если $\mathcal{Q}$ – связный компакт в $\mathbb{C}$, то топологию в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ определяем обычным образом (см. [2, гл. XI, п. 5.15]) как топологию индуктивного предела $\text{ind}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\mathcal{G}_n)$, где $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность областей, аппроксимирующая $\mathcal{Q}$: $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{G}_{n+1}} \subset \mathcal{G}_n, n = 1, 2, \dots$, $\mathcal{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Пусть теперь $\mathcal{Q}$ – произвольное связное множество в $\mathbb{C}$. Следуя [1], в пространстве ростков $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ можно ввести две локально выпуклые топологии – индуктивную In и проективную Pr . Первая определяется как топология $\text{ind } \mathcal{A}(\mathcal{G})$, где индуктивный предел берется по семейству всех областей $\mathcal{G}$, содержащих $\mathcal{Q}$, относительно отображений, ставящих в соответствие каждой функции f из $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ содержащий ее росток из $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Вторая – как топология $\text{proj } \mathcal{H}(\mathcal{F})$, взятого по всем связным компактам $\mathcal{F}$, принадлежащим $\mathcal{Q}$. Свойства этих топологий описаны в [1]; в частности, всегда $\text{In} \geq \text{Pr}$; в [1] приведен ряд общих условий на $\mathcal{Q}$, при которых эти топологии совпадают (см. [1, гл. I, § 3, предложения 1.8–1.9 и теорема 1.2]).

Пусть b – целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т) с сопряженной диаграммой B ; μ – аналитический функционал с носителем B , преобразование Лапласа которого совпадает с b : $b(\lambda) = \mu(\exp(\cdot \lambda))$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть сначала $\mathcal{Q}$ – односвязная область в $\mathbb{C}$. В этом случае оператор свертки L_b с характеристической

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-242).

функцией, или символом $b(z)$, определяется, как хорошо известно (см., например, [3]), следующим образом

$$(L_b g)(z) := \mu(g(\cdot + z)), \quad z \in \mathcal{Q}.$$

Здесь $g \in \mathcal{A}(\mathcal{Q} + B)$, $\mathcal{Q} + B$ – арифметическая сумма множеств $\mathcal{Q}$ и B . При этом (см. [3], [4]) L_b действует непрерывно из $\mathcal{A}(\mathcal{Q} + B)$ в $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$. Пусть теперь $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$ и Φ – любой росток на множестве $\mathcal{Q} + B$. Если $y(z)$ – произвольная функция, входящая в росток Φ , то она аналитична в некоторой области, содержащей $\mathcal{Q} + B$, и, следовательно, в области вида $\mathcal{G}_0 + B$, где $\mathcal{G}_0$ – некоторая область, содержащая $\mathcal{Q}$. Тогда $L_b \in \mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$. Как легко проверить, все функции $L_b y$, $y \in \Phi$, содержатся в одном и том же ростке $\Psi \in \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, и, таким образом, L_b – линейный оператор, действующий из $\mathcal{H}(\mathcal{Q} + B)$ в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Нетрудно убедиться, что если оба пространства $\mathcal{H}(\mathcal{Q} + B)$ и $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ снабжены однотипной (одной из двух) топологией In или Pg , то L_b действует непрерывно из $\mathcal{H}(\mathcal{Q} + B)$ в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Естественно возникают вопросы о том, когда он будет эпиморфизмом, а также когда он имеет линейный непрерывный правый обратный оператор (ЛНПО). Первая проблема исследовалась во многих работах для случая, когда $\mathcal{Q}$ – область в $\mathbb{C}$ или связный компакт, являющийся дополнением или замыканием односвязной области (см., например, [3]–[13]) и почти полностью решена. Другие типы множеств $\mathcal{Q}$ стали объектом изучения лишь в последнее пятилетие. Именно, получены критерии эпиморфности для связного промежутка $\mathcal{Q}$ на прямой [14], [15], а также для связного множества в $\mathbb{C}$, удовлетворяющего некоторым условиям общего характера [16]–[18]. Что же касается второй проблемы, то она стала разрабатываться значительно позднее. Повидимому, первый результат в этом направлении получен в работах [19], [20], в которых показано, что оператор $L_b: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C})$, где $b(z)$ – любая ц.ф.э.т., отличная от тождественного нуля, имеет ЛНПО. Условимся всюду далее обозначать символом $[1, 0]$ множество всех целых функций минимального типа при порядке единица, отличных от тождественного нуля. Как показали Р. Майзе и Б. Тейлор [21], если $b \in [1, 0]$, и $b(z)$ – не многочлен, то оператор свертки $L_b: \mathcal{H}(\{0\}) \rightarrow \mathcal{H}(\{0\})$ не имеет ЛНПО. С другой стороны, в работе [22] доказано существование ЛНПО у оператора $L_b: \mathcal{A}(K_R) \rightarrow \mathcal{A}(K_R)$, где $K_R = \{z \mid |z| < R\}$, $0 < R < \infty$ и $b \in [1, 0]$. Чуть позднее в статье [23] существование ЛНПО у L_b в пространствах $\mathcal{A}(K_R)$ и $\mathcal{H}(\overline{K}_R)$ (а также в ряде других пространств аналитических функций) установлено другим методом, восходящим к [5] и позволяющим дать эффективное представление ЛНПО. В работе [24] получен критерий наличия ЛНПО у оператора L_b в $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$, где $\mathcal{Q}$ – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $b \in [1, 0]$, а в статье [25] – достаточное условие существования ЛНПО у $L_b: \mathcal{A}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{Q})$, где $\mathcal{Q}$ – такая же область и B – сопряженная диаграмма ц.ф.э.т. $b(z)$. С других позиций (с использованием критерия существования ЛНПО у оператора представления, широко используемого в теории абсолютно представляющих систем) вопрос о существовании ЛНПО у оператора $L_b: \mathcal{A}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{Q})$ рассматривался в работах [26], [27]. В статье [27] (именно, в той ее части, которая принадлежит Ю. Ф. Коробейнику) показано, что достаточные условия, полученные З. Моммом в [25] являются и необходимыми (этот результат получен весьма просто в [27] с помощью критерия из [24]). Наконец, в последнее время С. Н. Мелихов и З. Момм [28]

установили критерий существования ЛНПО у L_b , $b \in [1, 0]$, в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, где $\mathcal{Q}$ – выпуклый компакт в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$.

В настоящей статье получены условия (сначала необходимые, а потом достаточные) существования ЛНПО у оператора свертки, действующего в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{Q} + B)$, где $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$ довольно общего вида.

Во втором параграфе для удобства читателя приводятся основные результаты предыдущих работ, используемые в дальнейшем. В третьем установлены общие предложения относительно ЛНПО у линейного непрерывного оператора, которые позволяют получить как необходимые (§5), так и достаточные (§6) условия существования ЛНПО у L_b для различных типов связных множеств $\mathcal{Q}$. При этом основное внимание уделено множествам Q , образованным добавлением к области $\mathcal{G}$, полученной пересечением конечного числа открытых полуплоскостей, некоторой части границы $\mathcal{G}$. Иными словами, рассматриваются пространства функций, аналитических в таких выпуклых многоугольных (не обязательно ограниченных) областях и допускающих аналитическое продолжение через некоторую (фиксированную) часть границы. В ряде случаев указываются такие условия, при выполнении которых оператор свертки имеет ЛНПО, который может быть эффективно определен. Последнее важно потому, что ЛНПО-оператор T для линейного оператора L позволяет найти частное решение уравнения $Ly = f$ (именно, $y = Tf$). Именно в связи с этим в последних зарубежных работах ЛНПО для L все чаще называют “solution operator” для L . Но оператор T будет действительно оператором, дающим решение уравнения, если имеется способ его эффективного определения. Доказательства теорем о наличии ЛНПО у оператора свертки в большинстве работ (например, в [19], [20], [24], [25], [28], [29]) носят неконструктивный характер и не обеспечивают возможность эффективного определения ЛНПО у оператора свертки.

§2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$, $b(z)$ – ц.ф.э.т. с нулями λ_k ($k = 1, 2, \dots$); $\Lambda(b) := \{-\arg \lambda_k \mid k = 1, 2, \dots\}$; $\Lambda^*(b)$ – множество предельных точек $\Lambda(b)$ (оно было введено в работе [8]). Пусть, далее, $q(\mathcal{G})$ – множество направлений выпуклости $\mathcal{Q}$, т.е. (см. [11], [30]) таких $\varphi \in [0, 2\pi)$, для которых при всех $r \in (-\infty, +\infty)$ множество $Q \cap \{z \mid \operatorname{Re} z e^{-i\varphi} > r\}$ связно.

ТЕОРЕМА 2.1 [11], [12]. Пусть $b(z) \in [1, 0]$ и $\mathcal{Q}$ – либо односвязная область в $\mathbb{C}$, либо компакт с односвязным дополнением до $\mathbb{C}$. Для того чтобы оператор свертки L_b был эпиморфизмом $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Lambda^*(b) \subseteq q(\mathcal{G}). \quad (1)$$

СЛЕДСТВИЕ 1 (получено ранее в [6], [7]). Если $b(z) \in [1, 0]$ и $\mathcal{Q}$ – выпуклая область в $\mathbb{C}$, то L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $b(z) \in [1, 0]$ и $\mathcal{Q}$ – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, то L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, $y(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 и удовлетворяет в ней уравнению $(L_b y)(z) = 0$. Тогда

- 1) полная вейерштрассова область существования $W(y)$ функции $y(z)$ выпукла;
- 2) область $W(y)$ представляется в виде

$$W(y) = \bigcap \{z \mid \operatorname{Re} e^{-i\psi} z < b_\psi\},$$

где $b_\psi \in (-\infty, +\infty] \quad \forall \psi \in \Lambda^*(b)$, и пересечение берется по всем ψ из $\Lambda^*(b)$.

Утверждение 1) теоремы 2.2 принадлежит Г. Полю [31], второе утверждение получено И. Ф. Красичковым-Терновским [30] и позднее, но другим методом, – С. В. Знаменским [11].

Пусть $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\gamma > 0$. Следуя [14], скажем, что выполнено условие $\mathcal{K}_\gamma^+(\varphi)$ (или условие $\mathcal{K}_\gamma^-(\varphi)$), если $(\varphi, \varphi + \gamma) \cap \Lambda^*(b) = \emptyset$ (соответственно, $(\varphi - \gamma, \varphi) \cap \Lambda^*(b) = \emptyset$).

ТЕОРЕМА 2.3. Если $b(z) \in [1, 0]$, то оператор L_b является эпиморфизмом $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ тогда и только тогда, когда при некотором $\gamma > 0$ выполняются, соответственно, следующие условия:

- 1) $\mathcal{K}_\gamma^\pm(\pi/2)$, $\mathcal{K}_\gamma^\pm(3\pi/2)$, если $\mathcal{Q} = (c, d)$, $-\infty \leq c < d \leq +\infty$;
- 2) $\mathcal{K}_\gamma^+(\pi/2)$, $\mathcal{K}_\gamma^-(3\pi/2)$, если $\mathcal{Q} = (c, d]$, $-\infty \leq c < d < +\infty$;
- 3) $\mathcal{K}_\gamma^-(\pi/2)$, $\mathcal{K}_\gamma^+(3\pi/2)$, если $\mathcal{Q} = [c, d)$, $-\infty < c < d \leq +\infty$.

Пункт 1) этой теоремы получен независимо в [14] и [15]; при этом результат для случая $-\infty < c < d < +\infty$ доказан чуть ранее Ю. Ф. Коробейником, а для случая $c = -\infty$, $d = -\infty$ – В. В. Напалковым и И. А. Рудаковым. Утверждения 2), 3) установлены в [14].

ТЕОРЕМА 2.4 [18]. Пусть $\mathcal{Q}$ – множество, полученное из замкнутой полосы в $\mathbb{C}$, заключенной между параллельными прямыми l_1 и l_2 , путем удаления некоторой (возможно, пустой) части ее границы. Пусть, далее, ν – направление внешней относительно $\mathcal{Q}$ нормали к l_1 . Тогда эпиморфизм оператора L_b с $b(z) \in [1, 0]$ в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ равносильно выполнению следующих условий (при некотором $\beta > 0$):

- 1) $\Lambda^* \cap (\nu - \beta, \nu + \beta) = \emptyset$, если $l_1 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, $l_2 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ и множество $l_1 \cap \mathcal{Q}$ несвязно;
- 2) $\mathcal{K}_\gamma^\pm(\nu)$, если $l_1 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, $l_2 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ и $l_1 \cap \mathcal{Q}$ связно;
- 3) $\mathcal{K}_\gamma^\pm(\nu + \pi)$, если $l_1 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$, $l_2 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ и $l_2 \cap \mathcal{Q}$ связно;
- 4) $\Lambda^* \cap (\nu - \beta, \nu + \beta) = \emptyset$, $\Lambda^* \cap (\nu + \pi - \beta, \nu + \pi + \beta) = \emptyset$, если $l_j \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ и множество $l_j \cap \mathcal{Q}$ несвязно ($j = 1, 2$);
- 5) $\Lambda^* \cap (\nu + \pi - \beta, \nu + \pi + \beta) = \emptyset$, если $l_1 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$, $l_2 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ и множество $l_2 \cap \mathcal{Q}$ несвязно;
- 6) $\mathcal{K}_\gamma^\pm(\nu)$, $\Lambda^* \cap (\nu + \pi - \beta, \nu + \pi + \beta) = \emptyset$, если $l_1 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, $l_2 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ и $l_1 \cap \mathcal{Q}$ связно, $l_2 \cap \mathcal{Q}$ несвязно;
- 7) $\mathcal{K}_\gamma^\pm(\nu + \pi)$, $\Lambda^* \cap (\nu - \beta, \nu + \beta) = \emptyset$, если $l_1 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, $l_2 \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ и $l_2 \cap \mathcal{Q}$ связно, $l_1 \cap \mathcal{Q}$ несвязно;
- 8) $\mathcal{K}_\gamma^\pm(\nu)$, $\mathcal{K}_\gamma^\pm(\nu + \pi)$, если $l_j \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ и $l_j \cap \mathcal{Q}$ связно, $j = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 2.5 [18]. Пусть множество $\mathcal{Q}$ получено удалением из замкнутой выпуклой полуплоскости в $\mathbb{C}$, ограниченной прямой l , некоторой (возможно, пустой) части границы. Пусть, далее, ν – направление внешней нормали к l и пусть $b(z)$ – любая функция из $[1, 0]$. Тогда эпиморфность L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ равносильна выполнению следующих условий (при некотором $\beta > 0$):

- 1) $\Lambda^* \cap (\nu - \beta, \nu + \beta) = \emptyset$, если $l \cap \mathcal{Q}$ несвязно;
- 2) $\mathcal{H}_\beta^\pm(\nu)$, если $l \cap \mathcal{Q}$ связно.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $n \geq 1$, $h_{\theta_k} \in (-\infty, +\infty]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть, далее, выпуклая область

$$\mathcal{Q} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z e^{-i\theta_k} < h_{\theta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$$

непуста. Предположим еще, что $b(z) \in [1, 0]$. Тогда оператор $L_b: \mathcal{A}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО в том и только том случае, когда

$$\Lambda^*(b) \subseteq \{\theta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $h_{\theta_k} \in (-\infty, +\infty)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$. Пусть, далее, многоугольник

$$\mathcal{Q} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z e^{-i\theta_k} \leq h_{\theta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n\}$$

ограничен, непуст и не вырождается в точку. При этих предположениях оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ в том и только в том случае, если выполнено условие (2).

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $\mathcal{Q} = [c, d]$, $-\infty < c < d < +\infty$; $b(z) \in [1, 0]$. Оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^*(b) \supseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$.

Теоремы 2.6–2.8 являются частными случаями более общих утверждений полученных, соответственно, в случае теоремы 2.6 З. Моммом [24], теоремы 2.7 – С.Н. Мелиховым и З. Моммом [28], теоремы 2.8 – независимо С.Н. Мелиховым, З. Моммом в [28] и М. Лангебрухом в [29].

ТЕОРЕМА 2.9 [23]. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, $0 < R < \infty$. Положим

$$K_R = \{z \mid |z| < R\}, \quad \overline{K}_R = \{z \mid |z| \leq R\}.$$

Тогда оператор L_b имеет ЛНПО T в пространстве $\mathcal{A}(K_R)$ (и в $\mathcal{H}(\overline{K}_R)$), который для любой функции $y(z)$ из $\mathcal{A}(K_R)$ (соответственно, из $\mathcal{H}(\overline{K}_R)$) представляется в форме

$$(Ty)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{zt}}{b(t)} t^{-k-1} dt. \quad (3)$$

В представлении (3) $\Gamma_k = \{t \mid |t| = r_k\}$, $r_k \uparrow \infty$ и числа r_k определяются указанным в [23] способом.

Пусть H_1, H_2 – локально выпуклые пространства (ЛВП). Будем говорить, что для пары (H_1, H_2) справедлива теорема о замкнутом графике (т.з.г.), если каждое линейное отображение H_1 в H_2 , имеющее замкнутый график, непрерывно. Как хорошо известно, т.з.г. справедлива для пары пространств (H_1, H_2) , если оба эти пространства являются пространствами Фреше или LN^* -пространствами в терминологии Себаштьяна-и-Силвы [2, гл. XI]. Весьма общие классы пар пространств, для которых справедлива т.з.г. (в дальнейшем такие пары называются парами Гротендика–Райкова или Г.-Р.-парами), приведены в приложении 1 А. Д. Райкова к монографии [32]. Наконец, наиболее общий результат в этом направлении, подтверждающий гипотезу Гротендика, приведенную в начале приложения 1 к [32], доказан Райковым в [33]. Этот результат применим к тем конкретным пространствам аналитических ростков, которые рассматриваются ниже.

§ 3. Общие результаты

ТЕОРЕМА 3.1. а) Пусть H_j ($1 \leq j \leq 4$) – отдельные ЛВП и $H_j \hookrightarrow H_{j+1}$ ($j = 1, 3$). Пусть, далее, L – линейный непрерывный оператор из H_j в H_{j+2} ($j = 1, 2$) такой, что

$$(L^{-1}(0), H_1) = (L^{-1}(0), H_2), \quad (4)$$

где $(L^{-1}(0), H) = \{y \in H \mid Ly = 0\}$.

б) Пусть, наконец, L отображает H_1 на H_3 и (H_3, H_1) – Г.-Р.-пара. Тогда справедливо следующее утверждение:

если $L: H_2 \rightarrow H_4$ имеет ЛНПО v , то $L: H_1 \rightarrow H_3$ также имеет ЛНПО, являющийся сужением v на H_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v_1 := v|_{H_3}$. Тогда v_1 – линейный оператор из H_3 в H_2 такой, что для всех x из H_3 $Lv_1x = x$. Так как L – эпиморфизм H_1 на H_3 , то $\exists y = y(x) \in H_1$: $Ly = x$, откуда $L(v_1x - y) = 0$ и $v_1x - y \in (L^{-1}(0), H_2) \subseteq H_1$ (учитываем здесь равенство (4)). Следовательно, $v_1x \in H_1$ и v_1 – линейный оператор из H_3 в H_1 . Покажем, что он непрерывен. Пусть Λ – произвольное семейство индексов, $x \in H_3$, $y \in H_1$, $x_\lambda \in H_3$, $y_\lambda \in H_1 \ \forall \lambda \in \Lambda$. Пусть, далее, $x_\lambda \xrightarrow{\Lambda} x$ в H_3 , $y_\lambda \xrightarrow{\Lambda} y$ в H_1 и $y_\lambda = v_1x_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda$. Тем более $x_\lambda \xrightarrow{\Lambda} x$ в H_4 , и в силу непрерывности $v: H_4 \rightarrow H_2$ $vx_\lambda = v_1x_\lambda \rightarrow vx = v_1x$ в H_2 . Отсюда $y = v_1x$.

Проведенное доказательство показывает также, что если ЛНПО v для оператора $L: H_2 \rightarrow H_4$ не только существует, но и может быть конструктивно определен (построен), то то же справедливо и для ЛНПО v_1 для оператора $L: H_1 \rightarrow H_3$, являющегося сужением v на H_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (4) существенно для справедливости утверждения теоремы. Убедимся в этом на простом примере. Пусть Δ_1 и Δ_2 – лежащие строго внутри друг друга треугольники, у которых нет ни одной пары параллельных сторон. Пусть, для определенности, $\Delta_2 \subset \Delta_1$ и пусть φ_j ($j = 1, 2, 3$) – направления внешних нормалей к сторонам Δ_2 . Возьмем функцию $b(z) \in [1, 0]$, для которой $\Lambda^*(b) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Положим $H_1 = H_3 = \mathcal{A}(\Delta_1)$, $H_2 = H_4 = \mathcal{A}(\Delta_2)$. Оператор L непрерывен в $\mathcal{A}(\Delta_j)$, $j = 1, 2$. По теореме 2.6 он имеет ЛНПО в $\mathcal{A}(\Delta_2)$ и не имеет ЛНПО в $\mathcal{A}(\Delta_1)$. При этом, с помощью теоремы 2.2 (утверждение 2)) нетрудно получить, что $(L_b^{-1}(0), H_2) \neq (L_b^{-1}(0), H_1)$. В то же время все остальные предположения теоремы выполнены: $\mathcal{A}(\Delta_1) \hookrightarrow \mathcal{A}(\Delta_2)$, $(\mathcal{A}(\Delta_1), \mathcal{A}(\Delta_1))$ – Г.-Р.-пара и по следствию теоремы 2.1 линейный оператор L сюръективен в $\mathcal{A}(\Delta_j)$, $j = 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Покажем, что в общей ситуации в утверждении теоремы нельзя поменять местами H_1 и H_2 . Точнее говоря, неверен следующий результат:

Пусть при $j = 1, 2, 3, 4$ H_j – отделимые ЛВП такие, что $H_k \hookrightarrow H_{k+1}$, $k = 1, 3$; (H_{l+2}, H_l) – Г.-Р.-пары при $l = 1, 2$; L – эпиморфизм H_j на H_{j+2} , $j = 1, 2$. Пусть еще равенство (4) выполнено и $L: H_1 \rightarrow H_3$ имеет ЛНПО. Тогда оператор $L: H_2 \rightarrow H_4$ также имеет ЛНПО.

Чтобы убедиться в неверности этого результата, положим $H_1 = H_3 = \mathcal{H}([c, d])$, где $-\infty < c < d < +\infty$; $H_2 = H_4 = \mathcal{H}(\{c\})$. Пусть $b(z)$ – функция из $[1, 0]$, для которой $\Lambda^*(b) \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$. По теореме 2.8 оператор свертки L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}([c, d])$. Кроме того, L_b сюръективен в $\mathcal{H}(\{c\})$, а применение теоремы 2.2 2) приводит к равенству $(L_b^{-1}(0), H_1) = (L_b^{-1}(0), H_2)$. В то же время, согласно [21], оператор $L_b: H_2 \rightarrow H_4$ не имеет ЛНПО.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Возникает естественный вопрос о том, не дает ли условие (4) возможности получить результат относительно эпиморфизма, аналогичный теореме 3.1, т.е. не будет ли L эпиморфизмом H_1 на H_3 . Нетрудно показать, что такого результата быть не может. С этой целью рассмотрим замкнутый пятиугольник $\mathcal{Q} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ с вершинами в точках $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 1)$, $A_3(1, -1)$, $A_4(-1, -1)$, $A_5(-1, 1)$. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, $\Lambda^*(b) = \{\pi/2\}$; $H_1 = H_3 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$; $H_2 = H_4 = \mathcal{H}(A_2)$. Очевидно, что $H_1 \hookrightarrow H_2$, и, следовательно, $(L_b^{-1}(0), H_1) \subseteq (L_b^{-1}(0), H_2)$. Пусть теперь y – произвольный росток из $(L_b^{-1}(0), H_2)$ и $Y(z)$ – любая функция из класса эквивалентности y . Тогда найдется кружок K_0 радиуса $\delta > 0$ с центром в точке A_2 такой, что $Y \in \mathcal{A}(K_0)$. С другой стороны, согласно теореме 2.2 2) $W(y) = \{z \mid \operatorname{Im} z < b\}$, где $b \in (-\infty, +\infty]$. Так как $K_0 \subseteq W(Y)$, то $b \geq 1 + \delta$, и $W(y) \supset \mathcal{Q}$. Поэтому $Y(z)$ принадлежит некоторому классу эквивалентности y_0 из $(L_b^{-1}(0), H_1)$. Легко показать, что если $Y_1(z)$ – другая функция из того же ростка y , то $Y_1 \in y_0$. Таким образом, $y \subseteq y_0$ и $(L_b^{-1}(0), H_2) \subseteq (L_b^{-1}(0), H_1)$, т.е. выполнено условие (4), и предположения а)–б) теоремы 3.1 имеют место. При этом L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(A_2)$. В то же время $\frac{\pi}{2} \notin q(\mathcal{Q})$, и по теореме 2.1 L_b – не эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

Заметим еще, что в этом примере и $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ и $\mathcal{H}(A_2)$ – LN^* -пространства (см. [2, гл. XI]). Как известно (см., например, [34]) если L – линейный непрерывный оператор в LN^* -пространстве H , то он сюръективен в H тогда и только тогда, когда существует непрерывный правый обратный к L (не обязательно линейный).

Отсюда следует, что в рассматриваемом примере оператор L_b имеет непрерывный правый обратный в $\mathcal{H}(A_2)$ и не имеет такового в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Иначе говоря, для правого обратного оператора теорема 3.1 неверна. Таким образом, эта теорема является весьма специфичной именно для линейного правого обратного оператора.

Исходные предположения теоремы 3.1 можно несколько ослабить, но тогда и результат получается более слабый.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть H_j – отделимые ЛВП ($1 \leq j \leq 4$) такие, что $H_k \hookrightarrow H_{k+1}$, $k = 1, 3$, и (H_1, H_1) – Г.-Р.-пара. Пусть, далее, L – линейный непрерывный оператор из H_l в H_{l+2} , $l = 1, 2$, такой, что выполнено соотношение (4). Тогда, если $(L^{-1}(0), H_2)$ топологически дополнимо в H_2 , то $(L^{-1}(0), H_1)$ топологически дополнимо в H_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [35, гл. I, § 1, п. 8], существует непрерывный проектор P пространства H_2 на $(L^{-1}(0), H_2)$. Положим $P_1 := P|_{H_1}$. Линейный оператор P_1 отображает H_1 на $(L^{-1}(0), H_2) = (L^{-1}(0), H_1) \subset H_1$. Очевидно, что P_1 – проектор H_1 на $(L^{-1}(0), H_1)$. Так же, как при доказательстве теоремы 3.1, показываем, что оператор P_1 имеет замкнутый график и поэтому непрерывен.

В рассмотренном примере с треугольниками Δ_j ($j = 1, 2$) оператор L_b сюръективен в $H_3 = H_1 = \mathcal{A}(\Delta_1)$, но не имеет ЛНПО в $\mathcal{A}(\Delta_1)$. Поэтому [35, гл. I, § 1, п. 8] подпространство $(L_b^{-1}(0), H_1)$ не дополнимо (топологически) в H_1 . В то же время $L_b: \mathcal{A}(\Delta_2) \rightarrow \mathcal{A}(\Delta_2)$ имеет ЛНПО, и тем более $(L_b^{-1}(0), H_2)$ дополнимо в H_2 .

Таким образом, условие (4) существенно для справедливости и теоремы 3.2. Кроме того, приведенный в замечании 2 пример убеждает, что если $H_k \hookrightarrow H_{k+1}$, $k = 1, 3$, линейный оператор L непрерывен и сюръективен из H_l в H_{l+2} , (H_{l+2}, H_l) – Г.-Р.-пары ($l = 1, 2$), выполнено условие (4), и, наконец, $(L^{-1}(0), H_1)$ топологически дополнимо в H_1 , то $(L^{-1}(0), H_2)$ может быть и не дополнимо в H_2 .

Как уже отмечалось выше, если линейный оператор L непрерывен в H_j , $j = 1, 2$, $H_1 \hookrightarrow H_2$, выполняется условие (4) и $(L^{-1}(0), H_1)$ дополнимо в H_1 , то не всегда $(L^{-1}(0), H_2)$ дополнимо в H_2 (здесь и всюду далее имеется в виду топологическая дополнимость). Опишем одну довольно общую ситуацию, в которой дополнимость $(L^{-1}(0), H_2)$ все-таки имеет место.

ТЕОРЕМА 3.3. а) Пусть H – приведенный проективный предел LN^* -пространств H_m ($m \geq 1$), и пусть, далее, L – линейный оператор, действующий непрерывно из H_m в H_m , $m = 1, 2, \dots$.

б) Пусть, наконец, выполняются равенства

$$(L^{-1}(0), H_n) = (L^{-1}(0), H), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

в) Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $(L^{-1}(0), H)$ дополнимо в H ;
- 2) $\exists m_0 \geq 1$: $(L^{-1}(0), H_{m_0})$ дополнимо в H_{m_0} ;
- 3) $\exists m_1 \geq 1$: $(L^{-1}(0), H_m)$ дополнимо в H_m при любом $m \geq m_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $3) \Rightarrow 2)$, очевидно, справедлива и без предположения о совпадении ядер оператора L в H_n и H .

Установим теперь импликацию $2) \Rightarrow 3)$. Пусть $m \geq m_0$. Тогда $H_m \hookrightarrow H_{m_0}$, $(L^{-1}(0), H_m) = (L^{-1}(0), H_{m_0})$ и $(L^{-1}(0), H_{m_0})$ дополнимо в H_{m_0} . По теореме 3.2 $(L^{-1}(0), H_m)$ дополнимо в H_m . Итак, $2) \Leftrightarrow 3)$.

Импликация $2) \Rightarrow 1)$ доказывается точно так же, как импликация $2) \Rightarrow 3)$, только пространство H_m в только что приведенном рассуждении заменяется пространством H .

Нам осталось установить импликацию $1) \Rightarrow 2)$. Очевидно, что L – линейный непрерывный оператор из H в H , и поэтому $\mathcal{K} := (L^{-1}(0), H)$ – замкнутое подпространство пространства $H = \text{proj} \overleftarrow{H_m}$. Точно так же $\mathcal{K}_m := (L^{-1}(0), H_m)$ – замкнутое подпространство LN^* -пространства H_m (и, следовательно, также LN^* -пространство). Очевидно, что соотношение (5) равносильно тому, что $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}$, $m = 1, 2, \dots$. При этом $\mathcal{K} = \text{proj}_m \overleftarrow{\mathcal{K}_m}$, откуда следует, что пространства $\mathcal{K}_m$ и $\mathcal{K}$ совпадают не только по набору элементов, но и топологически. Если, как обычно, τ – топология Макки, то $(\mathcal{K}_m)'_\tau = \mathcal{K}'_\tau$ – пространство Монтеля–Фреше (M^* -пространство в терминологии Себастьяна-и-Силвы). Пусть p – непрерывный проектор H на K . Сопряженный оператор p' действует непрерывно из $\mathcal{K}'_\tau$ в H'_τ , $\text{ind}_{m \rightarrow \infty} (H_m)'_\tau$. Согласно факторизационной теореме Гротендика (см., например, [36, гл. VI, теорема 6.5.1]) $\exists m_0 \geq 1$: p' действует непрерывно из $\mathcal{K}'_\tau$ в $(H_{m_0})'_\tau$. Но тогда оператор $P := (p')'$ действует непрерывно из H_{m_0} в $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{m_0}$, причем $\forall x \in H$: $(p')'(x) = px$. При этом H плотно в H_{m_0} . Таким образом, оператор p продолжается (единственным образом) из H до линейного оператора P , непрерывного из H_{m_0} в $\mathcal{K}_{m_0}$. Так как $P(H_{m_0}) \supseteq p(H) = \mathcal{K}$, то P – эпиморфизм H_{m_0} на K_{m_0} . При этом $\forall x \in H$: $P^2x = p^2x = px = Px$. В силу плотности H в H_{m_0} $P^2x = Px \forall x \in H_{m_0}$. Следовательно, P – непрерывный проектор H_{m_0} на $\mathcal{K}_{m_0}$, и пространство $(L^{-1}(0), H_{m_0})$ дополнимо топологически в H_{m_0} .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняются предположения а), б) теоремы 3.3, и пусть L – эпиморфизм H и H_m , $m = 1, 2, \dots$. Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) Оператор $L: H \rightarrow H$ имеет ЛНПО;
- 2) $\exists m_0 \geq 1$: оператор L имеет ЛНПО в H_{m_0} ;
- 3) $\exists m_1 \geq 1$: оператор L имеет ЛНПО в H_m при всех $m \geq m_1$.

Теорема, завершающая этот параграф, позволяет получить аналоги теорем 3.1 и 3.2 при несколько иных исходных предположениях.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $j = 1, 2$; H_j – отдельные ЛВП с топологиями τ_j такие, что $H_1, \tau_1 \hookrightarrow H_2, \tau_2$. Пусть, далее H_0 – векторное подпространство H_1 такое, что пространства H_1, τ_1 и H_2, τ_2 индуцируют в H_0 одну и ту же топологию.

Тогда, если подпространство H_0 дополнимо топологически в H_2, τ_2 , то оно топологически дополнимо и в H_1, τ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_2 – непрерывный проектор H_2, τ_2 на H_0 и $P_1 := P_2|_{H_1}$: $P_1x = P_2x \forall x \in H_1$. Так как $H_0 \subseteq H_1$ и $\forall x \in H_0$ $P_2x = P_1x = x$, то

P_1 – проектор H_1 на H_0 , т.е. линейное отображение H_1 на H_0 такое, что $\forall x \in H_1$ $P_1^2 x = P_1 x$. Покажем, что оператор P_1 непрерывен. Пусть Q – любое замкнутое множество в H_0 , $T_1 = P_1^{-1}(Q)$, $T_2 = P_2^{-1}(Q)$. Ясно, что $T_1 = H_1 \cap T_2$. В силу непрерывности P_2 множество T_2 замкнуто в H_2, τ_2 . Пусть теперь x_0 – элемент H_1 , являющийся предельной точкой множества T_1 . Так как $T_1 \subseteq T_2$ и $\tau_1 \geq \tau_2$, то подавно x_0 – предельная точка T_2 в H_2, τ_2 , и поэтому $x_0 \in T_2$. Следовательно, $x_0 \in T_1$ и множество T_1 замкнуто в H_1, τ_1 . Таким образом, P_1 – непрерывный проектор H_1, τ_1 на H_0 , и потому H_0 топологически дополнимо в H_1, τ_1 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены предположения пункта а) теоремы 3.1, и, кроме того,

б') L отображает H_1 на H_3 и пространства H_1 и H_2 индуцируют в их общем подпространстве $(L^{-1}(0), H_1)$ (или, что все равно, $(L^{-1}(0), H_2)$), одну и ту же топологию.

Тогда справедливо утверждение теоремы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены предположения пункта а) теоремы 3.1, и, далее,

б'') $(L^{-1}(0), H_2)$ топологически дополнимо в H_2 , а пространства H_1 и H_2 индуцируют в $(L^{-1}(0), H_2) = (L^{-1}(0), H_1)$ одну и ту же топологию.

Тогда $(L^{-1}(0), H_1)$ топологически дополнимо в H_1 .

§ 4. Некоторые приложения теорем 3.1, 3.2

Рассмотрим сначала одно довольно общее приложение теорем 3.1, 3.2 к оператору свертки L_b . Если $Q \subset \mathbb{C}$, то, как обычно, $\text{conv } \mathcal{Q}$ – это выпуклая оболочка множества Q .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $b(z) \in [1, 0]$ и $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$. Предположим, что оба пространства $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ и $\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$ снабжены одной и той же топологией из двух, описанных в § 1, – либо Pr , либо In . Пусть, наконец, $(\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}), \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}))$ – Г.-Р.-пара. Тогда

- 1) если $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ дополнимо в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, то $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}))$ дополнимо в $\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$;
- 2) если $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО и L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$, то L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$.

Теорема 4.1 будет прямо следовать из теорем 3.1, 3.2, если мы докажем равенство $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q})) = (L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}))$, или, что все равно, включение $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q})) \subseteq (L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}))$. Пусть $y \in (L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$, и пусть $Y(z)$ – любой представитель ростка y . Тогда найдется область $\mathcal{G}$, содержащая $\mathcal{Q}$ и такая, что $(L_b Y)(z) = 0 \ \forall z \in \mathcal{G}$. По теореме 2.2 1) область $W(Y)$ выпукла, откуда $\text{conv } \mathcal{Q} \subseteq \text{conv } \mathcal{G} \subset W(Y)$. Следовательно, $Y \in \mathcal{A}(\text{conv } \mathcal{G})$ и $(L_b Y)(z) = 0 \ \forall z \in \text{conv } \mathcal{G}$. Ясно, что Y принадлежит некоторому ростку y_0 из $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}))$. При этом любая другая функция Y_1 из пучка y принадлежит тому же ростку y_0 . Следовательно, $y \subseteq y_0$, и требуемое включение доказано.

Заметим, что $(\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}), \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}))$ – Г.-Р.-пара, если, в частности, $\mathcal{Q}$ – область или компакт в $\mathbb{C}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, и пусть $\mathcal{Q}$ – односвязная область или компакт в $\mathbb{C}$. Для того чтобы оператор свертки L_b имел ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, необходимо выполнение следующих условий:

- 1) L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$;
- 2) L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$.

При этом согласно [11] условие 1) равносильно соотношению (1), когда $\mathcal{Q}$ – односвязная область в $\mathbb{C}$ или компакт с односвязным дополнением. Далее, для выпуклых областей и компактов условия существования ЛНПО для L_b известны [24], [28].

Весьма вероятно, что справедлива

ГИПОТЕЗА А. Пусть $\mathcal{Q}$ – односвязная область или континуум со связным дополнением в $\mathbb{C}$. Пусть, далее, $b \in [1, 0]$. Для того чтобы оператор L_b имел ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, необходимо и достаточно выполнение условий 1), 2) следствия теоремы 4.1.

В дальнейшем эта гипотеза будет подтверждена в некоторых частных случаях. Применим теорему 4.1 к одной более конкретной ситуации.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathcal{Q}$ – односвязная область в $\mathbb{C}$ такая, что ее выпуклая оболочка $\text{conv } \mathcal{Q}$ является многоугольной фигурой, т.е. пересечением n полуплоскостей

$$\mathcal{Q}_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z e^{-i\theta_k} < h_k\}, \quad h_k < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть, далее, $\theta_k \notin q(\mathcal{Q})$, $k = 1, 2, \dots, n$, и пусть $b(z) \in [1, 0] \setminus S$.

Тогда оператор $L_b: \mathcal{A}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{Q})$ не имеет ЛНПО.

ЗАМЕЧАНИЕ. Символом $[1, 0] \setminus S$ обозначается множество всех целых трансцендентных функций из класса $[1, 0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Тогда по теореме 4.1 оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$. Из теоремы 2.6 следует, что $\Lambda^*(b) \subseteq \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$. С другой стороны, так как L_b сюръективен в $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$, то по теореме 2.1 $\Lambda^*(b) \subseteq q(\mathcal{Q})$, и мы пришли к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{Q}$ – односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}$ такая, что

$$\text{conv } \mathcal{Q} = \bigcap_{k=1}^n \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z e^{-i\theta_k} < h_{\theta_k}\},$$

и пусть на каждой стороне $\overline{\text{conv } \mathcal{Q}}$ имеется хотя бы одна точка из $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{Q}}$. Тогда, если $b(z) \in [1, 0] \setminus S$, то оператор L_b не имеет ЛНПО в $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любая вершина $\overline{\text{conv } \mathcal{Q}} = \overline{\text{conv } \mathcal{Q}}$ принадлежит $\overline{\mathcal{Q}}$. Таким образом, концы каждой стороны границы $\overline{\text{conv } \mathcal{Q}}$ принадлежат $\overline{\mathcal{Q}}$ и в то же время на этой стороне есть хотя бы одна точка открытого множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{Q}}$. Отсюда следует, что если θ_k – угол между положительной полуосью и внешней нормалью к $\overline{\text{conv } \mathcal{Q}}$, проведенной к соответствующей стороне, то $\theta_k \notin q(\mathcal{Q})$.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 4.3. а) Пусть $b(z) \in [1, 0] \setminus S$, и пусть $\mathcal{Q}$ – континуум в $\mathbb{C}$ со связным дополнением такой, что

$$\text{conv } \mathcal{Q} = \bigcap_{k=1}^n \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } ze^{-i\theta_k} \leq h_{\theta_k}\}, \quad h_{\theta_k} < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

б) Пусть, далее, $\theta_k \notin q(\mathcal{Q})$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда оператор свертки L_b не имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $b(z)$ и $\mathcal{Q}$ – те же, что и в пункте а) теоремы 4.3. Пусть, далее, на каждой стороне замкнутого многоугольника $\text{conv } \mathcal{Q}$ имеется хотя бы одна точка из $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$. Тогда оператор L_b не имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

Простейшим примером области или континуума, удовлетворяющих условиям теорем 4.2, 4.3, является открытая или замкнутая n -угольная звезда ($n \geq 4$).

§ 5. Необходимые условия наличия ЛНПО

Мы покажем здесь, что полученные в § 3 общие результаты позволяют получить необходимые условия (геометрического характера) существования ЛНПО у оператора свертки L_b .

Пусть $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{C}$ и $h_{\mathcal{Q}}(\varphi)$ – опорная функция множества $\mathcal{Q}$:

$$h_{\mathcal{Q}} := \sup_{z \in \mathcal{Q}} \text{Re } ze^{-i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Как известно, $h_{\mathcal{Q}}(\varphi) = h_{\text{conv } \mathcal{Q}}(\varphi)$. Положим $\alpha(\mathcal{Q}) = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid h_{\mathcal{Q}}(\varphi) = +\infty\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathcal{Q}$ – связное множество, содержащее не менее двух точек и такое, что $\text{conv } \mathcal{Q} \neq \mathbb{C}$. Пусть, далее, $b(z)$ – ц.ф.э.т. с сопряженной диаграммой B . Тогда, если оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, то

$$\Lambda^*(b) \cap \alpha(\mathcal{Q}) = \emptyset. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – ЛНПО для L_b и пусть условие (6) не выполняется. Зафиксируем $\varphi_0 \in \Lambda^*(b) \cap \alpha(\mathcal{Q})$ и выберем достаточно редкую подпоследовательность $(\mu_n) = (\lambda_{k_n})$ нулей (λ_s) функции $b(z)$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n|} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg \mu_n = -\varphi_0.$$

Положим $b_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\mu_k)$, $b_2(z) = b(z)/b_1(z)$. Тогда $b_1(z) \in [1, 0]$, $b_2(z)$ – ц.ф.э.т. с сопряженной диаграммой B . Оператор $S_1 := L_{b_2} \circ S$ является ЛНПО для оператора $L_{b_1}: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Так как $\text{conv } \mathcal{Q} \neq \mathbb{C}$, то $\exists \varphi_1 \in \mathbb{R}: h_{\mathcal{Q}} < +\infty$, и $\mathcal{Q}$ содержится в некоторой полуплоскости $\overline{\mathcal{P}}^+ = \{z \mid \sup \text{Re } ze^{-i\varphi_1} \leq d < +\infty\}$, ограниченной прямой P . Небольшим параллельным сдвигом прямой P можно всегда добиться того, что множество $\mathcal{Q}$ будет лежать в открытой полуплоскости $\mathcal{P}^+$, ограниченной P . Будем считать, что такой сдвиг уже произведен. Тогда $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^+$ и $\mathcal{A}(\mathcal{P}^+) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, откуда $(L_{b_1}^{-1}(0), \mathcal{A}(\mathcal{P}^+)) \subseteq (L_{b_1}^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$.

Пусть теперь $y \in (L_{b_1}^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ и Y — любая функция из ростка y . Тогда найдется область $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{Q} \subset \mathcal{G}$, $Y \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$, $(L_b Y)(z) = 0 \ \forall z \in \mathcal{G}$. По теореме 2.2 2) полная область существования $W(Y)$ функции Y представляется в таком виде:

$$W(Y) = \{z \mid \operatorname{Re} z e^{-i\varphi_0} < d_1\}, \quad \text{где } -\infty < d_1 \leq +\infty.$$

Так как $h_{\mathcal{Q}}(\varphi_0) = +\infty$, а $h_{\mathcal{Q}}(\varphi_1) < +\infty$, то $\varphi_0 \neq \varphi_1$. Далее, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{G} \subseteq W(Y)$, и потому $h_{W(Y)}(\varphi_0) = +\infty$. Следовательно, $Y \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}^+)$. Таким образом, $(L_{b_1}^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q})) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}^+)$, и, если положить $H_1 = \mathcal{A}(\mathcal{P}^+)$, $H_2 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, то соотношение (4) имеет место. Кроме того, по следствию теоремы 2.1 L_{b_1} — эпиморфизм H_1 . Согласно теореме 3.1, оператор $L_{b_1}: \mathcal{A}(\mathcal{P}^+) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{P}^+)$ имеет ЛНПО. Но тогда по теореме 2.6 $\Lambda^* \subseteq \{\varphi_1\}$, т.е. $\varphi_0 = \varphi_1$, что невозможно.

Назовем промежутком нормальных направлений граничной точки α выпуклого множества T совокупность $[\gamma_\alpha, \delta_\alpha]$ направлений всех внешних нормалей к T в точке α , т.е. углов между положительной полуосью и перпендикулярами к опорным прямым к T в точке α , проведенными из α в той ограниченной опорной прямой открытой полуплоскости, которая не содержит точек из Q .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $b(z)$ — ц.ф.э.т. с сопряженной диаграммой B и $\mathcal{Q}$ — связанное множество такое, что его замыкание $\overline{\mathcal{Q}}$ выпукло. Пусть, далее, α — какая-либо угловая точка множества $\overline{\mathcal{Q}}$ и $[\gamma_\alpha, \delta_\alpha]$ — соответствующий промежуток нормальных направлений к $\overline{\mathcal{Q}}$ в точке α . Предположим, что выполнено хотя бы одно из таких двух условий:

- 1) $\alpha \notin \mathcal{Q}$;
- 2) множество $\mathcal{Q}$ ограничено.

Тогда, если оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, то

$$\Lambda^*(b) \cap (\gamma_\alpha, \delta_\alpha) = \emptyset. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие (7) не выполняется, и пусть $\varphi_0 \in \Lambda^*(b) \cap (\gamma_\alpha, \delta_\alpha)$. Тогда φ_0 — направление “внешнего” перпендикуляра к некоторой опорной прямой T к $\overline{\mathcal{Q}}$ с точкой опоры α , причем на прямой T точек из $\mathcal{Q}$, кроме, быть может, точки α , нет. Можно всегда провести в ограниченной прямой T и содержащей $\mathcal{Q}$ полуплоскости T^+ два луча из точки α

$$l_j = \{z \mid \arg(z - \alpha) = \varphi_j\}, \quad j = 1, 2,$$

так, чтобы на этих лучах не было точек из $\mathcal{Q}$ (кроме, снова, быть может, точки α) и множество $\mathcal{Q} \setminus \{\alpha\}$ лежало в открытом угле D , образованном лучами l_1 и l_2 .

Как при доказательстве предыдущей теоремы, выбираем, подпоследовательность (μ_n) нулей функции $b(z)$ так, чтобы $\lim_n \arg \mu_n = -\varphi_0$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|\mu_n| < \infty$, и образуем функции $b_1(z)$, $b_2(z)$. Как и выше, если S — ЛНПО для $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, то $S_1 := L_{b_2} \circ S$ — ЛНПО для $L_{b_1}: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

Предположим сначала, что $\alpha \notin \mathcal{Q}$. Тогда $\mathcal{Q} \subseteq D$. Положим $H_1 = \mathcal{A}(D)$, $H_2 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Тогда L_{b_1} – эпиморфизм H_1 . Пусть теперь $y \in (L^{-1}(0), H_2)$ и Y – любая функция, принадлежащая ростку y . Как при доказательстве предыдущей теоремы, находим, что

$$W(Y) = \{z \mid \operatorname{Re} z e^{-i\varphi_0} < \gamma\}, \quad \text{где } \gamma \leq +\infty.$$

Таким образом, $Y(z)$ аналитична в некоторой открытой полуплоскости, ограниченной прямой, параллельной T . Так как в угле D имеются точки из $\mathcal{Q}$, лежащие как угодно близко к $\alpha \in \overline{\mathcal{Q}}$ и так как $\mathcal{Q} \subseteq W(Y)$, то $D \subseteq T^+ \subseteq W(Y)$. Как и ранее, получаем отсюда, что $(L_{b_1}^{-1}(0), H_2) \subseteq H_1$. По теореме 3.1 оператор $L_{b_1}: \mathcal{A}(D) \rightarrow \mathcal{A}(D)$ имеет ЛНПО. При этом $\Lambda^*(b) = \varphi_0$ и φ_0 не совпадает с ψ_j , $j = 1, 2$, где ψ_j – направление “внешнего” (относительно D) перпендикуляра, проведенного из любой точки луча l_j . Но это противоречит теореме 2.6, и наша теорема в этом случае доказана.

Пусть теперь $\alpha \in \mathcal{Q}$, а множество $\mathcal{Q}$ ограничено. Выберем точки z_j на построенных выше лучах l_j ($j = 1, 2$) так, чтобы направление внешней нормали к треугольнику Δ с вершинами в α , z_1 и z_2 , проведенной из любой точки его стороны $z_1 z_2$, не совпало с φ_0 , и чтобы все множество $\mathcal{Q}$ находилось в замкнутом треугольнике $\overline{\Delta}$. Положим $H_1 = \mathcal{H}(\overline{\Delta})$, $H_2 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Как в предыдущем случае (когда $\alpha \notin \mathcal{Q}$), показываем с помощью теоремы 2.2 2), что $(L_{b_1}^{-1}(0), H_2) \subseteq H_1$. Учитывая, что L_{b_1} – эпиморфизм $\mathcal{H}(\overline{\Delta})$, получаем по теореме 3.1, что оператор $L_{b_1}: \mathcal{H}(\overline{\Delta}) \rightarrow \mathcal{H}(\overline{\Delta})$ имеет ЛНПО, что противоречит на этот раз теореме 2.7.

Заметим, что в теоремах 5.1, 5.2 оба пространства $\mathcal{H}(\mathcal{Q} + B)$ и $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ были снабжены “однотипной” топологией – либо оба топологией Pr , либо In . В следующей теореме топология обоих этих пространств – проективная.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\mathcal{Q}$ – неограниченное связное множество в $\mathbb{C}$, и пусть α – какая-либо угловая точка множества $\operatorname{conv} \mathcal{Q}$, принадлежащая $\mathcal{Q}$. Пусть $[\gamma_\alpha, \delta_\alpha]$ – промежуток нормальных направлений к $\operatorname{conv} \mathcal{Q}$ в точке α . Предположим, что $b(z)$ – ц.ф.э.т. с сопряженной диаграммой B и что оператор свертки $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО. Тогда выполняется условие (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие (7) не выполняется, и зафиксируем какое-либо $\varphi_0 \in \Lambda^*(b) \cap (\gamma_\alpha, \delta_\alpha)$. Как и выше, выбираем подпоследовательность $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ нулей $b(z)$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n|} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg \mu_n = -\varphi_0,$$

и положим $b_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\mu_k)$, $b_2(z) = b(z)/b_1(z)$, $S_1 := L_{b_2} \circ S$. Тогда $b_1 \in [1, 0]$ и S_1 – ЛНПО для $L_{b_1}: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Обозначим символом D замкнутый неограниченный угол с вершиной α и такой, что $\operatorname{conv} \mathcal{Q} \subseteq D$, а обе стороны угла D совпадают с крайними опорными прямыми к $\operatorname{conv} \mathcal{Q}$ в точке α . Положим $H_1 = \mathcal{H}(D)$, $H_2 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Как прежде, теорема 2.2 2) обеспечивает

равенство $(L_{b_1}^{-1}(0), H_1) = (L_{b_1}^{-1}(0), H_2)$. По теореме 3.2 $(L_{b_1}^{-1}(0), H_1)$ топологически дополнимо в пространстве $H_1 = \varprojlim_m \mathcal{H}(\mathcal{Q}_m)$, где для любого $m \geq 1$ $\mathcal{Q}_m = \{z \mid |z - \alpha| \leq m\} \cap D$. Так как $\mathcal{A}(\mathbb{C}) \subseteq H_1$ и $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ плотно в $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n) \forall n \geq 1$, то H_1 – приведенный проективный предел LN^* -пространств $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n)$. Положим

$$\mathcal{K} = (L_{b_1}^{-1}, \mathcal{H}(\mathcal{Q})), \quad \mathcal{K}_m = (L_{b_1}^{-1}, \mathcal{H}(\mathcal{Q}_m)), \quad m = 1, 2, \dots$$

Из теоремы 2.2 2) следует, что $\forall m \geq 1$: $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$. Учитывая теорему 3.3, получим, что $\exists m_0 \geq 1$: $\mathcal{K}_{m_0}$ топологически дополнимо в $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0})$. При этом $\forall m \geq 1$ L_{b_1} – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_m)$, и поэтому L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0})$. Мы теперь можем применить теорему 5.2, так как условие 2) этой теоремы выполнено. Согласно теореме 5.2 имеет место соотношение (7), что противоречит первоначальному допущению и выбору φ_0 .

Обозначим через $g(\theta)$ опорную функцию множества $\text{conv } \mathcal{Q}$: $g(\theta) = h_{\text{conv } \mathcal{Q}}(\theta)$. Пусть еще $\delta(g)$ – объединение всех интервалов тригонометричности (см., например, [37]) функции $g(\theta)$. Каждый такой интервал связан с соответствующей угловой точкой $\text{conv } \mathcal{Q}$ (необходимую информацию на этот счет можно найти, например, в [10] и [37]). Принимая это во внимание, выводим непосредственно из теорем 5.1–5.3 такой результат:

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$, содержащее не менее двух точек и такое, что $\text{conv } \mathcal{Q} \neq \mathbb{C}$. Пусть, далее, b – ц.ф.э.т. с сопряженной диаграммой B и пусть оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО. Тогда $\Lambda^*(b) \cap (\delta(g) \cup \alpha(g)) = \emptyset$, где, как и выше, $\alpha(g) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid g(\theta) = +\infty\}$.

Применим теоремы 5.1–5.3 к некоторым конкретным ситуациям, в которых сначала описывается множество $\mathcal{Q}$, а затем, после знака $|$, указываются необходимые условия существования ЛНПО у оператора свертки $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q} + B) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, где, как и выше, $b(z)$ – ц.ф.э.т. с сопряженной диаграммой B .

ПРИМЕР 1. $\mathcal{Q}$ – произвольное связное подмножество $\mathbb{R}$, содержащее не менее двух точек $| \Lambda^* \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$.

ПРИМЕР 2. $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{P}^+$, где $\mathcal{Q}_1$ – произвольное (не обязательно связное) подмножество $\mathbb{R}$, а $\mathcal{P}^+$ – верхняя открытая полуплоскость $\text{Im } z > 0 \mid \Lambda^* \subseteq \{3\pi/2\}$.

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathcal{D}_n$ – пересечение n полуплоскостей $\mathcal{P}_k$: $\mathcal{D} = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{P}_k$, $n \geq 2$, $\mathcal{P}_k = \{z \mid \text{Re } ze^{-i\varphi_k} < d_k\}$, $-\infty < d_k < +\infty$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть, далее, $\mathcal{F}$ – произвольное подмножество границы $\mathcal{D}_n$, и пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{D}_n \cup \mathcal{F} \mid \Lambda^*(b) \subseteq \{\varphi_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$.

В первом примере рассматриваются последовательно все возможные типы связных множеств $\mathcal{Q}$: $[a, b]$, $[a, d)$, $(c, b]$, (c, d) , где $-\infty < a, b < +\infty$, $-\infty \leq c, d \leq +\infty$, и прямо используются теоремы 5.1–5.3.

Во втором примере применяется непосредственно теорема 5.1.

Наконец, в третьем примере, если множество Q неограничено, то вначале используется теорема 5.1. Далее (а также с самого начала, если множество Q ограничено) используем теорему 3.3, переходя к $\mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$, а затем применяем теоремы 5.2, 5.3. Стоит упомянуть, что третий пример охватывает, в частности, такие

множества, как полоса, полуполоса, угол, ограниченный и неограниченный выпуклый многоугольник (во всех случаях к соответствующим множествам (внутренности) можно добавлять часть границы).

§ 6. Достаточные условия существования ЛНПО и его эффективное построение

В предыдущем параграфе с помощью теорем 5.1–5.3 были найдены необходимые условия существования ЛНПО у оператора свертки, действующего в пространствах ростков, определенных на связном множестве $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{C}$. Сейчас мы покажем, что эти теоремы позволяют в ряде случаев получить и достаточные условия.

Начнем изложение с некоторых ситуаций, в которых не только устанавливается существование ЛНПО у оператора свертки, но и указывается эффективный способ его построения.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$, $\alpha \in \partial\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}$ и $(\mathcal{H}(\mathcal{Q}), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ – Г.-Р.-пара. Пусть, далее, $b(z) \in [1, 0]$ и $\Lambda^*(b) = \{\varphi\}$. Предположим, наконец, что при некотором $\delta \in (0, +\infty)$ круг $K(\delta, z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \delta\}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $K(\delta, z_0) \subseteq \mathcal{Q}$;
- 2) $\overline{K(\delta, z_0)} \cap \partial\mathcal{Q} = \alpha$;
- 3) касательная l к $K(\delta, z_0)$ в точке α является опорной прямой к $\overline{\mathcal{Q}}$, причем внешняя нормаль к $\mathcal{Q}$ в точке α составляет угол φ_0 с положительной полuosью.

Тогда пространство $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ дополнимо в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Если еще L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, то $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, который может быть эффективно определен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H_1 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, $H_2 = \mathcal{A}(K(\delta, z_0))$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$, т.е. $K(\delta, z_0) = K_\delta$. По теореме 2.9 оператор $L_b: H_2 \rightarrow H_2$ имеет ЛНПО, определяемый по формуле (3). Пусть теперь $y(z)$ – любая функция из $(L_b^{-1}(0), \mathcal{A}(K_\delta))$. Как и выше, $W(y) = \{z \mid \operatorname{Re} z e^{-i\varphi_0} < d\}$ – полуплоскость, содержащая K_δ и ограниченная прямой, параллельной l . Но тогда $W(y)$ содержит полуплоскость, ограниченную l , и подалю $\mathcal{Q} \subseteq W(y)$. Таким образом, условие (4) выполнено, и для завершения доказательства остается применить теорему 3.2, а в случае когда L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ – теорему 3.1. В последнем случае ЛНПО T к $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ для любой функции y из $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ определяется сначала в круге K_δ по формуле (3) (в которой $R = \delta$), и эффективно заданный начальный элемент допускает аналитическое продолжение (хотя бы стандартным разложением в степенные ряды) в некоторую область $\mathcal{G}$, содержащую $\mathcal{Q}$.

Совершенно аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $b(z)$ и $\mathcal{Q}$ те же, что и в теореме 6.1, $\alpha \in \mathcal{Q} \cap \partial\mathcal{Q}$, и пусть при некотором $\delta \in (0, +\infty)$ существует замкнутый круг $\overline{K}(\delta, z_0)$, содержащийся в $\mathcal{Q}$ и обладающий свойствами 2), 3) из теоремы 6.1. Тогда справедливы оба утверждения этой теоремы.

Заметим, что используя хорошо известные факты теории целых функций (см., например, [37, гл. I]), легко показать, что если $b(z) \in [1, 0]$ и $\Lambda^*(b) = \{\varphi_0\}$, то

$b(z)$ имеет нулевой род, т.е. $b(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_k)$, где $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-1} < \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg \lambda_k = -\varphi_0$.

Далее, имеет место

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$, $b(z) \in [1, 0]$, $\Lambda^*(b) \subseteq \{\varphi_j\}_{j=1}^n$, $n \geq 1$. Пусть, далее, в $\mathcal{Q}$ содержится круг $K(\delta, z_0)$ (или $\overline{K(\delta, z_0)}$) такой, что $\forall j \leq n$ найдется точка α_j из $\partial\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}$ (соответственно, из $\partial\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}$) такая, что $\overline{K(\delta, z_0)} \cap \partial\mathcal{Q} = \{\alpha_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$, и касательная к $K(\delta, z_0)$ в точке α_j является опорной прямой к $\mathcal{Q}$, причем угол между нормалью к этой прямой и положительной полуосью равен φ_j . Тогда, если $(\mathcal{H}(\mathcal{Q}), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ – Г.-Р.-пара, то L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, который может быть определен эффективно.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$, $(\mathcal{H}(\mathcal{Q}), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ – Г.-Р.-пара. Пусть, далее, $b(z) \in [1, 0]$, $b(z)$ имеет нулевой род и $\Lambda^*(b) = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$, $n \geq 1$. Пусть, наконец, для любого $j \leq n$ найдется точка α_j из $\partial\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}$ (или из $\partial\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}$) и содержащийся в $\mathcal{Q}$ круг $K(\delta_j, z_j)$ (соответственно, $\overline{K(\delta_j, z_j)}$) такой, что для него выполнены условия 2), 3) теоремы 6.1 (с заменой z_0 на z_j , δ на δ_j , α на α_j). Тогда оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, который может быть эффективно определен.

Теорема 6.3 доказывается точно так же, как теоремы 6.1, 6.2 (полагаем $H_1 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, $H_2 = \mathcal{A}(K(\delta, z_0))$ или $H_2 = \mathcal{A}(\overline{K(\delta, z_0)})$, показываем с помощью теоремы 2.2 2), что $(L_b^{-1}(0), H_1) = (L_b^{-1}(0), H_2)$, и в заключение применяем теорему 3.2 или 3.1, а также 2.9). При доказательстве теоремы 6.4 мы сначала показываем, что в предположениях теоремы функцию $b(z)$ можно представить в виде $b(z) = \prod_{j=1}^n b_j(z)$, где $b_j(z) \in [1, 0]$ и $\Lambda^*(b_j) = \{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Теорема 6.1 или 6.2 применительно к кругу $K(\delta_j, z_j)$ (или $\overline{K(\delta_j, z_j)}$) позволяет утверждать, что каждый оператор $L_{b_j}: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО T_j ; но тогда и $L_b = L_{b_1} \circ L_{b_2} \circ \dots \circ L_{b_n}$ имеет в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ ЛНПО $T_n \circ T_{n-1} \circ \dots \circ T_2 \circ T_1$.

Во всех теоремах 6.1–6.4 фигурировало предположение, что $(\mathcal{H}(\mathcal{Q}), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ – Г.-Р.-пара. Это предположение не является очень ограничительным, так как оно справедливо в весьма общей ситуации. Однако, проверка принадлежности пространства $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ тем классам пространств, для которых имеет место теорема о замкнутом графике, в некоторых случаях (особенно, в наиболее общей ситуации, рассмотренной в [33]) является весьма кропотливой и достаточно сложной.

Приводимые ниже результаты аналогичны теоремам 6.1–6.4, но получены при несколько иных предположениях, в числе которых справедливость теоремы о замкнутом графике не фигурирует.

Предварительно установим один вспомогательный и, повидимому, известный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $\forall k \geq 1$ λ_k – нуль кратности $p_k \geq 1$ функции $b(z)$ из класса $[1, 0]$. Предположим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg \lambda_k = 0$. Пусть, далее, последовательность $v = (v_n)_{n=1}^{\infty}$, где

$$v_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=0}^{p_k-1} a_{j,k}^{(n)} z^j e^{\lambda_k z}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится равномерно в некотором круге K с центром в начале координат. Тогда последовательность v сходится равномерно внутри полуплоскости $\Pi_- := \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi_{j,k}(t)$, $j = 0, 1, \dots, p_k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, — система функций, аналитических в области $|t| > 0$, исчезающих в бесконечно удаленной точке, биортогональная с v в том смысле, что для любой замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ такой, что $0 \in \operatorname{int} \Gamma$, интеграл $\int_{\Gamma} \psi_{j,k}(t) t^{\nu} \exp \lambda_{\mu} t dt$ равен $2\pi i$, если $j = \nu$, $k = \mu$, и равен нулю во всех остальных случаях. Такая система всегда существует (см. [38, гл. I, § 1, п. 3]).

Пусть $g(z)$ — функция из $A(\mathcal{K})$, являющаяся предельной для последовательности v , и пусть R — радиус круга $\mathcal{K}$, а $\Gamma_{\rho} = \{t : |t| = \rho\}$. Тогда при любых фиксированных ρ из $(0, R)$, $j \leq p_k - 1$, $k \geq 1$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho}} g(t) \psi_{j,k}(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} v_n(t) \psi_{j,k}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{j,k}^{(n)} = \delta_{j,k}.$$

Отсюда следует, что $\forall N \geq 1$ последовательность

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{p_k-1} a_{j,k}^{(n)} z^j e^{\lambda_k z}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится в $A(\mathbb{C})$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и подберем $N \geq 1$ так, чтобы $\forall k \geq N$ $|\arg \lambda_k| < \varepsilon$. Последовательность

$$v(N) := (v_{n,N}(z))_{n=1}^{\infty}, \quad v_{n,N}(z) = \sum_{k=N+1}^{m_n} \sum_{j=0}^{p_k-1} a_{j,k}^{(n)} z^j e^{\lambda_k z}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится в $A(\mathcal{K})$. По теореме 4.1.1 из [38] и замечанию 1 к ней последовательность $v(N)$ сходится равномерно внутри угла $|\pi - \arg z| < \pi/2 - \varepsilon$. Но тогда последовательность v тоже сходится равномерно внутри этого угла. Так как число $\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым, то последовательность v сходится равномерно внутри Π_- .

Учитывая, что линейная замена $w = \alpha z + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, не изменяет вида последовательности v , выводим без труда из предложения 6.1.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, λ_k — нули кратности $p_k \geq 1$ функции $b(z)$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть, далее, $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg \lambda_k = -\varphi_0$, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$. Пусть, наконец, последовательность v сходится равномерно в круге $K(z_1)$ с центром в точке $z_1 \in \mathbb{C}$. Тогда эта последовательность сходится равномерно внутри полуплоскости $|\pi + \varphi_0 - \arg(z - z_1)| < \pi/2$.

Установим теперь аналог теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, $\Lambda^*(b) = \{\varphi\}$, $\mathcal{Q}$ — связное множество в $\mathbb{C}$, $\alpha \in \partial \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}$. Пусть, далее, существует круг $K(\delta, z_0)$ с указанными в теореме 6.1 свойствами 1)–3). Пусть, наконец, $l \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. Тогда справедливы все заключения теоремы 6.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символом Π_l открытую полуплоскость, ограниченную прямой l и содержащую $K(\delta, z_0)$ (и $\mathcal{Q}$). Тогда $A(\Pi_l) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \hookrightarrow A(K(\delta, z_0))$. Как показано в ходе доказательства теоремы 6.1, если $H_1 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ и $H_2 = A(K(\delta, z_0))$, то $(L_b^{-1}(0), H_1) = (L_b^{-1}(0), H_2) \subseteq A(\Pi_l)$. В пространстве $H_0 := (L_b^{-1}(0), H_2)$ можно ввести три индуцированные топологии: τ_1 – из H_1 , τ_2 – из H_2 , τ_0 – из $A(\Pi_l)$. Тогда $\tau_0 \geq \tau_1 \geq \tau_2$. Покажем, что $\tau_2 \geq \tau_0$. Пусть последовательность функций $\{y_n(z)\}_{n=1}^\infty$ из $(L_b^{-1}(0), H_2)$ сходится в топологии пространства Фреше H_2 , т.е. равномерно внутри круга $K(\delta, z_0)$. Согласно давним результатам Валирона [39] и Поля [31] множество элементарных решений уравнения $L_b y = 0$ плотно в $(L_b^{-1}(0), H_2) = (L_b^{-1}(0), A(\Pi_l))$. Поэтому найдется последовательность $V = (v_n(z))_{n=1}^\infty$ такая, что $v_n(z) - y_n(z) \rightarrow 0$ в $A(\Pi_l)$, причем $\forall n \geq 1$

$$v_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=0}^{p_k-1} a_{j,k}^{(n)} z^j e^{\lambda_k z}.$$

Очевидно, что V сходится равномерно внутри $K(\delta, z_0)$. Пусть $[z_0, \alpha]$ – отрезок, соединяющий точки z_0 и α . Беря в качестве z_1 точки этого отрезка, как угодно близкие к α , и применяя следствие предложения 6.1, получаем, что последовательность V сходится в $A(\Pi_l)$. Но тогда и последовательность $\{y_n\}$ сходится в $A(\Pi_l)$. Таким образом, $\tau_2 \geq \tau_0$, т.е. $\tau_2 = \tau_0$ и подавно $\tau_1 = \tau_0$. Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 3.4.

Следующий результат усиливает теорему 6.2.

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть функция $b(z)$ – та же, что в теореме 6.5, $\mathcal{Q}$ – связное множество в $\mathbb{C}$ и $\alpha \in \partial\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}$. Допустим, что при некоторых $\delta \in (0, +\infty)$ существует замкнутый круг $K(\delta, z_0)$ с указанными в теореме 6.2 свойствами. Тогда справедливы оба утверждения теоремы 6.1.

Доказательство этой теоремы проводится по тому же плану, как и доказательство теоремы 6.5 с той разницей, что здесь вместо открытой полуплоскости Π_l берется ее замыкание $\overline{\Pi}_l$, а пространства Фреше $A(K(\delta, z_0))$ и $A(\Pi_l)$ заменяются LN^* -пространствами $\mathcal{H}(K(\delta, z_0))$ и $\mathcal{H}(\overline{\Pi}_l)$ так, что $H_1 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, $H_2 = \mathcal{H}(K(\delta, z_0))$, $(L^{-1}(0), H_1) = (L^{-1}(0), H_2) \subseteq A(\overline{\Pi}_l)$, и топологии в $(L^{-1}(0), H_2)$, индуцированные из H_1 , H_2 и $\mathcal{H}(\overline{\Pi}_l)$, совпадают.

Читатель без труда сформулирует и докажет утверждения, являющиеся аналогами теорем 6.3, 6.4.

Применим полученные результаты к некоторым конкретным ситуациям, рассмотренным в конце предыдущего параграфа.

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть $b(z)$ – трансцендентная функция из класса $[1, 0]$ и $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup P^+$, где $\mathcal{Q}_1$ – произвольное подмножество $\mathbb{R}$, а P^+ – открытая верхняя полуплоскость. Для того чтобы оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имел ЛНПО, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

- 1) множество $\mathcal{Q}_1$ связно;
- 2) $\Lambda^*(b) \subseteq \{3\pi/2\}$.

Если выполнено только второе условие, то $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ топологически дополнимо в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Как показано в конце § 4 (пример 2), тогда $\Lambda^*(b) \subseteq \{3\pi/2\}$. Допустим, что $\mathcal{Q}_1$ несвязно. По теореме 2.5 $\Lambda^*(b) \cap \{3\pi/2\} = \emptyset$ и $\Lambda^*(b) = \emptyset$, что невозможно. Обратно, если выполнено условие 2), то, применяя теорему 6.5 в случае, когда $\mathcal{Q}_1 = \emptyset$, и теорему 6.6, если $\mathcal{Q}_1 \neq \emptyset$, получим, что $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ дополнимо в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Если же выполнены условия 1) и 2), то по теореме 2.5 L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, и L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно теоремам 6.1, 6.2 и 6.5, 6.6 выполнение условий 1), 2) обеспечивает не только существование ЛНПО у оператора $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, но и возможность эффективного его определения для любой функции $y(z)$ из $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ путем аналитического продолжения начального кругового элемента – функции, явно заданной и аналитической в некотором (открытом или замкнутом) круге, содержащемся в $\mathcal{Q}$. Поэтому в случае $\mathcal{Q}_1 = \emptyset$ теорема 6.7 дополняет теорему 2.6 Момма при $n = 1$, а в случае $\mathcal{Q}_1 \neq \emptyset$ (например, $\mathcal{Q}_1 = \mathbb{R}$) теорема 6.7 является новой.

Рассмотрим теперь случай полосы.

ТЕОРЕМА 6.8. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, $\mathcal{Q} = E(\alpha_1, \alpha_2) \cup E_1 \cup E_2$, где

$$E(\alpha_1, \alpha_2) = \{z \mid -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, \alpha_1 < \operatorname{Im} z < \alpha_2\},$$

E_j – произвольное подмножество прямой $l_j = \{z \mid \operatorname{Im} z = \alpha_j\}$, $j = 1, 2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Если каждое множество E_j несвязно ($j = 1, 2$) и $b(z)$ – не многочлен, то оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ не имеет ЛНПО.
- 2) Если одно из множеств E_j , скажем E_2 , несвязно, а другое – связно, то L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^*(b) \subseteq \{3\pi/2\}$; если последнее выполнено, то ЛНПО для L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ определяется эффективно.
- 3) Если множества E_j связны и непусты при $j = 1, 2$, то оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^*(b) \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$; при этом если последнее включение имеет место, и если

$$\{\operatorname{Re} z \mid z \in E_1\} \cap \{\operatorname{Re} z \mid z \in E_2\} \neq \emptyset,$$

то ЛНПО к L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ определяется эффективно.

- 4) Если одно из множеств, скажем E_1 , связно, а другое – E_2 – пусто (или одноточечно) и если $b(z)$ имеет нулевой род, то ЛНПО к L_b существует в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^*(b) \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$; при выполнении последнего условия ЛНПО определяется эффективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если оба множества E_j несвязны, то по теореме 2.4 (утверждение 4)) $\Lambda^*(b) \cap \{\pi/2, 3\pi/2\} = \emptyset$, и оператор L_b не может иметь ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, так как нарушается необходимое условие из примера 3 § 5 (с $n = 2$, $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = 3\pi/2$).

2) Если множество E_2 несвязно и L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, то по теореме 2.4 (утверждения 5) и 6)) $\Lambda^*(b) \cap \{\pi/2\} = \emptyset$, а по теореме 5.1 $\Lambda^*(b) \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$.

Следовательно, $\Lambda^*(b) \subseteq \{3\pi/2\}$. Пусть теперь $\Lambda^*(b) \subseteq \{3\pi/2\}$, множество E_2 несвязно, а E_1 — связно. По теореме 2.4 (те же утверждения 5) и 6)) L_b — эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Если $E_1 = \emptyset$, то обозначим символом K_0 любой содержащийся в $\mathcal{Q}$ открытый круг диаметра меньше $\alpha_2 - \alpha_1$, касающийся прямой l_1 . Если же $E_1 \neq \emptyset$, то возьмем замкнутый круг $\overline{K}$, также содержащийся в $\mathcal{Q}$, диаметра меньше $\alpha_2 - \alpha_1$, касающийся прямой l_1 в какой-нибудь точке $\beta \in E_1$. Применяя в первом случае теорему 6.5, а во втором — теорему 6.6, получаем, что $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет эффективно определяемый ЛНПО.

3) Из теоремы 5.1 следует, что если $\mathcal{Q} \supset E(\alpha_1, \alpha_2)$, то для существования ЛНПО у оператора $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ необходимо, чтобы $\Lambda^*(b) \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Пусть теперь последнее включение имеет место, и пусть $\gamma_j \in E_j, j = 1, 2$. Впишем в полосу $E(\alpha_1, \alpha_2)$ выпуклую ограниченную область $\mathcal{G}$ так, чтобы $\overline{\mathcal{G}} \cap l_j = \gamma_j, j = 1, 2$, и чтобы граница области $\mathcal{G}$ принадлежала классу $C^{(2)}$. Из общих результатов работы [28] следует, в частности, что если K — выпуклый компакт с границей класса $C^{(2)}$, а $b \in [1, 0]$, то оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО. Нетрудно проверить, что в данной ситуации $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\overline{\mathcal{G}})) = (L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$, причем топологии, индуцированные в этом пространстве, соответственно, из пространств $\mathcal{H}(\overline{\mathcal{G}})$ и $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, совпадают. Остается применить следствие 1 теоремы 3.4, положив $H_1 = H_3 = \mathcal{H}(\mathcal{Q}), H_2 = H_4 = \mathcal{H}(\overline{\mathcal{G}})$.

Если еще $\exists \gamma \in \mathbb{R}: \gamma + i\alpha_j \in E_j, \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$, то вместо замкнутой выпуклой области $\mathcal{G}$ в предыдущих рассуждениях берем замкнутый круг K_1 , содержащийся в $\overline{E(\alpha_1, \alpha_2)}$ и пересекающийся с l_j в единственной точке $\gamma + i\alpha_j, j = 1, 2$. Учитывая, что оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(K_1)$, и вновь используя следствие 1 теоремы 3.4, получаем нужный результат.

4) Как уже отмечалось выше, если $\mathcal{Q} \supset E(\alpha_1, \alpha_2)$, L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, то по теореме 5.1 $\Lambda^*(b) \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Пусть теперь последнее включение имеет место, $E_2 = \emptyset$, и функция $b(z)$ имеет нулевой род. Если $\beta + i\alpha_1$ — какая-либо точка из E_1 , то берем замкнутый круг $\overline{K(\delta_1, z_1)}$, лежащий в $\overline{E(\alpha_1, \alpha_2)}$ и касающийся l_1 в точке $\beta + i\alpha_1$ (но не касающийся l_2), а также открытый круг $K(\delta_2, z_2)$, содержащийся в $E(\alpha_1, \alpha_2)$ и касающийся l_2 в какой-либо точке $\beta_2 + i\alpha_2$. Далее используем теорему 6.4 (или ее аналог, сформулировать который предлагалось читателю). Точно так же рассуждаем в случае, когда $E_2 = \{\delta + i\alpha_2\}$, с той лишь разницей, что вместо открытого круга $K(\delta_2, z_2)$ берем замкнутый круг $\overline{K(\delta_3, z_3)}$, содержащийся в $\overline{E(\alpha_1, \alpha_2)}$, касающийся l_2 в точке $\delta + i\alpha_2$ и не касающийся l_1 .

Полоса $I(\alpha_1, \alpha_2)$ является частным случаем рассмотренной в третьем примере многоугольной выпуклой фигуры при $n = 2$. Чтобы закончить рассмотрение этого примера с $n = 2$, осталось выяснить, что будет в случае, когда $b(z) \in [1, 0]$ и $\mathcal{Q} = D_2 \cup E_1 \cup E_2$, где D_2 — открытый угол с вершиной α и боковыми сторонами l_j , а $E_j \subseteq l_j, j = 1, 2$. Как и выше, φ_j — угол между положительной полуосью и внешней нормалью к стороне l_j .

Как показано в конце §5, для существования ЛНПО у оператора $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ необходимо, чтобы

$$\Lambda^*(b) \subseteq \{\varphi_1, \varphi_2\}. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 6.9. *1. Если оба множества E_j несвязны и $b(z)$ — не многочлен, то оператор свертки $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ не имеет ЛНПО.*

II. Пусть одно множество (для определенности – E_2) несвязно, а другое (E_1) – связно. Тогда, если $E_1 = \{\alpha\}$ и $b(z)$ – не многочлен, то оператор L_b не имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Если же $E_1 \neq \{\alpha\}$, то ЛНПО для оператора $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ существует тогда и только тогда, когда

$$\Lambda^*(b) \subseteq \{\varphi_1\}. \quad (9)$$

При этом выполнение условия (9) влечет за собой возможность эффективного построения ЛНПО оператора L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

III. Пусть оба множества E_j связны. Тогда

- 3а) если каждое из множеств E_j содержит не менее двух точек, то условие (8) необходимо и достаточно для наличия ЛНПО у оператора $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$;
- 3б) если $E_1 = E_2 = \{\alpha\}$, а $b(z)$ – не многочлен, то L_b не имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$;
- 3в) если $E_2 = \{\alpha\}$, $E_1 \neq \{\alpha\}$, то ЛНПО для оператора $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ существует тогда и только тогда, когда выполнено условие (9), причем при выполнении последнего условия ЛНПО для L_b может быть построен эффективно;
- 3г) если E_1 – любое связное подмножество l_1 , $b(z)$ имеет нулевой род, а E_2 либо пусто, либо является точкой, отличной от α , то при выполнении условия (8) оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет эффективно определяемый ЛНПО.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Если оператор L_b сюръективен в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, то согласно [16]–[18]

$$\Lambda^*(b) \cap \{\varphi_1\} = \emptyset, \quad \Lambda^*(b) \cap \{\varphi_2\} = \emptyset.$$

Остается учесть условие (8), необходимое для существования ЛНПО для L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

II. Если множество E_2 несвязно, то из сюръективности L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, согласно [16]–[18], следует, что $\Lambda^*(b) \cap \{\varphi_2\} = \emptyset$. Таким образом, для существования ЛНПО у L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ в этом случае необходимо выполнение условия (9). Пусть это условие выполнено и пусть сначала E_1 не совпадает с $\{\alpha\}$, т.е. или пусто, или содержит хотя бы одну точку, отличную от α . Применяя теорему 6.5 в случае, когда $E_1 = \emptyset$, и теорему 6.6, когда E_1 непусто, находим, что ЛНПО для оператора $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ существует и может быть эффективно определен.

Пусть теперь $E_1 = \{\alpha\}$. Предположим, что оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО. Положим $E_0 = \text{conv } E_2$. Тогда $\text{conv } \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \cup \text{conv } E_2 = \mathcal{Q} \cup E_0$. Так как E_0 – выпуклое подмножество l_2 , содержащее точку α , то E_0 является отрезком или полуинтервалом (с левым концом, принадлежащим E_2). Представим E_0 в таком виде: $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha, \beta_n]$, где $\beta_n \in l_2$, $|\alpha - \beta_n| < |\alpha - \beta_{n+1}| < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$, где β – правый конец полуинтервала $[\alpha, \beta] = E_0$, если E_0 – полуинтервал (возможно, бесконечный). Если же E_0 – отрезок, то $\forall n \geq 1$ полагаем $\beta_n = \beta$, если β – правый конец E_0 . При любом $n \geq 1$ проведем из точки α внутри угла D_2 луч T_n направления φ_n так, чтобы $\varphi_n > \varphi_{n+1} > \varphi$, где φ – направление луча l_1 (под направлением здесь и далее понимаем величину угла между положительной полуосью и данным лучом), и чтобы $\lim_n \varphi_n = \varphi$. Далее, из каждой точки

β_n проведем луч B_n направления ψ_n так, чтобы $\psi_n < \psi_{n+1} < \psi$, где ψ – направление луча l_2 . Выберем на луче T_n точку γ_n , а на луче B_n – точку δ_n так, чтобы $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n - \gamma_n| &= \infty, & |\gamma_n - \alpha| &< |\gamma_{n+1} - \alpha|, \\ |\beta_n - \delta_n| &< |\beta_{n+1} - \delta_{n+1}|, & \lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n| = \infty, \end{aligned}$$

и чтобы отрезок $\gamma_n \delta_n$ не был параллелен лучу l_1 .

Пусть $\mathcal{Q}_n$ – замкнутый выпуклый четырехугольник с вершинами $\alpha, \beta_n, \delta_n, \gamma_n$. Легко заметить, что проективную топологию в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ можно ввести как топологию $\text{proj } \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n)$. Учитывая условие (9), получаем с помощью теоремы 2.2 2), что для всех $n \geq 1$ $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n)) = ((L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})))$. По теореме 4.1 оператор $L_b: \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\text{conv } \mathcal{Q})$ имеет ЛНПО. Применяя следствие теоремы 3.3, замечаем, что $\exists m_0 \geq 1$: оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0})$. Но тогда из теоремы 2.7 следует, что $\Lambda^*(b) \subseteq \{\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \nu_3^{(n)}, \nu_4^{(n)}\}$, где $\nu_j^{(n)}$ – направления внешних нормалей к $\mathcal{Q}_n$. Так как ни один из углов $\nu_j^{(n)}$ не равен φ_1 , то мы пришли к противоречию с условием (9). Таким образом, оператор L_b не имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Аналогичными рассуждениями доказывается и утверждение III.

Обратимся теперь к первому примеру из § 5.

ТЕОРЕМА 6.10. Пусть $\mathcal{Q}$ – любое связное подмножество $\mathbb{R}$. Для того, чтобы оператор свертки L_b с символом $b(z)$ – целой трансцендентной функцией из $[1, 0]$ имел ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- а) $\mathcal{Q}$ содержит не менее двух точек;
- б) $\Lambda^*(b) \subseteq \{\pi/2, 3\pi/2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Согласно [21], если $\mathcal{Q}$ – одноточечное множество, то оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ не имеет ЛНПО. Далее, необходимость условия б) установлена в конце § 5 (пример 1).

2. Пусть теперь выполнены условия а), б). Можно всегда найти числа $c, d \in \mathbb{R}$ такие, что $-\infty < c < d < +\infty$ и $[c, d] \subset \mathcal{Q}$. Положим $H_1 = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, $H_2 = \mathcal{H}([c, d])$. По теореме 2.8 оператор L_b имеет ЛНПО в H_2 . Учитывая условие б), как и раньше, с помощью теоремы 2.2 2) показываем, что $(L_b^{-1}(0), H_1) = (L_b^{-1}(0), H_2)$. По теореме 2.3 L_b – эпиморфизм H_1 . Применяя теорему 3.1, заключаем, что оператор $L_b: H_1 \rightarrow H_1$ имеет ЛНПО.

Рассмотрим далее произвольный (не обязательно выпуклый) открытый многоугольник P , имеющий m сторон. Пусть $P_1 := \text{conv } P$. Тогда P_1 – выпуклый многоугольник с n сторонами d_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $n \leq m$. Пусть Σ_1 – совокупность тех $k \leq n$, для которых $d_k \subset \overline{P}$, а Σ_2 – тех $k \leq n$, для которых $\theta_k \in q(P)$, где θ_k – угол между положительной полуосью и внешней нормалью к $\overline{P}_1$ в любой точке стороны d_k . Если $l \leq n$ и $l \notin \Sigma_1$, то $\exists \beta \in d_k$, $\exists \delta > 0$: $K(\delta, \beta) \subset \mathbb{C}\overline{P}$. Проводя прямые $\text{Re } ze^{-i\varphi_l} = r$, параллельные d_l , достаточно близко к d_l и так, чтобы они пересекали P , убеждаемся, что множество $\{z \mid \text{Re } ze^{-i\varphi_l} > r\}$ при таких r не будет связным. Следовательно, $l \notin \Sigma_2$, т.е. $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$ (на простых примерах можно показать, что Σ_2 может быть собственным подмножеством Σ_1).

ТЕОРЕМА 6.11. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, P – открытый многоугольник и $P_1 = \text{conv } P$. Сформулируем следующие утверждения:

- А) L_b сюръективен в $\mathcal{A}(P)$ и имеет ЛНПО в $\mathcal{A}(P_1)$;
- В) $\Lambda^*(b) \subseteq \{\theta_l \mid l \in \Sigma_2\}$;
- С) L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{A}(P)$;
- Д) $L_b: \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathcal{A}(P)$ имеет ЛНПО, который может быть конструктивно определен.

Тогда $D) \implies C) \implies B) \iff A)$. Если еще $b(z)$ имеет род нуль, то все утверждения А)–Д) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $D) \implies C)$ очевидна. Далее, по теореме 2.6 оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{A}(P_1)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^*(b) \subseteq \{\theta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ и по теореме 2.1 сюръективен в $\mathcal{A}(P)$, если $\Lambda^*(b) \subseteq q(P)$. Таким образом, $B) \iff A)$.

Пусть теперь справедливо утверждение С). Тогда L_b – эпиморфизм $\mathcal{A}(P)$. Кроме того, по теореме 3.3 $L_b: \mathcal{A}(P_1) \rightarrow \mathcal{A}(P_1)$ имеет ЛНПО. Таким образом, $C) \implies A)$.

Пусть, наконец, $b(z)$ имеет нулевой род и пусть справедливо утверждение В). Для каждого номера l из Σ_2 можно найти точку $\alpha_l \in d_l$ и число $\delta_l > 0$ такие, что круг $K(\delta_l, z_l)$ обладает свойствами, указанными в теореме 6.1. Согласно теореме 6.4 оператор $L_b: \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathcal{A}(P)$ имеет ЛНПО, который определяется эффективно. Таким образом $B) \implies D)$.

Возможно, что эквивалентность утверждений А)–С) имеет место и без предположения о том, что $b(z)$ имеет нулевой род.

Излагаемый метод применим и в ситуации, когда множество $\mathcal{Q}$ получается присоединением к (открытому) множеству P некоторой части его границы. Мы ограничимся здесь самым простым, но, пожалуй, наиболее важным случаем, когда $\mathcal{Q} = P \cup \partial P = \overline{P}$. В этой ситуации $\text{conv } \overline{P} = \text{conv } P$, и точно такими же рассуждениями (только с привлечением теоремы 2.7 вместо 2.6) устанавливается справедливость результата, аналогичного теореме 6.11 (его формулировка получится, если заменить всюду в теореме 6.11 открытый многоугольник P замкнутым $\overline{P}$, а вместо P_1 взять $\overline{P}_1 = \text{conv } \overline{P}$).

Пусть теперь $\mathcal{P}$ – выпуклый открытый n -угольник, из некоторых сторон которого проведены вовнутрь попарно не пересекающиеся прямолинейные разрезы. Перенумеруем стороны d_k многоугольника $\mathcal{P}$. Пусть σ_1 – совокупность номеров тех сторон $\mathcal{P}$, из которых проведены разрезы, а σ_2 – тех, где этих разрезов нет. При этом, если разрез проведен из вершины $\mathcal{P}$, то в σ_1 включаем номера обеих прилегающих сторон. Имеем $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть, как раньше, φ_k – угол между положительной полуосью и внешней нормалью к $\mathcal{P}$, проведенной в произвольной точке (открытой) стороны d_k . Обозначим символом $\mathcal{Q}$ множество, полученное удалением из открытого многоугольника $\mathcal{P}$ вышеуказанных разрезов. Положим $\sigma_3 = \{k \mid 1 \leq k \leq n, \varphi_k \in q(\mathcal{Q})\}$. Простые геометрические соображения показывают, что если $k \in \sigma_1$, то $\varphi_k \notin q(\mathcal{Q})$. Таким образом, $\sigma_3 \subseteq \sigma_2$. Предположим, что оператор L_b , где $b(z) \in [1, 0]$, имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Тогда по теореме 4.1 $L_b: \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathcal{A}(P)$ имеет ЛНПО, и, кроме того, L_b

– эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, и из теорем 2.1 и 2.6 получаем

$$\Lambda^*(b) \subseteq \sigma_3. \quad (10)$$

Пусть, обратно, выполнено соотношение (10). Тогда из теорем 2.1 и 2.6 следует справедливость такого утверждения

Ф) L_b – эпиморфизм $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ и оператор $L_b: \mathcal{A}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{P})$ имеет ЛНПО.

Если еще $b(z)$ имеет нулевой род, то, учитывая, что для каждой стороны d_j , где $j \in \sigma_2$, найдутся точка $\alpha_j \in d_j$ и круг $K(\delta_j, z_j)$ со свойствами, указанными в теореме 6.4, заключаем на основании этой теоремы, что оператор свертки L_b имеет в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ ЛНПО, который может быть эффективно определен. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 6.12. *Пусть $b(z) \in [1, 0]$ и пусть $\mathcal{Q}$ – область, полученная удалением из открытого выпуклого многоугольника $\mathcal{P}$ попарно не пересекающихся прямолинейных разрезов, проведенных внутрь $\mathcal{P}$ из некоторых его сторон. Тогда:*

- 1) утверждение Ф) равносильно соотношению (10);
- 2) если $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, то справедливо (10) и Ф);
- 3) если b имеет нулевой род, то из утверждения Ф) или, что все равно, из соотношения (10) следует, что оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, который может быть эффективно определен.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $b(z)$ – целая функция нулевого рода из класса $[1, 0]$ и пусть $\mathcal{Q}$ – область, описанная в теореме 12. Тогда утверждение Ф) равносильно любому из следующих:*

- Г) оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$;
- Н) выполнено соотношение (10);
- И) $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, который может быть эффективно определен.

Это следствие и теорема 6.11 подтверждают выдвинутую в §4 гипотезу А для рассмотренных в них ситуаций.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 6.12 остается справедливой, если прямолинейные разрезы заменить попарно не пересекающимися жордановыми дугами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Возможно, что эквивалентность утверждений Ф)–Н) (но не I)!) имеет место и без предположения о нулевом роде у функции $b(z) \in [1, 0]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Гипотеза А подтверждается также в случае, когда $b(z)$ – функция из $[1, 0]$ нулевого рода, а $\mathcal{Q}$ – односвязная область, полученная удалением из ограниченной (открытой) выпуклой области конечного числа попарно не пересекающихся разрезов – кусочно гладких жордановых дуг. Доказательство этого факта, к сожалению, пока весьма громоздко, и мы не приводим его здесь.

В заключение рассмотрим неограниченное выпуклое замкнутое в $\mathbb{C}$ множество $\mathcal{Q}$. Пусть Γ – граница $\mathcal{Q}$. Можно предположить, что кривая Γ отлична от прямой, так как случай замкнутой полуплоскости был уже рассмотрен. Предположим, что неограниченная кривая Γ заканчивается в обоих возможных направлениях неограниченности прямолинейными участками (лучами l_j) и пусть φ_j – угол

между $\mathbb{R}$ и лучом l_j , $j = 1, 2$. Пусть $b(z) \in [1, 0]$, и пусть $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО. По теореме 5.1

$$\Lambda^*(b) \cap \left(\varphi_j - \frac{\pi}{2}, \varphi_j + \frac{\pi}{2} \right) = \emptyset, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Пусть теперь условия (11) выполнены. Возьмем последовательность удаляющихся в бесконечность точек $x_{k,j}$ ($j = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$) на луче l_j так, чтобы соединяющие точки $x_{k,1}$ и $x_{k,2}$ отрезки d_k были параллельны друг другу. Пусть $\mathcal{Q}_k$ – выпуклый компакт, ограниченный отрезком d_k и дугой кривой Γ , заключенной между точками $x_{k,1}$ и $x_{k,2}$. Положим $H = \varprojlim_m H_m$, где $H = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, $H_m = \mathcal{H}(\mathcal{Q}_m)$, $m = 1, 2, \dots$. Из условий (11) легко вывести, что $(L_b^{-1}(0), H) = (L_b^{-1}(0), H_m)$, $m = 1, 2, \dots$. По следствию теоремы 3.3 L_b имеет ЛНПО в некотором пространстве H_{m_0} , $m_0 \geq 1$. При этом, если $l \geq m_0$, то $H_l \hookrightarrow H_{m_0}$, $(L_b^{-1}(0), H_l) = (L_b^{-1}(0), H_{m_0})$, и по теореме 3.1 L_b имеет ЛНПО в H_l . Таким образом, если оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО, то выполнены условия (11) и $\exists m_0 \geq 1$: оператор $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}_l) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q}_l)$ имеет ЛНПО $\forall l \geq m_0$.

Пусть, обратно, выполнены условия (11) и пусть оператор L_b имеет ЛНПО в $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0})$ при некотором $m_0 \geq 1$. Учитывая, что $\mathcal{H}(\mathcal{Q}) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0})$, $(L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q})) = (L_b^{-1}(0), \mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0}))$, и что согласно [18] L_b – эпиморфизм $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, получаем по теореме 3.1, что $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО. Таким образом справедлива

ТЕОРЕМА 6.13. Пусть $\mathcal{Q}$ – неограниченное замкнутое (в $\mathbb{C}$) выпуклое множество, и пусть граничная кривая Γ заканчивается прямолинейными лучами в направлениях φ_1 и φ_2 . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $L_b: \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ имеет ЛНПО;
- 2) выполнены условия (11) и $\exists m_0 \geq 1$: оператор L_b имеет ЛНПО в любом пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_l)$ с $l \geq m_0$;
- 3) выполнены условия (11) и $\exists m_0 \geq 1$: оператор L_b имеет ЛНПО в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0})$.

Остается напомнить, что критерий существования ЛНПО у оператора L_b в $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_{m_0})$ получен С.Н. Мелиховым и З. Моммом [28]. Комбинируя его с условием (11) получаем искомый критерий существования ЛНПО у L_b в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Martineau A. Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Mat. Ann. 1966. V. 163. №1. P. 68–88.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: ГИФМЛ, 1959.
3. Епифанов О. В. Критерий эпиморфности свертки в произвольных областях комплексной плоскости // Матем. заметки. 1982. Т. 35. №5. С. 695–705.
4. Коробейник Ю. Ф. О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // Матем. сб. 1968. Т. 75. №2. С. 225–234.

5. *Miggly H.* Differenzialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit constanten Koeffizienten // *Comment. Math. Helv.* 1938. № 11. P. 151–179.
6. *Коробейник Ю. Ф.* О решениях дифференциального уравнения бесконечного порядка, аналитических в некруговых областях // *Матем. сб.* 1966. Т. 71 (113). № 4. С. 535–544.
7. *Martineau A.* Equations differentielles d'ordre infini // *Bull. Soc. Math. France.* 1967. V. 95. P. 109–154.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности // *Матем. сб.* 1969. Т. 80. № 1. С. 52–75.
9. *Напалков В. В.* Об одном классе неоднородных уравнений бесконечного порядка // *УМН.* 1974. Т. 29. № 3. С. 217–218.
10. *Епифанов О. В.* О проблеме эпиморфизма оператора свертки в комплексных областях // *Матем. заметки.* 1974. Т. 16. № 3. С. 415–422.
11. *Знаменский С. В.* Об областях существования аналитических решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами // *Институт физики им. Л. В. Киренского Сиб. отд. АН СССР. Препринт IFSO6M.* Красноярск, 1976.
12. *Знаменский С. В.* Нетрадиционная выпуклость в направлении плоских областей и компактов и свойства голоморфных решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка // *СО АН СССР Институт физики им. Л. В. Киренского.* Красноярск, 1980. Депон. в ВИНТИ № 3063-Д80 от 15.07.80.
13. *Епифанов О. В.* Уравнения свертки в комплексной области // *Исследования по теории операторов.* Уфа, 1988. С. 48–58.
14. *Коробейник Ю. Ф.* О разрешимости оператора свертки в классах вещественно-аналитических функций // *Матем. заметки.* 1991. Т. 49. № 2. С. 74–83.
15. *Напалков В. В., Рудаков И. А.* Оператор свертки в пространствах вещественно аналитических функций // *Матем. заметки.* 1991. Т. 49. № 3. С. 57–65.
16. *Мальцев И. М.* Об эпиморфности оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах // *ДАН.* 1994. Т. 336. № 3. С. 297–300.
17. *Мальцев И. М.* Об эпиморфизме оператора свертки в комплексной области. I. Необходимые условия эпиморфности // *Изв. ВУЗов. Матем.* 1994. № 7. С. 49–58.
18. *Мальцев И. М.* Об эпиморфизме оператора свертки в комплексной области. II. Достаточные условия и критерии эпиморфности. Примеры // *Изв. ВУЗов. Матем.* 1994. № 11. С. 43–52.
19. *Taylor B. A.* Linear extension operators for entire functions // *Mich. Math. J.* 1982. V. 29. P. 185–197.
20. *Schwerdtfeger K.* Faltungsoperatoren und Räumen holomorpher und beliebig oft differenzierbarer Funktionen // *Thesis.* Düsseldorf, 1982.
21. *Meise R., Taylor B. A.* Sequence space representation for (FN) -algebras of entire functions modulo closed ideals // *Studia Math.* 1987. V. 85. P. 203–227.
22. *Momm S.* Partial differential operators of infinite order with constant coefficients on the space of analytic functions on polydisc // *Studia Math.* 1990. V. 96. P. 51–71.
23. *Коробейник Ю. Ф.* О правом обратном операторе для оператора свертки // *Укр. матем. журн.* 1991. Т. 43. № 12. С. 1167–1176.
24. *Momm S.* Convex univalent functions and continuous right inverse // *J. Function. Analysis.* 1992. V. 103. P. 85–103.
25. *Momm S.* Convolution equation on the analytic functions on convex domains in the plane // *Preprint: Düsseldorf University,* 1993.
26. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и конформные отображения // *ДАН.* 1992. Т. 323. № 5. С. 826–829.
27. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // *Сиб. матем. журн.* 1993. Т. 34. № 1. С. 70–84.
28. *Melikhov S. N., Momm S.* Continuous linear right inverse for convolution operator on spaces of functions analytic on convex sets // *Preprint. Düsseldorf,* 1993.

29. *Langenbruch M.* Continuous linear right inverse for convolution operator in spaces of real analytic functions // *Studia Math.* 1994. V. CX. №1. P. 65–82.
30. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные пространства аналитических функций. III. Распространение спектрального синтеза // *Матем. сб.* 1972. Т. 88. №2. С. 331–352.
31. *Polya G.* Eine Verallgemeinerung des Fabryshen Lückensatzes // *Nachr. Gesel. Wiss. Göttingen Mat.-Phys.* 1927. P. 187–195.
32. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
33. *Райков Д. А.* Двусторонняя теорема о замкнутом графике для линейных топологических пространств // *Сиб. матем. журн.* 1966. Т. VII. №2. С. 353–372.
34. *Епифанов О. В.* О существовании непрерывного правого обратного для оператора в одном классе локальновыпуклых пространств // *Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. наук.* 1991. №3. С. 3–4.
35. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
36. *Эдвардс Р. Э.* Функциональный анализ: Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
37. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
38. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
39. *Valiron G.* Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants // *Ann. Ec. Norm. Sup.* 1929. V. 46. P. 25–53.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию
24.08.1993 и 23.12.1994