Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Мищенко, Нижние оценки размерностей неприводимых представлений симметрических групп и показателей экспоненты многообразий алгебр Ли, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 83–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:25:42

УДК 512.8

С. П. Мищенко

**Нижние оценки размерностей неприводимых
представлений симметрических групп и
показателей экспоненты многообразий алгебр Ли**

В работе можно выделить два основных результата. Первый относится к теории представлений симметрических групп. Второй касается теории многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики.

Первый результат можно изложить следующим образом: неприводимое представление симметрической группы достаточно большой степени n , диаграмма Юнга которого помещается в квадрат со стороной n/k , имеет размерность не менее k^n .

Второй результат утверждает, что не существует многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики, для которых нижний показатель экспоненты строго меньше двух. В то же время приведены примеры многообразий с показателем равным двум.

Библиография: 12 названий.

Введение

Описание изложенных в работе результатов начнем с тех, которые относятся к теории представлений симметрических групп и могут быть интересны широкому кругу читателей. Основным является теорема 2. В нестрогом изложении этот результат состоит в следующем: неприводимое представление симметрической группы достаточно большой степени n , диаграмма Юнга которого помещается в квадрат со стороной n/k , имеет размерность не менее k^n . Остальные результаты, связанные с оценками размерностей неприводимых представлений, приведены во втором параграфе. Предложения 1 и 2 являются, как говорят, математическим фольклором. Что касается предложения 3, то оно представляет из себя чисто алгебраическую часть теоремы 2. Его доказательство получилось технически сложным и достаточно замысловатым.

Появление описанных выше результатов было вызвано желанием автора получить продвижение в исследовании многообразий алгебр Ли с точки зрения их роста. Как известно, одним из возможных инструментов исследования многообразий линейных алгебр над полем нулевой характеристики является теория представлений симметрической группы.

Одной из числовых характеристик многообразия алгебр Ли является последовательность коразмерностей вербального идеала. Эта последовательность может

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № M22000).

мажорироваться полиномиальной последовательностью, в которой общий член задается полиномом от номера. Другая крайность, когда последовательность нельзя замajorировать никакой последовательностью, в которой общий член задается константой в степени равной номеру. В этом случае говорят, что многообразие имеет сверхэкспоненциальный рост. “Золотую” середину составляют многообразия экспоненциального роста (в другой терминологии, экспоненциального типа), которые как раз наиболее интенсивно изучаются в настоящее время в теории многообразий алгебр Ли. Такими многообразиями являются все специальные многообразия, многообразия ассоциативного типа, многообразия, порожденные простыми бесконечномерными алгебрами картановского типа.

Понятно, что асимптотическое поведение последовательности коразмерностей вербального идеала не может дать подробной информации о свойствах многообразия. Однако, связь “грубой” числовой характеристики с конкретными свойствами оказывается теснее ожидаемой. Например, что можно сказать, если известно, что последовательность коразмерностей мажорируется последовательностью вида (B^n) , $n = 1, 2, \dots$, где B некоторая известная константа? Первый результат, относящийся к этой тематике, был получен в 1981 году, когда удалось доказать [1] нильпотентность коммутанта алгебр из многообразий экспоненциального типа, показатель экспоненты (константа B) которых ограничен $\sqrt{2}$.

В настоящей работе указана точная нижняя граница показателей экспонент многообразий алгебр Ли над полем характеристики нуль, которая оказалась равной двум. Этот результат сформулирован в первом параграфе (теорема 1), а доказательство приведено в четвертом. В конце первого параграфа указаны примеры многообразий, имеющих показатель равный в точности двум.

При доказательстве использовано и полное описание разрешимых многообразий почти полиномиального роста, изложенное в обзоре [2], и разрешимость многообразия двуметабелевых алгебр Ли, полученное в работе [3], а также новый результат об оценках неприводимых представлений симметрических групп, описанный выше.

В заключение автор выражает благодарность А. Б. Вережкину за внимание к работе и полезные беседы.

§ 1. Используемые результаты и предварительные сведения

Введем необходимые понятия и обозначения. Будем следовать монографии Ю. А. Бахтурина [4], в которой можно найти все необходимые понятия и определения, отличие состоит в привычке автора опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, т.е. $abc = (ab)c$.

Пусть V – некоторое многообразие алгебр Ли над полем нулевой характеристики. Рассмотрим множество полилинейных элементов

$$P_n(V) = \langle x_{q(1)}, \dots, x_{q(n)}, q \in S_n \rangle$$

относительно свободной алгебры ранга n многообразия V .

Это множество образует векторное пространство, размерность которого обозначим $c_n(V)$. Последовательность чисел $(c_n(V))$, $n = 1, 2, \dots$, является числовой характеристикой многообразия V , ее иногда называют последовательностью

коразмерностей вербального идеала. Чем “больше” тождеств, тем меньше размерность полилинейной части. Случай, когда эта последовательность мажорируется некоторым полиномом от переменной n , изучен в работе И. И. Бенедиктовича и А. Е. Залесского [5]. Многообразия такого типа называют многообразиями полиномиального роста. Все алгебры из многообразий полиномиального роста имеют нильпотентный коммутант, а сами многообразия являются шпехтовыми, т.е. имеют конечный базис тождеств вместе со своими подмногообразиями. Напомним, что вопрос о шпехтовости любого многообразия алгебр Ли в случае нулевой характеристики основного поля остается открытым.

Другой крайний случай поведения последовательности коразмерностей вербального идеала, когда ее нельзя ни при каком B ограничить последовательностью вида (B^n) , $n = 1, 2, \dots$, определяет, так называемые, многообразия сверхэкспоненциального роста. Кроме изученного в работах И. Б. Воличенко (см., например, [6]) многообразия AN_2 , данный класс многообразий остается нетронутой целиной.

Промежуточный между отмеченными двумя случаями класс многообразий в основном и изучается в настоящее время. Это и специальные многообразия, которым посвящена целая глава монографии [4], и так называемые многообразия ассоциативного типа, введенные в работе [7], и многообразия, в которых выполнены все тождества некоторой бесконечномерной простой алгебры картановского типа.

Пусть многообразие V относится к последнему классу, т.е. имеет экспоненциальный рост. Напомним, что многообразий промежуточного между экспоненциальным и полиномиальным роста не бывает (см. статью автора [8]). Рассмотрим последовательность чисел $(\sqrt[n]{c_n(V)})$, $n = 1, 2, \dots$. Нижний (верхний) предел назовем нижним (верхним) показателем экспоненты многообразия V . Обозначим, соответственно, $LEXP(V)$ и $HEXP(V)$. Будем в случае совпадения нижнего и верхнего показателя экспоненты говорить просто о показателе экспоненты многообразия и обозначать его $ВЕХР(V)$. Ясно, что показатель экспоненты для многообразий полиномиального роста равен единице, а для многообразий сверхэкспоненциального роста – бесконечности.

В данной работе доказано, что не существует многообразий, для которых нижний показатель экспоненты строго меньше двух. В то же время в конце параграфа приведены примеры многообразий с показателем равным двум. Приведем формулировку этого результата.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть V – многообразие алгебр Ли над полем нулевой характеристики, причем $LEXP(V) < 2$. Тогда многообразие V имеет полиномиальный рост.*

Доказательство изложено в четвертом параграфе.

Сформулируем некоторые нерешенные задачи, связанные с введенными числовыми характеристиками многообразия:

1. Верно ли, что для любого многообразия выполняется равенство

$$LEXP(V) = HEXP(V)?$$

2. Верно ли, что показатели экспоненты являются натуральными числами?
3. Верно ли, что для неразрешимых многообразий нижний показатель не менее трех?

Несложно подсчитать показатель экспоненты некоторых многообразий, например, многообразий почти полиномиального роста.

Напомним, что в настоящее время известно пять таких многообразий, причем разрешимых — четыре и других нет. Оставим обозначение для этих многообразий из работы [2]:

- V_0 — многообразие, порожденное простой трехмерной алгеброй Ли;
- V_1 — многообразие всех алгебр с двуступенно нильпотентным коммутантом;
- V_2 — наименьшее многообразие, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество;
- V_3 — многообразие, порожденное полупрямым произведением трехмерной нильпотентной алгебры на бесконечномерный неприводимый модуль;
- V_4 — многообразие, порожденное полупрямым произведением двумерной метабелевой алгебры на бесконечномерный неприводимый модуль.

На основе результатов работы [2] сделаем необходимое в данной работе

ЗАМЕЧАНИЕ. Разрешимое многообразие, которое не является надмногообразием ни одного из V_1, V_2, V_3, V_4 , имеет полиномиальный рост.

Как обещали, приведем список значений показателей для этих пяти многообразий. Доказательства оставим читателям в качестве упражнений. Отметим только, что для многообразия V_0 доказательство следует, например, из работы [9]. Для V_1 — из работы автора [10]. Для V_2 — из работы [11], а для V_3 и V_4 значение показателя можно получить из строения порождающих эти многообразия алгебр.

V	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4
$\text{BEXP}(V)$	3	2	2	3	2

§ 2. Некоторые оценки размерностей неприводимых модулей, связанные с формулой крюков

Предполагается знакомство читателя с основами теории представлений симметрической группы. Здесь же мы просто напомним формулу крюков для подсчета размерности неприводимого модуля. Для диаграммы Юнга d обозначим, следуя монографии [4], h_{ij}^d — крюк, сопоставленный (i, j) клетке (пересечению i -й строки и j -го столбца). Он состоит из самой клетки, части i -й строки правее клетки и части j -го столбца ниже клетки. Обозначим через $|h_{ij}^d|$ длину этого крюка, а через $\dim d$ — размерность соответствующего неприводимого модуля. Тогда следующая формула (формула крюков) дает возможность подсчитать размерность соответствующего диаграмме d неприводимого модуля

$$\dim d = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in d} |h_{ij}^d|}. \quad (1)$$

Основной комбинаторный результат, который получен в настоящей работе, связан с последовательностями диаграмм, в которых отношение числа клеток к максимальной длине среди длин строк и столбцов не менее некоторой константы. Обозначим эту константу буквой k , тогда, используя графическое представление диаграммы Юнга, можно переформулировать введенное ограничение: диаграмма d ,

содержащая n клеток, удовлетворяет “условию k ”, если выполняется следующее включение

$$d \subset \left[\frac{n}{k} \right] \times \left[\frac{n}{k} \right], \quad (2)$$

то есть, если диаграмма содержится в квадрате со стороной n/k .

Используем формулу крюков (1) для оценки размерности модуля, соответствующего самой естественной диаграмме с условием (2) при $k = 2$. А именно, когда диаграмма состоит из двух одинаковой длины строк или двух одинаковой длины строки и столбца. С точностью до сомножителя в виде линейного многочлена от числа клеток n , размерность модуля равна максимальному биномиальному коэффициенту. Поэтому получаем такое неравенство

$$\frac{2^n}{f(n)} < \dim d < 2^n,$$

где $f(n)$ – многочлен второй степени.

Обобщением этого утверждения является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть даны натуральное m , действительное число k и последовательность диаграмм (d_n) , $n = 1, 2, \dots$ (индекс равен числу клеток в диаграмме), удовлетворяющих условию (2) и не содержащих квадрат со стороной равной m . Тогда для любого положительного B , $B < k$, существует такое натуральное число N , что при $n \geq N$ выполняется неравенство $\dim d_n > B^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим первые m строк, обозначим их длину t_i , $i = 1, 2, \dots$. Пусть оставшиеся вне этих строк фрагменты столбцов (их число по условию не превышает числа m) имеют следующие номера и их длины обозначены тоже t_i (для столбцов числа t_i на m меньше реальной длины соответствующего столбца). Пусть число введенных чисел равно r .

Тогда $t_1 + t_2 + \dots + t_r = n$, кроме того для всех i выполняется неравенство $t_i \leq n/k$. Если длины крюков клеток выделенного квадрата $m \times m$ и половины такого же квадрата, примыкающего снизу, ограничить числом n , то, используя формулу крюков, получаем такую оценку размерности модуля

$$\dim d_n = \frac{n!}{\prod h_{ij}} > \frac{n!}{n^{1.5m^2} \prod (t_i)!}.$$

Заменим в последнем выражении все факториалы по формуле Стирлинга, учитывая, что $t_i \leq n/k$, получим неравенство

$$\dim d_n > \frac{k^n}{n^{1.5m^2}},$$

которое доказывает сформулированное предложение.

Следующее предложение не является новым, его использовали многие авторы. Не претендуя на первенство, а исключительно для полноты изложения, приведем его формулировку и краткое доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – бесконечное подмножество натуральных чисел, а (d_n) , $n \in M$, – последовательность прямоугольных диаграмм со сторонами a_n, b_n ($a_n \cdot b_n = n$), причем последовательности (a_n) и (b_n) стремятся к бесконечности. Тогда для любого положительного B существует такое натуральное число N , что при $n \geq N$, $n \in M$, выполняется неравенство $\dim d_n > B^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опустим индекс n и предположим, что выполнено неравенство $a \geq b$. По формуле крюков (1) получим

$$\dim d = \frac{n!}{(a!)^b} \frac{1!}{(a+1)} \frac{2!}{(a+1)(a+2)} \cdots \frac{(b-1)!}{(a+1) \cdots (a+b-1)}.$$

Все дроби, начиная со второй, равны обратным величинам биномиальных коэффициентов. Оценим их соответствующими степенями двойки, а факториалы заменим по формуле Стирлинга. Так как $a > b$, то выполняется неравенство $b^2 \leq n$. Окончательно, получим такую оценку размерности: $\dim d \geq (b/4)^n$. Для завершения доказательства осталось заметить, что число $b = b_n$ с ростом n бесконечно возрастает.

Непосредственно из этого предложения получаем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (d_n) , $n \in M$, – последовательность диаграмм, а m_n – размер максимального квадрата, который можно поместить внутри диаграммы d_n . Если нижний предел последовательности (m_n^2/n) больше 0, то для любого положительного B существует такое натуральное число N , что при $n \geq N$, $n \in M$, выполняется неравенство $\dim d_n > B^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное B . Пусть нижний предел последовательности (m_n^2/n) равен c , $c > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда существует такое натуральное N_1 , начиная с которого (при $n > N_1$) выполняются неравенства

$$s = m_n^2 > \frac{cn}{2}. \quad (3)$$

Обозначим через $(\bar{d}_s)$ последовательность квадратных со стороной m_n диаграмм. Из неравенств (3) видно, что последовательность (m_n) стремится к бесконечности, поэтому введенная последовательность диаграмм удовлетворяет условию предложения 2. Возьмем такое A , чтобы $(\sqrt{A})^c \geq B$, и полученное из утверждения предложения 2 натуральное число обозначим через L . Положим $N = (2/c)L$. Так как $\dim \bar{d}_s \leq \dim d_n$, то при $n > N$ (в этом случае m_n^2 будет больше L в силу неравенства (3)) получаем требуемое неравенство. Следствие доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть диаграмма d удовлетворяет условию (2). Обозначим через t максимальный размер стороны квадрата, который можно разместить внутри диаграммы. Тогда, если $B < k$, $t \geq (3 + \sqrt{5})k$, то $\dim d \geq B^{n-(5k+1)t^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$ ($c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_m$) — длины первых m строк (столбцов) диаграммы. Отбросим вне квадрата наименьшее возможное число клеток, чтобы у новой диаграммы неравенства на длины первых строк (столбцов) стали строгими. Ясно, что это можно сделать, отбросив не более i клеток от $(m - i)$ -й строки (столбца). Кроме того, нам необходимо, чтобы либо c_m , либо s_m было строго больше нуля. Это можно сделать отбросив еще не более m^2 клеток и, в случае необходимости, уменьшив само число m . Таким образом, полученная диаграмма d_1 состоит из n_1 клеток, причем $n_1 \geq n - 2m^2$.

Оценку для размерности модуля получим, используя формулу крюков (1). Для этого каждой клетке диаграммы присвоим номер и разобьем их на четыре типа. Будем раскрашивать клетки первого и второго типов и называть их после этого *цветными*.

Определим клетки первого типа. Назовем клетку *угловой*, если она не имеет соседей снизу и справа, либо эти соседи цветные. На i -м шаге, пока число угловых клеток не менее $2k$, красим их в i -й цвет, относим к первому типу и присваиваем им следующие по возрастанию номера. Множество номеров клеток первого типа, которое представляет из себя начальный отрезок натурального ряда, обозначим T_1 .

Уточним определение угловой клетки в случае клеток второго типа: клетка должна быть расположена вне квадрата со стороной равной m . На втором этапе определим клетки второго типа следующим образом. Пока число угловых клеток вне квадрата со стороной m не менее k , продолжаем нумерацию и раскраску также как клеток первого типа с единственной разницей, что мы не трогаем клетки внутри квадрата со стороной m . Получим клетки второго типа и множество их индексов T_2 .

Остались без номеров клетки внутри квадрата $m \times m$ и двух полосок (вертикальной и горизонтальной) суммарной высоты менее k . Отметим квадрат со стороной $(3m^2 + m)$. Оставшиеся клетки вне этого квадрата отнесем к третьему типу, остальные — к четвертому. Клетки третьего и четвертого типов нумеруем, двигаясь по нижней, а потом по правой сторонам стягивающихся к верхнему левому углу диаграммы квадратов. Множество полученных номеров обозначим T_3, T_4 .

Для демонстрации проделанного разбиения клеток диаграммы на типы приведем два рисунка. На левом — выделены клетки первого типа. На правом — изображен оставшийся фрагмент диаграммы. Черным фоном выделены клетки третьего типа, а серым — второго, без выделения оставлены клетки четвертого типа.

Разбиение на типы и нумерация клеток завершены. Временно уберем номера и раскраску клеток второго типа, мы вернем им цвет и номера в процессе доказательства леммы. Сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Любой крюк клетки первого типа цветной, состоит из клеток первого типа и содержит не более двух клеток каждого цвета.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Число цветных клеток внутри квадрата со стороной m (следовательно, первого типа) больше, чем km . Действительно, по условию $m \geq (3 + \sqrt{5})k$ и клетки прямоугольного треугольника с катетом равным $(m - 2k)$, расположенного в правом нижнем углу квадрата, заведомо принадлежат к первому типу.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Клетки четвертого типа расположены внутри квадрата со стороной m и двух полосок (вертикальной и горизонтальной) суммарной высоты не более k , а длины $3m^2$. Таким образом, их число не превосходит $m^2(3k + 1)$.

Для доказательства предложения 3 нам потребуется следующее неравенство, связывающее присвоенный номер клетки с длиной ее крюка

$$h_i = 1 \text{ при } i < k, \quad kh_i \leq i \text{ при } i \geq k, \quad (4)$$

где h_i — длина крюка i -й клетки. Докажем его для клеток трех первых типов.

ЛЕММА. Для клеток первых трех типов выполняется неравенство (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для клеток первого типа следует из замечания 1. Действительно, число клеток одного цвета, имеющих меньшие номера, не менее $2k$, и лишь не более двух входят в крюк i -й клетки 1-го типа. Отметим, что это соображение часто используется при решении олимпиадных задач и называется методом раскраски.

Раскрасим и пронумеруем клетки второго типа заново. Рассмотрим угловые клетки после i -го шага нумерации. Они все расположены в разных строках и разных столбцах.

Правее (ниже) всех угловых клеток первых k строк (первых k столбцов) расположено одинаковое число s цветных, следовательно пронумерованных ранее, клеток. Общее число угловых клеток превышает k , а внутри квадрата $m \times m$ расположено не менее km цветных клеток (замечание 2). Поэтому для номера N , который будет присвоен этой клетке, выполняется неравенство

$$N \geq km + ks.$$

Понятно, что крюк клетки h_N не более, чем $(s + m)$.

Красим угловые клетки на i -ом шаге в i -ый цвет и присваиваем следующие по порядку номера. Таким образом, для клеток второго типа утверждение леммы доказано.

Шаг нумерации клеток третьего типа состоит в присвоении номеров клеткам r -й строки, а потом r -го столбца по границе квадрата со стороной r . Само число r уменьшается от шага к шагу до числа $(m + 3m^2)$.

Рассмотрим один шаг нумерации. Для определенности будем считать, что нумеруемая клетка расположена в первых k строках, а ее номер равен N . Обозначим через $(x + m)$ столбец, в котором расположена рассматриваемая клетка. Тогда выполняются следующие неравенства:

1. $h_N \leq n/k - m - x + m$, первое слагаемое правой части отвечает ограничению на длину строк диаграммы, последнее слагаемое — ограничение на длину ноги крюка;
2. $N \geq n_1 - m^2 - (k - 1)x$, так как не более этого числа клеток пока не имеют номеров;
3. $n_1 \geq n - 2m^2$; это неравенство встречалось ранее.

При $x \geq 3m^2$ из этих неравенств следует необходимое соотношение на длину крюка клетки и его номер. Так как клетки третьего типа расположены вне квадрата со стороной $(m + 3m^2)$, то значение x удовлетворяет необходимому неравенству. Для клеток третьего типа утверждение леммы также доказано, а следовательно, доказательство леммы завершено.

Продолжим доказательство предложения 3. Оценим размерность соответствующего диаграмме d модуля, используя формулу крюков, в которой произведение взято по определенным выше номерам:

$$\dim d \geq \dim d_1 = \frac{n_1!}{\prod h_i} = \frac{n_1(n_1 - 1) \cdots (n_1 - |T_4| + 1)}{\prod_{i \in T_4} h_i} \cdot \frac{(n_1 - |T_4|)!}{\prod_{i \in T_1 \cup T_2 \cup T_3} h_i}.$$

Способ нумерации клеток четвертого типа показывает, что длины крюков не превышают их номера, поэтому первый сомножитель правой части неравенства больше единицы. Второй сомножитель в силу доказанной леммы превышает такое число

$$\frac{(n_1 - |T_4|)!}{[(n_1 - |T_4|)/k]^k},$$

которое может быть оценено с использованием формулы Стирлинга. Осталось вспомнить замечание 3, согласно которому число клеток четвертого типа не больше $m^2(3k + 1)$. Доказательство предложения 3 завершено.

§ 3. Доказательство основного комбинаторного утверждения

Цель этого параграфа – доказать утверждение, аналогичное предложению 1, только без ограничения на размер содержащегося в диаграммах максимального квадрата.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность диаграмм (d_n) , $n = 1, 2, \dots$, в которой индекс равен числу клеток в диаграмме, удовлетворяет условию (2) при некотором заданном натуральном k . Тогда для любого положительного B , $B < k$, существует такое натуральное число N , что при $n \geq N$ выполняется неравенство $\dim d_n > B^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность диаграмм (d_n) удовлетворяет условию (2) для некоторого натурального k . Обозначим через m_n размер максимального квадрата, который можно разместить внутри диаграммы d_n . Рассмотрим числовую последовательность (m_n) . Если она ограничена, то условия предложения 1 выполнены, а следовательно выполнено и необходимое утверждение. Если же последовательность (m_n) растет достаточно быстро, т.е. существует нижний предел последовательности (m_n^2/n) , то необходимое утверждение будет получено в силу следствия из предложения 2. Автору не удалось найти простого доказательства в случае, когда последовательность чисел (m_n) растет, но не достаточно быстро, т.е. нижний предел последовательности (m_n^2/n) равен 0. Поэтому возникло технически сложное предложение 3.

Приступим к четкому изложению доказательства в общем случае. Пусть дано число B , удовлетворяющее неравенствам $1 < B < k$. Зафиксируем такие числа B_1 и s , что

$$B < B_1 < k, \quad 0 < s < \frac{\ln B_1 - \ln B}{\ln B_1}.$$

Понятно, что тогда выполнено необходимое нам в будущем неравенство

$$B_1^{n-sn} > B^n. \quad (5)$$

Разобьем множество натуральных чисел на три непересекающихся подмножества M_1, M_2, M_3 .

Будем считать, что $n \in M_1$, если выполнено неравенство

$$m_n^2 < (3 + \sqrt{5})k.$$

Если же выполнено неравенство $m_n^2 \geq (3 + \sqrt{5})k$, то определим множества M_2, M_3 :

1. $n \in M_2$, если дополнительно выполнено неравенство

$$sn > (5k + 1)m_n^2; \quad (6)$$

2. $n \in M_3$, если дополнительно выполнено неравенство

$$sn \leq (5k + 1)m_n^2. \quad (7)$$

По предложению 1 существует такое число N_1 , что при $n > N_1$ и $n \in M_1$ выполняется требуемое неравенство $\dim d_n > B^n$.

По предложению 3 существует такое число N_2 , что при $n > N_2$ и $n \in M_2$ выполняется такое неравенство

$$\dim d_n \geq B_1^{n-(5k+1)m_n^2}.$$

В этом случае согласно неравенствам (5) и (6) получаем

$$B_1^{n-(5k+1)m_n^2} > B_1^{n-sn} > B^n.$$

Для $n \in M_3$ последовательность (m_n^2/n) имеет в силу неравенства (7) положительный нижний предел. Согласно следствию к предложению 2 существует такое число N_3 , начиная с которого выполняется требуемое неравенство.

Осталось взять $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Теорема 2 полностью доказана.

§ 4. Точная нижняя граница показателей экспоненты многообразий алгебр Ли

Данный параграф посвящен доказательству теоремы 1, формулировка которой приведена в первом параграфе. Там же приведено описание разрешимых многообразий почти полиномиального роста, которое подсказывает способ доказательства. Достаточно доказать разрешимость указанного в теореме многообразия. Для этого воспользуемся техникой Хиггинса, связанной с тождествами с разделенными переменными (см. работу [12]). Автор использует эту технику уже на протяжении более десяти лет, но оказывается ее потенциал не исчерпан. Особенно это касается случаев доказательства разрешимости.

Пусть в некотором многообразии V выполнено тождество вида $wf = 0$, где w – элемент свободной алгебры, а f является ассоциативным многочленом от свободных образующих, которые не входят в элемент w . Тогда следуя Хиггинсу, можно определить идеал V -свободной алгебры, в котором будет выполнено тождество $x_0f = 0$, где x_0 – свободная образующая, а в факторалгебре – тождество $w = 0$. Таким образом, вопрос следствия разрешимости из тождества $wf = 0$ сводится к вопросам следствия из тождеств меньшей степени: $x_0f = 0$ и $w = 0$.

Сформулируем лемму, которая имеет и самостоятельный интерес, ее доказательство – непосредственное использование описанной выше техники.

ЛЕММА. Пусть в многообразии V выполнено тождество

$$x_0(x_1y_1)^2(x_2y_2)^2 \cdots (x_ry_r)^2 = 0.$$

Тогда многообразие V состоит из разрешимых алгебр, т.е. существует натуральное m такое, что выполняется включение $V \subset A^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – несложная индукция по числу r . База индукции – это случай тождества $x_0(x_1y_1)^2 = 0$, которое задает подмногообразие так называемого двуметабелева многообразия алгебр Ли. Как известно (см. работу автора [3]), последнее многообразие является разрешимым. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим систему тождеств вида

$$w_r = x_0(x_1y_1)^2(x_2y_2)^2 \cdots (x_ry_r)^2 = 0.$$

Зафиксируем число r и рассмотрим модуль M симметрической группы, который порождается линеаризацией элемента w_r . Как обычно, по теореме Машке, этот модуль раскладывается в прямую сумму неприводимых, которые соответствуют диаграммам Юнга. Из вида элемента w_k следует, что диаграмма d , которой соответствует слагаемое в этом разложении, не может содержать строку длиной более половины количества клеток этой диаграммы. Аналогично относительно столбцов. Таким образом, диаграмма d удовлетворяет условию (2) при $k = 2$. В силу теоремы 2 и условия на размерность полилинейной компоненты многообразия V получаем, что существует такое число r , при котором в исследуемом многообразии выполнено тождество $w_r = 0$. Таким образом, многообразие V согласно доказанной лемме является разрешимым. По условию теоремы многообразие V не является надмногообразием ни одного разрешимого многообразия почти полиномиального роста, так как их показатель экспоненты больше или равен двум. Поэтому рост многообразия V является полиномиальным (см. замечание в конце первого параграфа). Теорема 1 полностью доказана.

§ 5. О границе показателей экспонент неразрешимых многообразий

В этом параграфе коснемся сформулированной в первом параграфе третьей задачи о показателе экспоненты неразрешимого многообразия. Эта задача связана со следующими интересными проблемами теории многообразий алгебр Ли.

1. Описать все многообразия почти полиномиального роста.
2. Доказать или опровергнуть разрешимость многообразия, не содержащего простой трехмерной алгебры Ли.

В случае отрицательного решения третьей задачи мы получим еще один пример неразрешимого многообразия почти полиномиального роста и получим неразрешимое многообразие, не содержащее трехмерной простой алгебры Ли. Скорее всего третья задача решается положительно, т.е. неразрешимое многообразие экспоненциального роста имеет нижний показатель экспоненты больший или равный трем. Приведем некоторые соображения, и возможный путь доказательства такого утверждения.

Аналогично доказательству теоремы 1 несложно показать, что в многообразии с показателем меньше трех выполняется такое тождество

$$w_k = x_0 f_1(x_1, y_1, z_1) f_2(x_2, y_2, z_2) \cdots f_k(x_k, y_k, z_k) = 0,$$

где $f_s(x_s, y_s, z_s)$ ассоциативный многочлен от внутренних дифференцирований, линеаризация которого соответствует квадратной со стороной три диаграмме Юнга. Таким образом, достаточно доказать разрешимость многообразия с показателем меньше трех, в котором выполняются все тождества вида $x_0 f(x, y, z) = 0$, где многочлен f соответствует квадратной со стороной три диаграмме Юнга.

Список литературы

1. Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли со слабым ростом последовательности коразмерностей // Вестник МГУ. 1982. № 5. С. 63–66.
2. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли (обзор) // УМН. 1990. Т. 45. № 6 (276). С. 25–45.
3. Мищенко С. П. Тождество энгелевости и его приложения // Матем. сб. 1983. Т. 121. № 3. С. 423–430.
4. Батулин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
5. Бенедиктович И. И., Залесский А. Е. Т-идеалы свободной алгебры Ли с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей // Весті АН БССР. 1980. № 3. С. 5–10.
6. Воличенко И. Б. О многообразиях алгебр Ли AN_2 над полем характеристики нуль // ДАН БССР. 1981. Т. 25. № 12. С. 1063–1066.
7. Мищенко С. П. О некоторых классах алгебр Ли // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1992. № 3. С. 55–57.
8. Мищенко С. П. О многообразиях алгебр Ли промежуточного роста // Весті АН БССР. 1987. № 2. С. 42–45.
9. Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 1. С. 98–115.
10. Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весті АН БССР. 1987. № 6. С. 39–43.
11. Воличенко И. Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами. I // Весті АН БССР. Сер. фіз.-матем. наук. 1980. № 1. С. 23–30; // Весті АН БССР. Сер. фіз.-матем. наук. 1980. № 2. С. 22–29.
12. Higgins P. J. Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambridge Phil. Soc.: Math. and Phys. Sci. 1954. V. 50. P. 8–15.

Ульяновский филиал
Московского государственного
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31.01.1995