Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Орел, С. Такахашаи, Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 95–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:12:57

УДК 513.944

О. Е. Орел, Ш. Такахаши

**Траекторная классификация интегрируемых
задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина
методами компьютерного анализа**

Ранее О. Е. Орел вычислила траекторный инвариант для задачи Горячева–Чаплыгина. Было отмечено, однако, что исследование этого инварианта упирается в непреодолимые аналитические трудности. Настоящая работа завершает построение траекторного инварианта для задачи Горячева–Чаплыгина, а также для задачи Лагранжа методами компьютерного анализа. Тем самым для этих задач решается проблема траекторной классификации. В работе также сформулированы гипотезы, касающиеся случая Лагранжа, которые могут служить основой дальнейших исследований в этой области. Вычислительные алгоритмы были предложены О. Е. Орел. Их компьютерная реализация и сами вычисления принадлежат Ш. Такахаши.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Пусть $v = \text{sgrad } H$ – интегрируемая гамильтонова система на симплектическом многообразии (M^4, ω) . Ограничим эту систему на гладкую компактную изоэнергетическую поверхность $Q^3 = \{H = \text{const}\}$, на которой дополнительный интеграл F является боттовским (т.е. критическое множество F на Q^3 есть непересекающееся объединение невырожденных в смысле теории Морса многообразий). В рассматриваемых нами динамических системах почти все поверхности Q^3 обладают этим свойством. Кроме того, будем считать, что система нерезонансна, т.е. торы с иррациональной обмоткой всюду плотны в Q^3 . А. Т. Фоменко и А. В. Болсинов построили в [1] теорию траекторной классификации таких систем, опирающуюся на ранее разработанную в работах [2], [3] теорию топологической классификации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Динамические системы v_1 и v_2 на многообразиях Q_1 и Q_2 называются тонко топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\tau: Q_1 \rightarrow Q_2$, сохраняющий лиувиллево слоение этих многообразий на поверхности уровня дополнительных интегралов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Динамические системы (v_1, Q_1) и (v_2, Q_2) называются непрерывно траекторно эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\xi: Q_1 \rightarrow Q_2$, переводящий траектории первой системы в траектории второй с сохранением ориентации (но без сохранения времени).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-06-31604).

Если система нерезонансна, то лиувиллево слоение не зависит от выбора дополнительного интеграла. Следовательно, траекторно эквивалентные системы являются тонко топологически эквивалентными.

Согласно теории топологической классификации, каждой динамической системе (v, Q) ставится в соответствие некоторый инвариант $W^*(Q)$, называемый инвариантом Фоменко–Цишанга или меченой молекулой. Меченая молекула $W^*(Q)$ — это граф, описывающий лиувиллево слоение изоэнергетической поверхности Q . Ребра графа соответствуют однопараметрическим семействам неособых торов Лиувилля, а его вершины (атомы) описывают перестройки этих торов на особых уровнях интеграла F . Молекула снабжена числовыми метками r , n и ε , описывающими правила склейки лиувиллева слоения Q^3 из элементарных кусков. Траекторный инвариант $W^{*t}(Q)$ (инвариант Болсинова–Фоменко, или t -молекула), строится на основе меченой молекулы $W^*(Q)$ и содержит некоторые дополнительные траекторные характеристики системы. Теоремы, доказанные в работах [1]–[3], утверждают, что две интегрируемые системы являются тонко топологически (траекторно) эквивалентными тогда и только тогда, когда их меченые молекулы (соответственно, t -молекулы) совпадают.

Благодаря созданию новой теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем стало возможно их исследование. Для того чтобы ответить на вопрос, являются ли две динамические системы тонко топологически или траекторно эквивалентными, достаточно подсчитать и сравнить их инварианты. Конечно, многие задачи решаются здесь аналитически. Однако в некоторых случаях подсчет топологических инвариантов дифференциальных уравнений упирается в непреодолимые аналитические трудности. Тогда на помощь привлекаются компьютеры. Анализ именно таких систем и посвящена данная работа. По мнению авторов настоящая работа наглядно демонстрирует возможности компьютерных методов в интересных и сложных задачах гамильтоновой механики. Несмотря на неизбежные вычислительные погрешности, компьютерные диаграммы хорошо описывают качественную картину поведения рассматриваемых динамических систем.

В работе [4] О. Е. Орел вычислила тонкий топологический инвариант для случая Горячева–Чаплыгина в динамике тяжелого твердого тела и нашла явные формулы для *функции вращения*, на основе которой строится *вектор вращения* — единственный в этой задаче дополнительный нетривиальный траекторный инвариант. Функция вращения является функцией от лиувиллевых торов, т.е. от значений первых интегралов H и F системы. Однако аналитическое исследование характера этой зависимости затруднено из-за сложности формул. Поэтому на последнем этапе исследование поведения функции вращения и построение вектора вращения проводится с помощью компьютера.

Настоящая работа, в отличие от чисто теоретической работы [4], содержит обзор результатов компьютерного исследования вектора вращения для задачи Горячева–Чаплыгина. Здесь мы приводим используемые формулы без вывода со ссылкой на [4]. Кроме того, работа содержит материал по компьютерному анализу траекторного инварианта для случая Лагранжа в динамике твердого тела. Здесь мы сталкиваемся с похожей ситуацией: аналитические формулы сложны, и для их исследования приходится использовать компьютерные средства. Вычислительные

алгоритмы были предложены О. Е. Орел. Их компьютерная реализация и сами вычисления принадлежат Ш. Такахашаи.

Компьютерный анализ векторов вращения для задач Горячева–Чаплыгина и Лагранжа завершает построение траекторного инварианта для этих систем. Тем самым для этих задач решается проблема траекторной классификации. Основным результатом работы является установление следующего экспериментального результата.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

- (1) *Динамические системы Горячева–Чаплыгина, ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно неэквивалентны.*
- (2) *Динамические системы Лагранжа, отвечающие одному набору параметров, но ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно неэквивалентны.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученные экспериментальные результаты являются следствием монотонной зависимости вектора вращения от энергии. Расчеты, выполненные с большой компьютерной точностью, явно показывают требуемую монотонность. Строго говоря, это не гарантирует того, что здесь нет очень слабых, почти незаметных возмущений. Однако, аналитический характер исследуемых функций позволяет предположить, что полученные результаты достаточно надежны.

Работа была выполнена в рамках сотрудничества между кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ и лабораторией профессора Т. Л. Куни, президента университета города Айзу (Япония).

Авторы благодарят профессора А. Т. Фоменко и А. В. Болсинова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 2. Необходимые определения

Первоначальную информацию о системе несет образ отображения момента и бифуркационная диаграмма. Напомним, что *отображением момента* называется отображение $\Phi: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, сопоставляющее точке на многообразии пару значений функций H и F в этой точке: $x \rightarrow (H(x), F(x))$. Очевидно, что лиувилев тор изображается на плоскости одной точкой. *Множеством особенностей* отображения момента называется множество точек M^4 , в которых функции H и F зависимы: $K = \{x \in M^4 : \text{rk } d\Phi(x) < 2\}$. Образ этого множества $\Sigma = \Phi(K)$ называется *бифуркационной диаграммой*. Нетрудно показать, что связная компонента прообраза $F^{-1}(y)$, $y \in \Sigma$, содержащая точки множества K , уже, как правило, не является тором и даже многообразием, а соответствует некоторой перестройке этих торов. Как известно, перестройки торов Лиувилля могут иметь разнообразный характер. В работе [3] расклассифицированы все перестройки: каждая перестройка обозначена некоторой буквой латинского алфавита, снабженной индексами. Простейшие перестройки (атомы) обозначены буквами A , A^* и B : буква A характеризует вырождение тора в окружность, буква B – распад одного тора на

два (или, наоборот, слияние двух торов в один), а буква A^* – более сложную перестройку тора снова в тор. Молекулы динамических систем Горячева–Чаплыгина и Лагранжа содержат только эти простейшие атомы.

На следующем этапе с использованием информации об образе отображения момента и бифуркационной диаграмме, а также о характере перестроек торов строится грубая молекула. Более тонкий анализ позволяет вычислить метки r , n и ε (определение см. в [3]).

Меченая молекула полностью описывает лиувиллево слоение многообразия Q^3 , однако она не дает никакой информации о том, как ведут себя траектории системы $v = \text{sgrad } H$ на торах. Одним из главных инвариантов, характеризующих траекторное поведение систем, является вектор вращения. Оказывается, что для рассматриваемых в работе систем, вектор вращения – это единственный дополнительный нетривиальный траекторный инвариант (см. [5]).

Пусть $I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2$ – стандартные переменные “действие–угол” в окрестности неособого лиувиллева тора. Тогда в этой окрестности переменные “действие” вычисляются по следующей формуле (см. [6])

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \varkappa_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

где γ_1, γ_2 – базисные циклы на торах, такие что их гомотопические классы в окрестности данного тора не зависят от тора. В последней формуле через $\varkappa$ обозначена 1-форма, такая что $d\varkappa = \omega$ в рассматриваемой окрестности. В [6] также было показано, что правая часть формулы (2.1) не зависит от цикла γ_i , рассматриваемого как представителя фиксированного элемента фундаментальной группы. Легко понять, что значение переменной I_i на семействе торов определено с точностью до постоянного слагаемого.

Поскольку векторное поле $v = \text{sgrad } H$, записанное в переменных “действие–угол”, постоянно, мы можем ввести понятие числа вращения на лиувиллевом торе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Тангенс угла между гамильтоновым векторным полем $v = \text{sgrad } H$ и осью φ_2 называется числом вращения лиувиллева тора:

$$\rho = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\partial H}{\partial I_1} \bigg/ \frac{\partial H}{\partial I_2}. \quad (2.2)$$

На семействе лиувиллевых торов мы, таким образом, имеем функцию вращения $r = r(H, F)$. Понятно, что данное определение зависит от выбора гомотопических классов $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$ на этом семействе. Однако если мы будем рассматривать семейство лиувиллевых торов не обособлено, а как часть молекулы $W^*(Q)$, то циклы (γ_1, γ_2) можно выбрать каноническим образом. Это позволяет однозначно определить функцию ρ на ребре молекулы.

Действительно, рассмотрим изоэнергетическую поверхность $Q^3(H)$. Тогда на каждом ребре соответствующей молекулы (семействе однопараметрических торов Лиувилля) определены допустимые системы координат (λ^-, μ^-) и (λ^+, μ^+) (см. [3]). Они отвечают двум атомам молекулы, соединяемым данным ребром.

Циклы λ^- и λ^+ определены однозначно: это исчезающие на атоме A меридианы или седловые окружности атома (в случае, если атом отличен от A). Циклы μ^- и μ^+ дополняют λ^- и λ^+ до базиса и определены неоднозначно. Таким образом, на каждом ребре определена матрица перехода от одного базиса к другому (матрица склейки)

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

и, следовательно, пара функций ρ^- и ρ^+ .

Функции ρ^- и ρ^+ зависят от выбора циклов μ^- и μ^+ . Однако нетрудно показать, что если $\beta \neq 0$, то функция $\rho = \beta\rho^- - \alpha$ зависит только от циклов λ^- и λ^+ и является корректно определенным траекторным инвариантом системы с точностью до сопряжения (монотонной замены аргумента).

Функция вращения ρ , определенная с точностью до сопряжения, полностью определяется своим вектором вращения R , состоящим из

- (1) локальных минимумов и максимумов функции ρ ,
- (2) пределов функции ρ на концах ребра,
- (3) символов $\pm\infty$, указывающих левые и правые пределы функции ρ в ее полюсах.

Все перечисленные компоненты вектора R последовательно выписываются при движении вдоль ребра.

В случае, когда $\beta = 0$, положим $\rho = \rho^-$, а вектор R определим, как выше. Заметим, что в этом случае мы должны рассматривать вектор R по модулю 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Кажется, что формулы (2.1) и (2.2) полностью решают вопрос о нахождении формул для функций вращения. Однако это не так. Основная трудность здесь состоит в том, что в реальных физических задачах лиувиллевы торы заданы в неявном виде. Например, в задачах динамики твердого тела лиувиллев тор задается четырьмя уравнениями порядка 2 или выше в шестимерном пространстве. В такой ситуации напрямую воспользоваться формулами невозможно: ведь надо выбрать пару независимых циклов на торе и понять, как эти циклы связаны с допустимыми системами координат, т.е. проследить их эволюцию при приближении к атомам. Это очень непростая задача. В настоящей работе будут предложены два подхода к решению этой проблемы, реализованные при исследовании случаев Горячева–Чаплыгина и Лагранжа.

Напомним, что движение твердого тела в $\mathbb{R}^3$ описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{s} = [s, \omega] + [r, u], \\ \dot{r} = [r, \omega]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь s — кинетический момент тела; ω — угловая скорость тела; r — единичный вектор, направленный по вертикальной оси; $u = mx$, где m — масса тела, а $x = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор центра масс.

Динамическая система (2.3), заданная в пространстве $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3(s) \times \mathbb{R}^3(r)$, имеет три интеграла

$$\begin{aligned} f_1 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \\ f_2 &= s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3, \\ H &= \frac{1}{2} \langle s, h^{-1}(s) \rangle + m \langle x, r \rangle, \end{aligned}$$

где $h = \text{diag}(A, B, C)$, A, B, C – главные моменты инерции тела, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3(s)$.

Как известно, можно задать симплектическую структуру на совместной поверхности уровня $M^4 = \{f_1 = 1, f_2 = g\}$ через структуру скобок Пуассона

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad \{s_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k.$$

При этом система (2.3) оказывается гамильтоновой на этом многообразии. В общем случае система (2.3) не является интегрируемой, однако при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты у системы существует дополнительный интеграл. К таким системам, в частности, относятся задачи Горячева–Чаплыгина и Лагранжа.

В случае Горячева–Чаплыгина мы имеем дело с твердым телом, главные моменты инерции которого удовлетворяют соотношениям $A = B = 4C$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, т.е. $x_3 = 0$. Задача Горячева–Чаплыгина является полностью интегрируемой только при $g = 0$. Линейной заменой координат, сохраняющей пуассонову структуру, гамильтониан и дополнительный интеграл можно привести к виду

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + r_1, \\ F &= s_3(s_1^2 + s_2^2) - s_1 r_3. \end{aligned}$$

Случай Лагранжа характеризуется тем, что $A = B > C$ и $x_1 = x_2 = 0$. Это означает, что твердое тело в этом случае – это осесимметричный волчок, эллипсоид инерции которого является эллипсоидом вращения, а центр тяжести лежит на оси вращения. После линейной замены координат, сохраняющей пуассонову структуру, гамильтониан и дополнительный интеграл для случая волчка Лагранжа принимают вид ($\beta = C/A$)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{s_3^2}{\beta} \right) + a r_3, \\ F &= s_3. \end{aligned}$$

В работе, однако, исследуется эта задача в несколько более общем виде, а именно, вместо линейного потенциала $a r_3$ мы будем рассматривать произвольный гладкий выпуклый потенциал $V(r_3)$, описывающий, вообще говоря, негравитационное действие внешних сил.

§ 2. Задача Горячева–Чаплыгина

Анализ динамических систем начинается обычно с построения образа отображения момента и бифуркационной диаграммы. Это необходимо для того, чтобы очертить область значений гамильтониана и дополнительного интеграла. Кроме того, по виду бифуркационной диаграммы можно составить грубое представление о возможных перестройках торов и, следовательно, о молекулах системы.

Уравнения бифуркационной диаграммы для случая Горячева–Чаплыгина имеют следующий вид [7], [8]:

$$\begin{cases} F = 0, & H > -1, \\ H = \frac{3}{2}t^2 \pm 1, & F = t^3. \end{cases}$$

Рис. 1

Образ отображения момента и бифуркационная диаграмма изображены на рис. 1. В работе [7] был проведен детальный анализ перестроек торов в задаче Горячева–Чаплыгина. Приведем основные результаты этого исследования. Образ отображения момента Φ есть область $\{H \geq \frac{3}{2}F^{2/3} - 1\}$. При этом прообразы точек кривой $\{H = \frac{3}{2}F^{2/3} - 1\} \setminus \{(-1, 0)\}$ – это критические минимаксные окружности, здесь происходит “рождение” торов. Прообраз каждой точки области $D_1 = \{\frac{3}{2}F^{2/3} - 1 < H < \frac{3}{2}F^{2/3} + 1, F \neq 0\}$ – это лиувиллев тор. На интервале $\{F = 0, -1 < H < 1\}$ мы наблюдаем перестройку тора снова в тор, обозначаемую буквой A^* . На кривой $\{H = \frac{3}{2}F^{2/3} + 1\} \setminus \{(1, 0)\}$ один лиувиллев тор перестраивается в два (атом B), и уже прообразом каждой точки области $D_2 = \{H > \frac{3}{2}F^{2/3} + 1, F \neq 0\}$ является объединение двух торов Лиувилля. При подходе к лучу $\{F = 0, H > 1\}$ по области $\{F > 0\}$ или $\{F < 0\}$ происходит исчезновение одного из торов и рождение нового (два атома A), другой же тор свободно “проходит” этот луч, оставаясь неособым.

В [7] также был построен инвариант Фоменко (молекула без меток) для случая Горячева–Чаплыгина. Оказалось, что перестройки торов имеют качественное различие на многообразиях $Q^3(H_1)$ и $Q^3(H_2)$ при H_1 и H_2 , принадлежащих

интервалам $(-1, 1)$ (первая зона) и $(1, +\infty)$ (вторая зона), соответственно, а при H_1 и H_2 из одной зоны перестройки качественно не различаются. В первом случае грубая молекула имеет вид, изображенный на рис. 2а, а во втором – на рис. 2б (римские цифры на рисунке нумеруют ребра молекул). Обратим внимание, что при отображении момента торам с ребра I в плоскости (H, F) соответствуют точки из области D_1 , а торам с ребер II и III – точки области D_2 . Грубый анализ показывает, что системы Горячева–Чаплыгина не являются тонко топологически эквивалентными (и тем более траекторно эквивалентными) на трехмерных изоэнергетических поверхностях, для которых значения энергий лежат в разных зонах.

Рис. 2

Для построения тонкого топологического инварианта для этой задачи (т.е. для вычисления меток в грубой молекуле) необходим более тонкий анализ системы. Для этого мы воспользуемся тем замечательным фактом, что система Горячева–Чаплыгина является полностью алгебраически интегрируемой. В данном случае это означает, что существует отображение (двулистное разветвленное накрытие) $G: M^4 \rightarrow N^4$, заданное следующими формулами [9]:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= s_3, \\ z_1 z_2 &= -\frac{1}{4}(s_1^2 + s_2^2), \\ H &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 4s_3^2) + r_1, \\ F &= s_3(s_1^2 + s_2^2) - s_1 r_3, \end{aligned}$$

которое переводит динамическую систему (2.3) в систему уравнений Абеля

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P(z_1)}}{z_1 - z_2}, \\ \dot{z}_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P(z_2)}}{z_1 - z_2}, \\ \dot{H} = 0, \\ \dot{F} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$P(z) = -P_+(z)P_-(z), \quad P_{\pm}(z) = \left(z^3 - \frac{1}{2}(H \pm 1)z - \frac{F}{4}\right).$$

Эту динамическую систему нужно понимать следующим образом. Пусть для определенности в начальный момент времени $z_1 > z_2$ и значения многочлена $P(z)$ в этих точках больше нуля. Тогда если в начальный момент времени значения обоих корней в системе положительно, то переменные z_1 и z_2 начинают возрастать. Они возрастают до того момента, пока одна из переменных не достигнет значения, где многочлен $P(z)$ обращается в нуль. В этот момент значение корня из $P(z)$ меняет знак, и соответствующая переменная начинает убывать до тех пор, пока не встретит другой корень многочлена. Здесь корень снова меняет знак, и процесс повторяется. То же самое происходит и с другой переменной. Таким образом, лиувиллев тор при такой замене отображается на декартово произведение отрезков $[p_i, q_i] \times [p_j, q_j]$, где p_i, q_i, p_j, q_j – различные простые корни многочлена $P(z)$, и $P(z) > 0$ внутри этих отрезков.

Отметим, что координаты (z_1, z_2) не являются регулярными на многообразии N^4 . Однако если мы введем новые локальные координаты $w^2 = P(z)$ в окрестности корней многочлена $P(z)$, то система (3.1) уже не будет иметь особенностей в тех точках, где $P(z) = 0$, а образом тора будет произведение двух окружностей

$$\{w_i^2 = P(z_i), z_i \in [p_i, q_i]\} \subset \mathbb{R}^2(z, w), \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Пусть $T_L^I(H, F)$, $T_L^{II}(H, F)$, $T_L^{III}(H, F)$ – лиувиллевы торы, лежащие на уровне $\{H = \text{const}, F = \text{const}\}$ и принадлежащие ребрам I, II, III, соответственно. Обозначим через u_1, u_2, u_3 ($u_1 < u_2 < u_3$) корни уравнения $P_+(z) = 0$, а через v_1, v_2, v_3 ($v_1 < v_2 < v_3$) корни уравнения $P_-(z) = 0$. Кроме того, если уравнение $P_-(z) = 0$ имеет единственный корень, обозначим его через v . В работе [4] было показано, что тор T_L^{II} при отображении G проектируется на произведение (в локальных координатах) отрезков $[u_1, v_1] \times [v_3, u_3]$, тор T_L^{III} – на произведение $[v_i, u_i] \times [v_j, u_j]$ (где $(i, j) = (2, 3)$ при $F > 0$, $(i, j) = (1, 2)$ при $F < 0$), тор T_L^I – на произведение $[u_1, u_2] \times [v, u_3]$. В той же работе построен образ изоэнергетической поверхности $Q(h)$, $h > 1$ (рис. 4 [4]).

В работе [4] доказано, что лиувиллевы торы двулистно накрывают торы (3.2). Анализ структуры указанного накрытия позволяет вычислить тонкий топологический инвариант в задаче Горячева–Чаплыгина. В этой работе также получены формулы для функции вращения на ребрах молекулы. Здесь мы приводим их без доказательства.

ТЕОРЕМА [4].

(1) На ребре I число вращения вычисляется по формуле

$$\rho = \begin{cases} 2\rho_0 & \text{при } H > 1, \\ \frac{2\rho_0}{\rho_0 - 1} & \text{при } -1 < H < 1, \end{cases}$$

где

$$\rho_0 = \begin{cases} R(u_2, u_1, u_3, v) & \text{при } F > 0, \\ R(u_3, u_2, v, u_1) & \text{при } F < 0. \end{cases}$$

(2) На ребре II число вращения вычисляется по формуле

$$\rho = R(u_1, v_1, u_3, v_3).$$

(3) На ребре III число вращения вычисляется по формуле

$$\rho = \begin{cases} R(u_2, v_2, u_3, v_3) & \text{при } F > 0, \\ R(v_2, u_2, v_1, u_1) & \text{при } F < 0. \end{cases}$$

Во всех формулах через $R(\lambda, \mu, \xi, \eta)$ обозначено отношение

$$\int_{\mu}^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \bigg/ \int_{\eta}^{\xi} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из общей теории эллиптических интегралов следует, что функции вращения на ребрах II и III отличаются на константу, равную 1.

Рис. 3а

Рис. 3б

Рис. 4

Аналитически анализировать функцию вращения, заданную в таком виде, достаточно сложно. Поэтому авторы были вынуждены прибегнуть к компьютерному анализу. Линии уровня функции вращения на ребрах I и II изображены на рис. 3 а, б (в соответствии с замечанием, линии уровня функции ρ на ребре III такие же, как и на ребре II). Мы видим, что почти всюду функция вращения монотонна, за исключением небольшого участка $H \in (1, H_0)$, $H_0 \approx 1.2$, где возникает локальный экстремум на ребре I. На основе теоретического и компьютерного анализа можно сделать вывод, что вектора вращения на ребрах I, II и III имеют следующий вид:

$$R_{II} = (\infty, 0), \quad R_{III} = (\infty, 2),$$

$$R_I = \begin{cases} (\infty, 2R) & \text{при } H > H_0, \\ (\infty, 2R_t, 2R) & \text{при } 1 < H \leq H_0, \\ \left(\infty, \frac{2R}{R-1}\right) & \text{при } H \leq 1, \end{cases}$$

где график функции $R(H)$ построен на рис. 4, а R_t — небольшое возмущение, соответствующее локальному экстремуму функции вращения.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [4] была допущена неточность: там утверждалось, что функция вращения всюду монотонна. Однако, это не повлияло на результат.

Ранее был сделан вывод, что системы, ограниченные на две различные поверхности уровня гамильтониана, траекторно неэквивалентны, если значение гамильтониана принадлежит разным зонам $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. Теперь мы можем ответить на вопрос, эквивалентны ли системы из одной зоны. Из рис. 4 видно, что зависимость R от H строго монотонная. Это означает, что траекторный инвариант W^{*t} для систем Горячева–Чаплыгина, соответствующих разным уровням энергии, различен (он различается только вектором вращения для систем, лежащих в одной зоне). Таким образом, мы получили следующий

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ. *Динамические системы Горячева–Чаплыгина, ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно неэквивалентны.*

§4. Задача Лагранжа

Случай Лагранжа интересен тем, что, в отличие от случая Горячева–Чаплыгина, он содержит три параметра. Напомним, что его параметрами являются постоянная площадей g , параметр β и гладкая выпуклая функция $V(x)$. Поэтому мы можем сравнивать между собой не только ограничения одной и той же системы на разные уровни энергии, но и системы с разными параметрами. Тем самым существенно расширяется область исследования, и возникает много интересных вопросов, часть из которых будет обсуждена в настоящей главе.

Отображение момента для случая Лагранжа было изучено А. А. Ошемковым в [7]. Оказалось, что образ отображения момента есть множество

$$D = \{W(x) \geq 0\},$$

где x находится из системы

$$\begin{cases} W'(x) = 0, & |x| < 1, \\ W(x) = H - \frac{F^2}{2\beta} - V(x) - \frac{(g - Fx)^2}{2(1 - x^2)}, \end{cases} \quad (4.1)$$

а бифуркационная диаграмма – это кривая $W(x) = 0$ (x задается той же системой (4.1)). На этих кривых происходит вырождение тора в окружность (минимаксная перестройка).

Бифуркационной диаграмме принадлежат также точки

$$P_1 = \left(\frac{g^2}{2\beta} + V(1), g \right) \quad \text{и} \quad P_2 = \left(\frac{g^2}{2\beta} + V(-1), -g \right).$$

При некоторых значениях параметров эти точки или одна из них лежат на кривой $W(x) = 0$, и тогда их прообраз в M^4 состоит из одной точки. При других параметрах они изолированы. Прообразом изолированной особой точки будет тор, в котором одна из образующих отождествлена в точку. Бифуркационная диаграмма для двух различных наборов параметров ($g = 1, \beta = 0.5, V(x) = x + 1$ и $g = 1, \beta = 0.5, V = x^2 + \frac{1}{2}x$) изображена на рис. 5. С точки зрения топологического анализа случай двух изолированных особых точек является наиболее общим, и теория будет построена именно для этого случая. Однако, все, что будет сказано, легко обобщается и на остальные случаи. Прообраз каждой неособой точки из образа отображения момента состоит ровно из одного тора, и в дальнейшем будет удобно не различать тор и его образ при отображении момента.

Грубая молекула для случая Лагранжа имеет простейший вид $A \text{ — } A$. Хорошо известна тонкая топологическая классификация этого случая. Результат можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим три области на оси H :

$$\left\{ H_0 < H < \frac{g^2}{2\beta} + v_l \right\}, \quad \left\{ \frac{g^2}{2\beta} + v_l < H < \frac{g^2}{2\beta} + v_r \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{g^2}{2\beta} + v_r < H < \infty \right\},$$

Рис. 5а

Рис. 5б

где H_0 – наименьшее значение H из области значений отображения момента, $v_l = \min(V(1), V(-1))$, $v_r = \max(V(1), V(-1))$ (некоторые области могут быть пустыми). Рассмотрим две гамильтоновы системы $v_1 = \text{sgrad } H_1$ и $v_2 = \text{sgrad } H_2$, где $H_i = H_i(\beta_i, V_i)$, $i = 1, 2$, на многообразиях M_1^4 и M_2^4 , соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ (А. А. Ошемков). *Две системы Лагранжа v_1 и v_2 , ограниченные, соответственно, на 3-многообразия $Q_1 = \{H_1 = h_1\}$ и $Q_2 = \{H_2 = h_2\}$ тонко топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда значения h_1 и h_2 лежат в одной области.*

Чтобы провести траекторный анализ случая Лагранжа, необходимо вычислить функцию вращения $\rho(H, F)$ и найти ее локальные экстремумы и пределы на концах ребер при всех фиксированных значениях гамильтониана H . Для вычисления функции вращения мы на этот раз воспользуемся явными формулами (2.1) и (2.2). Изложим вкратце суть построений, более подробное изложение можно найти в [10].

Лиувиллев тор хорошо виден в проекции многообразия M^4 в пространство $\mathbb{R}^3(r)$. При этом проекция тора представляет собой цилиндр $\{a \leq r_3 \leq b\}$ на сфере $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, где $a, b \leq 1$ — нули функции $W(r_3)$, а сама функция W строго больше нуля в интервале (a, b) . Это наглядное представление мотивирует выбор циклов на нем:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{r_3 = c\}, \\ \gamma_2 &= \{s_2 = 0, s_1 > 0\}.\end{aligned}$$

Отсюда легко понять, как циклы γ_1 и γ_2 меняются при движении по ребру молекулы. Оказывается, что при приближении к бифуркационной диаграмме цикл γ_1 превращается в критическую окружность, а цикл γ_2 вырождается в точку. Отметим также, что цикл γ_1 определен глобально и гладко во всей области, а цикл γ_2 претерпевает резкую перестройку при переходе через кривые

$$H - \frac{F^2}{2\beta} - V\left(\frac{g}{F}\right) = 0, \quad |F| > g, \quad (4.2)$$

выходящие из точек P_1 и P_2 , соответственно. Это не удивительно: детальный топологический анализ окрестности изолированной особой точки типа “фокус–фокус” (к этому типу относятся изолированные точки P_1 и P_2), выполненный В. С. Матвеевым, показывает, что при обходе вокруг этой точки цикл γ_1 не изменяется, а цикл γ_2 переходит в цикл $\gamma_2 \pm \gamma_1$ (в зависимости от направления обхода). Отсюда вытекает невозможность глобального выбора пары циклов на всех торах системы одновременно. Однозначно можно выбрать пару циклов только в односвязной области, т.е. в D без двух разрезов, выходящих из особых точек. При первоначальном выборе циклов роль разрезов выполняли кривые (4.2). Но поскольку мы интересуемся поведением системы на изоэнергетических поверхностях, то более разумным оказывается следующий выбор циклов:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{r_3 = c\}, \\ \gamma_2 &= \begin{cases} \gamma + \gamma_1 & \text{при } \frac{g^2}{2\beta} + V(1) < H < \frac{F^2}{2\beta} + V\left(\frac{g}{F}\right), F > g, \\ \gamma - \gamma_1 & \text{при } \frac{g^2}{2\beta} + V(-1) < H < \frac{F^2}{2\beta} + V\left(\frac{g}{F}\right), F < -g, \\ \gamma & \text{в остальных случаях.} \end{cases}\end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma = \{s_2 = 0, s_1 > 0\}.$$

Прямым вычислением из формулы (2.1) получаем выражения для переменных “действие”:

$$I_1 = F,$$

$$I_2 = \begin{cases} I + F - g & \text{при } H > \frac{g^2}{2\beta} + V(1), F > g, \\ I - F - g & \text{при } H > \frac{g^2}{2\beta} + V(-1), F < -g, \\ I & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$I = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sqrt{(2H - (F^2/\beta) - 2V(x))(1 - x^2) - (g - Fx)^2}}{1 - x^2} dx. \quad (4.3)$$

В последней формуле a и b — два последовательных нуля функции $W(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, причем $W(x) > 0$ внутри отрезка $[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при таком определении переменная I_2 является гладкой во всей области D значения отображения момента с удаленными разрезами. Переменные “действие” ранее были получены Аксененковой в [11] в виде $I_1 = F$, $I_2 = I$, где функция I определяется формулой (4.3). Она не заметила, что переменная I_2 при этом только непрерывная, но не гладкая. Однако, изучение глобального поведения этих координат не было ее целью.

Формула (2.2) дает выражение для функции вращения, которое после очевидных преобразований может быть приведено к виду

$$\rho = -\frac{\partial I_2}{\partial F}.$$

Эта функция является гладкой в области D без вертикальных разрезов, а на границе разрезов она изменяется скачком на единицу. Линии уровня функции вращения построены на рис. 5а и 6а для двух различных наборов параметров. На рис. 5б и 6б изображен вектор вращения R как функция от H . Это совокупность двух, трех или четырех отдельных графиков, представляющих собой эволюцию локальных максимумов и минимумов и пределов функции ρ на бифуркационной диаграмме при изменении H . Эксперимент проводился для нескольких наборов параметров (порядка десяти), включая два рассмотренных примера. Для них были построены соответствующие графики $R(H)$. Во всех случаях справедлив следующий

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ. *Для рассмотренных примеров динамические системы Лагранжа, отвечающие одному набору параметров, но ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно неэквивалентны.*

Для произвольных наборов параметров ответ на этот вопрос неизвестен. Можно лишь сформулировать следующую гипотезу.

Рис. 6а

Рис. 6б

ГИПОТЕЗА 1. Динамические системы Лагранжа, отвечающие одному набору параметров с линейным или квадратичным потенциалом, но ограниченные на различные трехмерные поверхности уровня энергии, попарно непрерывно траекторно неэквивалентны.

Интересен вопрос о том, эквивалентны ли между собой системы Лагранжа с различными параметрами. Смоделировать эту задачу на компьютере можно следующим образом. Пусть для простоты потенциал линеен ($V(x) = x$), и даны два набора параметров (g_1, β_1) и (g_2, β_2) , соответствующие гамильтонианы обо-

значим через H_1 и H_2 . В обоих случаях рассмотрим зону больших энергий, т.е. луч $H_i \geq H_0$, на котором функция вращения становится монотонной. В плоскости (R_1, R_2) мы можем построить две кривые, заданные параметрически: $(R_1(H_1), R_2(H_1))$ и $(R_1(H_2), R_2(H_2))$. Здесь через R_1 и R_2 обозначены два предела функции вращения на концах ребер. Если в некоторой точке эти кривые пересеклись, то существуют два значения гамильтонианов h_1 и h_2 , для которых траекторные инварианты данных систем с разными параметрами совпадают. Это означает, что на соответствующих изоэнергетических поверхностях две системы траекторно эквивалентны. Точно также, самопересекающаяся кривая опровергает гипотезу.

Рис. 7

Компьютерная реализация представленной модели показана на рис. 7. Отметим, что этот рисунок подтверждает нашу гипотезу, а также позволяет сформулировать новую.

ГИПОТЕЗА 2. *Динамические системы Лагранжа, отвечающие двум разным наборам параметров с линейным потенциалом, непрерывно траекторно эквивалентны не более, чем на одном уровне энергии.*

Список литературы

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации I, II // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4. С. 27–80; № 5. С. 27–78.
2. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 3. С. 546–575.

3. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация простых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 49–78.
4. Орел О. Е. Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация случая Горячева–Чаплыгина // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 105–128.
5. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация простых интегрируемых гамильтоновых систем на трехмерных поверхностях постоянной энергии // ДАН. 1993. Т. 332. № 5. С. 553–555.
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
7. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equation // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 67–146.
8. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
9. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.
10. Orel O. E. Topological and orbital analysis of integrable Lagrange and Goryachev–Chaplygin problems. Appendix D // Computer modelling for visualization. A. T. Fomenko, T. L. Kunii: Springer-Verlag, 1995 (to appear).
11. Аксененкова И. М. Канонические переменные угол–действие в задаче о волчке Лагранжа // Вестник МГУ. Сер. матем. 1981. № 1. С. 86–90.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
20.06.1995