Общероссийский математический портал

М. В. Самохин, К вопросу о существовании аналитических функций с заданным модулем граничных значений, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 113–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 08:45:58

УДК 517.53

М. В. Самохин

К вопросу о существовании аналитических функций с заданным модулем граничных значений

В работе рассматривается вопрос о возможности ослабления условий, накладываемых на граничную функцию в задаче о существовании автоморфных аналитических функций с заданным модулем граничных значений. Приводится интерпретация полученных ранее результатов в терминах компактификаций Винера и Мартина.

Библиография: 6 названий.

Введение. Пусть D – произвольная область расширенной плоскости, граница которой компактна в конечной плоскости и имеет положительную аналитическую емкость;

$\pi: \Delta \rightarrow D$ – универсальное накрывающее отображение единичного круга Δ на область D ;

G – группа всех дробно-линейных отображений $\gamma: \Delta \rightarrow \Delta$ единичного круга на себя таких, что $\pi \circ \gamma = \pi$;

$L^p(d\theta, G)$ – подпространство из $L^p(d\theta)$, состоящее из функций, автоморфных относительно группы G ;

$H^p(\Delta, G)$ и $S(\Delta, G)$ – подпространства, соответственно, пространства Харди $H^p(\Delta)$ и класса функций Смирнова $S(\Delta)$, состоящие из функций, автоморфных относительно группы G ;

$h^\infty(D)$ – пространство ограниченных гармонических в области D функций; L – минимальная компактификация области D , в которой все функции из $h^\infty(D)$ непрерывны;

Ch – граница Шоке пространства $h^\infty(D)$;

Ш – граница Шилова алгебры $H^\infty(D)$;

P_z – ядро Пуассона для точки $z \in \Delta$;

$d\lambda$ – естественная проекция меры $d\theta$ на M ;

M_{L^∞} и $M_{L^\infty(d\lambda)}$ – пространства максимальных идеалов алгебр $L^\infty(d\theta, G)$ и $L^\infty(d\lambda)$;

мультипликативная в области D функция – многозначная аналитическая в области D функция с однозначным модулем;

Γ_f – характер на фундаментальной группе области D , порождаемый мультипликативной функцией f ;

$H^\infty(D, \Gamma)$ – множество всех ограниченных мультипликативных в области D функций f таких, что $\Gamma_f = \Gamma$;

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № MB6300) и Госкомитета Российской Федерации по высшему образованию (грант № 94-1.2-13).

В работах [1]–[3] основное внимание было уделено различным вопросам, связанным с изучением следующих задач.

ЗАДАЧА 1. Пусть u – измеримая на единичной окружности функция, автоморфная относительно группы G такая, что $u \geq 0$ и $|\ln u| \in L^1(d\theta, G)$. Существует ли аналитическая в единичном круге функция $H \in S(\Delta, G)$ такая, что $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности (здесь под $H(e^{i\theta})$ понимаются радиальные граничные значения функции H)?

При этом, если известно, что $u \in L^p(d\theta, G)$, то от функции H предполагается вхождение в класс $H^p(\Delta, G)$.

ЗАДАЧА 2. Будет ли алгебра $H^\infty(\Delta, G)$, естественно вложенная в $L^\infty(d\theta, G)$ посредством радиальных граничных значений, разделять точки пространства M_{L^∞} максимальных идеалов алгебры $L^\infty(d\theta, G)$ и, если да, то совпадают ли Π и M_{L^∞} ?

В частности, была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) для любой вещественной функции $u \in L^\infty(d\theta, G)$, $u \geq \rho > 0$, найдется функция $H \in H^\infty(\Delta, G)$ такая, что $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности;
- (2) для любой вещественной измеримой на единичной окружности функции u , автоморфной относительно группы G и такой, что $u \geq \rho > 0$ и $|\ln u| \in L^1(d\theta, G)$, найдется аналитическая в единичном круге функция $H \in S(\Delta, G)$ такая, что $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности;
- (3) $C(\Pi) \cong L^\infty(d\theta, G) \cong C(\text{supp } \lambda) \cong h^\infty(D) \cong L^\infty(d\lambda)$ (здесь $C(E)$ – пространство непрерывных на E функций, $\cong$ – естественный изоморфизм);
- (4) алгебра $H^\infty(\Delta, G)$ разделяет точки пространства M_{L^∞} , и пространства M_{L^∞} , $M_{L^\infty(d\lambda)}$, Π , Ch естественно гомеоморфны друг другу.

Области, для которых справедливы эти утверждения называются *гармоничными*.

ТЕОРЕМА О ЛОКАЛИЗАЦИИ. *Если у каждой точки $\zeta \in \partial D$, за исключением, быть может, точек из некоторого множества $E \subset \partial D$ гармонической меры нуль, существует окрестность U_ζ такая, что гармоничной является каждая компонента пересечения $U_\zeta \cap D$, то и вся область D является гармоничной.*

Основным, в настоящей работе, является вопрос о том, насколько существенным является условие отделенности от нуля функции u в теореме об эквивалентности. Это объясняется тем, что изначально это условие имело чисто “техническое” происхождение.

В п. 1 работы приводится пример, который показывает, что “внутри” класса гармоничных областей условие $u \geq \rho > 0$ является условием по существу, и не

может быть изменено на классическое $u \geq 0$. В п. 2 в терминах нулевых множеств классов $H^\infty(D)$ и $S(D)$ получено описание класса областей, где такая замена возможна. При этом, однако, оказывается, что для этого класса областей теорема о локализации перестает быть верной. В заключительном замечании приводятся описания класса гармоничных областей в терминах классических компактификаций Винера и Мартина.

1. В основу предлагаемого примера положена одна конструкция А. А. Гончара [4], в которой, путем выбрасывания из единичного круга Δ последовательности кругов $\Delta(z_i, r_i)$, накапливающихся к единичной окружности, построена область D , обладающая следующими свойствами:

- 1) единичная окружность, как часть границы области D , имеет гармоническую меру нуль;
- 2) если функция f аналитична в области D и $f(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow 1$, то $f \equiv 0$.

Из первого свойства этой области и теоремы о локализации немедленно следует, что область D гармонична. Задача заключается в том, чтобы подобрать функцию $u \geq 0$, $|\ln u| \in L^1(d\theta, G)$, для которой не существует аналитической в единичном круге функции $H \in S(\Delta, G)$ такой, что $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности.

Обозначим через ω_i гармоническую меру множества $\partial\Delta(z_i, r_i) \subset \partial D$. Тогда, в соответствии со свойством 1) области D получаем, что $\sum_i \omega_i = 1$. Мы хотим построить последовательность неотрицательных чисел c_i такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0$ и ряд $\sum_i \omega_i \ln c_i$ сходится. Положим $S_n = \sum_{i=1}^n \omega_i$. Тогда $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Пусть $p_k = \min\{p; S_p \geq 1 - 1/2^{2k}\}$. Тогда

$$S'_{p_k} = S - S_{p_k} \leq 1 - 1 + \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2^{2k}}.$$

Понятно, что последовательность p_k не убывает и стремится к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, для любого $N > 0$ существует лишь конечное число p_k таких, что $p_k < N$. Рассмотрим ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j 2^{m_j}$, где $m_j = \max\{p_k; p_k \leq j\}$, а в случае, если номер j таков, что все $p_k > j$, мы полагаем $m_j = 0$. Пусть $\Sigma_n = \sum_{j=1}^{p_n} \omega_j 2^{m_j}$. Тогда

$$\Sigma_n < S + S'_{p_1} 2 + S'_{p_2} 2^2 + \cdots + S'_{p_n} 2^n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2,$$

и, следовательно, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j 2^{m_j}$ сходится. Таким образом, последовательность $c_j = \exp(-2^{m_j})$ будет искомой.

На границе области D определим функцию φ следующим образом: $\varphi|_{\partial\Delta} = 0$ и $\varphi|_{\partial\Delta(z_i, r_i)} = c_i$. Ясно, что эта функция непрерывна на ∂D . Обозначим через U решение задачи Дирихле в области D с граничной функцией φ . Поскольку область D регулярна, то решение будет непрерывной в $\bar{D}$ функцией. Пусть $u = U \circ \pi$. Тогда

$u \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln u(\theta)| d\theta &= \int_{\partial D} |\ln U(\zeta)| d\omega_\zeta \\ &= \int_{\partial D} |\ln \varphi(\zeta)| d\omega_\zeta \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i |\ln c_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 2^{m_i} < \infty. \end{aligned}$$

Допустим теперь, что найдется функция $H \in H^\infty(\Delta, G)$, для которой $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности. Тогда для субгармонической функции $|H|$ внутри круга будет выполнено неравенство $|H| \leq u$ и, следовательно, в области D будет выполнено неравенство $|H \circ \pi^{-1}| \leq U$. Таким образом, для функции $h = H \circ \pi^{-1}$ мы получаем, что

$$0 \leq \overline{\lim}_{|z| \rightarrow 1} |h| \leq \lim_{|z| \rightarrow 1} U = 0.$$

Из свойства 2) области D в таком случае следует, что $h \equiv 0$, что противоречит нашим предположениям относительно функции H . Значит такой функции H не существует.

Таким образом, в классе гармоничных областей дополнительное ограничение на функцию u оказывается существенным.

Ниже описывается ситуация, когда это ограничение все-таки можно снять.

2. Основным результатом этого пункта является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть область D гармонична. Для того чтобы для всякой измеримой на единичной окружности функции $u \geq 0$, автоморфной относительно группы G и такой, что $|\ln u| \in L^1(d\theta, G)$, существовала функция $H \in S(\Delta, G)$, для которой $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы нулевые множества функций из класса $H^\infty(D)$ были не меньше, чем у функций из класса $S(D)$, в том смысле, что для любой ненулевой функции $f \in S(D)$ найдется ненулевая функция $h \in H^\infty(D)$ такая, что частное h/f входит в класс $S(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln u(\theta) P_z(\theta) d\theta, \quad z \in \Delta,$$

и положим $l = \exp[u + iv]$, где v — гармонически сопряженная к u функция. Тогда функция $L = l \circ \pi^{-1}$ будет мультипликативной в области D функцией и, следовательно, определяет некоторый характер Γ_L на группе $\pi_1(D)$. Положим теперь $u_\varepsilon(\theta) = \max\{u(\theta), \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln u_\varepsilon(\theta) P_z(\theta) d\theta, \quad z \in \Delta, \\ l_\varepsilon &= \exp[u_\varepsilon + iv_\varepsilon] \quad \text{и} \quad L_\varepsilon = l_\varepsilon \circ \pi^{-1}. \end{aligned}$$

Характер, порожденный функцией L_ε , обозначим Γ_ε . Поскольку $|L_\varepsilon| \geq |L|$ в области D , то $H_\varepsilon = L/L_\varepsilon$ будет ограниченной мультипликативной в области D функцией, порождающей на группе $\pi_1(D)$ характер $\Gamma_L \Gamma_\varepsilon$. Для функции $h_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \pi = l/l_\varepsilon$ на единичной окружности имеем:

$$|h_\varepsilon| = \begin{cases} 1, & u \geq \varepsilon, \\ \frac{u}{\varepsilon}, & u \leq \varepsilon, \end{cases}$$

и, следовательно, $\ln |h_\varepsilon| \in L^1(d\theta, G)$.

Функция $t_\varepsilon = 1/h_\varepsilon = l_\varepsilon/l$ будет обладать следующими свойствами: $\ln |t_\varepsilon| \in L^1(d\theta, G)$; на единичной окружности справедливо равенство

$$|t_\varepsilon| = \begin{cases} 1, & u \geq \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon}{u}, & u \leq \varepsilon, \end{cases}$$

и функция $T_\varepsilon = t_\varepsilon \circ \pi^{-1}$ определяет на $\pi_1(D)$ характер $\Gamma_\varepsilon \Gamma_L^{-1}$.

Поскольку $|t_\varepsilon| \geq 1$ на единичной окружности, а область D гармонична, то существует функция $q \in S(\Delta, G)$ такая, что $|q(e^{i\theta})| = |t_\varepsilon(e^{i\theta})|$ почти всюду на единичной окружности. Положим $Q = q \circ \pi^{-1}$.

Предположим теперь, что нулевые множества класса $H^\infty(D)$ не меньше, чем у $S(D)$. Тогда найдется ненулевая функция $P \in H^\infty(D)$ такая, что P/Q является функцией класса Смирнова. Поскольку $p = P \circ \pi \in H^\infty(\Delta, G)$, то $\ln |1/p| \in L^1(d\theta, G)$, и, кроме того, $|1/p(e^{i\theta})| \geq 1/\sup_\Delta |p|$ почти всюду на единичной окружности. Следовательно, в силу гармоничности области D , найдется функция $p_1 \in S(\Delta, G)$, для которой $|p_1(e^{i\theta})| = |1/p(e^{i\theta})|$ почти всюду на единичной окружности. Таким образом, мы получаем, что функция $p_1(p/q)$ входит в класс $S(\Delta, G)$ и почти всюду на единичной окружности справедливы равенства

$$\left| p_1 \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{|p|} \frac{|p|}{|q|} = \frac{1}{|q|} = \frac{1}{|t_\varepsilon|} = |h_\varepsilon|.$$

Поскольку $|l_\varepsilon| \geq \varepsilon$ почти всюду на единичной окружности, то, опять-таки в силу гармоничности области D найдется функция $k \in S(\Delta, G)$, для которой $|k(e^{i\theta})| = |l_\varepsilon(e^{i\theta})|$ почти всюду на единичной окружности. Положим $H = k p_1(p/q)$. Для функции H получаем, что почти всюду на единичной окружности

$$|H| = \left| k p_1 \frac{p}{q} \right| = |k| \left| p_1 \frac{p}{q} \right| = |l_\varepsilon| |h_\varepsilon| = |l_\varepsilon| \frac{|l|}{|l_\varepsilon|} = |l| = u,$$

т.е. функция H — искомая.

Пусть теперь для любой измеримой на единичной окружности функции $u \geq 0$, автоморфной относительно группы G и такой, что $|\ln u| \in L^1(d\theta, G)$, существует функция $H \in S(\Delta, G)$, для которой $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности. Нам надо показать, что нулевые множества класса $H^\infty(D)$ не меньше, чем у $S(D)$.

Пусть $f \in S(D)$, $f \neq 0$ и $F = f \circ \pi$. Поскольку $F \neq 0$ и $F \in S(\Delta, G)$, то $\ln |1/F| \in L^1(d\theta, G)$ и, в соответствии с нашим предположением, существует функция $H \in S(\Delta, G)$, для которой $|H(e^{i\theta})| = 1/|F(e^{i\theta})|$ почти всюду на единичной окружности. Тогда функция $h = (FH) \circ \pi^{-1}$ принадлежит классу $H^\infty(D)$, а функция

$$\frac{h}{f} = \frac{f(H \circ \pi^{-1})}{f} = H \circ \pi^{-1}$$

принадлежит классу Смирнова.

Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Как показывает приведенный выше пример, при замене условия $u \geq \rho > 0$ на $u \geq 0$ теорема о локализации перестает быть верной.

Функция h , участвующая в формулировке теоремы, может быть выбрана так, что $h \circ \pi$ является внутренней функцией. Действительно, пусть h — функция из $H^\infty(D)$ такая, что $h/f \in S(D)$. Рассмотрим суперпозицию $h \circ \pi$, и пусть $h \circ \pi = B_h S_h$ — разложение функции $h \circ \pi$ на внутренний и внешний сомножители. Функция $S_h \circ \pi^{-1}$ будет мультипликативной ограниченной функцией в области D . Если Γ_S — характер, который она порождает на $\pi_1(D)$, то мы можем выбрать в классе $H^\infty(D, \Gamma_S)$ функцию p такую, что $\sup_D |pt| = \sup_D |t|$ для всех $t \in H^\infty(D)$ (см. [1]). Поскольку D — гармоничная область, то суперпозиция $P = p \circ \pi$ будет внутренней функцией (см. [1]). Таким образом, функция $h_1 = (B_h \circ \pi^{-1})P$ будет, очевидно, удовлетворять следующим условиям: $h_1 \pi$ является внутренней функцией; частное h_1/f принадлежит классу Смирнова.

Этот факт и рассуждения, использованные при доказательстве теоремы, позволяют получить

СЛЕДСТВИЕ. Пусть область D гармонична. Для того чтобы для всякой измеримой на единичной окружности функции $u \geq 0$, автоморфной относительно группы G и такой, что $|\ln u| \in L_1(d\theta, G)$, существовала функция $H \in S(\Delta, G)$, для которой $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы множество

$$|S(\Delta, G)|_{\partial\Delta} = \{|f|_{\partial\Delta}; f \in S(\Delta, G), f \neq 0\}$$

образовывало группу по умножению (здесь $|f|_{\partial\Delta}$ — функции, образованные модулями радиальных граничных значений функций f).

Иначе говоря, “нули” и “бесконечности” класса $S(\Delta, G)$ на единичной окружности должны быть равноправны в том смысле, что, если для некоторой функции u на единичной окружности существует функция $H \in S(\Delta, G)$, для которой $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности, то существует и функция $Q \in S(\Delta, G)$, для которой $|Q(e^{i\theta})| = 1/u(\theta)$ почти всюду на единичной окружности. Этим свойством обладают, в частности, все области типа Парро–Уидома (см. [1]).

ЗАМЕЧАНИЕ. При исследовании свойств различных классов функций на открытых римановых поверхностях и, в частности, в произвольных областях комплексной плоскости, а также в современной теории потенциала, понятия компактификации, гармонической меры и минимальной границы играют весьма важную роль. Поэтому естественно возникает вопрос о том, как утверждения теоремы об эквивалентности, сформулированные в терминах компактификации L , границы Ch и меры λ , могут быть интерпретированы на языке классических и традиционно используемых при исследовании класса ограниченных гармонических функций компактификаций Винера и Мартина.

Пусть D_W и D_M — соответственно компактификации Винера и Мартина области D , а $\Delta_W \subset D_W$ и $\Delta_M \subset D_M$ — соответственно гармоническая граница Винера и граница Мартина области D . Гармоническую меру на границе Мартина обозначим через $d\chi$.

Для компактификации Винера имеют место следующие утверждения (см. [5]):

- w_1) любая функция $h \in h^\infty(D)$ допускает единственное непрерывное продолжение на D_W ;
- w_2) если $\tilde{h} = h|_{\Delta_W}$, то $\sup_D |h| = \max_{D_W} |h| = \max_{\Delta_W} |\tilde{h}|$ для всех $h \in h^\infty(D)$, и соответствие $h \rightarrow \tilde{h}$ является изометрическим изоморфизмом между $h^\infty(D)$ и $C(\Delta_W)$.

Для компактификации Мартина справедливы следующие утверждения (см. [5], [6]):

- m_1) для любой функции $h \in h^\infty(D)$ ее тонкий предел $\check{h}(b)$ существует для почти всех (по мере $d\chi$) точек $b \in \Delta_M$;
- m_2) соответствие $h \rightarrow \check{h}$ является изометрическим изоморфизмом между $h^\infty(D)$ и $L^\infty(d\chi)$.

Таким образом, приведенные утверждения совместно с теоремой об эквивалентности позволяют получить описания класса гармоничных областей в терминах компактификаций Винера и Мартина.

ТЕОРЕМА (W). Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) область D гармонична;
- 2) для всякой функции $u \in C(\Delta_W)$, $u \geq \rho > 0$, найдется функция $H \in H^\infty(D)$ такая, что $|\check{H}| = u$;
- 3) алгебра $H^\infty(D)$ разделяет точки гармонической границы Винера и $\Pi \cong \Delta_W$.

ТЕОРЕМА (M). Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) область D гармонична;
- 2) для любой функции $u \in L^\infty(d\chi)$, $u \geq \rho > 0$, найдется функция $H \in H^\infty(D)$ такая, что $|\check{H}(b)| = u(b)$ почти всюду на Δ_M ;
- 3) алгебра $H^\infty(D)$, вложенная в $L^\infty(d\chi)$ посредством отображения $h \rightarrow \check{h}$, разделяет точки пространства $M_{L^\infty(d\chi)}$ максимальных идеалов алгебры $L^\infty(d\chi)$ и $\Pi \cong M_{L^\infty(d\chi)}$.

Список литературы

1. *Самохин М. В.* Об автоморфных аналитических функциях с заданным модулем граничных значений // Матем. сб. 1976. Т. 101 (143). С. 189–203.
2. *Самохин М. В.* О некоторых вопросах, связанных с задачей существования автоморфных аналитических функций с заданным модулем граничных значений // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). С. 557–578.
3. *Самохин М. В.* О некоторых граничных свойствах ограниченных аналитических функций и принципе максимума модуля в областях произвольной связности // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). С. 497–513.
4. *Гончар А. А.* О примерах неединственности аналитических функций // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1964. № 1. С. 37–43.
5. *Constantinescu C., Cornea A.* Ideale Ränder Riemannscher Flächen. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
6. *Hasumi M.* Hardy classes on infinitely connected Riemann surfaces // Lect. Notes Math. 1983. V. 1027. P. 1–280.

Московский государственный
строительный университет

Поступила в редакцию
30.03.1995