Общероссийский математический портал

Н. А. Стрелков, Эрмитовы поперечники, средняя размерность и кратные укладки,
Матем. сб., 1996, том 187, номер 1, 121–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 09:53:52

УДК 517.518.224+514.174

Н. А. Стрелков

Эрмитовы поперечники, средняя размерность и кратные укладки

В работе изучается поведение поперечников, описывающих аппроксимационные свойства подпространств, порождаемых сдвигами N фиксированных функций по некоторой решетке. Устанавливается связь аппроксимационных характеристик с геометрическими свойствами N -кратных упаковок лебеговых множеств функции, зависящей от метрик пространств, в которых производится аппроксимация. Вводится понятие средней размерности и доказывается сходимость изучаемых в работе поперечников к поперечникам по Колмогорову той же средней размерности.

Библиография: 27 названий.

В работе рассматриваются вопросы аппроксимации в пространствах H_p^μ с нормами

$$\|u\|_{p,\mu} = \|\mu \mathcal{F}u\|_{L_p(E_n)},$$

где μ – весовая функция, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{F}$ – оператор преобразования Фурье. Такого типа пространства (включающие в себя при $p = 2$, $\mu(x) = (1 + |x|^2)^{s/2}$ пространства Соболева $W_2^s(E_n)$) рассматривались в [1], [2]. Аппроксимирующие подпространства – замкнутые линейные оболочки сдвигов по фиксированной решетке N фиксированных функций. Подпространства такого сорта применяются в проекционно-сеточных методах, при конструировании базисов из функций-всплесков (wavelets) и т. д.

Как будет показано в дальнейшем, аппроксимационные свойства изучаемых в работе подпространств тесно связаны с геометрическими характеристиками N -кратных упаковок лебеговых множеств некоторой функции, зависящей от метрик пространств, в которых производится аппроксимация.

Изучению случая $N = 1$, описывающего аппроксимационные свойства подпространств, порождаемых сдвигами одной функции по решетке заданного объема, посвящены работы [3]–[5].

Работа состоит из трех параграфов, первый из которых носит вспомогательный характер и касается описания применяемых в дальнейшем свойств кратных упаковок. В §2 вычислены точные значения эрмитовых поперечников в терминах геометрических характеристик N -кратных упаковок лебеговых множеств, а также установлена связь между оптимальными решетками и решетками, порождающими плотнейшие укладки этих множеств (в случае пространств Соболева дело сводится к известной задаче о плотнейшей N -кратной укладке одинаковых шаров). В §3 вводится понятие средней размерности и сравнивается поведение изучаемых в данной работе поперечников и поперечников по Колмогорову той же средней размерности. В частности, показано, что при $N \rightarrow \infty$ предел эрмитовых поперечников равен поперечнику по Колмогорову.

Автор признателен В. Л. Дольникову и А. В. Угланову за полезные обсуждения.

§ 1. Некоторые свойства кратных укладок

В этом параграфе устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы система трансляций измеримого по Лебегу множества на векторы заданной решетки образовывала N -кратную укладку. Рассматривается также асимптотическое поведение некоторых характеристик кратных укладок при $N \rightarrow \infty$.

Пусть E_n – евклидово пространство n измерений, $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n . Если $f_1, \dots, f_n$ – набор линейно-независимых элементов E_n , то символом $M = M(f_1, \dots, f_n)$ будет обозначаться решетка в E_n с базисом $f_1, \dots, f_n$, т.е. совокупность точек вида

$$\alpha = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n,$$

где α_k принимают произвольные целочисленные значения.

Пусть

$$A = \{(f_k, f_j)\}_{k,j=1}^n$$

– матрица Грама системы $f_1, \dots, f_n$ и $V(M) = |\det A|^{1/2}$ – объем фундаментального параллелепипеда $\Pi(M)$ решетки M , построенного на векторах $f_1, \dots, f_n$ ($V(M)$ – инвариант решетки M , т.е. не зависит от выбора базиса этой решетки; см., например, [6]). Число $V(M)$ часто будем называть объемом решетки M . Символом M^* будем обозначать решетку, сопряженную к M (т.е. решетку, базис которой образует с базисом решетки M биортогональную пару). Очевидно, что

$$V(M^*) = (V(M))^{-1}.$$

Для любого измеримого по Лебегу множества $\Omega \subseteq E_n$ рассмотрим систему трансляций этого множества вида

$$\{\Omega + \alpha\}_{\alpha \in M}, \quad (1.1)$$

и символом $m(x, \Omega, M)$ будем обозначать кратность точки $x \in E_n$ относительно системы (1.1), т.е. $m(x, \Omega, M)$ равно числу тех различных элементов решетки M , трансляции множества Ω на которые содержат точку $x \in E_n$. Тем самым на E_n определена целочисленная функция $m(\cdot, \Omega, M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\Omega \subset E_n$, M – решетка в E_n , и N – некоторое натуральное число. Назовем систему (1.1) N -кратной укладкой (или просто N -укладкой), если

$$\text{mes}\{x \in E_n : m(x, \Omega, M) > N\} = 0. \quad (1.2)$$

Другими словами, почти всюду в E_n выполняется неравенство $m(x, \Omega, M) \leq N$. В этом случае будем еще говорить, что множество Ω порождает M -решетчатую N -укладку. Некоторые свойства кратных укладок изучались в [7]–[9]. При $N = 1$ получаем обычное определение укладки (см., например, [10]).

Заметим, что условие (1.2) в определении 1.1 эквивалентно тому, что любые k множеств системы (1.1), соответствующие различным векторам решетки M , при $k > N$ пересекаются по множеству меры нуль.

В дальнейшем будут встречаться следующие три (безусловно связанные друг с другом) ситуации.

1. Фиксированы множество Ω , решетка M и натуральное N . Требуется выяснить, порождает ли множество Ω M -решетчатую N -укладку. Как показано ниже в лемме 1.2, для этого необходимо и достаточно, чтобы существовало разбиение множества Ω на N подмножеств, каждое из которых порождает M -решетчатую 1-укладку.

2. Фиксированы решетка M и такая совокупность зависящих от параметра $c \in E_1$ измеримых множеств $\Omega_c \subseteq E_n$, что

$$\Omega_a \subseteq \Omega_b \text{ для всех } a > b. \quad (1.3)$$

Для заданного натурального N требуется найти зависящее от решетки M и системы множеств $\{\Omega_c\}_{c \in E_1}$ число $c_N = c_N(M)$, определяемое равенством

$$c_N(M) = \inf \{c \in E_1 : \{\Omega_c + \alpha\}_{\alpha \in M} - N\text{-укладка}\}. \quad (1.4)$$

Величины такого типа дают, как это будет показано в §2, значения эрмитовых поперечников, характеризующих аппроксимационные возможности в случае фиксированной сетки.

3. Рассматривается фиксированная совокупность множеств $\{\Omega_c\}_{c \in E_1}$, удовлетворяющая условию (1.3), а также множество $M_a = \{M\}$, состоящее из всевозможных решеток в E_n фиксированного объема $a > 0$. Вычисляется зависящая от $a > 0$ и натурального N величина

$$c_{N,a} = \inf_{M \in M_N} c_N(M) \quad (1.5)$$

(здесь $c_N(M)$ имеет вид (1.4)) и определяются те решетки семейства M_a , на которых достигается нижняя грань в (1.5). Особый интерес представляет поведение величин $c_{N,a}$ и нахождение экстремальных решеток в случае, когда $a = b/N$, где b не зависит от N (подобные величины описывают, как это будет показано в §2, поведение эрмитовых поперечников фиксированной средней размерности, а их асимптотика при $N \rightarrow \infty$ приводит к поперечникам по Колмогорову; характер поведения при $N \rightarrow \infty$ близких к (1.5) величин будет описан в лемме 1.5 и следствии 1.1 этого параграфа).

Перейдем к выяснению условий, необходимых и достаточных для того, чтобы система трансляций фиксированного множества на векторы фиксированной решетки образовывала N -кратную укладку.

Начнем с того, что занумеруем точки решетки M , т.е. зададим некоторое биективное соответствие между элементами решетки M и множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел

$$M \ni \alpha^{(k)} \longleftrightarrow k \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Зафиксируем некоторый базис $f_1, \dots, f_n$ решетки M и рассмотрим полуоткрытый фундаментальный параллелепипед

$$\Pi = \left\{ x \in E_n : x = \sum_{j=1}^n t_j f_j, 0 < t_j \leq 1, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Для любого измеримого множества $\Omega \subseteq E_n$ построим последовательность множеств $\Omega_k^*, \hat{\Omega}_k, D_k$ следующим образом:

$$\Omega_k^* = ((\Omega - \alpha^{(k)}) \cap \Pi) \setminus D_{k-1}, \quad \hat{\Omega}_k = \Omega_k^* + \alpha^{(k)}, \quad D_k = D_{k-1} \cup \Omega_k^*, \quad (1.7)$$

где $k = 1, 2, \dots, D_0 = \emptyset$.

Из (1.7) получаем, что если $\Pi_k = \Pi + \alpha^{(k)}$, то

$$\Omega_k^* \subseteq \Pi, \quad \hat{\Omega}_k \subseteq \Pi_k, \quad D_k \subseteq \Pi.$$

Кроме того,

$$\hat{\Omega}_k \subseteq \Omega. \quad (1.8)$$

Заметим также, что параллелепипеды системы $\{\Pi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ попарно не пересекаются и $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Pi_k = E_n$.

Пусть

$$\hat{\Omega} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{\Omega}_k \quad (1.9)$$

(конечно, $\hat{\Omega}$ зависит от Ω и M , а также от выбора как биективного соответствия (1.6), так и базиса решетки M , определяющего параллелепипед Π). В дальнейшем будет использоваться следующее свойство множества $\hat{\Omega}$.

ЛЕММА 1.1. *Если $\Omega \subseteq E_n$ измеримо, то множество $\hat{\Omega}$ вида (1.9) обладает следующими свойствами:*

- 1) $\hat{\Omega}$ — измеримое подмножество множества Ω ;
- 2) $\hat{\Omega}$ порождает M -решетчатую 1-укладку;
- 3) всевозможные сдвиги множества $\hat{\Omega}$ на векторы решетки M покрывают то же подмножество пространства E_n , что и трансляции множества Ω , т.е.

$$\bigcup_{\alpha \in M} (\Omega + \alpha) = \bigcup_{\alpha \in M} (\hat{\Omega} + \alpha). \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Измеримость $\widehat{\Omega}$ очевидна, а соотношение $\widehat{\Omega} \subseteq \Omega$ вытекает из (1.8). Покажем, что

$$(\widehat{\Omega} + \alpha) \cap (\widehat{\Omega} + \beta) = \emptyset$$

для всех таких $\alpha, \beta \in M$, что $\alpha \neq \beta$ (откуда будет следовать, что $\widehat{\Omega}$ порождает M -решетчатую 1-укладку). Для этого, очевидно, достаточно показать, что

$$\Omega_k^* \cap \Omega_j^* = \emptyset \quad \text{для всех } j \neq k.$$

Последнее соотношение выполнено, поскольку следствием (1.7) является равенство

$$\Omega_k^* \cap D_{k-1} = \emptyset, \quad \text{где } D_{k-1} = \bigcup_{j=1}^{k-1} \Omega_j^*.$$

Наконец, для доказательства (1.10) достаточно заметить, что

$$\bigcup_{\alpha \in M} (\Omega + \alpha) = \bigcup_{\alpha \in M} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{\Omega}_k + \alpha \right), \quad (1.11)$$

где $\overline{\Omega}_k = \Omega \cap \Pi_k - \alpha^{(k)} \subseteq \Pi$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{\Omega}_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k^*, \quad (1.12)$$

$$\bigcup_{\alpha \in M} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k^* + \alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in M} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_k + \alpha \right), \quad (1.13)$$

то из (1.9), (1.11)–(1.13) следует равенство (1.10). Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что система измеримых множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ образует разбиение измеримого множества $\Omega \subset E_n$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\text{mes} \bigcup_{j=1}^N \Omega_j = \text{mes} \Omega$;
- 2) $\text{mes}(\Omega_j \cap \Omega_s) = 0$ для всех $j \neq s$.

ЛЕММА 1.2. Измеримое множество Ω порождает M -решетчатую N -укладку тогда и только тогда, когда существует разбиение Ω на N измеримых подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, каждое из которых порождает M -решетчатую 1-укладку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Покажем сначала, что если $N \geq 2$ и множество Ω порождает M -решетчатую N -укладку, то найдется такое измеримое множество $\widehat{\Omega} \subseteq \Omega$, что $\widehat{\Omega}$ порождает M -решетчатую 1-укладку, в то время как множество $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ порождает M -решетчатую $(N-1)$ -укладку.

Возьмем в качестве $\widehat{\Omega}$ множество вида (1.9) (оно, конечно, зависит от выбора биективного соответствия (1.6)). Из леммы 1.1 следует, что $\widehat{\Omega}$ порождает M -решетчатую 1-укладку. Осталось показать, что множество $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ порождает M -решетчатую $(N-1)$ -укладку. Из (1.10) получаем, что если $x \in E_n$ таково, что

$$m(x, \Omega, M) = k(x) \geq 1,$$

то

$$m(x, \widehat{\Omega}, M) = s(x) \geq 1.$$

Так как $\widehat{\Omega} \subseteq \Omega$, то для всех $x \in E_n$ выполняется равенство

$$m(x, \Omega, M) = m(x, (\Omega \setminus \widehat{\Omega}) \cup \widehat{\Omega}, M) = m(x, \Omega \setminus \widehat{\Omega}, M) + m(x, \widehat{\Omega}, M),$$

откуда

$$m(x, \Omega \setminus \widehat{\Omega}, M) = k(x) - s(x) \leq k(x) - 1.$$

Поэтому

$$\{x \in E_n : m(x, \Omega \setminus \widehat{\Omega}, M) > N - 1\} \subseteq \{x \in E_n : m(x, \Omega, M) > N\}.$$

Поскольку Ω порождает N -кратную M -укладку, т.е.

$$\text{mes}\{x \in E_n : m(x, \Omega, M) > N\} = 0,$$

то и

$$\text{mes}\{x \in E_n : m(x, \Omega \setminus \widehat{\Omega}, M) > N - 1\} = 0,$$

т.е. $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ порождает $(N - 1)$ -кратную M -решетчатую укладку.

Итак, доказано, что если $N \geq 2$ и $\{\Omega + \alpha\}_{\alpha \in M}$ — N -укладка, то существует такое измеримое множество $\widehat{\Omega}$, что $\{\widehat{\Omega} + \alpha\}_{\alpha \in M}$ — 1 -укладка, а $\{\Omega \setminus \widehat{\Omega} + \alpha\}_{\alpha \in M}$ — $(N - 1)$ -укладка. Поскольку для $N = 1$ доказываемое утверждение тривиально, то доказательство необходимости легко завершается индукцией по N . Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что если система измеримых множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ образует разбиение множества Ω (см. определение 1.2), и каждое из Ω_j порождает M -решетчатую 1 -укладку, то система (1.1) — N -укладка.

Действительно, поскольку $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ образуют разбиение Ω , то для почти всех $x \in E_n$ выполняется равенство

$$m(x, \Omega, M) = \sum_{j=1}^N m(x, \Omega_j, M). \quad (1.14)$$

Так как каждое из Ω_j порождает M -решетчатую укладку кратности 1 , то $m(x, \Omega_j, M) \leq 1$ почти всюду в E_n для всех $j = 1, \dots, N$. Поэтому в силу (1.14) выполняется условие $m(x, \Omega, M) \leq N$ почти всюду в E_n , откуда следует, что Ω порождает M -решетчатую N -кратную укладку. Лемма доказана.

Только что доказанная лемма будет существенно использоваться в §2 для вычисления эрмитовых поперечников.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Предложенное при доказательстве необходимости разбиение Ω на $\widehat{\Omega}$ и $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ (и тем более разбиение Ω на N подмножеств) вообще говоря, не единственно, а определяется выбором как биективного соответствия (1.6), так и базиса решетки M (заметим, что в (1.7) вместо параллелепипеда Π можно было бы взять любое множество, сдвиги которого на векторы решетки M попарно не пересекаются и покрывают все пространство E_n ; например, роль Π мог бы сыграть многогранник Вороного любой точки решетки M). Более того, можно было бы разбивать Ω не на N множеств, каждое из которых порождает M -решетчатую 1-укладку, а поступить следующим образом. Для любого $p = 1, \dots, N$ и любого разбиения числа N на p натуральных слагаемых $m_1, \dots, m_p$ разбить Ω на p таких подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_p$, что Ω_j порождает M -решетчатую укладку кратности m_j ; затем каждое из Ω_j , для которых $m_j > 1$, разбить на подмножества, порождающие M -решетчатые укладки меньшей чем m_j кратности, и т. д. На этом пути можно построить совокупность деревьев разбиений Ω на подмножества, каждое из которых порождает M -решетчатую укладку определенной кратности.

Докажем еще одно утверждение, касающееся свойств кратных упаковок.

ЛЕММА 1.3. *Если M , Ω и N таковы, что Ω порождает M -решетчатую N -укладку, то $\text{mes } \Omega \leq NV(M)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма (смысл которой вполне очевиден), может быть доказана многими способами. Приведем один из них, использующий утверждение леммы 1.2.

Введем обозначение $V(M) = b$ и предположим противное, т.е. предположим, что $\text{mes } \Omega > Nb$. Поскольку Ω порождает M -решетчатую N -укладку, то в силу леммы 1.2 существует разбиение множества Ω на N подмножеств, каждое из которых порождает M -решетчатую укладку кратности 1. Поскольку $\text{mes } \Omega > Nb$, то мера хотя бы одного из этих подмножеств (обозначим его D) больше b . Итак, имеется множество D , порождающее M -решетчатую 1-укладку, причем $V(M) = b$ и $\text{mes } D > b$. Зафиксируем любой фундаментальный параллелепипед Π решетки M , и для всех $\alpha \in M$ обозначим $\Pi_\alpha = \Pi + \alpha$, $D_\alpha = D \cap \Pi_\alpha - \alpha$. Тогда $D_\alpha \subseteq \Pi$ для всех $\alpha \in M$, $\text{mes } \Pi = b$,

$$\text{mes } D = \sum_{\alpha \in M} \text{mes } D_\alpha.$$

Поскольку D порождает M -решетчатую 1-укладку, то $\text{mes}(D_\alpha \cap D_\beta) = 0$ для всех $\alpha, \beta \in M$, $\alpha \neq \beta$. Поэтому

$$\text{mes } D = \sum_{\alpha \in M} \text{mes } D_\alpha \leq \text{mes } \Pi = b,$$

что противоречит неравенству $\text{mes } D > b$. Лемма доказана.

Пусть теперь

$$\{\Omega_c\}_{c \in E_1} \quad (1.15)$$

— система измеримых по Лебегу множеств в E_n , удовлетворяющая условию (1.3), т.е. $\Omega_a \subseteq \Omega_b$ для всех $a > b$. Кроме того, пусть M — фиксированная унимодулярная

(т.е. $V(M) = 1$) решетка в E_n . Для фиксированного $a > 0$ и для любого натурального N введем обозначение

$$M_N = \left(\frac{a}{N}\right)^{1/n} M.$$

Тогда M_N – решетка в E_n объема $V(M_N) = a/N$. Пусть

$$c_N = c_N(a, M) = \inf \{c \in E_1 : \{\Omega_c + \alpha\}_{\alpha \in M_N} - N\text{-укладка}\}, \quad (1.16)$$

$$d = d(a) = \inf \{c \in E_1 : \text{mes } \Omega_c \leq a\}, \quad (1.17)$$

$$q = q(a) = \inf \{c \in E_1 : \text{mes } \Omega_c < a\}. \quad (1.18)$$

ЛЕММА 1.4. *Для всех натуральных N выполняется неравенство $c_N \geq d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d = -\infty$, то утверждение очевидно. Если же $d > -\infty$, то предположив, что $c_N < d$, получаем, что для любого $c \in (c_N, d)$ выполняются два противоречащих друг другу условия: 1) $\text{mes } \Omega_c > a$; 2) $\{\Omega_c + \alpha\}_{\alpha \in M_N} - N$ -укладка (см. лемму 1.3). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. *Если все множества Ω_c системы (1.15), удовлетворяющие условию $\text{mes } \Omega_c < a$, измеримы по Жордану, то*

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} c_N \leq q. \quad (1.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q = +\infty$, то (1.19) очевидно. Пусть $q < +\infty$. Необходимо показать, что для любого $q_0 > q$ найдется такое N_0 , что для всех $N > N_0$ выполняется неравенство $c_N \leq q_0$. Возьмем любое $q_0 > q$. Тогда $\text{mes } \Omega_{q_0} < a$, и поскольку Ω_{q_0} измеримо по Жордану, а объем фундаментального параллелепипеда решетки M_N равен a/N , то найдется такое N_0 , что для всех $N > N_0$ выполняется неравенство

$$K_N \frac{a}{N} \leq a, \quad (1.20)$$

где K_N – число фундаментальных параллелепипедов решетки M_N , пересекающихся с Ω_{q_0} по множествам ненулевой меры. Очевидно, $\{\Omega_{q_0} + \alpha\}_{\alpha \in M_N} - K_N$ -кратная укладка, и поскольку (1.20) означает, что $K_N \leq N$, то $\{\Omega_{q_0} + \alpha\}_{\alpha \in M_N} - N$ -кратная укладка. Поэтому $c_N \leq q_0$ для всех $N > N_0$. Лемма доказана.

С помощью лемм 1.4 и 1.5 легко устанавливается следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Если выполнены условия леммы 1.5 и $d = q$, то последовательность c_N сходится и $\lim_{N \rightarrow \infty} c_N = d$.*

Легко видеть, что для выполнения условия $d(a) = q(a)$ необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\text{mes } \Omega_c = a$ имело не более одного решения, и если это уравнение имеет ровно один корень $c(a)$, то $d(a) = q(a) = c(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Требование измеримости по Жордану в лемме 1.5 нельзя ослабить, заменив его требованием измеримости по Лебегу. Это показывает следующий пример системы измеримых по Лебегу множеств Ω_c , которые не образуют укладки никакой конечной кратности ни при каких c , в то время как соответствующее этой системе значение q вида (1.18) конечно. Пусть $n = 1$, $\mathbb{Z}_1$ — множество всех целых чисел на прямой E_1 , $M = \mathbb{Z}_1$, $a = 1$,

$$\Omega_c = \begin{cases} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_1} \{x \in E_1 : |x - k| \leq (c \cdot 2^{|k|})^{-1}\}, & \text{если } c \geq 2, \\ E_1, & \text{если } c < 2. \end{cases}$$

Тогда $M_N = N^{-1}\mathbb{Z}_1$,

$$\text{mes } \Omega_c = \begin{cases} \frac{6}{c}, & \text{если } c \geq 2, \\ \infty, & \text{если } c < 2. \end{cases}$$

Поэтому из (1.17), (1.18) следует, что $d = q = 6$. С другой стороны, для любого $c \in E_1$ множество Ω_c не порождает M_N -решетчатую N -укладку, так как пересечение любого конечного числа трансляций этого множества на векторы подрешетки $\mathbb{Z}_1$ решетки M_N имеет ненулевую меру. Это означает, что $c_N = \infty$ для всех N (см. (1.16)). Поэтому неравенство (1.19) не выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Даже в случае, когда последовательность c_N сходится, монотонного ее убывания может и не быть. Однако некоторые подпоследовательности этой последовательности не возрастают. Так, пусть N таково, что существуют такие натуральные k и N_1 , что $N = k^n \cdot N_1$. Тогда $c_N \leq c_{N_1}$. Доказательство этого факта основано на том, что в рассматриваемом случае $M_N = k^{-1}M_{N_1}$, и решетка M_{N_1} является подрешеткой индекса k^n [6] решетки M_N , откуда следует, что если Ω_c порождает M_{N_1} -решетчатую N_1 -укладку, то это множество порождает также и M_N -решетчатую N -укладку. Приведем пример, демонстрирующий отсутствие монотонной сходимости последовательности c_N . Пусть $n = 1$, $a = 1$, $M = \mathbb{Z}_1$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \geq 2, \\ 2 - |1 - |x||, & \text{если } |x| < 2, \end{cases}$$

$$\Omega_c = \{x \in E_1 : f(x) > c\} = \begin{cases} E_1, & \text{если } c < 1, \\ (c - 3, 1 - c) \cup (c - 1, 3 - c), & \text{если } 1 \leq c < 2, \\ \emptyset, & \text{если } c \geq 2. \end{cases}$$

Тогда $M_N = N^{-1}\mathbb{Z}_1$ и, как нетрудно проверить, $d = q = \frac{7}{4}$, а

$$c_N = \begin{cases} \frac{7}{4}, & \text{если } N \text{ четно,} \\ \frac{7}{4} + \frac{1}{4N}, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Особый интерес с точки зрения приложений к задачам аппроксимации решетчатыми сдвигами функций представляет случай, когда Ω_c — лебеговы множества некоторой функции f , имеющие вид

$$\Omega_c = \{x \in E_n : f(x) > c\}.$$

В частности, если f измерима по Жордану и непрерывна, то для всех $a \in E_n$ выполняется условие $d(a) = q(a)$, что вместе со следствием 1.1 гарантирует равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_N(a) = d(a).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Пусть Λ — некоторая решетка объема $N\hbar$. Тогда если $M = (N\hbar)^{1/n} \Lambda^*$, то M — унимодулярная решетка. Взяв $a = (2\pi)^n / \hbar$ и положив $M_N = (a/N)^{1/n} M$, получим, что $M_N = 2\pi \Lambda^*$. Поэтому из леммы 1.4 получаем, что при всех натуральных N для любой решетки Λ объема $N\hbar$ выполнено неравенство

$$\inf \{c \in E_1 : \text{mes } \Omega_c \leq (2\pi)^n / \hbar\} \leq \inf \{c \in E_1 : \{\Omega_c + \alpha\}_{\alpha \in 2\pi \Lambda^*} - N\text{-укладка}\}.$$

В заключение параграфа дадим определения решетчатых покрытий и замощений и опишем одно их достаточно очевидное свойство, используемое в дальнейшем в §3.

Назовем систему (1.1) N -покрытием, если $m(\cdot, \Omega, M) \geq N$ почти всюду в E_n . Если система (1.1) одновременно N -укладка и N -покрытие, то будем называть ее N -замощением. В этих случаях будем еще говорить, что множество Ω порождает M -решетчатое N -покрытие (N -замощение).

ЛЕММА 1.6. Если Ω порождает M -решетчатое 1-покрытие, то существует такое $\hat{\Omega} \subseteq \Omega$, что $\hat{\Omega}$ порождает M -решетчатое 1-замощение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве $\hat{\Omega}$ множество вида (1.8). Тогда из леммы 1.1 следует, что $\hat{\Omega}$ порождает M -решетчатое 1-замощение. Лемма доказана.

§2. Эрмитовы поперечники и их свойства

Пусть S — множество всех таких $v \in C^\infty(E_n)$, что

$$\sup_{x \in E_n} |x^\alpha D^\beta v(x)| < \infty$$

для любых мультииндексов α и β (топология в S , задаваемая системой полунорм, стоящих в левой части последнего неравенства, превращает S в пространство Фреше), S' — пространство линейных непрерывных функционалов над S (пространство обобщенных функций умеренного роста).

Заданную на E_n положительную функцию μ будем называть умеренно растущей весовой функцией, если существуют такие положительные константы C и m , что

$$\mu(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^m \mu(\eta)$$

для всех $\xi, \eta \in E_n$ (см. [1, определение 10.1.1] и [5, определение 1.1]).

Пусть $1 \leq p < \infty$. Для любой умеренно растущей весовой функции μ определим пространство L_p^μ измеримых в E_n комплекснозначных функций v , для которых

$$\int_{E_n} |\mu(\xi)v(\xi)|^p d\xi < \infty.$$

Наконец, определим пространство H_p^μ как совокупность тех обобщенных функций $u \in S'$, преобразования Фурье $\widehat{u}$ которых принадлежат пространству L_p^μ . Топология пространства H_p^μ задается с помощью нормы

$$\|u\|_{p,\mu} = \left(\int_{E_n} |\mu(\xi)\widehat{u}(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p};$$

если $p = \infty$, то

$$\|u\|_{\infty,\mu} = \sup_{\xi \in E_n} |\mu(\xi)\widehat{u}(\xi)|.$$

Пространства такого типа изучались в [1], [2]. Отметим, что при $p = 2$, $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{m/2}$, где $m \in E_1$, определенные выше пространства превращаются в пространства Соболева $W_2^m(E_n)$.

Пусть $f_1, \dots, f_n$ — фиксированный набор линейно-независимых элементов пространства E_n и $\Lambda = \Lambda(f_1, \dots, f_n)$ — решетка в E_n с базисом $f_1, \dots, f_n$. Напомним обозначения, введенные в §1: $V(\Lambda)$ — объем фундаментального параллелепипеда $\Pi(\Lambda)$ решетки Λ , построенного на векторах $f_1, \dots, f_n$ (объем решетки Λ), Λ^* — решетка, сопряженная к Λ (т.е. решетка, базис которой образует с базисом решетки Λ биортогональную пару).

В дальнейшем символом φ будем обозначать N -мерную вектор-функцию $\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)})$ (N — фиксированное натуральное число), а запись

$$\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$$

будет означать, что $\varphi^{(k)} \in H_p^{\mu_1}$ для всех $k = 1, \dots, N$.

Пусть

$$B(\Lambda, \varphi) = \{ \{ \varphi_\alpha^{(k)} \}_{\alpha \in \Lambda} \}_{k=1}^N$$

— подпространство пространства $H_p^{\mu_1}$, являющееся замкнутой линейной оболочкой функций $\varphi_\alpha^{(k)}$, $\alpha \in \Lambda$, $k = 1, \dots, N$, где $\varphi_\alpha^{(k)} \in H_p^{\mu_1}$, определяемые равенством

$$\varphi_\alpha^{(k)}(\cdot) = \varphi^{(k)}(\cdot - \alpha),$$

являются сдвигами фиксированных элементов $\varphi^{(k)} \in H_p^{\mu_1}$ ($k = 1, \dots, N$) на векторы решетки Λ . Из определения $\varphi_\alpha^{(k)}$ получаем, что их образы Фурье имеют следующий вид:

$$\mathcal{F}\varphi_\alpha^{(k)}(\xi) = e^{-i(\alpha, \xi)} \mathcal{F}\varphi^{(k)}(\xi), \quad k = 1, \dots, N, \quad \alpha \in \Lambda. \quad (2.1)$$

Введем в рассмотрение следующие величины, характеризующие аппроксимационные возможности подпространств $B(\Lambda, \varphi)$:

$$\kappa_N(\Lambda, \varphi) = \sup_{\|u\|_{p, \mu_2} = 1} \inf_{w \in B(\Lambda, \varphi)} \|u - w\|_{p, \mu_1}, \quad (2.2)$$

$$\kappa_N(\Lambda) = \inf_{\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N} \kappa_N(\Lambda, \varphi), \quad (2.3)$$

$$\kappa_{N, \hbar} = \inf_{\Lambda: V(\Lambda) = N\hbar} \kappa_N(\Lambda). \quad (2.4)$$

Величины $\kappa_N(\Lambda)$ и $\kappa_{N, \hbar}$ будем в дальнейшем называть *эрмитовыми поперечниками*; они описывают аппроксимационные свойства подпространств, порождаемых сдвигами N функций по заданной решетке Λ и по совокупности решеток объема $\hbar$, соответственно. При $N = 1$ получаем ситуацию, изученную в [5].

В равенствах (2.2)–(2.4) $1 \leq p \leq \infty$, μ_1 и μ_2 – произвольные весовые функции, $\hbar > 0$. Отметим, что нижняя грань в (2.4) вычисляется по всем решеткам Λ в E_n объема $N\hbar$, где $\hbar > 0$ – фиксированное число. Смысл этого требования состоит в том, что в этом случае при всех N средняя размерность аппроксимирующих подпространств $B(\Lambda, \varphi)$ не превосходит $\hbar^{-1}$, а при выполнении некоторых условий типа общности положения эти подпространства имеют одну и ту же не зависящую от N среднюю размерность, равную $\hbar^{-1}$ (см. леммы 3.1 и 3.2 в §3).

Пусть

$$B^\perp(\Lambda, \varphi) = \left\{ v \in H_q^{\mu_1^{-1}} : \int_{E_n} \widehat{v}(x) \overline{\widehat{w}(x)} dx = 0 \text{ для всех } w \in B(\Lambda, \varphi) \right\},$$

где $\widehat{v}$ и $\widehat{w}$ – образы Фурье элементов v и w , а $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Для любого $c \in E_1$ определим лебеговы множества функции μ_1/μ_2 равенством

$$\Omega_c = \{x \in E_n : \mu_1(x)/\mu_2(x) > c\}$$

и рассмотрим систему трансляций множества Ω_c вида

$$\{\Omega_c + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}. \quad (2.5)$$

Символом $s_c(x, 2\pi\Lambda^*)$ будем обозначать кратность точки $x \in E_n$ относительно системы (2.5), т.е. $s_c(x, 2\pi\Lambda^*)$ – число различных элементов решетки $2\pi\Lambda^*$, сдвиги множества Ω_c на которые содержат точку $x \in E_n$. Тем самым на E_n определена целочисленная функция $s_c(\cdot, 2\pi\Lambda^*)$.

Пусть N – некоторое натуральное число. Назовем систему (2.5) *N -укладкой*, если

$$\text{mes}\{x \in E_n : s_c(x, 2\pi\Lambda^*) > N\} = 0.$$

В этом случае будем еще говорить, что множество Ω_c порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую N -укладку (см. определение 1.1). Легко понять, что система (2.5) – N -укладка тогда и только тогда, когда любой набор из $N + 1$ множества этой системы имеет пересечение меры нуль. При $N = 1$ получаем обычное определение укладки (см., например, [10]).

Заметим, что рассуждения, вполне аналогичные применявшимся для доказательства леммы 2.4 из [5], приводят к следующему представлению:

$$\varkappa_N(\Lambda, \varphi) = \sup\{\|v\|_{q, \mu_2^{-1}} : v \in B^\perp(\Lambda, \varphi), \|v\|_{q, \mu_1^{-1}} = 1\}, \quad (2.6)$$

где

$$B^\perp(\Lambda, \varphi) = \left\{ v \in H_q^{\mu_1^{-1}} : \sum_{\alpha \in \Lambda^*} \widehat{v}(x + 2\pi\alpha) \overline{\widehat{\varphi}^{(k)}(x + 2\pi\alpha)} = 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, N \right\} \quad (2.7)$$

(ряды в (2.7) сходятся в $L_1(\Pi^*)$, где Π^* — любой из фундаментальных параллелепипедов решетки $2\pi\Lambda^*$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Все последующие утверждения этой работы доказаны для случая $1 < p < \infty$, однако они остаются справедливыми как для $p = 1$, так и для $p = \infty$; необходимо лишь внести связанные со спецификой нормы в L_∞ очевидные коррективы в доказательства.

Докажем вспомогательное утверждение, используемое в дальнейшем при доказательстве теоремы 2.1 и леммы 3.1.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\Omega \subseteq E_n$ таково, что система

$$\{\Omega_c + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$$

не образует N -укладку. Тогда для любого $\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$ существует такой ненулевой элемент $v \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, что $\text{supp } \widehat{v} \subseteq \Omega$ (здесь $\widehat{v}$ — образ Фурье элемента v).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Ω не порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую N -укладку, то найдутся такие $N+1$ различные векторы $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N+1)}$ решетки Λ^* , что если

$$D = \bigcap_{k=1}^{N+1} (\Omega + 2\pi\alpha^{(k)}),$$

то $\text{mes } D \neq 0$. Заметим, что существует множество $B \subseteq D$, обладающее следующими свойствами: 1) $\text{mes } B \neq 0$; 2) множества семейства

$$\{B - 2\pi\alpha^{(k)}\}_{k=1}^{N+1}$$

лежат в Ω и имеют пустые попарные пересечения.

Пусть

$$K = \bigcup_{k=1}^{N+1} (B - 2\pi\alpha^{(k)}).$$

Покажем, что для любого $\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$ существует ненулевой элемент $v \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, носитель образа Фурье которого принадлежит множеству K (отметим, что $K \subseteq \Omega$). Сделать это можно, например, следующим образом.

Для любого $x \in B$ рассмотрим систему N линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N+1} \overline{\widehat{\varphi}^{(s)}(x - 2\pi\alpha^{(k)})} w_k(x) = 0, \quad s = 1, \dots, N,$$

с $N + 1$ неизвестными $w_1(x), \dots, w_{N+1}(x)$, которая всегда имеет нетривиальное решение. Определим теперь $\widehat{v}(x)$ на каждом из множеств $B - 2\pi\alpha^{(k)}$ равенством

$$\widehat{v}(x - 2\pi\alpha^{(k)}) = A(x)w_k(x), \quad x \in B, \quad k = 1, \dots, N + 1, \quad (2.8)$$

где

$$A(x) = \left\{ \sum_{j=1}^{N+1} |\mu_1^{-1}(x - 2\pi\alpha^{(j)})w_j(x)|^q \right\}^{-1/q}. \quad (2.9)$$

Полагая $\widehat{v} = 0$ для всех $x \in E_n \setminus K$, получаем, что $v \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, поскольку, во-первых,

$$\sum_{\alpha \in \Lambda^*} \widehat{v}(x + 2\pi\alpha) \overline{\widehat{\varphi}^{(k)}(x + 2\pi\alpha)} = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, N,$$

а во-вторых, из (2.8), (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} \|v\|_{q, \mu_1^{-1}}^q &= \int_{E_n} |\mu_1^{-1}(x)\widehat{v}(x)|^q dx \\ &= \int_B \sum_{k=1}^{N+1} |\mu_1^{-1}(x - 2\pi\alpha^{(k)})\widehat{v}(x - 2\pi\alpha^{(k)})|^q dx \\ &= \int_B |A(x)|^q \sum_{k=1}^{N+1} |\mu_1^{-1}(x - 2\pi\alpha^{(k)})w_k(x)|^q dx = \text{mes } B < \infty. \end{aligned}$$

Обозначим теперь символом $c_N(\Lambda)$ точную нижнюю грань множества тех $c \in E_1$, для которых система (2.5) образует $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую N -укладку.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого натурального N имеет место равенство $\varkappa_N(\Lambda) = c_N(\Lambda)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что $\varkappa_N(\Lambda) \leq c_N(\Lambda)$. Используя непрерывность справа функции

$$F(c) = \text{mes } \Omega_c = \text{mes} \{x \in E_n : \mu_1(x)/\mu_2(x) > c\},$$

легко показать, что если $\bar{c} = c_N(\Lambda)$, то множество $\Omega_{\bar{c}}$ порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую N -укладку (это делается в полной аналогии с рассуждениями замечания 2.1 из [5]). Применяя лемму 1.2, получаем, что существует такое разбиение множества $\Omega_{\bar{c}}$ на N подмножеств $\Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(N)}$, которые попарно пересекаются по множествам нулевой меры, что каждое из $\Omega^{(k)}$ порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую 1-укладку

($k = 1, \dots, N$). Для любого $k = 1, \dots, N$ определим образы Фурье $\widehat{\varphi}^{(k)}$ функций $\varphi^{(k)}$ равенствами

$$\widehat{\varphi}^{(k)}(x) = \begin{cases} \mu_1^{-1}(x), & x \in \Omega^{(k)}, \\ 0, & x \in E_n \setminus \Omega^{(k)}. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi^{(k)} \in H_p^{\mu_1}$. Поскольку $\Omega^{(k)}$ порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую 1-укладку, то из условия $v \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$ следует, что $\widehat{v} = 0$ почти всюду в $\Omega_{\overline{c}}$. Поэтому

$$\frac{\|v\|_{q, \mu_2^{-1}}}{\|v\|_{q, \mu_1^{-1}}} = \left(\frac{\int_{E_n \setminus \Omega_{\overline{c}}} |\mu_2^{-1}(x) \widehat{v}(x)|^q dx}{\int_{E_n \setminus \Omega_{\overline{c}}} |\mu_1^{-1}(x) \widehat{v}(x)|^q dx} \right)^{1/q} \leq c_N(\Lambda)$$

для всех $v \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, поскольку для $x \in E_n \setminus \Omega_{\overline{c}}$ выполняется неравенство $\mu_2^{-1}(x) \leq c_N(\Lambda) \mu_1^{-1}(x)$. Итак, построено $\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$, для которого $\varkappa_N(\Lambda, \varphi) \leq c_N(\Lambda)$. Значит и $\varkappa_N(\Lambda) \leq c_N(\Lambda)$.

Осталось показать, что $\varkappa_N(\Lambda) \geq c_N(\Lambda)$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество Ω_{c_0} , где $c_0 = c_N(\Lambda) - \varepsilon$. Тогда из определения $c_N(\Lambda)$ следует, что система множеств

$$\{\Omega_{c_0} + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$$

не образует N -укладку. Поэтому из леммы 2.1 получаем, что найдется такой ненулевой элемент $v \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, что $\text{supp } \widehat{v} \subseteq \Omega_{c_0}$, и если $K = \text{supp } \widehat{v} \subseteq \Omega_{c_0}$, то

$$\frac{\|v\|_{q, \mu_2^{-1}}}{\|v\|_{q, \mu_1^{-1}}} = \left(\frac{\int_K |\mu_2^{-1}(x) \widehat{v}(x)|^q dx}{\int_K |\mu_1^{-1}(x) \widehat{v}(x)|^q dx} \right)^{1/q} > c_0,$$

поскольку $\mu_2^{-1}(x) > c_0 \mu_1^{-1}(x)$ для всех $x \in K$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$ построено такое $v \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, что

$$\frac{\|v\|_{q, \mu_2^{-1}}}{\|v\|_{q, \mu_1^{-1}}} > c_N(\Lambda) - \varepsilon.$$

Поэтому из (2.3) и (2.6) следует, что $\varkappa_N(\Lambda) \geq c_N(\Lambda)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Используемый в этой работе способ доказательства теоремы 2.1 не дает возможности ни выяснить попутно вопрос о вычислении величины $\varkappa_N(\Lambda, \varphi)$ вида (2.2), ни полностью описать все оптимальные наборы $\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$ (т.е. те φ , на которых достигается нижняя грань в (2.3)) для фиксированной (в частности, оптимальной) решетки Λ , как это сделано для случая $N = 1$ в [4], [5]. Можно было бы сформулировать и доказать утверждения, аналогичные теоремам 3.1 и 3.3 из [5], описывающие в терминах распределения значений некоторой функции как погрешность аппроксимации в случае заданных N , Λ и φ , так и все оптимальные φ при фиксированных N и Λ . Однако недостаточная конструктивность этих утверждений вряд ли оправдала бы резкое возрастание объема работы (по этому поводу см. также замечание 3.3 из [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Тем не менее одно из семейств оптимальных $\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$ может быть описано следующим образом. Пусть имеется решетка Λ и $\bar{c} = c_N(\Lambda)$. Возьмем любое множество $D \supseteq \Omega_{\bar{c}}$, порождающее $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую N -укладку (например, можно взять $D = \Omega_{\bar{c}}$). Из леммы 1.2 следует, что существуют такие N множеств $D_1, \dots, D_N$, что $D = \bigcup_{k=1}^N D_k$ и $\text{mes}(D_k \cap D_j) = 0$ для всех $k \neq j$. Тогда оптимальным будет любой набор

$$\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}) \in (H_p^{\mu_1})^N,$$

обладающий следующим свойством: для каждого $k = 1, \dots, N$ $\hat{\varphi}^{(k)} \neq 0$ почти всюду в D_k и $\hat{\varphi}^{(k)} = 0$ почти всюду в $E_n \setminus D_k$. Доказательство этого факта полностью аналогично рассуждениям при выводе неравенства $\varkappa_N(\Lambda) \leq c_N(\Lambda)$ в доказательстве теоремы 2.1.

Для того чтобы вычислить значение поперечника $\varkappa_{N,\hbar}$ и описать все оптимальные решетки Λ (т.е. решетки, на которых достигается $\inf \varkappa_N(\Lambda)$), дадим следующее определение.

Пусть $\{D_c\}$ – такая система зависящих от параметра $c \in E_1$, принадлежащих E_n измеримых множеств, что $D_{c_1} \subseteq D_{c_2}$ при всех $c_1 > c_2$. Рассмотрим множество $\mathbf{R}_a = \{R\}$ всех решеток в E_n заданного объема $a > 0$, т.е. $\mathbf{R}_a = \{R \subset E_n : V(R) = a\}$. Для каждой решетки $R \in \mathbf{R}_a$ символом $c_N(R)$ будет обозначаться точная нижняя грань тех $c \in E_1$, для которых множество D_c порождает R -решетчатую N -укладку. Наконец, пусть

$$c_{N,a} = \inf \{c_N(R) : R \in \mathbf{R}_a\}.$$

Будем говорить, что решетка $R \in \mathbf{R}_a$ порождает плотнейшую a -решетчатую N -кратную укладку множеств D_c , если $c_N(R) = c_{N,a}$; число $c_{N,a}$ будем называть N -ым a -критическим значением системы множеств $\{D_c\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если каждое множество системы $\{D_c\}$ подобно некоторому фиксированному множеству D (т.е. переводится в D сдвигами, поворотами и растяжениями относительно некоторой точки), то решетка, порождающая плотнейшую a -решетчатую N -кратную укладку множеств D_c , с точностью до подобия совпадает с решеткой, порождающей плотнейшую N -кратную укладку множества D .

Из теоремы 2.1 легко следует описание всех оптимальных решеток Λ , т.е. таких решеток, что $V(\Lambda) = N\hbar$ и $\varkappa_N(\Lambda) = \varkappa_{N,\hbar}$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Поперечник $\varkappa_{N,\hbar}$ вида (2.4) равен N -му $(2\pi)^n/(N\hbar)$ -критическому значению системы множеств*

$$\Omega_c = \{x \in E_n : \mu_1(x)/\mu_2(x) > c\}; \quad (2.10)$$

при этом для оптимальности решетки Λ необходимо и достаточно, чтобы решетка $2\pi\Lambda^$ (Λ^* – сопряженная к Λ решетка) порождала плотнейшую $(2\pi)^n/(N\hbar)$ -решетчатую N -кратную укладку множеств Ω_c вида (2.10).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Следствием теоремы 2.2 является тот факт, что как значение поперечника $\varkappa_{N,h}$, так и свойство решетки быть оптимальной, не зависят от p , а зависят лишь от геометрии лебеговых множеств отношения весовых функций μ_1 и μ_2 . Более того, в ряде случаев одна и та же решетка может оказаться оптимальной для целого семейства пар пространств $H_p^{\mu_1}$ и $H_p^{\mu_2}$. Например, пусть $\mu_1(x)/\mu_2(x) = F(|x|)$, где $|x|$ – евклидова длина $x \in E_n$, а $F(\cdot)$ – определенная на $[0, \infty)$ убывающая функция. Тогда

$$\Omega_c = \{x \in E_n : \mu_1(x)/\mu_2(x) > c\} = \{x \in E_n : |x| < G(c)\}$$

– шар в E_n радиуса $G(c)$, где $G(\cdot)$ – функция, обратная к $F(\cdot)$. Поэтому вопрос о выборе оптимальной решетки сводится к решению задачи о плотнейшей решетчатой N -кратной упаковке одинаковых шаров в E_n . При этом, во-первых, $\varkappa_{N,h} = F(r)$, где r – радиус шаров, образующих плотнейшую $(2\pi)^n/(Nh)$ -решетчатую N -кратную укладку, а во-вторых, одна и та же решетка Λ является оптимальной одновременно для всех p и всех таких весовых функций μ_1 и μ_2 , что $\mu_1(x)/\mu_2(x)$ зависит лишь от $|x|$ и монотонно убывает с ростом $|x|$ (решетка Λ должна быть такой решеткой объема Nh , что решетка $2\pi\Lambda^*$ порождает плотнейшую N -кратную укладку одинаковых шаров). Именно так обстоит дело при аппроксимации в пространствах Соболева. Действительно, если

$$p = 2, \quad H_2^{\mu_1} = W_2^s(E_n), \quad H_2^{\mu_2} = W_2^m(E_n), \quad \text{где } m > s,$$

то

$$\mu_1(x) = (1 + |x|^2)^{s/2}, \quad \mu_2(x) = (1 + |x|^2)^{m/2},$$

причем $\mu_1(x)/\mu_2(x)$ зависит только от $|x|$ и монотонно убывает с ростом $|x|$. Поэтому одна и та же решетка, сопряженная к которой порождает плотнейшую N -кратную решетчатую укладку одинаковых шаров в E_n , является оптимальной одновременно для всей совокупности пар (W_2^s, W_2^m) при любых $s < m$. По поводу описания решеток, порождающих плотнейшие кратные укладки шаров см. обзоры [11], [12] (например, в случае $n = 2$ такие решетки построены для $N \leq 8$, см., например, [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. В приложениях обычно используются пространства $B(\Lambda, \varphi)$, порождаемые функцией $\varphi \in H_p^{\mu_1}$ с компактным носителем. При этом рассматриваются последовательности решеток $\Lambda_h = h\Lambda$ и функций $\varphi^h(x) = \varphi(x/h)$, порождающие пространства $B^h(\Lambda, \varphi) = B(\Lambda^h, \varphi^h)$, и изучаются аппроксимационные свойства таких пространств при $h \rightarrow 0$. В случае аппроксимации в пространствах Соболева в [14] установлены условия, необходимые и достаточные для оптимальности по порядку таких аппроксимаций (см. также [15], [16]). Построение оптимальных по порядку и даже оптимальных в смысле реализации соответствующих поперечников функций φ представляется с точки зрения возможных применений в проекционно-сеточных методах весьма актуальным. Некоторые оптимальные по порядку пространства $B(\Lambda, \varphi)$ описаны в [3], [4], [14]–[19]. Для построения оптимальных φ с компактным носителем удобно использовать описанные в [20] специальные сплайн-тригонометрические базисы и представления целых функций экспоненциального типа, позволяющие выделить более узкие подпространства, которым обязаны принадлежать оптимальные функции (по этому поводу см. также [19]).

§ 3. Средняя размерность и сходимость эрмитовых поперечников к соответствующим поперечникам по Колмогорову

Рассмотрим теперь вопрос о сравнении определенных в этой работе поперечников с соответствующими поперечниками по Колмогорову. Для этой цели определим понятие средней размерности подклассов пространства H_p^μ . В основе этого определения лежит восходящая к Шеннону [21], Колмогорову и Тихомирову [22] идея использования усредненных характеристик, которая позднее была использована в работах [23]–[27]. Приводимое ниже определение средней размерности, введенное в [5], отлично от применявшихся в [23]–[27]; в то же время аналоги этого определения для рассматривавшихся в этих работах случаев дают точно те же значения средней размерности, что и в упомянутых работах.

Пусть L – некоторое подмножество пространства $H_p^{\mu_1}$,

$$L^\perp = \left\{ u \in H_q^{\mu_1^{-1}} : \int_{E_n} \widehat{u}(x) \overline{\widehat{v}(x)} dx = 0 \text{ для всех } v \in L \right\}$$

– аннулятор множества L . Определим зависящую от p, μ_1, L совокупность $\mathbf{K} = \mathbf{K}(L) = \{\Omega\}$ измеримых множеств $\Omega \subseteq E_n$, каждое из которых обладает следующим свойством: если $u \in L^\perp$ и $\text{supp } \widehat{u} \subseteq \Omega$, то $u = 0$ (здесь $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\widehat{u} = \mathcal{F}u$, где $\mathcal{F}$ – оператор преобразования Фурье). Отметим, что если Ω^* и Ω – измеримые множества в E_n , то из условий $\Omega^* \subseteq \Omega$ и $\Omega \in \mathbf{K}$ следует, что $\Omega^* \in \mathbf{K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Назовем *средней размерностью* множества L величину

$$\text{Dimm } L = (2\pi)^{-n} \sup_{\Omega \in \mathbf{K}} \text{mes } \Omega. \quad (3.1)$$

Несмотря на то, что внешне определение 3.1 несколько отличается от определения средней размерности из [5], легко видеть, что эти определения эквивалентны. Заметим также, что если $L_1 \subseteq L_2$, то $\text{Dimm } L_1 \leq \text{Dimm } L_2$.

Выясним теперь значения средних размерностей подпространств $B(\Lambda, \varphi)$ пространства $H_p^{\mu_1}$, аппроксимационные свойства которых изучены в § 2.

Пусть N натуральное, $\varphi \in (H_p^{\mu_1})^N$ и $B(\Lambda, \varphi)$ – подпространство пространства $H_p^{\mu_1}$, определенное в § 2, где Λ – некоторая решетка в E_n объема $N\hbar$.

ЛЕММА 3.1. $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) \leq \hbar^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega \in E_n$ таково, что $\text{mes } \Omega > (2\pi)^n/\hbar$. Поскольку $V(2\pi\Lambda^*) = (2\pi)^n/(N\hbar)$, то из леммы 1.3 следует, что система множеств $\{\Omega + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ не образует N -кратную укладку. Поэтому для доказательства существования такого $u \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, что $u \neq 0$ и $\text{supp } \widehat{u} \subseteq \Omega$, достаточно применить лемму 2.1. Значит, любое $\Omega \subseteq E_n$, для которого $\text{mes } \Omega > (2\pi)^n/\hbar$, не принадлежит классу $\mathbf{K}(B(\Lambda, \varphi))$. Поэтому из (3.1) следует, что $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) \leq \hbar^{-1}$. Лемма доказана.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – набор векторов решетки $2\pi\Lambda^*$, и $D(\cdot, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ – зависящий от $\varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}) \in (H_p^{\mu_1})^N$ определитель вида

$$D(x, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = \det \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}^{(1)}(x + \alpha_1) & \dots & \widehat{\varphi}^{(1)}(x + \alpha_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{\varphi}^{(N)}(x + \alpha_1) & \dots & \widehat{\varphi}^{(N)}(x + \alpha_N) \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 3.2. Если существуют такие N векторов $\beta_1, \dots, \beta_N$ решетки $2\pi\Lambda^*$, что множество $\text{supp } D(\cdot, \beta_1, \dots, \beta_N)$ порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатое 1-покрытие, то $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) = \hbar^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1.6, получаем, что существует множество $G \subseteq \text{supp } D(\cdot, \beta_1, \dots, \beta_N)$, порождающее $2\pi\Lambda^*$ -решетчатое 1-замощение. Пусть

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^N (G + \beta_k). \quad (3.2)$$

Заметим, что $\text{mes } G = (2\pi)^n / (N\hbar)$, поэтому $\text{mes } \Omega = (2\pi)^n / \hbar$. Возьмем любое $u \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, удовлетворяющее условию $\text{supp } \hat{u} \subseteq \Omega$. Тогда почти всюду в G имеет место равенство

$$\sum_{\alpha \in \Lambda^*} \hat{u}(x + 2\pi\alpha) \overline{\hat{\varphi}^{(k)}(x + 2\pi\alpha)} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Поскольку $\text{supp } \hat{u} \subseteq \Omega$ и Ω имеет вид (3.2), то для всех

$$\alpha \in 2\pi\Lambda^* \setminus \bigcup_{k=1}^N \{\beta_k\}$$

почти всюду в G выполняется равенство $\hat{u}(\cdot + \alpha) = 0$. Поэтому (3.3) принимает вид

$$\sum_{j=1}^N \hat{u}(\cdot + \beta_j) \overline{\hat{\varphi}^{(k)}(\cdot + \beta_j)} = 0 \quad \text{почти всюду в } G, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.4)$$

Так как $G \subseteq \text{supp } D(\cdot, \beta_1, \dots, \beta_N)$, то почти всюду в G определитель системы (3.4) отличен от нуля. Поэтому $\hat{u}(\cdot + \beta_j) = 0$ почти всюду в G для всех $j = 1, \dots, N$, или, что то же самое, $\hat{u} = 0$ почти всюду в Ω . Итак, построено такое $\Omega \subset E_n$, что $\text{mes } \Omega = (2\pi)^n / \hbar$ и для всех $u \in B^\perp(\Lambda, \varphi)$, удовлетворяющих условию $\text{supp } \hat{u} \subseteq \Omega$, выполняется равенство $u = 0$. Поэтому $\Omega \in \mathbf{K}$ и из определения 3.1 следует, что $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) \geq \hbar^{-1}$. Используя лемму 3.1, получаем, что $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) = \hbar^{-1}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Леммы 3.1 и 3.2 показывают, что средняя размерность каждого из $B(\Lambda, \varphi)$ не больше $\hbar^{-1}$, и имеется достаточно богатый набор пространств $B(\Lambda, \varphi)$, для которых $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) = \hbar^{-1}$ (условия леммы 3.2, гарантирующие последнее равенство, означает не слишком сильное вырождение системы $\hat{\varphi}^{(1)}, \dots, \hat{\varphi}^{(N)}$; эти условия регулируют характер распределения нулей обобщенных многочленов по этой системе и являются видоизменением на рассматриваемый случай требования, чтобы система $\hat{\varphi}^{(1)}, \dots, \hat{\varphi}^{(N)}$ была системой Чебышёва). Отметим также, что, по-видимому, условия леммы 3.2 необходимы (либо близки к необходимым) для выполнения равенства $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) = \hbar^{-1}$ (при $N = 1$ нетрудно показать, что $\text{Dimm } B(\Lambda, \varphi) = \hbar^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\text{supp } \hat{\varphi}$ порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатое 1-покрытие).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть фиксировано измеримое множество $D \subseteq E_n$ и

$$B_D = \{v \in H_p^{\mu_1} : \text{supp } \widehat{v} \subseteq D\}.$$

Тогда, очевидно, $\Omega \in \mathbf{K} = \mathbf{K}(B_D)$ тогда и только тогда, когда $\text{mes}(\Omega \setminus D) = 0$. Поэтому

$$\sup_{\Omega \in \mathbf{K}} \text{mes } \Omega = \text{mes } D,$$

откуда $\text{Dimm } B_D = (2\pi)^{-n} \text{mes } D$ (для пространства L_p такое же значение средней размерности при другом ее определении получено в [25]).

Определим теперь поперечник по Колмогорову следующим образом:

$$d_h = \inf_{L: \text{Dimm } L \leq h^{-1}} \sup_{\|u\|_{p, \mu_2} = 1} \inf_{w \in L} \|u - w\|_{p, \mu_1} \quad (3.5)$$

(здесь нижняя грань берется по всевозможным подпространствам L пространства $H_p^{\mu_1}$, средние размерности которых не превосходят h^{-1}). Величины d_h вида (3.5) и $\varkappa_{N, h}$ вида (2.4) характеризуют возможности аппроксимации элементами подпространств одной и той же средней размерности h^{-1} ; отличие состоит лишь в том, что $\varkappa_{N, h}$ описывает аппроксимационные свойства пространств, которые порождаются сдвигами N фиксированных функций по решетке объема Nh , а для d_h эти пространства произвольны.

Как показано в теореме 4.1 работы [5],

$$d_h = \inf \{c \in E_1 : \text{mes } \Omega_c \leq (2\pi)^n / h\} \quad (3.6)$$

(напомним, что

$$\Omega_c = \{x \in E_n : \mu_1(x) / \mu_2(x) > c\}, \quad (3.7)$$

где μ_1 и μ_2 — весовые функции умеренного роста, определяющие пространства $H_p^{\mu_1}$ и $H_p^{\mu_2}$).

Связь между величинами поперечников d_h и $\varkappa_{N, h}$ устанавливают следующие два утверждения (которые, по сути дела, являются следствиями представления (3.6), теорем из § 2 и свойств кратных укладок, описанных в § 1).

ТЕОРЕМА 3.1. *Для всех натуральных N имеет место неравенство $d_h \leq \varkappa_{N, h}$.*

Доказательство теоремы 3.1 немедленно следует из определений поперечников d_h и $\varkappa_{N, h}$ и леммы 3.1. Другое доказательство легко следует из (3.6), теоремы 2.1 и замечания 1.5.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если все множества Ω_c вида (3.7), удовлетворяющие условию $\text{mes } \Omega_c < (2\pi)^n / h$, измеримы по Жордану, то последовательность $\varkappa_{N, h}$ сходится и*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varkappa_{N, h} = d_h.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем даже более сильное утверждение. Пусть $\widehat{\Lambda}$ — фиксированная решетка объема $\hbar$. Для любого натурального N введем обозначение $\Lambda_N = N^{1/n} \widehat{\Lambda}$. Тогда $V(\Lambda_N) = N\hbar$. Покажем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varkappa_N(\Lambda_N) = d_{\hbar}, \quad (3.8)$$

где $\varkappa_N(\Lambda_N)$ определяется равенством (2.3).

Введем обозначения $M = \hbar^{1/n} \widehat{\Lambda}^*$, $a = (2\pi)^n / \hbar$. Тогда $V(M) = 1$ и если $M_N = (a/N)^{1/n} M$, то $M_N = 2\pi \Lambda_N^*$. В качестве Ω_c , образующих систему множеств (1.15), возьмем множества вида (3.7). Используя (при таком выборе a , M и $\{\Omega_c\}$) равенства (1.16)–(1.18), получаем

$$\begin{aligned} c_N &= c_N((2\pi)^n / \hbar, \hbar^{1/n} \widehat{\Lambda}^*) = \inf \{c \in E_1 : \{\Omega_c + \alpha\}_{\alpha \in 2\pi \Lambda^*} - N\text{-укладка}\}, \\ d &= d((2\pi)^n / \hbar) = \inf \{c \in E_1 : \text{mes } \Omega_c \leq (2\pi)^n / \hbar\}, \\ q &= q((2\pi)^n / \hbar) = \inf \{c \in E_1 : \text{mes } \Omega_c < (2\pi)^n / \hbar\}. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.1 и равенства (3.6) следует, что

$$c_N = \varkappa_N(\Lambda_N), \quad d_{\hbar} = d.$$

Поскольку μ_1/μ_2 непрерывна (см. определение умеренно растущих весовых функций в начале §2), то $q = d$ (см. замечание 1.2). Используя следствие 1.1, получаем равенство (3.8). Так как $d_{\hbar} \leq \varkappa_{N,\hbar} \leq \varkappa_N(\Lambda_N)$ для всех N , то из (3.8) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что $\varkappa_{N,\hbar} \rightarrow d_{\hbar}$, причем всегда $\varkappa_{N,\hbar} \geq d_{\hbar}$. Однако монотонный характер сходимости вовсе не обязателен. Тем не менее некоторые подпоследовательности определенного вида не возрастают (по этому поводу см. замечание 1.3).

Список литературы

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Т. 2. М.: Мир, 1988.
2. Волевич Л. Р., Панеях Б. П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // УМН. 1965. Т. 20. № 1. С. 3–74.
3. Стрелков Н. А. О проекционно-сеточных поперечниках // Вариационно-разностные методы в математической физике. М.: ОВМ АН СССР, 1984. С. 211–214.
4. Стрелков Н. А. Оптимальные координатные функции в проекционно-разностных методах, поперечники и решетчатые укладки // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 3. С. 550–554.
5. Стрелков Н. А. Проекционно-сеточные поперечники и решетчатые укладки // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 10. С. 1513–1533.
6. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
7. Рышков С. С. Применение метода непрерывных параметров в теории точечных решеток // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 49–52.
8. Groemer H. Multiple packings and coverings // Stud. Sci. Math. Hung. 1986. V. 21. P. 189–200.
9. Bolle U. On the density of multiple packings and coverings of convex discs // Stud. Sci. Math. Hung. 1989. V. 24. P. 119–126.

10. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
11. *Few L.* Multiple packing of spheres; A survey // Proc. Colloquium on Complexity (Copenhagen, 1965). Copenhagen: Kobenhavns Univ. Mat. Inst., 1967. P. 88–93.
12. *Fejes Toth G.* New results in the theory of packing and covering // Complexity and its application / ed. P. M. Gruber and J. M. Wills. Basel–Boston–Stuttgart: Birkhauser Verlag, 1983. P. 318–359.
13. *Яковлев Н. Н.* О плотнейшей решетчатой 8-упаковке на плоскости // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1983. № 5. С. 8–16.
14. *Strang G., Fix G.* A Fourier analysis of the finite element variational method // Constructive Aspects of Functional Analysis. Roma: Edizioni Cremonese, 1973.
15. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974.
16. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.
17. *Стрелков Н. А.* Об аппроксимации пространств типа С. Л. Соболева // Вестник Ярославского ун-та. 1974. № 10. С. 123–156.
18. *Стрелков Н. А.* О выборе координатных функций в проекционно-разностных методах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 6. С. 1443–1457.
19. *Strelkov N. A.* On the relationship between difference and projection-difference method // Numer. Anal. and Math. Modelling. Banach Center Publications. 1990. V. 24. P. 355–377.
20. *Стрелков Н. А.* Сплайн-тригонометрические базисы в L_2 и интерполяции целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 6. С. 835–840.
21. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
22. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. Т. 14. № 2. С. 3–86.
23. *Динь Зунг, Магарил-Ильяев Г. Г.* Задачи типа Бернштейна и Фавара и средняя ε -размерность некоторых классов функций // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 4. С. 783–786.
24. *Тихомиров В. М.* Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных // Труды конференции по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике. Новосибирск: Наука, 1980. С. 183–188.
25. *Динь Зунг.* Средняя ε -размерность класса функций $B_{G,p}$ // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 5. С. 727–736.
26. *Магарил-Ильяев Г. Г.* φ -средние поперечники классов функций на прямой // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 211–212.
27. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // ДАН СССР. 1991. Т. 318. № 7. С. 35–38.