Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Об ограниченности в $C[-1, 1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Чебышёва, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 02:38:42

УДК 517.98

И. И. Шарапудинов

Об ограниченности в $C[-1, 1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Чебышёва

Исследуются аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена $v_{m,n} = v_{m,n}(f) = v_{m,n}(f, x) = v_{m,n}(f, x, N)$ дискретных сумм Фурье–Чебышёва по многочленам Чебышёва, образующим ортонормированную систему на множестве $\Omega = \{-1 + 2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$ с весом $\rho(x) = 2/N$. Доказано, что если $n \leq a\sqrt{N}$, $0 < d \leq m/n \leq b$, то найдется постоянная $c = c(a, b, d)$, для которой $\|v_{m,n}\| \leq c$, где $\|v_{m,n}\|$ – норма оператора $v_{m,n}$ в пространстве $C[-1, 1]$. Как следствие доказано, что для алгебраического многочлена $p_n(x)$ степени $n \leq a\sqrt{N}$ из неравенства $\max\{|p_n(x)| : x \in \Omega\} \leq 1$ вытекает $\|p_n\| = \max\{|p_n(x)| : x \in [-1, 1]\} \leq c(a)$.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Через $T_n^{\alpha,\beta}(z, N)$ ($0 \leq n \leq N-1$) обозначим классические многочлены Чебышёва, образующие ортонормированную систему на множестве $\{0, 1, \dots, N-1\}$ с весом

$$\mu(z) = \mu(z; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(z+\beta+1)\Gamma(N-z+\alpha)}{\Gamma(z+1)\Gamma(N-z)}, \quad (1.1)$$

где $\alpha, \beta > -1$. Будем считать, что

$$T_n^{\alpha,\beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}. \quad (1.2)$$

Тогда (см. [1])

$$\sum_{z=0}^{N-1} \mu(z) T_n^{\alpha,\beta}(z, N) T_m^{\alpha,\beta}(z, N) = \delta_{nm} h_{n,N}^{\alpha,\beta}, \quad (1.3)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)} \\ (a^{[0]} = 1, a^{[n]} = a(a-1)\cdots(a-n+1)). \quad (1.4)$$

При $n = 0$ произведение $(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)$ следует заменить через $\Gamma(\alpha + \beta + 2)$. В случае $\alpha = \beta = 0$ мы применяем более простые обозначения: $T_n(z) = T_n(z, N) = T_n^{0,0}(z, N)$, $h_{n,N} = h_{n,N}^{0,0}$. Положим

$$\tau_n(t) = \tau_{n,N}(t) = \{h_{n,N}\}^{-1/2} T_n \left[\frac{N-1}{2}(1+t), N \right]. \quad (1.5)$$

В силу (1.3) $\{\tau_{n,N}(t)\}_{n=0}^{N-1}$ образует ортонормированную с весом $\mu_N(t) = 2/N$ систему на множестве

$$\Omega_N = \left\{ -1 + \frac{2j}{N-1} \right\}_{j=0}^{N-1},$$

т. е.

$$\frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} \tau_n(t) \tau_m(t) = \delta_{nm}. \quad (1.6)$$

Сумму Фурье–Чебышёва порядка $n \leq N-1$ функции $f \in C[-1, 1]$ по системе (1.5) запишем в виде

$$S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, x) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k \tau_k(x), \quad (1.7)$$

где

$$\hat{f}_k = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} f(t) \tau_k(t). \quad (1.8)$$

В работе [2] исследован вопрос о сходимости $S_{n,N}(f, x)$ к $f(x)$ при $n = O(N^{1/2})$, в частности показано, что при $n = O(N^{1/2})$ норма оператора $S_{n,N} = S_{n,N}(f)$ в $C[-1, 1]$ имеет порядок $\|S_{n,N}\| = O(n^{1/2})$. В настоящей работе в качестве оператора приближения рассматриваются средние Валле–Пуссена

$$v_{m,n}(f) = v_{m,n}(f, x) = \frac{1}{n+1} [S_{m,N}(f, x) + \dots + S_{n+m,N}(f, x)], \quad (1.9)$$

где $n+m \leq N-1$. Будем рассматривать $v_{m,n} = v_{m,n}(f)$ как линейный оператор, действующий в $C[-1, 1]$, норму которого мы обозначим через $\|v_{m,n}\|$. Доказано (§4), что если $n/m \asymp 1$ и $n = O(N^{1/2})$, то $\|v_{m,n}\| = O(1)$. Точнее, если постоянные a, b и d таковы, что $n \leq aN^{1/2}$, $0 < d \leq n/m \leq b$, то найдется такая константа $c(a, b, d)$, для которой

$$\|v_{m,n}\| \leq c(a, b, d). \quad (1.10)$$

Здесь и далее через $c, c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$, $c_k(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, разные в разных местах (например, допускаются записи вида $c(a, b) < c(a, b)$).

Как следствие оценки (1.10) дано решение следующей задачи. Пусть $\|f\| = \max\{|f(x)| : -1 \leq x \leq 1\}$, $p_n(x)$ – произвольный многочлен степени n , для которого $|p_n(x)| \leq 1$ при $x \in \Omega_N$. требуется оценить $\|p_n\|$. Доказано, что если $n \leq aN^{1/2}$, то из того, что $|p_n(x)| \leq 1$ при $x \in \Omega_N$, вытекает оценка $\|p_n\| \leq c(a)$.

§ 2. Некоторые формулы для многочленов Чебышёва $T_n^{\alpha, \beta}(z, M)$

Для удобства ссылок мы собираем здесь некоторые хорошо известные формулы для многочленов Чебышёва $T_n^{\alpha, \beta}(z, M)$ [3]. Имеют место:

рекуррентные формулы

$$A_n T_{n+1}^{\alpha, \beta}(z, M) = (z - B_n) T_n^{\alpha, \beta}(z, M) - C_n T_{n-1}^{\alpha, \beta}(z, M), \quad (2.1)$$

где $T_0^{\alpha, \beta}(z, M) = 1$, $T_1^{\alpha, \beta}(z, M) = -1 - \beta + z(2 + \alpha + \beta)/(M - 1)$,

$$A_n = \frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(M-n-1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}, \quad (2.2)$$

$$C_n = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(M+n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.3)$$

$$B_n = A_n \frac{n+\beta+1}{n+1} + C_n \frac{n}{n+\beta}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (n+1)T_{n+1}^{\alpha, \beta}(z, M) + (n+\beta+1)T_n^{\alpha, \beta}(z, M) \\ = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{M-1} z T_n^{\alpha, \beta+1}(z-1, M-1), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (n+\alpha+1)T_n^{\alpha, \beta}(z, M) - (n+1)T_{n+1}^{\alpha, \beta}(z, M) \\ = \frac{2n+\alpha+\beta}{M-1} (M-1-z) T_n^{\alpha+1, \beta}(z, M-1); \end{aligned} \quad (2.6)$$

симметрия

$$T_n^{\alpha, \beta}(z, M) = (-1)^n T_n^{\beta, \alpha}(M-1-z, M); \quad (2.7)$$

формула Кристоффеля–Дарбу ($T_n^{\alpha, \beta}(z) = T_n^{\alpha, \beta}(z, M)$)

$$\begin{aligned} K_{n, N}^{\alpha, \beta}(z, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{T_k^{\alpha, \beta}(z) T_k^{\alpha, \beta}(y)}{h_{k, M}^{\alpha, \beta}} \\ &= \frac{(M-1)^{[n+1]}}{(M+n+\alpha+\beta)^{[n]}} \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \\ &\quad \times \frac{T_{n+1}^{\alpha, \beta}(z) T_n^{\alpha, \beta}(y) - T_n^{\alpha, \beta}(z) T_{n+1}^{\alpha, \beta}(y)}{z-y}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

явный вид

$$T_n^{\alpha, \beta}(z, M) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_k x^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(M-1)^{[k]}}, \quad (2.9)$$

где $(a_0) = a^{[0]} = 1$, $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$, $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим многочлены ($0 \leq n \leq N-2$)

$$Q_n^{\alpha, \beta}(t) = Q_{n, N}^{\alpha, \beta}(t) = T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{N-1}{2}(1+t) - 1, N-1 \right]. \quad (3.1)$$

Подставляя в (2.1) $M = N - 1$, $z = (N - 1)(1 + t)/2 - 1$, имеем

$$A_n Q_{n+1}^{\alpha, \beta}(t) = \frac{N-1}{2} \left[t + 1 - \frac{2}{N-1} (B_n + 1) \right] Q_n^{\alpha, \beta}(t) - C_n Q_{n-1}^{\alpha, \beta}(t), \quad (3.2)$$

где $A_n = A_n(\alpha, \beta, N - 1)$, $B_n = B_n(\alpha, \beta, N - 1)$, $C_n = C_n(\alpha, \beta, N - 1)$, а из (2.2)–(2.4) находим

$$\begin{aligned} \lambda_n^{\alpha, \beta} &= \lambda_{n, N}^{\alpha, \beta} = 1 - \frac{2}{N-1} (B_n + 1) \\ &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)} + \frac{q(n, \alpha, \beta)}{N-1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $|q(n, \alpha, \beta)| \leq c(\alpha, \beta)$. В самом деле, мы имеем

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{N-1} (B_n + 1) &= 1 - \frac{2}{N-1} \left[A_n \frac{n + \beta + 1}{n + 1} + C_n \frac{n}{n + \beta} + 1 \right] \\ &= 1 - \frac{2}{N-1} \left[\frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(N-n-2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \frac{n+\beta+1}{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(N-1+n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} \frac{n}{n+\beta} + 1 \right] \\ &= 1 - \frac{2}{N-1} \left[\frac{(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(N-1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+\alpha)(N-1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} + \frac{n(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} + 1 \right] \\ &= 1 - \frac{2(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} - \frac{2n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} \\ &\quad + \frac{2(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)(N-1)} \\ &\quad - \frac{2n(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(N-1)} - \frac{2}{N-1}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{N-1} (B_n + 1) &= 1 - \frac{2(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) + 2n(n+\alpha)(2n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \\ &\quad + \frac{2(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)(n+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)(N-1)} \\ &\quad - \frac{2n(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)(N-1)} - \frac{2}{N-1}. \end{aligned}$$

Числитель первой из этих дробей равен

$$\begin{aligned} h &= 2(n + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta) + 2n(n + \alpha)(2n + \alpha + \beta + 2) \\ &= 2(n + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 1) + 2n(n + \alpha)(2n + \alpha + \beta + 1) \\ &\quad + 2n(n + \alpha) - 2(n + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1) \end{aligned}$$

и так как

$$\begin{aligned} &2n(n + \alpha) - 2(n + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1) \\ &= 2n(n + \alpha) - 2n(n + \alpha) - 2n(\beta + 1) - 2(\beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1) \\ &= -2(\beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 1), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} h &= (2n + \alpha + \beta + 1)[2(n + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1) + 2n(n + \alpha) - 2(\beta + 1)] \\ &= (2n + \alpha + \beta + 1)[2n(n + \alpha + \beta) + 2n + 2(\beta + 1)(n + \alpha + \beta) + 2n(n + \alpha)] \\ &= (2n + \alpha + \beta + 1)[2n(2n + 2\alpha + 2\beta + 1) + 2(\beta + 1)(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &1 - \frac{h}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)} \\ &= 1 - \frac{2n(2n + 2\alpha + 2\beta + 1) + 2(\beta + 1)(\alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)} \\ &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}. \end{aligned}$$

Что касается остальных дробей, то их разность имеет вид $q(n, \alpha, \beta)/(N - 1)$, где $|q(n, \alpha, \beta)| < c(\alpha, \beta)$ и тем самым (3.3) доказано.

Рассмотрим два случая: 1) $\alpha = 0, \beta = 1$; 2) $\alpha = 1, \beta = 0$. С учетом (2.2) и (2.3) имеем из (3.2)

$$\begin{aligned} &\frac{(n + 1)(n + 2)(N - n - 2)}{2(2n + 3)}Q_{n+1}^{0,1}(t) \\ &= \frac{(N - 1)(n + 1)}{2}(t + \lambda_n^{0,1})Q_n^{0,1}(t) - \frac{n(n + 1)(N + n)}{2(2n + 1)}Q_{n-1}^{0,1}(t), \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{(n + 1)(n + 2)(N - 2)^{[n+1]}}{(N - 1)(2n + 3)(N + n)^{[n]}}Q_{n+1}^{0,1}(t) &= \frac{(N - 2)^{[n]}}{(N + n)^{[n]}}(n + 1)(t + \lambda_n^{0,1})Q_n^{0,1}(t) \\ &\quad - \frac{n(n + 1)}{2n + 1} \frac{(N - 2)^{[n]}Q_{n-1}^{0,1}(t)}{(N + n - 1)^{[n-1]}(N - 1)}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Аналогично, в случае $\alpha = 1, \beta = 0$ находим

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(N-1)} \frac{(N-2)^{[n+1]}}{(N+n)^{[n]}} Q_{n+1}^{1,0}(y) \\ &= \frac{(N-2)^{[n]}}{(N+n)^{[n]}} (n+1)(y + \lambda_{n,N}^{1,0}) Q_n^{1,0}(y) - \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(N-2)^{[n]}(N-1)^{-1}}{(N+n-1)^{[n-1]}} Q_{n-1}^{1,0}(y). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из равенства (3.4), умноженного на $Q_{n,N}^{1,0}(y)$, вычтем (3.5), умноженное на $Q_{n,N}^{0,1}(t)$. Тогда, полагая $k = n$, получим ($1 \leq k \leq N-3$)

$$\begin{aligned} & \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+3)(N-1)} \frac{(N-2)^{[k+1]}}{(N+k)^{[k]}} [Q_{k+1}^{0,1}(t) Q_k^{1,0}(y) - Q_{k+1}^{1,0}(y) Q_k^{0,1}(t)] \\ &= \frac{(N-2)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} (k+1) [t - y + \lambda_k^{0,1} - \lambda_k^{1,0}] Q_k^{0,1}(t) Q_k^{1,0}(y) \\ &+ \frac{k(k+1)}{(2k+1)(N-1)} \frac{(N-2)^{[k]}}{(N+k-1)^{[k-1]}} [Q_k^{0,1}(t) Q_{k-1}^{1,0}(y) - Q_k^{1,0}(y) Q_{k-1}^{0,1}(t)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если мы положим $a^{[-1]} = 1, Q_{-1}^{\alpha,\beta}(z) \equiv 0$, то формула (3.6) остается в силе и при $k = 0$. Последовательно применяя (3.6) при $k = 0, 1, \dots, \nu$ ($0 \leq \nu \leq N-3$), мы получим

$$\begin{aligned} & (t-y) \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(N-2)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} (k+1) Q_k^{0,1}(t) Q_k^{1,0}(y) \\ &= \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+3)(N-1)} \frac{(N-2)^{[\nu+1]}}{(N+\nu)^{[\nu]}} [Q_{\nu+1}^{0,1}(t) Q_{\nu}^{1,0}(y) - Q_{\nu+1}^{1,0}(y) Q_{\nu}^{0,1}(t)] \\ &+ \sum_{k=0}^{\nu} [\lambda_k^{1,0} - \lambda_k^{0,1}] \frac{(N-2)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} (k+1) Q_k^{0,1}(t) Q_k^{1,0}(y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Полагая в (3.7) $y = x + 2/(N-1)$, находим

$$\begin{aligned} & (t-x) \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(N-2)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} (k+1) Q_k^{0,1}(t) Q_k^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right) \\ &= \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+3)(N-1)} \frac{(N-2)^{[\nu+1]}}{(N+\nu)^{[\nu]}} \left[Q_{\nu+1}^{0,1}(t) Q_{\nu}^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right) \right. \\ &\quad \left. - Q_{\nu}^{0,1}(t) Q_{\nu+1}^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right) \right] \\ &+ \sum_{k=0}^{\nu} \left(\lambda_k^{1,0} - \lambda_k^{0,1} + \frac{2}{N-1} \right) \frac{(N-2)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} (k+1) \\ &\quad \times Q_k^{1,0}(t) Q_k^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее, из (2.6) и (3.1) имеем

$$Q_{n+1}^{\alpha, \beta}(y) = \frac{n + \alpha + 1}{n + 1} Q_n^{\alpha, \beta}(y) - \frac{(2n + \alpha + \beta + 2)(N - 1)}{(n + 1)(N - 2)2} (1 - y) T_n^{\alpha+1, \beta} \left[\frac{N - 1}{2} (1 + y) - 1, N - 2 \right].$$

Отсюда, в свою очередь, получаем

$$\begin{aligned} & Q_{\nu+1}^{0,1}(t) Q_{\nu}^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) - Q_{\nu}^{0,1}(t) Q_{\nu+1}^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \\ &= \frac{(2\nu + 3)(N - 1)}{2(\nu + 1)(N - 2)} \left\{ \left(1 - x - \frac{2}{N-1} \right) T_{\nu}^{2,0} \left[\frac{N-1}{2} (1 + x), N - 2 \right] Q_{\nu}^{0,1}(t) \right. \\ &\quad \left. - (1 - t) T_{\nu}^{1,1} \left[\frac{N-1}{2} (1 + t) - 1, N - 2 \right] Q_{\nu}^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\nu + 1} Q_{\nu}^{0,1}(t) Q_{\nu}^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Наряду с равенствами (3.8) и (3.9) в дальнейшем основную роль будет играть следующая оценка, установленная в [4]. Пусть α и β – неотрицательные целые числа, $\alpha > 0$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left| T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{M-1}{2} (1 + t), M \right] \right| \leq \\ & \leq c(\alpha, \beta, a) n^{-1/2} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $1 \leq n \leq a\sqrt{M}$, $-1 \leq t \leq 1$.

В работе [5] (теорема 2.1) установлена следующая асимптотическая формула

$$T_n^{\beta, \alpha} \left[\frac{M-1}{2} (1 + t), M \right] = P_n^{\beta, \alpha}(t) + w_n(t), \quad (3.11)$$

где $\alpha, \beta > -1$, $1 \leq n \leq M - 1$,

$$P_n^{\beta, \alpha}(t) = (-1)^n \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{k! (\alpha + 1)_k} \left(\frac{1 + t}{2} \right)^k \quad (3.12)$$

– многочлен Якоби, в которой для остаточного члена $w_n(t) = w_n(t, \alpha, \beta, M)$ при $1 \leq n \leq a(M - 1)^{1/2}$, $-1 \leq t \leq -1 + qn^{-2}$ (a, q – фиксированные числа) справедлива оценка

$$|w_n(t)| \leq c(\alpha, \beta, a, q) \frac{n^{2+\alpha}}{N}. \quad (3.13)$$

При доказательстве этой теоремы было использовано лишь то, что $|1 + t| \leq qn^{-2}$, поэтому оценка (3.13) остается в силе, если вместо $-1 \leq t \leq -1 + qn^{-2}$ потребовать $|1 + t| \leq qn^{-2}$. Этим фактом мы будем пользоваться в дальнейшем.

Далее, из (2.7) и аналогичного соотношения для многочленов Якоби мы имеем $w_n(-t, \alpha, \beta, M) = (-1)^n w_n(t, \beta, \alpha, N)$ (см. (3.11)), поэтому из (3.13) выводим также

$$|w_n(t)| \leq c(\alpha, \beta, a, q) \frac{n^{2+\beta}}{N}, \quad (3.14)$$

где $|1 - t| \leq qn^{-2}$, $1 \leq n \leq a(M - 1)^{1/2}$.

Нам также понадобятся следующие оценки, справедливые для многочленов Якоби (см. [6, с. 200]),

$$|P_n^{\beta, \alpha}(t)| \leq c(\alpha, \beta, q) n^\beta \quad (|1 - t| \leq qn^{-2}), \quad (3.15)$$

$$|P_n^{\beta, \alpha}(t)| \leq c(\alpha, \beta, q) n^\alpha \quad (|1 + t| \leq qn^{-2}). \quad (3.16)$$

Из (3.11), (3.13)–(3.16) находим при $1 \leq n \leq a\sqrt{M}$

$$\left| T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{M-1}{2}(1+t), M \right] \right| \leq cn^\alpha \quad (|1 - t| \leq qn^{-2}), \quad (3.17)$$

$$\left| T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{M-1}{2}(1+t), M \right] \right| \leq cn^\beta \quad (|1 + t| \leq qn^{-2}), \quad (3.18)$$

где $\alpha, \beta > -1$, $c = c(\alpha, \beta, a, q)$.

Пусть j_1, j_2 – фиксированные целые числа, тогда из (3.10), (3.17) и (3.18) вытекает следующая оценка

$$\begin{aligned} \left| T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{M-1}{2}(1+t) - j_1, M - j_2 \right] \right| &\leq \\ &\leq cn^{-1/2} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $0 \leq \alpha, \beta$ целые, $-1 \leq t \leq 1$, $c = c(\alpha, \beta, a, j_1, j_2)$, $1 \leq n \leq a\sqrt{M}$. В самом деле, мы имеем

$$\frac{M-1}{2}(1+t) - j_1 = \frac{M-j_2-1}{2}(1+y), \quad (3.20)$$

где

$$y = t - \frac{2j_1}{M-1} + \frac{j_2}{M-j_2-1} \left(1 + t - \frac{2j_1}{M-1} \right).$$

Если при этом $t, y \in [-1, 1]$, то для $1 \leq n \leq a\sqrt{M}$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1-y} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+y} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2} &\leq c \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $c = c(\alpha, \beta, a, j_1, j_2)$. Поэтому, оценивая $\left| T_n^{\alpha, \beta} \left[\frac{M-j_2-1}{2}(1+y), M - j_2 \right] \right|$ с помощью неравенства (3.10), из (3.21) выводим (3.19). Если же $t \in [-1, 1]$, а

$y \in [-1, 1]$, то возможны два случая: 1) $|1 + t| \leq qn^{-2}$, $|1 + y| \leq qn^{-2}$; 2) $|1 - t| \leq qn^{-2}$, $|1 - y| \leq qn^{-2}$, где $q = q(a, j_1, j_2)$. В первом случае оценка (3.19) вытекает из (3.18), во втором — из (3.17).

В частности, из (3.19) с учетом (3.1) находим

$$|Q_n^{\alpha, \beta}(t)| \leq cn^{-1/2} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \quad (3.22)$$

$$\left| Q_n^{\alpha, \beta} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \right| \leq cn^{-1/2} \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \quad (3.23)$$

где $0 \leq \alpha, \beta$ целые, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $c = c(\alpha, \beta, a)$.

§ 4. Оценки для норм средних Валле-Пуссена дискретных сумм Фурье—Чебышёва

Основным результатом настоящей статьи является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $a > 0$, $b \geq d > 0$, $v_{m,n} = v_{m,n}(f, x)$ — средние Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье—Чебышёва, определенные равенством (1.9), $\|v_{m,n}\|$ — норма оператора $v_{m,n} = v_{m,n}(f)$ в пространстве $C[-1, 1]$. Тогда равномерно относительно $dn \leq m \leq bn$, $0 \leq n \leq a\sqrt{N}$, имеет место оценка

$$\|v_{m,n}\| \leq c(a, b, d). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$J_l(t, x) = \sum_{r=0}^l \tau_r(t) \tau_r(x), \quad (4.2)$$

$$I_k(t, x) = \sum_{l=0}^k J_l(t, x). \quad (4.3)$$

В силу (1.7)–(1.9) и (4.2)

$$v_{m,n}(f, x) = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} f(t) \frac{1}{n+1} [J_m(t, x) + J_{m+1}(t, x) + \dots + J_{m+n}(t, x)]. \quad (4.4)$$

Сопоставляя (4.3) и (4.4), находим

$$v_{m,n}(f, x) = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} f(t) \frac{1}{n+1} [I_{n+m}(t, x) - I_{m-1}(t, x)]. \quad (4.5)$$

Из (4.5) мы выводим

$$\|v_{m,n}\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|v_{m,n}(f)\| = \|V_{m,n}\|, \quad (4.6)$$

где

$$V_{m,n} = V_{m,n}(x) = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} \frac{1}{n+1} |I_{n+m}(t, x) - I_{m-1}(t, x)|. \quad (4.7)$$

Займемся оценкой $V_{m,n}(x)$ при $-1 \leq x \leq 1$. Поскольку в силу (1.5) и (2.7) $\tau_n(-1) = (-1)^n \tau_n(t)$, то из (4.7) имеем $V_{m,n}(-x) = V_{m,n}(x)$. Поэтому мы можем ограничиться случаем $0 \leq x \leq 1$.

Ниже понадобятся некоторые выражения для сумм $I_k(t, x)$ и $J_l(t, x)$ (см. (4.3)).

Сумму $J_l(t, x)$ можно выразить с помощью формулы Кристоффеля–Дарбу (2.8) с учетом (1.4) и (1.5). Мы получим

$$J_l(t, x) = \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} \frac{l+1}{2} \frac{T_{l+1,N}(x)T_{l,N}(t) - T_{l,N}(x)T_{l+1,N}(t)}{x-t}, \quad (4.8)$$

где $T_{l,N}(t) = T_l\left[\frac{N-1}{2}(1+t), N\right]$ ($0 \leq l \leq N-1$). Из (4.3) и (4.8) для $I_k(t, x)$ имеем

$$\begin{aligned} I_k(t, x) &= \sum_{l=0}^k \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} \frac{l+1}{2} \\ &\quad \times \frac{[T_{l+1,N}(x) - T_{l,N}(x)][T_{l+1,N}(t) - T_{l,N}(t)]}{x-t} \\ &\quad + \sum_{l=0}^k \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} \frac{l+1}{2} \frac{T_{l,N}(x)T_{l,N}(t) - T_{l+1,N}(x)T_{l+1,N}(t)}{x-t} \\ &= X_1^k(t) + X_2^k(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее, из (2.5), (2.6) и (3.1) находим

$$\begin{aligned} T_{l+1,N}(x) - T_{l,N}(x) &= -(1-x)Q_l^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right), \\ T_{l+1,N}(t) + T_{l,N}(t) &= (1+t)Q_l^{0,1}(t) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} [T_{l+1,N}(x) - T_{l,N}(x)][T_{l+1,N}(t) - T_{l,N}(t)] \\ = -(1-x)(1+t)Q_l^{0,1}(t)Q_l^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Сопоставляя (4.9), (4.10) с (3.8), имеем

$$\begin{aligned} X_1^k(t) &= -\frac{(1-x)(1+t)}{x-t} \sum_{l=0}^k \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} \frac{l+1}{2} Q_l^{0,1}(t)Q_l^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right) \\ &= \frac{(1-x)(1+t)(k+1)(k+2)}{(x-t)^2(2k+3)(N-1)} \frac{(N-2)^{[k+1]}}{(N+k)^{[k]}} \\ &\quad \times \left[Q_{k+1}^{0,1}(t)Q_k^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right) - Q_k^{0,1}(t)Q_{k+1}^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right) \right] \\ &\quad + \frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2} \sum_{l=0}^k \left(\lambda_l^{1,0} - \lambda_l^{0,1} + \frac{2}{N-1} \right) \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} (l+1) \\ &\quad \times Q_l^{0,1}(t)Q_l^{1,0}\left(x + \frac{2}{N-1}\right) = Y_1^k(t) + Y_2^k(t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где в силу (3.9)

$$\begin{aligned}
 Y_1^k(t) &= \frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2} \frac{k+2}{2} \frac{(N-3)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} \\
 &\times \left[\left\{ \left(1-x-\frac{2}{N-1}\right) T_k^{2,0} \left[\frac{N-1}{2}(1+x), N-2 \right] Q_k^{0,1}(t) \right. \right. \\
 &- (1-t) T_k^{1,1} \left[\frac{N-1}{2}(1+t)-1, N-2 \right] Q_k^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \Big\} \\
 &- \left. \frac{1}{k+1} Q_k^{0,1}(t) Q_k^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \right]. \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Из (4.11) находим

$$X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t) = Y_1^{n+m}(t) - Y_1^{m-1}(t) + Y_2^{n+m}(t) - Y_2^{m-1}(t). \quad (4.13)$$

Оценим $|X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)|$ и $|X_2^{n+m}(t) - X_2^{m-1}(t)|$ при $0 \leq x < 1$. Из равенства (4.12) с учетом (3.1), (3.10), (3.19) и (3.22) при $1 \leq k \leq a\sqrt{N}$, $-1 \leq t < 1$, мы имеем ($x \neq t$)

$$|Y_1^k(t)| \leq c(a) \frac{(1+t)^{1/4}}{(x-t)^2} [(1-x)^{3/4}(1-t)^{-1/4} + [(1-x)(1-t)]^{1/4}]. \quad (4.14)$$

В самом деле, из (3.19), (3.22) и (3.23) имеем

$$\begin{aligned}
 (k+2)(1-x)(1+t) &\left| \left(1-x-\frac{2}{N-1}\right) T_k^{2,0} \left[\frac{N-1}{2}(1+x), N-2 \right] Q_k^{0,1}(t) \right| \\
 &\leq c(1-x)(1+t) \left(\sqrt{1-x} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N-1}} \right)^2 \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{k} \right)^{-2-1/2} \\
 &\quad \times \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{k} \right)^{-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{k} \right)^{-3/2} \\
 &\leq c(1+t)^{1/4}(1-x)^{3/4}(1-t)^{-1/4},
 \end{aligned}$$

аналогично,

$$\begin{aligned}
 (k+2)(1-x)(1+t)(1-t) &\left| T_k^{1,1} \left[\frac{N-1}{2}(1+t)-1, N-2 \right] Q_k^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \right| \\
 &\leq c[(1+t)(1-t)(1-x)]^{1/4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1-x)(1+t) &\left| Q_k^{0,1}(t) Q_k^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \right| \\
 &\leq (1-x)(1+t) \frac{c}{k} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{k} \right)^{-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{k} \right)^{-3/2} \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{k} \right)^{-3/2} \\
 &\leq c(1-t)^{-1/4}(1+t)^{1/4}(1-x)^{3/4} \frac{(1-x)^{1/4}}{k} \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{k} \right)^{-1-1/4} \\
 &\leq c(1+t)^{1/4}(1-x)^{3/4}(1-t)^{-1/4}.
 \end{aligned}$$

Сопоставляя эти оценки с равенством (4.12), приходим к оценке (4.14).

Если, кроме того, $dn \leq m \leq bn$, то из (3.3), (3.22), (3.23) и (4.11) выводим

$$\begin{aligned}
& |Y_2^{m+n}(t) - Y_2^{m-1}(t)| \\
& \leq \frac{(1-x)(1+t)}{2(x-t)^2} \sum_{l=m}^{n+m} \left| \lambda_l^{1,0} - \lambda_l^{0,1} + \frac{2}{N-1} \right| (l+1) \left| Q_l^{0,1}(t) Q_l^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \right| \\
& \leq \frac{c}{(x-t)^2} [(1-x)(1+t)]^{1/4} (1-t)^{-1/4} \sum_{l=m}^{n+m} \frac{1}{(2l+1)(2l+3)} \\
& \leq \frac{c}{m(x-t)^2} \left[\frac{(1-x)(1+t)}{1-t} \right]^{1/4} \\
& \leq \frac{c}{n(x-t)^2} \left[\frac{(1-x)(1+t)}{1-t} \right]^{1/4}, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

где $c = c(a, b, d)$, $x \neq t$, $0 \leq x < 1$, $-1 \leq t < 1$. Из (4.13)–(4.15) имеем ($n \leq a\sqrt{N}$, $dn \leq m \leq bn$, $-1 \leq t < 1$, $0 \leq x < 1$, $x \neq t$)

$$\begin{aligned}
& |X_1^{m+n}(t) - X_1^{m-1}(t)| \leq \frac{c(a, b, d)}{(x-t)^2} (1+t)^{1/4} \\
& \times \left[(1-x)^{3/4} (1-t)^{-1/4} + [(1-x)(1-t)]^{1/4} + \frac{1}{n} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1/4} \right]. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Далее, из (4.9) имеем

$$\begin{aligned}
& |X_2^{n+m}(t) - X_2^{m-1}(t)| \leq \frac{1}{|x-t|} \left| \sum_{l=m}^{n+m} \frac{(N-2)^{[l]}}{2(N+l)^{[l]}} T_{l,N}(t) T_{l,N}(x) \right| \\
& + \frac{1}{|x-t|} \left| \sum_{l=m+1}^{n+m-1} \left[\frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} - \frac{(N-2)^{[l-1]}}{(N+l-1)^{[l-1]}} \right] l T_{l,N}(t) T_{l,N}(x) \right| \\
& + \frac{1}{|x-t|} \frac{(N-2)^{[n+m]}(n+m+1)}{(N+n+m)^{[n+m]}} |T_{n+m+1,N}(t) T_{n+m+1,N}(x)| \\
& + \frac{1}{|x-t|} \frac{(N-2)^{[m]}m}{(N+m)^{[m]}} |T_{m,N}(t) T_{m,N}(x)|, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
l \left[\frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} - \frac{(N-2)^{[l-1]}}{(N+l-1)^{[l-1]}} \right] &= \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} l \left(1 - \frac{N+l}{N-l-1} \right) \\
&= \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} \frac{(2l+1)l}{N-l-1} (-1). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Пусть $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, $x_1 = x - \sqrt{1 - x^2}/n$, $x_2 = x + \sqrt{1 - x^2}/n$. Тогда из оценки (3.10) при $dn \leq m \leq bn$, $m \leq l \leq n + m + 1$, $n \leq a\sqrt{N}$, мы выводим ($t \in \Omega_N$)

$$\frac{2}{N} \sum_{-1 \leq t \leq -1/2} \frac{|T_{l,N}(t)T_{l,N}(x)|}{x-t} \leq c(a, b, d)n^{-1/2}, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq t \leq x_1} \frac{|T_{l,N}(t)T_{l,N}(x)|}{x-t} &\leq \frac{c(a, b, d)}{\sqrt{n}} |T_{l,N}(x)| \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq t \leq x_1} \frac{1}{(x-t)(1-t)^{1/4}} \\ &\leq \frac{c(a, b, d)}{Nn^{1/2}} \sum_{-1/2 \leq t \leq x_1} \frac{1}{(x-t)^{5/4}} \leq \frac{c(a, b, d)n^{1/4}}{n^{1/2}(1-x^2)^{1/8}} \leq c(a, b, d). \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{x_2 \leq t \leq 1} \frac{|T_{l,N}(x)T_{l,N}(t)|}{t-x} &\leq |T_{l,N}(x)| \frac{2}{N} \sum_{x_2 \leq t \leq 1} \frac{|T_{l,N}(t)|}{t-x} \\ &\leq \frac{c(a, b, d)}{\sqrt{n}} \frac{2}{N} \sum_{x_2 \leq t \leq (1+x)/2} \frac{1}{(t-x)^{5/4}} \\ &\quad + \frac{c(a, b, d)}{\sqrt{n}} \frac{2}{N} \sum_{(1+x)/2 \leq t \leq 1-1/n^2} \frac{1}{(1-t)^{5/4}} \\ &\quad + c(a) \frac{2}{N} \sum_{1-1/n^2 \leq t \leq 1} \frac{1}{t-x} \leq c(a, b, d). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Чтобы оценить $V_{m,n}$ при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, представим сумму (4.7) по следующей схеме

$$\begin{aligned} V_{m,n}(x) &= \sum_{t \in \Omega_N} = \sum_{-1 \leq t \leq -1/2} + \sum_{-1/2 < t < x_1} + \sum_{x_1 \leq t \leq x_2} + \sum_{x_2 < t \leq 1} \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{aligned} \quad (4.22)$$

и воспользуемся оценкой

$$|I_{n+m}(t, x) - I_{m-1}(t, x)| \leq |X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)| + |X_1^{n+m}(t) - X_2^{m-1}(t)|, \quad (4.23)$$

вытекающей из равенства (4.9). Поскольку в силу (4.16)–(4.19)

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{-1 \leq t \leq -1/2} \frac{1}{n+1} |X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)| &\leq \frac{c(a, b, d)}{n+1}, \\ \frac{2}{N} \sum_{-1 \leq t \leq -1/2} \frac{1}{n+1} |X_2^{n+m}(t) - X_2^{m-1}(t)| &\leq c(a, b, d)n^{-1/2}, \end{aligned}$$

то для u_1 из (4.22) и (4.23) мы получаем оценку

$$u_1 \leq c(a, b, d)n^{-1/2}. \quad (4.24)$$

Далее из (4.16)–(4.18) и (4.20) при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, $dn \leq m \leq bn$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq t < x_1} \frac{1}{n+1} |X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)| \\ & \leq c(a, b, d) \frac{1}{n} \left[\frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq t < x_1} \frac{(1-x)^{1/2}}{(x-t)^2} + \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq t < x_1} \frac{(1-x)^{1/4}}{(x-t)^{7/4}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{nN} \sum_{-1/2 \leq t < x_1} \frac{1}{(x-t)^2} \right] \leq c(a, b, d), \\ & \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq t < x_1} \frac{1}{n+1} |X_2^{n+m}(t) - X_2^{m-1}(t)| \leq c(a, b, d). \end{aligned}$$

Поэтому из (4.22) и (4.23) выводим

$$u_2 \leq c(a, b, d) \quad (0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}). \quad (4.25)$$

Оценим u_3 . Если $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, то из (3.10) выводим

$$\begin{aligned} u_3 &= \sum_{x_1 \leq t \leq x_2} \frac{1}{n+1} |I_{n+m}(t, x) - I_{m-1}(t, x)| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=m}^{n+m} \sum_{r=0}^l \frac{2}{N} \sum_{x_1 \leq t \leq x_2} |\tau_r(x) \tau_r(t)| \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=m}^{n+m} \sum_{r=0}^l |\tau_r(x)| \frac{2}{N} \sum_{x_1 \leq t \leq x_2} |\tau_r(t)| \\ &\leq \frac{c(a)}{n+1} \sum_{l=m}^{n+m} \sum_{r=0}^l |\tau_r(x)| \frac{2}{N} \sum_{x_1 \leq t \leq x_2} (1-t)^{-1/4} \\ &\leq \frac{c(a)}{n+1} \sum_{l=m}^{m+n} \sum_{r=0}^l |\tau_r(x)| (x_2 - x_1) \frac{1}{(1-x_2)^{1/4}} \\ &\leq \frac{c(a)}{n^2} \sum_{l=m}^{n+m} \sum_{r=0}^l 1 \leq c(a). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Оценим, наконец, u_4 при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$. Имеем

$$\begin{aligned} u_4 &\leq \frac{2}{N} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{1}{n+1} \left(|X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)| + |X_2^{n+m}(t) - X_2^{m-1}(t)| \right) \\ &\quad + \frac{2}{N(n+1)} |I_{n+m}(1, x) - I_{m-1}(1, x)|. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Из (4.16) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(n+1)N} \sum_{x_2 \leq t < 1} |X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)| \\ & \leq \frac{c(a, b, d)}{(n+1)N} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{(1-x)^{3/4}(1-t)^{-1/4}}{(t-x)^2} + \frac{c(a, b, d)}{(n+1)N} \\ & \quad \times \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{(1-x)^{1/4}(1-t)^{1/4}}{(t-x)^2} + \frac{c(a, b, d)}{Nn^2} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{(1-x)^{1/4}}{(t-x)^2(1-t)^{1/4}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{nN} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{(1-x)^{3/4}(1-t)^{-1/4}}{(t-x)^2} & \leq \frac{c}{n} (1-x)^{3/4} \int_{x_2}^1 \frac{dt}{(t-x)^2(1-t)^{1/4}} \\ & \leq \frac{c}{n} (1-x^2)^{3/4} \int_{x_2}^1 \frac{dt}{(t-x)^2(1-t^2)^{1/4}} \\ & \leq \frac{c}{n} (1-x^2)^{3/4} \int_{x'_2}^1 \frac{dt}{(t-x)^2(1-t^2)^{1/4}} \\ & \leq c \int_0^{\varphi-1/n} \frac{\varphi^{3/2} \sin^{1/2} \theta d\theta}{n(\cos \theta - \cos \varphi)^2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $\varphi = \arccos x$, $x'_2 = x \cos \frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \sin \frac{1}{n} = \cos(\varphi - \frac{1}{n})$.

Так как при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $|\cos \theta - \cos \varphi| \geq (\theta^2 - \varphi^2)/\pi^2$, то

$$\int_0^{\varphi-1/n} \frac{\sin^{1/2} \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} \leq c\varphi^{-3/2} \int_0^{\varphi-1/n} \frac{d\theta}{(\varphi - \theta)^2} \leq cn\varphi^{-3/2}, \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{nN} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{(1-x)^{1/4}(1-t)^{1/4}}{(t-x)^2} \leq \frac{(1-x)^{1/2}}{nN} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{1}{(t-x)^2} \leq c, \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{n^2N} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{(1-x)^{1/4}(1-t)^{-1/4}}{(t-x)^2} \leq \frac{c(1-x)^{3/4}}{nN} \sum_{x_2 \leq t < 1} \frac{(1-t)^{-1/4}}{(t-x)^2}. \quad (4.32)$$

Сопоставляя (4.28)–(4.32), получаем при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$

$$\frac{1}{nN} \sum_{x_2 \leq t < 1} |X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)| \leq c(a, b, d). \quad (4.33)$$

Кроме того, в силу (4.17), (4.18) и (4.21)

$$\frac{2}{nN} \sum_{x_2 < t < 1} |X_2^{n+m}(t) - X_2^{m-1}(t)| \leq c(a, b, d), \quad (4.34)$$

а в силу (1.5) и (3.10) $|\tau_l(t)\tau_l(x)| \leq c(a)l$, поэтому

$$\frac{1}{nN} |I_{n+m}(1, x) - I_{m-1}(1, x)| \leq c(a). \quad (4.35)$$

Из (4.27), (4.33)–(4.35) получаем

$$u_4 \leq c(a, b, d). \quad (4.36)$$

Собираем оценки (4.24)–(4.26) и (4.36) и, сопоставляя их с равенством (4.22), находим

$$V_{mn}(x) \leq c(a, b, d), \quad (4.37)$$

где $dn \leq m \leq bn$, $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, $1 \leq n \leq aN^{1/2}$.

Перейдем к случаю $1 - 4n^{-2} \leq x \leq 1$. Тогда в силу (3.19) вместо (4.16) мы получим

$$\begin{aligned} |X_1^{n+m}(t) - X_1^{m-1}(t)| &\leq \frac{c(a, b, d)}{(x-t)^2} (1-x)(1+t)^{1/4} \\ &\quad \times [(1-t)^{-1/4} n^{1/2} + n^{3/2}(1-t)^{1/4} + (1-t)^{-1/4}], \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $-1 \leq t < 1$, $dn \leq m \leq bn$, $n \leq aN^{1/2}$. Чтобы оценить $V_{mn}(x)$ при $1 - 4/n^2 \leq x \leq 1$, разобьем сумму в правой части равенства (4.5) по следующей схеме

$$\begin{aligned} V_{mn}(x) &= \frac{2}{N} \sum_{-1 \leq t \leq -1/2} + \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq t \leq 1-8n^{-2}} + \frac{2}{N} \sum_{1-8n^{-2} \leq t \leq 1} \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Здесь R_1 и R_2 оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для u_1 и u_2 , используя вместо (4.16) оценку (4.38). Это дает при $dn \leq m \leq bn$, $n \leq aN^{1/2}$

$$R_1 \leq c(a, b, d), \quad R_2 \leq c(a, b, d). \quad (4.40)$$

Что касается R_3 , то воспользовавшись оценкой (3.10), имеем

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{2}{N} \sum_{1-8n^{-2} \leq t \leq 1} \frac{1}{n+1} |I_{n+m}(t, x) - I_{m-1}(t, x)| \\ &\leq \frac{2}{N} \sum_{1-8n^{-2} \leq t \leq 1} \sum_{l=m}^{n+m} |\tau_{l,N}(t) \tau_{l,N}(x)| \\ &\leq \frac{c(a, b, d)}{N} \sum_{1-8n^{-2} \leq t \leq 1} (n+m)^2 \leq c(a, b, d). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Из (4.39)–(4.41) имеем

$$V_{mn}(x) \leq c(a, b, d) \quad \left(1 - \frac{4}{n^2} \leq x \leq 1\right). \quad (4.42)$$

Сопоставляя (4.6), (4.37) и (4.42), убеждаемся в справедливости теоремы.

§ 5. Об ограничении максимума алгебраического многочлена на отрезке $[-1, 1]$ по его значениям в узлах равномерной сетки

Пусть по-прежнему $\Omega_N = \{-1 + 2j/(N-1)\}_{j=0}^{N-1}$, $p_n(x)$ — алгебраический многочлен степени $n \leq N-1$ такой, что

$$|p_n(x)| \leq 1 \quad (x \in \Omega_N). \quad (5.1)$$

Требуется оценить сверху

$$\|p_n\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_n(x)|. \quad (5.2)$$

В случае, когда $n \leq \lambda(N-1)^{1/2}$, где $0 < \lambda < 1$, ответ на поставленный вопрос легко следует из известной теоремы Маркова об оценке производной алгебраического многочлена, согласно которой

$$\|p'_n\| \leq n^2 \|p_n\|. \quad (5.3)$$

В самом деле, пусть точка $x' \in [-1, 1]$ такова, что $|p_n(x')| = \|p_n\|$, для определенности мы можем считать, что $p_n(x') = \|p_n\|$. Пусть далее $x_0 \in \Omega_N$ выбрано так, что $|x_0 - x'| \leq 1/(N-1)$. Тогда в силу теоремы Лагранжа и неравенства Маркова (5.3)

$$\begin{aligned} p_n(x') - p_n(x_0) &= |p'_n(x'')| |x' - x_0| \leq n^2 p_n(x') / (N-1) \leq \lambda^2 p_n(x') \\ &\quad (n \leq \lambda(N-1)^{1/2}). \end{aligned}$$

Отсюда для $0 < \lambda < 1$ имеем

$$p_n(x') \leq \frac{1}{1 - \lambda^2} p_n(x_0).$$

Стало быть

$$\|p_n\| \leq \frac{1}{1 - \lambda^2} \max_{x \in \Omega_N} |p_n(x)| \quad (n \leq \lambda(N-1)^{1/2}). \quad (5.4)$$

Вопрос о справедливости неравенства

$$\|p_n\| \leq c(\lambda) \max_{x \in \Omega_N} |p_n(x)|, \quad n \leq \lambda(N-1)^{1/2}, \quad \lambda \geq 1, \quad (5.5)$$

до недавнего времени оставался открытым. Утвердительный ответ на этот вопрос дает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\lambda \geq 1$, $0 \leq n \leq \lambda(N-1)^{1/2}$, $p_n(x)$ — алгебраический многочлен степени n . Тогда найдется постоянная $c(\lambda)$, для которой справедливо неравенство (5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим средние Валле-Пуссена $v_{n,n}(p_n, x)$, определенные равенством (4.5). Поскольку, очевидно, $v_{n,n}(p_n, x) \equiv p_n(x)$, то

$$p_n(x) = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} p_n(t) \frac{1}{n+1} [I_{2n}(t, x) - I_{n-1}(t, x)].$$

Отсюда

$$\|p_n\| \leq \max_{x \in \Omega_N} |p_n(x)| \|V_{n,n}\|, \quad (5.6)$$

где $\|V_{n,n}\| = \|v_{n,n}\|$ (см. (4.6)). Если $n \leq \lambda(N-1)^{1/2}$, то $2n \leq 2\lambda(N-1)^{1/2}$, и нам остается воспользоваться теоремой, доказанной в §4. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Независимо от автора следствие было доказано другим способом в [7]. Кроме того, при $\lambda = 1$ следствие доказано в [8], а при $\lambda = \pi/\sqrt{2}$ неравенство (5.5) доказано в [9] и [10].

Список литературы

1. Чебышёв П. Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн. собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 66–87.
2. Шарапудинов И. И. О сходимости метода наименьших квадратов // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №3. С. 131–143.
3. Karlin S., McGregor J. L. The Hahn polynomials, formulas and application // Scripta Math. V. 26. №1. P. 33–46.
4. Шарапудинов И. И. Об асимптотике многочленов Чебышёва, ортогональных на конечной системе точек // Вестник МГУ. Серия 1. 1992. №1. С. 29–35.
5. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства и весовые оценки для ортогональных многочленов Чебышёва-Хана // Матем. сб. 1991. Т. 182. №3. С. 408–420.
6. Sege Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
7. Coppersmith D., Rivlin T. J. The growth of polynomials bounded of equally spaced points // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 970–983.
8. Schönhage A. Fehlerfortpflanzung bei Interpolation // Numer. Math. 1961. №3. P. 62–71.
9. Ehlich H., Zeller K. Schwankung von Polynomen zwischen Gitterpunkten // Math. Z. 1964. №86. P. 41–44.
10. Ehlich H., Zeller K. Numerische Abschätzung von Polynomen // ZAMM. 1965. №45. P. T20–T22.

Дагестан, Махачкала

Поступила в редакцию
01.06.1993 и 06.07.1994