Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнаутков, О полноте топологических колец в максимальных топологиях,
Матем. сб., 1996, том 187, номер 2, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:29:17

УДК 512.56

В. И. Арнаут

О полноте топологических колец в максимальных топологиях

В статье изучаются кольца, являющиеся прямыми суммами бесконечного семейства своих подколец. Для таких колец и для различных классов кольцевых топологий на них исследуется вопрос об их полноте в максимальных топологиях на кольцах.

В частности, показано, что в предположении континуум-гипотезы среди максимальных кольцевых топологий в кольце, являющемся бесконечной прямой суммой одного и того же конечного поля, существуют как полные, так и неполные топологии.

Библиография: 11 названий.

В середине 80-х годов мною было высказано предположение, что топологические кольца в максимальных недискретных топологиях являются полными. Основанием для этого предположения послужила, с одной стороны, полнота свободных топологических групп, порожденных некоторыми топологическими пространствами (см. [1], [2]), а с другой – то обстоятельство, что в ряде работ при доказательстве наличия полных топологий в тех или иных группах строилась топология, близкая к максимальной, в которой данная группа оказывалась полной. Наконец, в [3] доказывается полнота группы, являющейся прямой суммой простых абелевых групп различных порядков, в максимальных линейных топологиях. Обнадеживающими для положительного решения этой гипотезы были результаты работ [4]–[6], в которых доказывается возможность усиления до полной любой топологии, удовлетворяющей первой аксиоме счетности.

Однако, как показали дальнейшие исследования, вопрос оказался более сложным, чем предполагалось при формулировке гипотезы. Так, в [7] показано, что в предположении леммы Буса (в частности, в предположении континуум-гипотезы) на абелевой группе порядка 2 существуют как максимальные полные, так и максимальные неполные групповые топологии. Кроме того, в этой же работе показано, что некоторые группы являются полными в любой максимальной в классе всех топологий, в которых совпадают правая и левая равномерные структуры.

В данной статье для колец, являющихся прямыми суммами бесконечного семейства своих подколец, и для различных классов кольцевых топологий на них исследуется вопрос об их полноте в максимальных топологиях на кольцах.

В частности, показано, что в предположении континуум-гипотезы среди максимальных кольцевых топологий в кольце R , являющемся бесконечной прямой суммой одного и того же конечного поля, существуют как полные, так и неполные топологии. Часть результатов этой работы была анонсирована в [8].

Приведем ряд обозначений, которые будут применяться в этой работе. Пусть $\{R_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – бесконечная совокупность колец, а $\widehat{R} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ – прямая сумма этих колец. Рассмотрим на $\widehat{R}$ следующие классы кольцевых топологий:

$\mathfrak{M}_b$ – класс всех неметрических отделимых кольцевых топологий на $\widehat{R}$;

$\mathfrak{M}_r$ – класс всех неметрических отделимых кольцевых топологий на $\widehat{R}$, в которых все открытые подгруппы аддитивной группы кольца $\widehat{R}$ образуют базис окрестностей нуля;

$\mathfrak{M}_n$ – класс всех неметрических отделимых кольцевых топологий на $\widehat{R}$, в которых все открытые подполугруппы мультипликативной полугруппы кольца $\widehat{R}$ образуют базис окрестностей нуля;

$\mathfrak{M}_k$ – класс всех неметрических отделимых кольцевых топологий на $\widehat{R}$, в которых все открытые подкольца кольца $\widehat{R}$ образуют базис окрестностей нуля;

$\mathfrak{M}_o$ ($\mathfrak{M}_{ol}$, $\mathfrak{M}_{op}$) – класс всех неметрических отделимых кольцевых топологий на $\widehat{R}$, в которых $\widehat{R}$ является ограниченным (ограниченным слева, ограниченным справа) кольцом;

$\mathfrak{M}_i$ ($\mathfrak{M}_{li}$, $\mathfrak{M}_{pi}$) – класс всех неметрических отделимых кольцевых топологий на $\widehat{R}$, в которых все открытые идеалы (левые идеалы, правые идеалы) кольца $\widehat{R}$ образуют базис окрестностей нуля.

Ясно, что

$$\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_o = \mathfrak{M}_{ol} \cap \mathfrak{M}_{op} \subseteq \mathfrak{M}_{ol} \cup \mathfrak{M}_{op} \subseteq \mathfrak{M}_k \subseteq \mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_b,$$

причем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_i &= \mathfrak{M}_o \cap \mathfrak{M}_r; & \mathfrak{M}_{li} &= \mathfrak{M}_{ol} \cap \mathfrak{M}_r; \\ \mathfrak{M}_{pi} &= \mathfrak{M}_{op} \cap \mathfrak{M}_r; & \mathfrak{M}_k &= \mathfrak{M}_n \cap \mathfrak{M}_r. \end{aligned}$$

Кроме того, в любом из указанных классов топологий имеются максимальные топологии и, более того, в каждом из этих классов любая топология из него может быть усилена до максимальной в этом классе.

Пусть Φ – фильтр на множестве Γ (определение Γ см. выше), мажорирующий фильтр Фреше, т.е. $\bigcap_{F \in \Phi} F = \emptyset$.

Для каждого $F \in \Phi$ рассмотрим в $\widehat{R}$ множество

$$U_F = \{r \in \widehat{R} \mid \text{supp}(r) \subseteq F\} = \sum_{\gamma \in F} R_\gamma,$$

где, как обычно, $\text{supp}(r) = \{\gamma \in \Gamma \mid \text{pr}_\gamma(r) \neq 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко проверяется, что совокупность $\{U_F \mid F \in \Phi\}$ удовлетворяет условиям В0.1', В0.2–В0.6 (см. [9, теорема 1.2.5 и следствие 1.3.7]) и, значит, взятая за базис окрестностей нуля, задает на $\widehat{R}$ некоторую кольцевую топологию $\widehat{\tau}_\Phi$, причем $\widehat{\tau}_\Phi \in \mathfrak{M}_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорим, что фильтр $\mathcal{F}$ на множестве X усиливается до последовательности, если существует такая последовательность $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ элементов из X , что для любого $F \in \mathcal{F}$ найдется такое натуральное число n , что $\{x_i \mid i \geq n\} \subseteq F$. Если такой последовательности нет, то говорим, что фильтр $\mathcal{F}$ не усиливается до последовательности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко заметить, что любой свободный ультрафильтр (т.е. ультрафильтр $\mathcal{F}$, для которого $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$) не усиливается до последовательности, и всякий фильтр, не усиливающийся до последовательности, мажорирует фильтр Фреше.

Доказательство следующего утверждения содержится в доказательстве теоремы 1.3 из [7], но для полноты изложения мы приведем его и здесь.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Φ – фильтр на множестве Γ , который не усиливается до последовательности. Если $\mathcal{A}$ – фильтр Коши в $(\hat{R}, \hat{\tau}_\Phi)$, то:

- 1) $\Gamma_1 = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \text{supp}(A)$ – конечное множество;
- 2) существует такое $A_1 \in \mathcal{A}$, что $\text{pr}_\gamma(A_1)$ – одноэлементное множество для любого $\gamma \in \Gamma_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. Γ_1 – бесконечное множество. Выберем счетное подмножество $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ попарно различных элементов из Γ_1 . Так как фильтр Φ не усиливается до последовательности, то найдется такой элемент $F \in \Phi$, что $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\} \setminus F$ – бесконечное множество. Пусть A_0 – такое подмножество из $\mathcal{A}$, что $A_0 - A_0 \subseteq U_F$. Поскольку $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{supp}(A_0)$ и для любого $r \in \hat{R}$ множество $\text{supp}(r)$ конечно, то существуют такие элементы $a, b \in A_0$, что $(\text{supp}(a)) \setminus \text{supp}(b) \not\subseteq F$. Тогда $\text{supp}(a - b) \not\subseteq F$ и, значит, $a - b \notin U_F$. Получили противоречие с выбором A_0 . Следовательно, Γ_1 – конечное множество.

Докажем теперь утверждение 2). Допустим противное, т.е. что для каждого $A \in \mathcal{A}$ существует такое $\gamma \in \Gamma_1$, что $\text{pr}_\gamma(A)$ содержит больше чем один элемент. Так как фильтр Φ не усиливается до последовательности, то $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Тогда из конечности множества Γ_1 следует существование такого $F_1 \in \Phi$, что $F_1 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Поскольку $\mathcal{A}$ – фильтр Коши в $(\hat{R}, \hat{\tau}_\Phi)$, то $A_1 - A_1 \subseteq U_{F_1}$ для некоторого $A_1 \in \mathcal{A}$. Согласно допущению существует такое $\gamma_1 \in \Gamma_1$, что $\text{pr}_{\gamma_1}(A_1)$ содержит более чем один элемент и, значит, $\text{pr}_{\gamma_1}(a) \neq \text{pr}_{\gamma_1}(b)$ для некоторых $a, b \in A_1$, т.е. $\text{pr}_{\gamma_1}(a - b) \neq 0$. Так как $a - b \in A_1 - A_1 \subseteq U_{F_1}$, то $\gamma_1 \in F_1$ и, значит, $\gamma_1 \in F_1 \cap \Gamma_1$. Получили противоречие с выбором F_1 . Этим предложение полностью доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кольцо R называется *сильно идемпотентным*, если для любого элемента $r \in R$ существуют такое натуральное число m и такие элементы $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m \in R$, что

$$r = a_0 \cdot r + r \cdot a_1 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot r \cdot b_i,$$

т.е.

$$r \in r \cdot R + R \cdot r + \underbrace{R \cdot r \cdot R + \dots + R \cdot r \cdot R}_{m \text{ слагаемых}}.$$

Если для всех $r \in R$ можно выбрать одно и то же число m , то кольцо R будем называть *сильно идемпотентным порядка m* .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ясно, что всякое наследственно идемпотентное кольцо является сильно идемпотентным, и всякое сильно идемпотентное кольцо является идемпотентным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорим, что кольцо R обладает полной системой локальных левых (правых) единиц, если для любого элемента $r \in R$ существует такой элемент $a \in R$, что $r = a \cdot r$ ($r = r \cdot a$), т.е. $r \in R \cdot r$ ($r \in r \cdot R$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ясно, что если в кольце R имеется левая (правая) единица, то R обладает полной системой локальных левых (правых) единиц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см., например, [10]). Кольцо R называется *слабо булевым*, если для каждого элемента $r \in R$ существует такое натуральное число $n > 1$, что $r = r^n$. Минимальное из таких чисел n называется *индексом идемпотентности элемента r* .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Всякое слабо булево кольцо является подпрямой суммой конечных полей.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{M}$ – один из указанных выше классов кольцевых топологий на $\hat{R}$ и Φ – некоторый фильтр на Γ , не усиливающийся до последовательности. Если τ – такая кольцевая топология из $\mathfrak{M}$, что $\tau \geq \hat{\tau}_\Phi$, то $(\hat{R}, \tau)$ – полное кольцо в каждом из следующих случаев:

- 1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$ и каждое из колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ является сильно идемпотентным кольцом;
- 2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_o$ и все кольца R_γ для $\gamma \in \Gamma$ являются сильно идемпотентными порядка m для некоторого натурального числа m ;
- 3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{оп}$ и каждое из колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ обладает полной системой локальных левых единиц;
- 4) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{ол}$ и каждое из колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ обладает полной системой локальных правых единиц;
- 5) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n$ и каждое из колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ является слабо булевым кольцом;
- 6) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\Gamma$ и существует такое натуральное число n и такое разбиение $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ множества Γ , что для любого $\gamma' \in \Gamma'$ кольцо $R_{\gamma'}$ является слабо булевым кольцом, причем $r^n = r$ для любого $r \in R_{\gamma'}$, а для любых $\gamma'' \in \Gamma''$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma''\}$ характеристики аддитивных групп колец $R_{\gamma''}$ и R_γ взаимно просты;
- 7) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_b$ и существует такое натуральное число n , что $r^n = r$ для любых $\gamma \in \Gamma$ и $r \in R_\gamma$, т.е. $\hat{R}$ является слабо булевым кольцом, причем индекс идемпотентности любого элемента $\hat{r} \in \hat{R}$ не превосходит n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. что для топологии τ выполнены условия теоремы, но $(\hat{R}, \tau)$ не является полным кольцом, и пусть $\mathcal{A}$ – такой фильтр Коши в $(\hat{R}, \tau)$, который не имеет предела в $(\hat{R}, \tau)$. Так как $\tau \geq \hat{\tau}_\Phi$, то $\mathcal{A}$ является фильтром Коши и в $(\hat{R}, \hat{\tau}_\Phi)$. Тогда, согласно предложению 1, $\Gamma_1 = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \text{supp}(A)$ – конечное множество и существует такой элемент $A_1 \in \mathcal{A}$, что $\text{pr}_\gamma(A_1)$ – одноэлементное множество для каждого $\gamma \in \Gamma_1$. Если теперь r такой элемент из R , что

$$\text{pr}_\gamma r = \begin{cases} \text{pr}_\gamma(A_1), & \text{если } \gamma \in \Gamma_1; \\ 0, & \text{если } \gamma \notin \Gamma_1, \end{cases}$$

то $\mathcal{A}' = \{A - r \mid A \in \mathcal{A}\}$ является фильтром Коши в $(\widehat{R}, \tau)$, который не имеет предела в $(\widehat{R}, \tau)$, причем $\bigcap_{A \in \mathcal{A}'} \text{supp}(A - r) = \emptyset$. Поэтому можно считать, что для фильтра $\mathcal{A}$ выполнено условие $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \text{supp}(A) = \emptyset$.

Так как фильтр $\mathcal{A}$ не имеет предела в $(\widehat{R}, \tau)$, то существует такая окрестность U_0 нуля в $(\widehat{R}, \tau)$, что $A \not\subseteq U_0$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

Дальнейшее доказательство проведем, рассматривая каждый из перечисленных в формулировке теоремы случаев в отдельности.

Случай 1). Не нарушая общности, можем считать, что U_0 – двусторонний идеал кольца R . Существует такой элемент $A_0 \in \mathcal{A}$, что $A_0 - A_0 \subseteq U_0$. Пусть a – некоторый элемент из A_0 . Поскольку $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \text{supp}(A) = \emptyset$, то из конечности множества $\text{supp}(a)$ следует, что $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(A'_0) = \emptyset$ для некоторого $A'_0 \in \mathcal{A}$. Можем считать, что $A'_0 \subseteq A_0$. Тогда $A'_0 - a \subseteq A_0 - A_0 \subseteq U_0$. Из выбора окрестности U_0 следует, что $A'_0 \not\subseteq U_0$. Если $b \in A'_0 \setminus U_0$, то $\text{supp}(b) \cap \text{supp}(a) = \emptyset$.

Пусть $\text{supp}(b) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Тогда из сильной идемпотентности колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ следует, что для каждого $1 \leq i \leq n$ в кольце R_{γ_i} существуют такие множества $\{c_{i,0}, \dots, c_{i,m_i}\}$ и $\{d_{i,0}, \dots, d_{i,m_i}\}$ элементов, что

$$\text{pr}_{\gamma_i}(b) = c_{i,0} \cdot \text{pr}_{\gamma_i}(b) + \text{pr}_{\gamma_i}(b) \cdot d_{i,0} + \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} \cdot \text{pr}_{\gamma_i}(b) \cdot d_{i,j}.$$

Добавляя в случае необходимости в качестве элементов $c_{i,j}$ и $d_{i,j}$ элемент 0 кольца R_{γ_i} , можем считать, что $m_i = m$ для $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим в $\widehat{R}$ такие элементы $\widehat{c}_j$ и $\widehat{d}_j$ для $0 \leq j \leq m$, что

$$\text{pr}_\gamma \widehat{c}_j = \begin{cases} c_{i,j}, & \text{если } \gamma = \gamma_i \text{ для } i = 1, \dots, n; \\ 0, & \text{если } \gamma \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \end{cases}$$

и

$$\text{pr}_\gamma \widehat{d}_j = \begin{cases} d_{i,j}, & \text{если } \gamma = \gamma_i \text{ для } i = 1, \dots, n; \\ 0, & \text{если } \gamma \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}. \end{cases}$$

Тогда $\widehat{c}_0 \cdot a = a \cdot \widehat{d}_0 = \widehat{c}_j \cdot a \cdot \widehat{d}_j = 0$ для $1 \leq j \leq m$ и

$$\begin{aligned} b &= \widehat{c}_0 \cdot b + b \cdot \widehat{d}_0 + \sum_{j=1}^m \widehat{c}_j \cdot b \cdot \widehat{d}_j = \widehat{c}_0 \cdot (b - a) + (b - a) \cdot \widehat{d}_0 \\ &+ \sum_{j=1}^m \widehat{c}_j \cdot (b - a) \cdot \widehat{d}_j \in \widehat{c}_0 \cdot U_0 + U_0 \cdot \widehat{d}_0 + \sum_{j=1}^m \widehat{c}_j \cdot U_0 \cdot \widehat{d}_j \subseteq U_0. \end{aligned}$$

Получили противоречие с выбором элемента b . Этим случай 1) доказан.

Случай 2). Пусть m – натуральное число, указанное в формулировке теоремы и U_1 – такая окрестность нуля в (R, τ) , что

$$\underbrace{U_1 + \dots + U_1}_{m+2 \text{ слагаемых}} \subseteq U_0.$$

Согласно теореме 1.6.34 из [9] можем считать, что U_1 идеал мультипликативной полугруппы $R(\cdot)$ кольца R . Существует такой элемент $A_1 \in \mathcal{A}$, что $A_1 - A_1 \subseteq U_1$.

Если a – некоторый элемент из A_1 , то как и при проверке случая 1, найдем такой элемент $b \in A_1 \setminus U_0$, что $\text{supp}(b) \cap \text{supp}(a) = \emptyset$ и $b - a \in U_1$.

Если $\text{supp}(b) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, то из сильной идемпотентности порядка m всех колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ следует, что для каждого $1 \leq i \leq n$ в кольце R_{γ_i} существуют такие множества $\{c_{i,0}, \dots, c_{i,m}\}$ и $\{d_{i,0}, \dots, d_{i,m}\}$ элементов, что

$$\text{pr}_{\gamma_i}(b) = \sum_{j=1}^m c_{i,j} \cdot (\text{pr}_{\gamma_i}(b)) \cdot d_{i,j} + c_{i,0} \cdot \text{pr}_{\gamma_i}(b) + \text{pr}_{\gamma_i}(b) \cdot d_{i,0}.$$

Если $\hat{c}_j, \hat{d}_j$ для $0 \leq j \leq m$ такие элементы из R , что

$$\text{pr}_\gamma \cdot (\hat{c}_j) = \begin{cases} c_{i,j}, & \text{если } \gamma = \gamma_i \text{ для } i = 1, \dots, n; \\ 0, & \text{если } \gamma \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \end{cases}$$

и

$$\text{pr}_\gamma \cdot (\hat{d}_j) = \begin{cases} d_{i,j}, & \text{если } \gamma = \gamma_i \text{ для } i = 1, \dots, n; \\ 0, & \text{если } \gamma \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \end{cases}$$

то $\hat{c}_0 \cdot a = a \cdot \hat{d}_0 = \hat{c}_j \cdot a \cdot \hat{d}_j = 0$ для $1 \leq j \leq m$. Тогда

$$\begin{aligned} b &= \sum_{j=1}^m \hat{c}_j \cdot b \cdot \hat{d}_j + \hat{c}_0 \cdot b + b \cdot \hat{d}_0 = \sum_{j=1}^m \hat{c}_j \cdot (b - a) \cdot \hat{d}_j + \hat{c}_0 \cdot (b - a) + (b - a) \cdot \hat{d}_0 \\ &\in \sum_{j=1}^m \hat{c}_j \cdot U_1 \cdot \hat{d}_j + \hat{c}_0 \cdot U_1 + U_1 \cdot \hat{d}_0 \subseteq \underbrace{U_1 + \dots + U_1}_{2+m \text{ слагаемых}} \subseteq U_0. \end{aligned}$$

Получили противоречие с выбором элемента b . Этим случай 2) доказан.

Случай 3) и 4). Согласно теореме 1.6.31 из [9] можем считать, что U_0 – левый идеал полугруппы $R(\cdot)$ для случая 3) и U_0 – правый идеал полугруппы $R(\cdot)$ для случая 4). Как и при доказательстве случая 1) подберем такие элементы $a, b \in R$, что $a - b \in U_0$, $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b) = \emptyset$ и $b \notin U_0$.

Если $\text{supp}(b) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, то для каждого $1 \leq i \leq n$ в кольце R_{γ_i} существует такой элемент c_i , что $c_i \cdot \text{pr}_{\gamma_i}(b) = \text{pr}_{\gamma_i}(b)$ для случая 3) и $\text{pr}_{\gamma_i}(b) \cdot c_i = \text{pr}_{\gamma_i}(b)$ для случая 4) (так как R_γ обладает полной системой локальных левых или правых единиц). Пусть $\hat{c}$ – такой элемент из $\hat{R}$, что

$$\text{pr}_\gamma \cdot (\hat{c}) = \begin{cases} c_i, & \text{если } \gamma = \gamma_i \text{ для } i = 1, \dots, n; \\ 0, & \text{если } \gamma \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}. \end{cases}$$

Тогда $\hat{c} \cdot b = b$ для случая 3) и $b \cdot \hat{c} = b$ для случая 4). Так как $\hat{c} \cdot a = a \cdot \hat{c} = 0$, то $b = \hat{c} \cdot b = \hat{c} \cdot (b - a) \in R \cdot U_0 \subseteq U_0$ для случая 3) и $b = b \cdot \hat{c} = (b - a) \cdot \hat{c} \in U_0 \cdot R \subseteq U_0$ для случая 4). Получили противоречие с выбором элемента b . Этим случаи 3) и 4) доказаны.

Случай 5). Не нарушая общности можем считать, что U_0 – подполугруппа мультипликативной полугруппы $R(\cdot)$ кольца R . Пусть A_0 – такой элемент из $\mathcal{A}$, что $A_0 - A_0 \subseteq U_0$ и b_0 – некоторый элемент из $A_0 \setminus U_0$. Так как $\hat{R}$ – слабо булево кольцо (как прямая сумма слабо булевых колец), то $b_0 = b_0^k$ для некоторого

натурального числа $k > 1$. Используя то, что $\text{supp}(r)$ – конечное множество для любого $r \in \widehat{R}$ и $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \text{supp}(A) = \emptyset$, по индукции можно построить такие элементы $b_1, \dots, b_k \in A_0$, что $\text{supp}(b_i) \cap \text{supp}(b_j) = \emptyset$ для любых $0 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$. Тогда $b_i \cdot b_j = 0$ для любых $0 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$, а потому

$$\begin{aligned} b_0 &= b_0^k = (b_0 - b_1) \cdot (b_0 - b_2) \cdot \dots \cdot (b_0 - b_k) \\ &\in \underbrace{(A_0 - A_0) \cdot (A_0 - A_0) \cdot \dots \cdot (A_0 - A_0)}_{k \text{ сомножителей}} \subseteq \underbrace{U_0 \cdot U_0 \cdot \dots \cdot U_0}_{k \text{ сомножителей}} \subseteq U_0. \end{aligned}$$

Получили противоречие с выбором элемента b_0 . Этим случай 5) доказан.

Случай 6). Пусть n – натуральное число, указанное при формулировке рассматриваемого случая, и U_1 – такая окрестность нуля в $(\widehat{R}, \tau)$, что $U_1^n \subseteq U_0$. Не нарушая общности можем считать, что U_0 и U_1 – подгруппы аддитивной группы кольца R .

Если A_0 – такой элемент из фильтра $\mathcal{A}$, что $A_0 - A_0 \subseteq U_1$, то, согласно выбору окрестности U_0 , $A_0 \not\subseteq U_0$. Пусть $b_0 \in A_0 \setminus U_0$.

Как и при доказательстве случая 5), по индукции построим такие элементы $b_1, \dots, b_n \in A_0$, что $\text{supp}(b_i) \cap \text{supp}(b_j) = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$. Тогда

$$\begin{aligned} b_0^n &= (b_0 - b_1) \cdot (b_0 - b_2) \cdot \dots \cdot (b_0 - b_n) \\ &\in \underbrace{(A_0 - A_0) \cdot (A_0 - A_0) \cdot \dots \cdot (A_0 - A_0)}_{n \text{ сомножителей}} \subseteq U_1^n \subseteq U_0. \end{aligned}$$

Так как $\widehat{R}$ является прямой суммой колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$, то существуют такие элементы $b'_0, b''_0 \in \widehat{R}$, что $b_0 = b'_0 + b''_0$, причем $\text{supp}(b'_0) \subseteq \Gamma'$ и $\text{supp}(b''_0) \subseteq \Gamma''$. Если m'_0 и m''_0 – аддитивные порядки элементов b'_0 и b''_0 , соответственно, то из взаимной простоты характеристик колец $R''_{\gamma''}$ и R'_γ для $\gamma'' \in \Gamma''$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma''\}$ следует, что числа m'_0 и m''_0 взаимно просты. Поэтому существуют такие целые числа k'_0 и k''_0 , что $m'_0 \cdot k'_0 + m''_0 \cdot k''_0 = 1$. Так как $\text{supp}(b'_0) \subseteq \Gamma'$, то согласно условию $(b'_0)^n = b'_0$. Тогда, поскольку $\text{supp}(b') \cap \text{supp}(b'') = \emptyset$, то $b' \cdot b'' = 0$ и, значит,

$$\begin{aligned} b'_0 &= (1 - k'_0 \cdot m'_0) \cdot b'_0 = k''_0 \cdot m''_0 \cdot b'_0 = k''_0 \cdot m''_0 \cdot (b'_0)^n \\ &= k''_0 \cdot m''_0 \cdot (b'_0)^n + k''_0 \cdot m''_0 \cdot (b''_0)^n = k''_0 \cdot m''_0 \cdot ((b'_0)^n + (b''_0)^n) \\ &= k''_0 \cdot m''_0 \cdot (b'_0 + b''_0)^n = k''_0 \cdot m''_0 \cdot b_0^n. \end{aligned}$$

Поскольку U_0 – подгруппа, то из ранее доказанного включения $b_0^n \in U_0$ следует, что $b'_0 = k''_0 \cdot m''_0 \cdot b_0^n \in U_0$. Кроме того, так как $\text{supp}(b'_0 - b_1) \cap \text{supp}(b''_0) = \emptyset$ и $\text{supp}(b''_0) \subseteq \Gamma''$, то порядки элементов $b'_0 - b_1$ и b''_0 взаимно просты. Если m' и m''_0 – порядки элементов $b'_0 - b_1$ и b''_0 , соответственно, то $1 = k' \cdot m' + k'' \cdot m''_0$ для некоторых целых чисел k' и k'' и, значит,

$$\begin{aligned} b''_0 &= (1 - k'' \cdot m''_0) \cdot b''_0 = k' \cdot m' \cdot b''_0 = k' \cdot m' \cdot b''_0 + k' \cdot m' \cdot (b'_0 - b_1) \\ &= k' \cdot m' \cdot (b'_0 + b''_0 - b_1) = k' \cdot m' \cdot (b_0 - b_1). \end{aligned}$$

Поскольку $b_0 - b_1 \in A_0 - A_0 \subseteq U_1 \subseteq U_0$ и U_0 – подгруппа аддитивной группы кольца R , то $b''_0 = k' \cdot m' \cdot (b_0 - b_1) \in U_0$. Тогда $b_0 = b'_0 + b''_0 \in U_0 + U_0 = U_0$. Получили противоречие с выбором элемента b_0 . Этим случай 6) доказан.

Случай 7). Пусть n – натуральное число, указанное при формулировке рассматриваемого случая. Существует такая окрестность U_1 нуля в (R, τ) , что $\{y^n \mid y \in U_1\} \subseteq U_0$. Если A_0 – такой элемент из фильтра $\mathcal{A}$, что $A_0 - A_0 \subseteq U_1$, то, согласно допущению, $A_0 \not\subseteq U_0$. Пусть $b_0 \in A_0 \setminus U_0$. Как и при доказательстве случая 5) найдем такие элементы $b_1, \dots, b_n$, что $\text{supp}(b_i) \cap \text{supp}(b_j) = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$. Тогда $b_i \cdot b_j = 0$ для $0 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$ и, значит,

$$\begin{aligned} b_0 &= b_0^n = (b_0 - b_1) \cdot (b_0 - b_2) \cdot \dots \cdot (b_0 - b_n) \\ &\in \underbrace{(A_0 - A_0) \cdot (A_0 - A_0) \cdot \dots \cdot (A_0 - A_0)}_{n \text{ сомножителей}} \subseteq \underbrace{U_1 \cdot U_1 \cdot \dots \cdot U_1}_{n \text{ сомножителей}} \subseteq U. \end{aligned}$$

Получили противоречие с выбором элемента b_0 . Этим теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть p – простое число и $\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – такая совокупность колец, каждое из которых изоморфно простому полю из p элементов, и $\hat{R} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$. Если $\mathfrak{M}$ – один из указанных выше классов кольцевых топологий на $\hat{R}$, то существует такая максимальная в $\mathfrak{M}$ топология $\hat{\tau}$, что $(\hat{R}, \hat{\tau})$ – полное кольцо.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}_и, \mathfrak{M}_о, \mathfrak{M}_ли, \mathfrak{M}_пи, \mathfrak{M}_ол, \mathfrak{M}_оп\}$ и $\hat{\tau}$ – кольцевая топология на $\hat{R}$. Если $\hat{\tau}$ – максимальная топология в $\mathfrak{M}$, то $(\hat{R}, \hat{\tau})$ – полное кольцо в каждом из следующих случаев:

- 1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_и$ и каждое из колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ является простым кольцом, причем $R_\gamma^2 \neq 0$;
- 2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_о$ и мультипликативная полугруппа каждого из колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ является простой полугруппой, причем $R_\gamma^2 \neq 0$;
- 3) $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}_пи, \mathfrak{M}_ли, \mathfrak{M}_ол, \mathfrak{M}_оп\}$ и каждое из колец R_γ для $\gamma \in \Gamma$ является телом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой окрестности U нуля в $(\hat{R}, \hat{\tau})$ рассмотрим множество

$$F_U = \text{supp}(U) = \{\gamma \in \Gamma \mid \text{pr}_\gamma(U) \neq \{0\}\}.$$

Если $\Phi = \{F_U \mid U \text{ – окрестность нуля в } (\hat{R}, \hat{\tau})\}$, то Φ является фильтром на множестве Γ . Так как $U_{F_U} \supseteq U$ для любой окрестности U нуля в $(\hat{R}, \hat{\tau}_\Phi)$, то $\hat{\tau} \geq \hat{\tau}_\Phi$. Поэтому согласно теореме 1 для завершения доказательства достаточно проверить, что Φ – свободный ультрафильтр и, значит, Φ не усиливается до последовательности.

Допустим противное, т.е. что Φ не ультрафильтр и пусть Φ' – такой фильтр, что $\Phi' \geq \Phi$ и $\Phi' \neq \Phi$. Тогда найдется такой элемент $F' \in \Phi'$, что $F' \notin \Phi$. Так как $\hat{\tau}_{\Phi'} \in \mathfrak{M}$, то либо $\text{supr}\{\hat{\tau}, \hat{\tau}_{\Phi'}\} \in \mathfrak{M}$, либо $\text{supr}\{\hat{\tau}, \hat{\tau}_{\Phi'}\}$ – дискретная топология. Рассмотрим каждую из этих возможностей в отдельности.

Если $\text{supr}\{\hat{\tau}, \hat{\tau}_{\Phi'}\} \in \mathfrak{M}$, то из максимальной в $\mathfrak{M}$ топологии $\hat{\tau}$ следует, что $\hat{\tau} \geq \hat{\tau}_{\Phi'}$ и, значит, найдется такая окрестность U нуля в $(\hat{R}, \hat{\tau})$, что $U \subseteq W_{F'}$. Тогда из определения множества $W_{F'}$ следует, что $F_U \subseteq F'$, а потому $F' \in \Phi$. Получили противоречие с выбором F' .

Следовательно, $\sup\{\hat{\tau}, \hat{\tau}_{\Phi'}\}$ – дискретная топология. Тогда существуют такая окрестность U нуля в (R, τ) и такой элемент $F' \in \Phi'$, что $U \cap W_{F'} = \{0\}$. Так как $\Phi' > \Phi$, то $F' \cap F_U \neq \emptyset$. Если $\gamma_0 \in F' \cap F_U$, то $\text{pr}_{\gamma_0}(U) \neq \{0\}$, и значит,

$$(R_{\gamma_0} \cdot (\text{pr}_{\gamma_0}(U))) \cup ((\text{pr}_{\gamma_0}(U)) \cdot R_{\gamma_0}) \neq \{0\}$$

для случаев 1) и 2) и

$$(R_{\gamma_0} \cdot (\text{pr}_{\gamma_0}(U))) \cap ((\text{pr}_{\gamma_0}(U)) \cdot R_{\gamma_0}) \neq \{0\}$$

для случая 3). Тогда:

$$0 \neq R'_{\gamma_0} \cdot U \cup U \cdot R'_{\gamma_0} \subseteq U$$

для случаев 1) и 2) и

$$0 \neq R'_{\gamma_0} \cdot U \cap U \cdot R'_{\gamma_0} \subseteq U$$

для случая 3), где

$$R'_{\gamma_0} = \{r \in \hat{R} \mid \text{supp}(r) \subseteq \{\gamma_0\}\}$$

и, значит,

$$R'_{\gamma_0} \cap U \neq \{0\}$$

для каждого из рассматриваемых случаев. Так как $\gamma_0 \in F'$, то $R'_{\gamma_0} \subseteq W_{F'}$, а потому, $U \cap W_{F'} \neq \{0\}$. Получили противоречие с выбором U и F' . Следовательно, Φ – ультрафильтр.

Покажем теперь, что Φ – свободный ультрафильтр. Допустим противное, и пусть $\gamma_0 \in \bigcap_{F \in \Phi} F$. Если $R'_{\gamma_0} = \{r \in \hat{R} \mid \text{supp}(r) \subseteq \{\gamma_0\}\}$, то, ввиду отделимости топологии $\hat{\tau}$, существует такая окрестность U нуля в $(\hat{R}, \hat{\tau})$, что $R'_{\gamma_0} \not\subseteq U$. Так как $\gamma_0 \in \bigcap_{F \in \Phi} F \subseteq F_U$, то $\text{pr}_{\gamma_0}(U) \neq \{0\}$. Тогда, как и выше проверяется, что $U \cap R'_{\gamma_0} \neq \{0\}$. Согласно теоремам 1.6.31 и 1.6.34 из [9], можем считать, что U – двусторонний идеал кольца $\hat{R}$ для случая 1), двусторонний идеал полугруппы $R(\cdot)$ для случая 2) и односторонний (левый или правый) идеал полугруппы $R(\cdot)$ для случая 3). Так как кольцо R'_{γ_0} изоморфно кольцу R_{γ_0} , то, рассматривая в отдельности каждый из указанных в формулировке случаев, получаем, что $U \cap R'_{\gamma_0} = R'_{\gamma_0}$ и, значит, $R'_{\gamma_0} \subseteq U$. Получили противоречие с выбором U . Этим теорема полностью доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В предположении континуум-гипотезы существует такой фильтр Φ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, мажорирующий фильтр Фреше, что для любой возрастающей последовательности $A = m_1, m_2, \dots$ натуральных чисел найдется такой элемент $F_A \in \Phi$, что каждое из множеств

$$F_A \cap \{i \in \mathbb{N} \mid m_j \leq i \leq m_{j+1}\}$$

содержит не более одного элемента для $j \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как мощность множества $\mathfrak{A}$ всех возрастающих последовательностей натуральных чисел равна континууму, то в предположении континуум-гипотезы его можно пронумеровать трансфинитными числами меньшими чем ω_1 (где ω_1 – наименьшее несчетное трансфинитное число). Итак, пусть $\mathfrak{A} = \{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, и пусть $A_\alpha = m_{1,\alpha}, m_{2,\alpha}, \dots$.

Для каждого $\alpha < \omega_1$ с помощью трансфинитной индукции определим подмножество $B_\alpha \subseteq \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись следующие свойства:

- 1) для любого конечного числа трансфинитных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < \omega_1$

$$\bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i} \neq \emptyset;$$

- 2) для любых $i \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \omega_1$ множество $B_\alpha \cap \{k \in \mathbb{N} \mid m_{i,\alpha} \leq k \leq m_{i+1,\alpha}\}$ содержит не более одного элемента.

Возьмем $B_1 = \{m_{2j,1} \mid j \in \mathbb{N}\}$ (определение $m_{k,1}$ см. выше – запись последовательности $A_1 \in \mathfrak{A}$). Тогда совокупность $\{B_1\}$, состоящая из одного подмножества B_1 , удовлетворяет условиям 1) и 2).

Пусть $\beta < \omega_1$ и допустим, что уже определены подмножества B_α для $\alpha < \beta$, причем для совокупности $\{B_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ выполняются условия 1) и 2). Так как множество $\{\alpha \mid \alpha < \beta\}$ не более чем счетно, то существует сюръективное отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$.

По индукции построим возрастающую последовательность $k_1, k_2, \dots$ натуральных чисел следующим образом.

В качестве k_1 возьмем произвольное число из уже определенного подмножества $B_{f(1)}$ такое, что $k_1 \geq m_{2,\beta}$ (число $m_{2,\beta}$ см. в записи последовательности A_β).

Допустим, что уже определены $k_1 < k_2 < \dots < k_s$, причем $k_i \in B_{f(1)} \cap B_{f(2)} \cap \dots \cap B_{f(i)}$ и множество

$$\{k_1, \dots, k_s\} \cap \{j \in \mathbb{N} \mid m_{i,\beta} \leq j \leq m_{i+1,\beta}\}$$

содержит не более одного элемента для $1 \leq i < s$.

Существует такое натуральное число t , что $k_s \leq m_{t,\beta}$. Тогда в качестве k_{s+1} возьмем любое число из $\bigcap_{j=1}^{s+1} B_{f(j)}$ так, чтобы $k_{s+1} > m_{t+1,\beta}$. Тогда $k_s < k_{s+1}$ и для $1 \leq i < s+1$ множество

$$\{k_1, \dots, k_{s+1}\} \cap \{j \in \mathbb{N} \mid m_{i,\beta} \leq j \leq m_{i+1,\beta}\}$$

содержит не более одного элемента.

Продолжая этот процесс, построим такую возрастающую последовательность $\{k_1, k_2, \dots\}$ натуральных чисел, что $k_t \in \bigcap_{j=1}^t B_{f(j)}$ и множество

$$\{k_1, k_2, \dots\} \cap \{j \mid m_{t,\beta} \leq j \leq m_{t+1,\beta}\}$$

содержит не более одного числа для любого $t \in \mathbb{N}$. Тогда взяв $B_\beta = \{k_1, k_2, \dots\}$, получим, что совокупность $\{B_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ удовлетворяет условию 2). Из сюръективности отображения f следует, что для совокупности $\{B_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ выполняется и условие 1).

Итак, мы построили такую совокупность $\{B_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ подмножеств в $\mathbb{N}$, что выполняются условия 1) и 2).

Тогда совокупность всех конечных пересечений множеств из совокупности $\{B_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ является базисом некоторого фильтра Φ . Так как $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ – множество всех возрастающих последовательностей и $k \geq m_{2,\alpha}$ для любого $k \in B_\alpha$, то фильтр Φ мажорирует фильтр Фреше. Из того, что для любых $i \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \omega_1$ множество

$$B_\alpha \cap \{k \in \mathbb{N} \mid m_{i,\alpha} \leq k \leq m_{i+1,\alpha}\}$$

содержит не более одного числа следует, что Φ – требуемый фильтр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть R – кольцо, $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – такая совокупность кольцевых топологий на R , что выполнены следующие условия:

- 1) $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$ относительно порядка, задаваемого сравнением топологий, является направленным множеством;
- 2) для любого $\alpha \in A$ пополнение топологического кольца (R, τ_α) обладает единицей e_α .

Тогда пополнение топологического кольца $(R, \sup\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\})$ обладает единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tilde{R}_\alpha$ – пополнение топологического кольца (R, τ_α) и $\tilde{R} = \prod_{\alpha \in A} \tilde{R}_\alpha$ – произведение топологических колец $\tilde{R}_\alpha$ с тихоновской топологией, то $\tilde{R}$ обладает единицей $\tilde{e}$ и подкольцо

$$R' = \{x \in \tilde{R} \mid \text{pr}_\alpha(x) = r \text{ для всех } \alpha \in A, \text{ где } r \in R\}$$

топологически изоморфно кольцу $(R, \sup\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\})$ (см. [11, предложение 2.1.37]).

Так как $\tilde{R}$ – полное кольцо, то $[R']_{\tilde{R}}$ изоморфно пополнению топологического кольца $(R, \sup\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\})$. Для завершения доказательства осталось проверить, что $\tilde{e} \in [R']_{\tilde{R}}$.

Итак, пусть W – произвольная окрестность нуля в $\tilde{R}$. Существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ и такие окрестности $V_1, \dots, V_n$ нуля в $(R_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}), \dots, (R_{\alpha_n}, \tau_{\alpha_n})$, соответственно, что

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \subseteq W,$$

где

$$X_\alpha = \begin{cases} V_i, & \text{если } \alpha = \alpha_i \text{ для } i = 1, \dots, n; \\ R & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$ является направленным множеством, то существует такая топология τ_{α_0} , что $\tau_{\alpha_0} \geq \tau_{\alpha_i}$ для $i = 1, \dots, n$. Если $\xi: R \rightarrow R$ – тождественное отображение, то $\xi: (R, \tau_{\alpha_0}) \rightarrow (R, \tau_{\alpha_i})$ является непрерывным кольцевым гомоморфизмом для $i = 1, \dots, n$. Согласно теореме 1.2.27 из [11] для каждого $1 \leq i \leq n$ отображение ξ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\tilde{\xi}_i: \tilde{R}_{\alpha_0} \rightarrow \tilde{R}_{\alpha_i}$, причем $\tilde{\xi}_i(e_{\alpha_0}) = e_{\alpha_i}$ для $1 \leq i \leq n$. Тогда $V = \bigcap_{i=1}^n \tilde{\xi}_i^{-1}(V_i)$ будет окрестностью нуля в $\tilde{R}_{\alpha_0}$. Так как $e_{\alpha_0} \in [R]_{\tilde{R}_{\alpha_0}}$, то $(e_{\alpha_0} + V) \cap R \neq \emptyset$. Пусть $r \in (e_{\alpha_0} + V) \cap R$

и $\tilde{r}$ – такой элемент из $\tilde{R}$, что $\text{pr}_\alpha(\tilde{r}) = r$ для любого $\alpha \in A$. Тогда $\tilde{r} \in R'$ и $\tilde{e} + W \supseteq \prod_\alpha (e_\alpha + X_\alpha) \ni \tilde{r}$, т.е. $(\tilde{e} + W) \cap R' \neq \emptyset$. Из произвольности W следует, что $\tilde{e} \in [R']_{\tilde{R}}$. Этим предложение полностью доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – счетная совокупность колец с единицей и $R = \bigoplus_{i=1}^\infty R_i$. Если τ – такая кольцевая топология на R , что выполнены следующие условия:

- а) (R, τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности и для любого $i \in \mathbb{N}$ множество $\{x \in R \mid \text{pr}_i x = 0\}$ является открытым в (R, τ) ;
- б) для любой окрестности V нуля в (R, τ) существует такое натуральное число $n(V)$, что для всякого натурального числа $m > n(V)$ существует такой элемент $x_m \in V$, что $\text{pr}_i(x_m) = e_i$ для любого $n(V) \leq i \leq m$, где e_i – единица кольца R_i ,

то пополнение $\tilde{R}$ топологического кольца (R, τ) обладает единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – некоторый базис окрестности нуля в (R, τ) . Поскольку, согласно условию а) для каждого $i \in \mathbb{N}$ множество $\{x \in R \mid \text{pr}_i x = 0\}$ является открытым множеством, то можем считать, что

$$V_i \subseteq \bigcap_{j=1}^i \{x \in R \mid \text{pr}_j x = 0\},$$

т.е. $\text{pr}_j(V_i) = 0$ для любых $j \leq i$. Кроме того, не нарушая общности, можем считать, что $V_0 = R$ и

$$V_{i+1} + V_{i+1} + V_{i+1} \cdot V_{i+1} \subseteq V_i$$

для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда индукцией по числу $t - s$ легко проверяется, что

$$\sum_{i=s}^t V_i \subseteq \sum_{i=s}^t V_i + V_t \subseteq V_{s-1}$$

для любых $s \leq t$.

По индукции построим такие последовательности $\{\tilde{e}_i \mid i = 0, 1, \dots\}$ элементов кольца R и возрастающие последовательности $\{m_i \mid i = 0, 1, \dots\}$ и $\{k_i \mid i = 0, 1, \dots\}$ целых чисел, что выполняются условия:

- 1) $\tilde{e}_i \in V_{k_{i-1}}$ для $i \in \mathbb{N}$;
- 2) $\text{pr}_i(\tilde{e}_j) = 0$ для $i > k_j$, где $j \in \mathbb{N}$;
- 3) $\text{pr}_i(\tilde{e}_j) = e_i$ для $m_{j-1} < i \leq m_j$, где $j \in \mathbb{N}$;
- 4) $k_i \geq m_i > k_{i-1}$ и $m_i \geq n(V_{k_{i-1}})$ для $i \in \mathbb{N}$ (определение натурального числа $n(V)$ см. в формулировке предложения).

Возьмем $m_0 = k_0 = 0$, и $\tilde{e}_0 = 0$. Допустим, что для целого числа t уже определены $\{m_0, \dots, m_t\}$, $\{k_0, \dots, k_t\}$ и $\{\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_t\}$, причем выполняются условия 1)–4).

Возьмем $m_{t+1} = n(V_{k_t}) + k_t + m_t$. Согласно условию б) в окрестности V_{k_t} найдется такой элемент $\tilde{e}_{t+1}$, что $\text{pr}_i(\tilde{e}_{t+1}) = e_i$ для $m_t < i \leq m_{t+1}$. Так как $\text{supp}(e_{t+1})$ – конечное множество, то найдется такое число $k_{t+1} \geq m_{t+1}$, что $\text{pr}_i(\tilde{e}_{t+1}) = 0$ для любого $i > k_{t+1}$. Тогда условия 1)–4) выполняются уже для

множеств $\{m_0, \dots, m_{t+1}\}, \{k_0, \dots, k_{t+1}\}$ чисел и множества $\{\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_{t+1}\}$ элементов кольца R .

Продолжая этот процесс построим требуемые последовательности элементов кольца R и целых чисел.

Проверим следующие два свойства элементов $\tilde{e}_i$ для $i \in \mathbb{N}$:

5) так как $0 = k_0 < k_1 < \dots$, то $i \leq k_i$ и, значит,

$$e_i - e_i \cdot e_{i+1} \in V_i - V_{k_i} \cdot V_{k_{i+1}} \subseteq V_i - V_i \cdot V_i \subseteq V_{i-1}$$

для любого $i \in \mathbb{N}$;

6) для любых $i, j \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\text{pr}_i(\tilde{e}_j - \tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_{j+1}) = \begin{cases} e_i, & \text{если } m_{j-1} < i \leq m + j; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В самом деле, если $i, j \in \mathbb{N}$ и $m_{j-1} < i \leq m_j$, то $\tilde{e}_{j+1} \in V_{k_j} \subseteq V_{m_j} \subseteq V_i$ и, значит, $\text{pr}_i(\tilde{e}_{j+1}) = 0$ (см. начало доказательства, свойства взятого базиса окрестностей). Тогда $\text{pr}_i(\tilde{e}_j - \tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_{j+1}) = \text{pr}_i(\tilde{e}_j) = e_i$. Если же $i \leq m_{j-1}$, то $\tilde{e}_j \in V_{k_{j-1}} \subseteq V_{m_{j-1}} \subseteq V_i$. Тогда $\text{pr}_i(\tilde{e}_j) = 0$ и, значит, $\text{pr}_i(\tilde{e}_j - \tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_{j+1}) = 0$. Пусть теперь $i > m_j$. Если $i > k_j$, то $\text{pr}_i(\tilde{e}_j) = 0$, и тогда $\text{pr}_i(\tilde{e}_j - \tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_{j+1}) = 0$. Если же $j \leq k_j$, то $i \leq m_{j+1}$, а потому $\text{pr}_i(\tilde{e}_{j+1}) = e_i$. Тогда $\text{pr}_i(\tilde{e}_j) = \text{pr}_i(\tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_{j+1})$ и, значит, $\text{pr}_i(\tilde{e}_j - \tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_{j+1}) = 0$.

Для каждого натурального числа s рассмотрим элемент $\tilde{f}_s = \sum_{i=1}^s (\tilde{e}_i - \tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_{i+1})$. Так как

$$\tilde{f}_t - \tilde{f}_s = \sum_{j=s+1}^t (\tilde{e}_j - \tilde{e}_j \cdot \tilde{e}_{j+1}) \in \sum_{j=s+1}^t V_{j-1} \subseteq V_{s-1} \subseteq V_i$$

для любых $i \leq s < t$, то $\{\tilde{f}_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ является последовательностью Коши и, значит, существует такой элемент $\tilde{f}$ в пополнении $\tilde{R}$ кольца (R, τ) , что $\tilde{f} = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}_s$.

Покажем, что $\tilde{f}$ является единицей в кольце $\tilde{R}$. Так как R — плотное подкольцо в $\tilde{R}$, то достаточно показать, что $\tilde{f} \cdot r = r \cdot \tilde{f} = r$ для любого $r \in R$.

Итак, пусть $r \in R$. Так как $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots$, то существует такое натуральное число s , что $\text{supp}(r) \subseteq \{1, 2, \dots, m_k\}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq s$. Тогда, учитывая свойство 6), получаем, что

$$r \cdot \tilde{f}_k = r \cdot \left(\sum_{i=1}^k e_i - e_i \cdot e_{i+1} \right) = r$$

для любого $k \geq s$ и, значит, $r \cdot \tilde{f} = r \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{f}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} r \cdot \tilde{f}_i = r$.

Аналогично проверяется, что $\tilde{f} \cdot r = r$. Этим предложение полностью доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\{R_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ – счетная совокупность колец, каждое из которых обладает единицей и $R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$. Тогда пополнение топологического кольца (R, τ) обладает единицей e , если τ – такая топология, что выполняются следующие условия:

- а) для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $W_k = \bigcap_{i=1}^k \text{pr}_i^{-1}(0)$ является открытым в (R, τ) ;
- б) для любой окрестности V нуля в (R, τ) существует такое натуральное число $n(V)$, что для всякого натурального числа $m \geq n(V)$ существует такой элемент $x_m \in V$, что $\text{pr}_i(x_m) = e_i$ для $n \leq i \leq m$, где e_i – единица кольца R_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – некоторый базис симметричных окрестностей нуля в (R, τ) . Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ всех таких последовательностей $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ элементов из A , что выполняются условия:

- 1) $V_{\alpha_i} + V_{\alpha_i} + V_{\alpha_i} \cdot V_{\alpha_i} \subseteq V_{\alpha_{i-1}}$ для $i \geq 2$;
- 2) $V_{\alpha_i} \subseteq W_i$ (определение W_i см. в формулировке предложения, условие а)).

Легко заметить, что каждая последовательность $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \in \mathfrak{A}$ задает на $\hat{R}$ некоторую отделимую кольцевую топологию $\tau_{\bar{\alpha}}$, в которой совокупность $\{V_{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \dots\}$ является базисом окрестностей нуля, причем $\{\tau_{\bar{\alpha}} \mid \bar{\alpha} \in \mathfrak{A}\}$ относительно порядка, задаваемого сравнением топологий, является направленным множеством и $\tau = \sup\{\tau_{\bar{\alpha}} \mid \bar{\alpha} \in \mathfrak{A}\}$. Последовательно применяя предложения 4 и 3, получаем, что пополнение топологического кольца (R, τ) обладает единицей. Этим предложение доказано.

ЛЕММА 1. Если $m_1, m_2, \dots$ и $n_1, n_2, \dots$ – такие возрастающие последовательности натуральных чисел, что $n_1 = 1$ и для любого $i \in \mathbb{N}$ множество $\{m_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{j \in \mathbb{N} \mid n_i \leq j \leq n_{i+2}\}$ содержит не более одного элемента (т.е. является пустым или одноэлементным), то для любого $t \in \mathbb{N}$ найдется такое $s \in \mathbb{N}$, что $m_t \leq n_s < n_{s+1} < m_{t+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \mathbb{N}$ и $s = \min\{k \in \mathbb{N} \mid m_t \leq n_k\}$. Тогда $s > 1$ и $n_{s-1} \leq m_t \leq n_s$. Так как множество $\{j \in \mathbb{N} \mid n_{s-1} \leq j \leq n_{s+1}\}$ содержит не более одного числа из множества $\{m_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, то $n_{s+1} < m_{t+1}$ и, значит, $m_t \leq n_s < n_{s+1} < m_{t+1}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть p – простое число, $\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – счетная система колец с единицами характеристики p . Если $R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$, то в предположении континуум-гипотезы на кольце R существует такая топология τ_0 , что (R, τ_0) обладает базисом окрестностей нуля из подколец (т.е. $\tau_0 \in \mathfrak{M}_K$) и для любой недискретной кольцевой топологии $\tau \geq \tau_0$ кольцо (R, τ) не является полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ – фильтр на множестве $\mathbb{N}$, построенный согласно предложения 2. Для каждого $F \in \Phi$ построим подмножество W_F в кольце R следующим образом.

Пусть $F = \{m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Не нарушая общности, можем считать, что $m_1 < m_2 < \dots$. Если e_i – единица в кольце R_i для $i \in \mathbb{N}$, то для каждого $j \in \mathbb{N}$ рассмот-

рим в R такой элемент $\tilde{e}_j$, что

$$\mathrm{pr}_k \tilde{e}_j = \begin{cases} e_k, & \text{если } m_j \leq k < m_{j+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В качестве W_F возьмем подкольцо в R , порожденное множеством $\{\tilde{e}_i \mid i \in F\}$.

Так как $\mathrm{supp}(a)$ – конечное множество для любого $a \in R$, то совокупность $\{W_F \mid F \in \Phi\}$ задает на R некоторую кольцевую топологию τ_0 , являясь базисом окрестностей нуля.

Покажем, что τ_0 является искомой, т.е. что для любой не дискретной кольцевой топологии $\tau \geq \tau_0$ кольцо (R, τ) не является полным.

Допустим противное, т.е. что (R, τ) – полное кольцо для некоторой кольцевой топологии $\tau \geq \tau_0$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ обозначим через R'_i подкольцо, порожденное единицей e_i кольца R_i . Ясно, что R'_i – простое поле характеристики p . Из определения топологии τ_0 следует, что подкольцо $R' = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R'_i$ является открытым в (R, τ_0) и поскольку $\tau \geq \tau_0$, оно будет открытым и в (R, τ) и, значит, замкнутым. Тогда $(R', \tau_{R'})$ будет полным кольцом (см. [11, теорема 1.2.16]).

Так как R'_i – конечное кольцо для любого $i \in \mathbb{N}$ и $R' = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R'_i$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ подмножество $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{pr}_i^{-1}(0)$ является открытым множеством в $(R', \tau_{R'})$, т.е. для кольца $(R', \tau_{R'})$ выполнено условие а) предложения 5. Поскольку R' – полное кольцо и не обладает единицей, то в топологическом кольце $(R', \tau_{R'})$ не выполняется условие б) предложения 5, т.е. в нем существует такая окрестность V_0 нуля, что для каждого натурального числа m найдется такое натуральное число $k(m) > m$, что

$$\{i \mid \mathrm{pr}_i(y) = e_i\} \not\supseteq \{i \mid m \leq i \leq k(m)\}$$

для любого элемента $y \in V_0$.

Так как R'_i – конечные простые поля характеристики p , то $r^{p-1} = e_i$ для любых $0 \neq r \in R'_i$ и $i \in \mathbb{N}$. Если V_1 – такая окрестность нуля в $(R', \tau_{R'})$, что $\{y^{p-1} \mid y \in V_1\} \subseteq V_0$, то

$$\mathrm{supp}(y) = \{i \mid \mathrm{pr}_i(y^p) = e_i\} \not\supseteq \{i \mid m \leq i \leq k(m)\}$$

для любого $y \in V_1$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$.

По индукции построим последовательность $n_1, n_2, \dots$ натуральных чисел, взяв $n_1 = 1$ и $n_{i+1} = k(n_i)$ для $i \in \mathbb{N}$. Из выбора фильтра Φ следует, что для последовательности $n_1, n_2, \dots$ существует такой элемент $F_0 \in \Phi$, что для любого $i \in \mathbb{N}$ множество $F_0 \cap \{j \mid n_i \leq j \leq n_{i+2}\}$ содержит не более одного элемента.

Пусть $F_0 = \{m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (можем считать, что $m_1 < m_2 < \dots$). Согласно лемме 1 для любого $i \in \mathbb{N}$ существует такое $t(i) \in \mathbb{N}$, что $m_i \leq n_{t(i)} < n_{t(i)+1} \leq m_{i+1}$.

Так как $\tau \geq \tau_0$ и (R, τ) – не дискретное кольцо, то $W_{F_0} \cap V_1 \neq \{0\}$. Если $0 \neq a \in W_{F_0} \cap V_1$, то из определения множества W_{F_0} следует, что $a = \sum_{i=1}^r z_i \cdot \tilde{e}_i$, где $z_i \in \mathbb{Z}/p \cdot \mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Пусть i_0 – такое натуральное число, что $z_{i_0} \neq 0$. Тогда $\mathrm{pr}_k(a) = \mathrm{pr}_k(z_{i_0} \cdot \tilde{e}_{i_0}) \neq 0$ для любого $m_{i_0} \leq k < m_{i_0+1}$ (см. начало доказательства теоремы, определение элементов $\tilde{e}_i$). Как было замечено выше, $m_{i_0} \leq n_{t(i_0)} < n_{t(i_0)+1} \leq m_{i_0+1}$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и, значит, $\mathrm{pr}_k(a) \neq 0$ для любого $n_{t(i_0)} \leq k < n_{t(i_0)+1}$. Так как $n_{t(i_0)+1} = k(n_{t(i_0)})$, то $\mathrm{supp}(a) \supseteq$

$\{i \mid n_{t(i_0)} \leq i \leq k(n_{t(i_0)})\}$ и, значит, $a \notin V_1$ (см. выбор окрестности V_1). Получили противоречие с выбором элемента a . Следовательно, допущение о полноте кольца (R, τ) неверно. Этим теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – конечное поле и $\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – такая совокупность колец, каждое из которых изоморфно полю A . Если $R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$ и $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}_k, \mathfrak{M}_g, \mathfrak{M}_n, \mathfrak{M}_b\}$, то на R существует такая максимальная в $\mathfrak{M}$ кольцевая топология τ , что (R, τ) не является полным кольцом.

Из следствий 1) и 2) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A – конечное поле и $\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – такая совокупность колец, каждое из которых изоморфно полю A . Если $R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$ и $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}_k, \mathfrak{M}_g, \mathfrak{M}_n, \mathfrak{M}_b\}$, то на кольце R существуют такие максимальные в $\mathfrak{M}$ кольцевые топологии $\hat{\tau}$ и $\tilde{\tau}$, что $(R, \hat{\tau})$ – полное кольцо, а $(R, \tilde{\tau})$ – неполное кольцо.

Список литературы

1. Граев М. И. Свободные топологические группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12. С. 279–324.
2. Ткаченко М. Г. О полноте свободных абелевых топологических групп // ДАН СССР. 1983. Т. 269. №2. С. 299–304.
3. Marco G. De and Orsatti. Complete linear topologies on abelian groups // Symp. Math. Jst naz alta mat. conv. nov-dic. 1972. V. 13. P. 153–161.
4. Арнаутков В. И., Кабанова Е. И. Об усилении групповой топологии счетной группы до полной // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. №1. С. 3–13.
5. Арнаутков В. И. Об усилении кольцевой топологии счетного кольца до полной // IV симпозиум по теории колец и модулей. Тезисы сообщений. Львов, 1990.
6. Марин Е. И. Усиление групповой топологии Абелевой группы до полной // Модули, алгебры и топологии: Мат. исслед. 1988. №105. С. 93–104.
7. Арнаутков В. И., Зеленьюк Е. Г. К проблеме полноты максимальных топологических групп // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. №1. С. 21–27.
8. Арнаутков В. И. О полноте колец в максимальных топологиях // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А. И. Мальцева. Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1989.
9. Арнаутков В. И., Водичар М. И., Миталев А. В. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981.
10. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. О некоторых классах слабо булевых колец // ДАН СССР. 1975. Т. 224. №1. С. 11–14.
11. Арнаутков В. И., Водичар М. И., Главацкий С. Т., Миталев А. В. Конструкции топологических колец. Кишинев: Штиинца, 1988.

Институт математики,
Кишинев, Молдавия

Поступила в редакцию
25.01.1995