Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Л. Башкиров, О подгруппах специальной линейной группы степени 2 над бесконечным полем, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 2, 19–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:36:09

УДК 512.743

Е. Л. Башкиров

О подгруппах специальной линейной группы степени 2 над бесконечным полем

В статье изучаются подгруппы группы $SL_2(K)$ над полем K , содержащие группу, сопряженную в $GL_2(K)$ с группой всех верхних унитреугольных матриц степени 2 над бесконечным полем k таким, что расширение K/k алгебраично.

Библиография: 13 названий.

Изучение подгруппового строения линейных групп (в частности, классических линейных групп) занимает важное место в теории линейных групп. Весьма плодотворным методом такого изучения является описание линейных групп, заключенных между двумя заданными линейными группами. В настоящей статье эта тематика разрабатывается применительно к специальной линейной группе $SL_2(K)$ над бесконечным полем K .

§ 1. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если k – бесконечное поле, α – элемент, который алгебраичен, а в случае $\text{char } k = 2$ также и сепарабелен над k , $K = k(\alpha)$, то группа G , порожденная матрицами $t_{12}(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t_{21}(r\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\alpha & 1 \end{pmatrix}$, где r пробегает поле k , совпадает с $SL_2(K)$.*

Этот результат применен автором при решении задач, связанных с описанием промежуточных подгрупп специальной линейной группы $SL_n(P)$ ($n \geq 2$) над полем P , порожденных трансвекциями. Именно, в [1]–[3] были классифицированы подгруппы группы $SL_n(P)$, содержащие одну из классических линейных групп (специальную линейную, специальную унитарную ненулевого индекса, симплектическую) над подполем Δ поля P таким, что P – алгебраическое расширение поля Δ . В [4] найдены все неприводимые подгруппы группы $SL_n(P)$, содержащие группу, сопряженную в $GL_2(P)$ с группой $\text{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1_{n-2}\right)$ (1_{n-2} – единичная матрица порядка $n - 2$). В [5] теорема 1 используется для исследования подгрупп группы $SL_2(P)$ над полем P характеристики 2, содержащих группу верхних унитреугольных матриц над бесконечным полем Δ таким, что P является простым алгебраическим расширением поля Δ . В самое последнее время Н. А. Вавилов [6]

применил теорему 1 при выяснении строения подгрупп группы $SL_n(P)$, порожденных двумя подгруппами, каждая из которых сопряжена в $GL_n(P)$ с группой

$$\text{diag}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m \text{ раз}}, 1_{n-2m}\right), \quad r \in P.$$

Таким образом, весьма вероятно, что теорема 1 будет играть определенную роль в построении бесконечного аналога теории квадратичных пар Томпсона. Во втором параграфе настоящей статьи приводятся некоторые применения теоремы 1. В частности, дается описание неприводимых подгрупп группы $SL_2(P)$ над бесконечным полем P характеристики $\neq 2$, содержащих группу всех верхних унитреугольных матриц $t_{12}(\Delta)$ над полем Δ таким, что расширение P/Δ алгебраично.

Ввиду отсутствия до недавнего времени общих подходов к доказательству теоремы 1, авторам, решающим сходные вопросы, приходилось либо искать обходные пути, чтобы избежать редукции к размерности 2 [7], [8], либо рассматривать ситуации, в которых использовались весьма частные случаи теоремы 1 [9]–[11]. Впервые теорема 1 была доказана автором в [12]. Здесь мы приводим новое доказательство этой теоремы, основанное на содержащихся в [12] идеях.

Пусть $n = [K : k]$. Можно считать $n \geq 2$. Если $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, то по определению положим $M(n_1, n_2) = \{(i_1, \dots, i_{n_2}) \in \mathbb{N}^{n_2} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n_2} \leq n_1, i_1, i_3, i_5, \dots \text{ нечетны; } i_2, i_4, i_6, \dots \text{ четны}\}$. Пусть y_i ($1 \leq i \leq 2n$) – независимые переменные и $y = (y_1, y_2, \dots, y_{2n})$. В кольце $k[y_1, y_2, \dots, y_{2n}]$ определим полиномы $x_i(y)$ ($1 \leq i \leq 2n$):

$$\begin{aligned} x_m(y) &= \sum_{M(2n, 2m)} y_{i_1}, \dots, y_{i_{2m}}, \\ x_{n+m}(y) &= \sum_{M(2n, 2m-1)} y_{i_1}, \dots, y_{i_{2m-1}} \quad (1 \leq m \leq n). \end{aligned} \quad (1)$$

Каждый элемент из K можно представить в виде $\sum_{i=1}^n a_i \alpha^i$ ($a_i \in k, 1 \leq i \leq n$) и отождествить с точкой $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in k$. Поле K естественным образом отождествляется с аффинным пространством k^n . Под открытыми множествами в дальнейшем понимаются подмножества аффинного пространства, открытые в топологии Зарисского. Индукцией по n легко показать, что

$$\prod_{i=1}^n t_{12}(y_{2i-1}) t_{21}(y_{2i} \alpha) = \left(1 + \sum_{m=1}^n \underset{*}{x_m(y) \alpha^m} \quad \sum_{m=1}^n \underset{*}{x_{n+m}(y) \alpha^{m-1}} \right) \quad (2)$$

и, значит, с произведением (1) естественным образом связывается k -морфизм $F: k^{2n} \rightarrow k^{2n}: y \rightarrow (x_1(y), \dots, x_{2n}(y))$. Теорема 1 вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Морфизм F бирационален, причем обратное к нему отображение H может быть задано с помощью рациональных функций h_i ($1 \leq$*

$i \leq 2n$), допускающих представление в виде $h_i^{(1)}/h_i^{(2)}$, где $h_i^{(j)}$ ($j = 1, 2$) – многочлены из кольца $k[x_1, x_2, \dots, x_{2n}]$ такие, что

$$h_i^{(j)}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) \neq 0$$

для любого набора $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in k^{n-1} \times k^*$.

В самом деле, пусть $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in k^{n-1} \times k^*$. Для существования матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n a_i \alpha^i & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

представимой произведением (2), достаточно выполнение неравенств

$$h_i^{(j)}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) \neq 0$$

при всех $j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, 2n$. Поэтому согласно теореме 2 такие матрицы существуют для каждой точки $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in k^{n-1} \times k^*$. Кроме того, из теоремы 2 вытекает, что для данной точки $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in k^{n-1} \times k^*$, множество всех тех точек $(a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}) \in k^n$, для которых некоторая матрица

$$\begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n a_i \alpha^i & \sum_{i=n+1}^{2n} a_i \alpha^{i-1-n} \\ * & * \end{pmatrix}$$

представима в виде произведения (2), содержит непустое открытое подмножество пространства k^n , а именно, главное открытое множество, определяемое произведением многочленов $h_i^{(j)}(a_1, \dots, a_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) \in k[x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}]$ ($1 \leq i \leq 2n, j = 1, 2$). Пусть теперь многочлен $x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \dots + p_0 \in k[x]$ является минимальным многочленом для α над k . Применив сказанное выше к точке $(p_1 p_0^{-1}, p_2 p_0^{-1}, \dots, p_{n-1} p_0^{-1}, p_0^{-1}) \in k^n$ находим открытое множество $U_1 \subseteq k^n$ такое, что при всех $z_1 \in U_1$ существует матрица $\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ * & * \end{pmatrix}$, представимая в виде произведения (2). Так как определитель

этой матрицы равен 1, то она имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ -z_1^{-1} & * \end{pmatrix}$. Следовательно, если

$U = \{z \in k^n \mid z = -z_1^{-1}, z_1 \in U_1\}$, то U открыто и при всех $z \in U$ некоторая матрица $\begin{pmatrix} 0 & * \\ z & * \end{pmatrix}$ представима в виде произведения (2). Очевидно, что существует n

многочленов q_j ($1 \leq j \leq n$) от n переменных с коэффициентами из поля k таких, что $\beta^2 = \sum_{j=1}^n q_j(a_1, \dots, a_n) \alpha^{j-1}$ при любом $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha^{i-1}$ ($a_i \in k$) из поля K . Пусть теперь $\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha^{i-1}$ ($a_{ij} \in k, 1 \leq i, j \leq n$) – произвольные элементы поля K . Тогда элементы $\beta_1^2, \beta_2^2, \dots, \beta_n^2$ образуют базис поля K над k тогда и только тогда, когда отличен от 0 определитель порядка n , у которого на позиции (i, j) находится элемент $q_j(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Пусть Λ – многочлен из кольца $k[x_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ от n^2 переменных, у которого позиция (i, j) занята многочленом $q_j(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$. Поле K имеет базис над k , состоящий из квадратов поля K (это следует при $\text{char } k \neq 2$ из того, что каждый элемент поля K представляется в виде разности квадратов двух элементов из этого поля, а в случае

$\text{char } k = 2$ из сделанного нами предположения о сепарабельности α над k). Поэтому $\Lambda \neq 0$, и пусть V обозначает (непустое) главное открытое множество пространства k^{n^2} , определяемое многочленом Λ . Выберем точки $z_1, z_2, \dots, z_n \in k^n$ так, чтобы точка $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in k^{n^2}$ находилась в пересечении $V \cap U^n$. Так как каждая точка $z_i \in U$, то некоторая матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & -z_i^{-1} \\ z_i & * \end{pmatrix}$ разлагается в произведение (2). Следовательно, при всех $r \in k$ группа G содержит матрицу

$$t_{21}(z_i^2 r) = \begin{pmatrix} 0 & -z_i^{-1} \\ z_i & * \end{pmatrix} t_{12}(r) \begin{pmatrix} 0 & -z_i^{-1} \\ z_i & * \end{pmatrix}^{-1}.$$

Но $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in V$, и, значит, $z_1^2, z_2^2, \dots, z_n^2$ — базис K над k . Следовательно, $t_{21}(\beta) \in G$ при всех $\beta \in K$, откуда $G = \text{SL}_2(K)$.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать теорему 2. Этому будет посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

Положим

$$B = \{(m, l) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq m \leq n, 1 \leq l \leq m\} \\ \cup \{(n+m, l) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq m \leq n-1, 1 \leq l \leq n-m+1\}.$$

Пусть x_i ($1 \leq i \leq 2n$) — независимые переменные, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$. В поле $k(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ для каждой пары $(i, j) \in B$ определим дробь $f_{ij} = f_{ij}(x)$ с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{x_n}{x_{2n}}, & f_{21} &= x_{n-1} - x_{2n-1}f_{11}, \\ f_{22} &= \frac{x_{2n}}{f_{21}}, & f_{m1} &= x_{n-m+1} - x_{2n-m+1}f_{11}, \\ f_{m2} &= x_{2n-m+2} - f_{22}f_{m1}, & f_{ml} &= f_{m-1,l-2} - f_{1l}f_{m,l-1}, \\ f_{mm} &= \frac{f_{m-1,m-2}}{f_{m,m-1}} & (3 \leq m \leq n, 3 \leq l \leq m-1), \\ f_{n+1,1} &= x_{n+1} - f_{22}, \\ f_{n+1,l} &= f_{n,l-1} - f_{l+1,l+1}f_{n+1,l-1} & (2 \leq l \leq n-1), \\ f_{n+1,n} &= \frac{f_{n,n-1}}{f_{n+1,n-1}}, & f_{n+m,1} &= f_{n+m-1,1} - f_{2m,s}, \\ \text{где } s &= \begin{cases} 2m, & \text{если } 2m \leq n, \\ 2n-2m+1, & \text{если } 2m > n, \end{cases} \\ f_{n+m,l} &= f_{n+m-1,l} - f_{2m+l-1,s}f_{n+m,l-1}, \\ \text{где } s &= \begin{cases} 2m+l-1, & \text{если } 2m+l-1 \leq n, \\ 2n-2m-l+2, & \text{если } 2m+l-1 > n, \end{cases} \\ f_{n+m,n-m+1} &= \frac{f_{n+m-1,n-m+1}}{f_{n+m,n-m}}, & (2 \leq m \leq n-1, 2 \leq l \leq n-m). \end{aligned} \tag{3}$$

Покажем, что рациональное отображение

$$H: k^{2n} \rightarrow k^{2n}: x \rightarrow (f_{2n-1,1}(x), f_{2n-1,2}(x), f_{2n-2,3}(x), \dots \\ \dots, f_{n+1,n}(x), f_{nn}(x), f_{n-1,n-1}(x), \dots, f_{11}(x))$$

является обратным к F . Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 1. а) Если $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, $f_{2n-1,1}(x) = y_1$, $f_{2n-1,2}(x) = y_2$, $f_{2n-2,3}(x) = y_3$, $\dots$, $f_{n+1,n}(x) = y_n$, $f_{nn}(x) = y_{n+1}$, $f_{n-1,n-1}(x) = y_{n+2}$, $\dots$, $f_{11}(x) = y_{2n}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{2n})$, то $x_i(y) = x_i$ ($1 \leq i \leq 2n$).

б) Если $y = (y_1, y_2, \dots, y_{2n})$, $x_i(y) = x_i$ ($1 \leq i \leq 2n$), $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, то $f_{2n-1,1}(x) = y_1$, $f_{2n-1,2}(x) = y_2$, $f_{2n-2,3}(x) = y_3$, $\dots$, $f_{n+1,n}(x) = y_n$, $f_{nn}(x) = y_{n+1}$, $f_{n-1,n-1}(x) = y_{n+2}$, $\dots$, $f_{11}(x) = y_{2n}$ ($x_i(y)$ определяется по формулам (1)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что доказав эту лемму, мы убедимся в существовании дробей, определяемых равенствами (3). Для каждой пары $(i, j) \in B$ введем в рассмотрение многочлен $\varphi_{ij} \in k[y_1, y_2, \dots, y_{2n}]$:

$$\begin{aligned}\varphi_{ml} &= \sum_{M(2n-l-1, 2n-2m+l+1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+l+1}}, \\ \varphi_{mm} &= y_{2n-m+1} \quad (1 \leq m \leq n, 1 \leq l \leq m-1), \\ \varphi_{n+m,l} &= \sum_{M(2n-2m-l+1, l)} y_{i_1} \cdots y_{i_l}, \\ \varphi_{n+m,n-m+1} &= y_{n-m+1} \quad (1 \leq m \leq n-1, 1 \leq l \leq n-m).\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}\sum_{M(2n, 2n)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n}} &= \sum_{M(2n, 2n-1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-1}} y_{2n}, \\ \sum_{M(2n, 2n-2)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2}} &= \sum_{M(2n-2, 2n-2)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2}} \\ &+ \sum_{M(2n, 2n-3)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-3}} y_{2n}, \\ \sum_{M(2n, 2n-1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-1}} &= \sum_{M(2n-1, 2n-2)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2}} y_{2n-1}, \\ \sum_{M(2n, 2n-2m+2)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+2}} &= \sum_{M(2n-2, 2n-2m+2)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+2}} \\ &+ \sum_{M(2n, 2n-2m+1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+1}} y_{2n}, \\ \sum_{M(2n, 2n-2m+3)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+3}} &= \sum_{M(2n-3, 2n-2m+3)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+3}} \\ &+ \sum_{M(2n-2, 2n-2m+2)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+2}} y_{2n-1}, \\ \sum_{M(2n-l+1, 2n-2m+l+1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+l+1}} &= \\ &= \sum_{M(2n-l-1, 2n-2m+l+1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+l+1}} \\ &+ \sum_{M(2n-l, 2n-2m+l)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-2m+l}} y_{2n-l+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{M(2n-m+1, 2n-m+1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-m+1}} &= \sum_{M(2n-m, 2n-m)} y_{i_1} \cdots y_{i_{2n-m}} y_{2n-m+1}, \\
\sum_{M(2n, 1)} y_{i_1} &= \sum_{M(2n-2, 1)} y_{i_1} + y_{2n-1}, \\
\sum_{M(2n-l, l)} y_{i_1} \cdots y_{i_l} &= \sum_{M(2n-l-1, l)} y_{i_1} \cdots y_{i_l} \\
&+ \sum_{M(2n-l, l-1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{l-1}} y_{2n-l}, \\
\sum_{M(n, n)} y_{i_1} \cdots y_{i_n} &= \sum_{M(n, n-1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{n-1}} y_n, \\
\sum_{M(2n-2m+2, 1)} y_{i_1} &= \sum_{M(2n-2m, 1)} y_{i_1} + y_{2n-2m+1}, \\
\sum_{M(2n-2m-l+3, l)} y_{i_1} \cdots y_{i_l} &= \sum_{M(2n-2m-l+1, l)} y_{i_1} \cdots y_{i_l} \\
&+ \sum_{M(2n-2m-l+2, l-1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{l-1}} y_{2n-2m+1}, \\
\sum_{M(n-m+2, 2n-m+1)} y_{i_1} \cdots y_{i_{n-m+1}} &= \sum_{M(n-m+1, n-m)} y_{i_1} \cdots y_{i_{n-m}} y_{n-m+1},
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
x_n(y) &= \varphi_{11}(y)x_{2n}(y), \quad x_{n-1}(y) = \varphi_{21}(y) + x_{2n-1}(y)\varphi_{11}(y), \\
x_{2n}(y) &= \varphi_{22}(y)\varphi_{21}(y), \quad x_{n-m+1}(y) = \varphi_{m1}(y) + x_{2n-m+1}(y)\varphi_{11}(y), \\
x_{2n-m+2}(y) &= \varphi_{m2}(y) + \varphi_{22}(y)\varphi_{m1}(y) \quad (3 \leq m \leq n) \\
x_{n+1}(y) &= \varphi_{n+1,1}(y) + \varphi_{22}(y),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{m-1, l-1}(y) &= \varphi_{ml}(y) + \varphi_{l1}(y)\varphi_{m, l-1}(y), \\
\varphi_{m-1, m-2}(y) &= \varphi_{mm}(y)\varphi_{m, m-1}(y) \quad (3 \leq m \leq n, 3 \leq l \leq m-1), \\
\varphi_{n, l-1} &= \varphi_{n+1, l}(y) + \varphi_{l+1, l+1}(y)\varphi_{n+1, l-1}(y) \quad (2 \leq l \leq n-1), \\
\varphi_{n, n-1}(y) &= \varphi_{n+1, n}(y)\varphi_{n+1, n-1}(y), \\
\varphi_{n+m-1, 1}(y) &= \varphi_{n+m, 1}(y) + \varphi_{2m, s}(y), \\
\text{где } s &= \begin{cases} 2m, & \text{если } 2m \leq n, \\ 2n-2m+1, & \text{если } 2m > n, \end{cases} \\
\varphi_{n+m-1, l}(y) &= \varphi_{n+m, l}(y) + \varphi_{2m+l-1, s}(y)\varphi_{n+m, l-1}(y), \\
\text{где } s &= \begin{cases} 2m+l-1, & \text{если } 2m+l-1 \leq n, \\ 2n-2m-l+2, & \text{если } 2m+l-1 > n, \end{cases} \\
\varphi_{n+m-1, n-m+1}(y) &= \varphi_{n+m, n-m+1}(y)\varphi_{n+m, n-m}(y) \\
(2 \leq m \leq n-1, 2 \leq l \leq n-m).
\end{aligned} \tag{5}$$

Равенства

$$\begin{aligned}
f_{2n-1, 1}(x) &= y_1, \quad f_{2n-1, 2}(x) = y_2, \quad f_{2n-2, 3}(x) = y_3, \quad \dots, \quad f_{n+1, n}(x) = y_n, \\
f_{nn}(x) &= y_{n+1}, \quad f_{n-1, n-1}(x) = y_{n+2}, \quad \dots, \quad f_{11}(x) = y_{2n}
\end{aligned}$$

означают, что

$$\begin{aligned} f_{2n-1,1}(x) &= \varphi_{2n-1,1}(y), \quad f_{2n-1,2}(x) = \varphi_{2n-1,2}(y), \\ f_{2n-2,3}(x) &= \varphi_{2n-2,3}(y), \quad \dots, \quad f_{n+1,n}(x) = \varphi_{n+1,n}(y), \\ f_{nn}(x) &= \varphi_{nn}(y), \quad f_{n-1,n-1}(x) = \varphi_{n-1,n-1}(y), \quad \dots, \quad f_{11}(x) = \varphi_{11}(y). \end{aligned} \quad (6)$$

Перепишем равенства (3):

$$\begin{aligned} x_{2n} &= f_{22}(x)f_{21}(x), \quad x_{n-1} = f_{21}(x) + x_{2n-1}f_{11}(x), \\ x_{n-m+1} &= f_{m1}(x) + x_{2n-m+1}f_{11}(x), \\ x_{2n-m+2} &= f_{m2}(x) + f_{22}(x)f_{m1}(x) \quad (3 \leq m \leq n-1), \\ x_{n+1} &= f_{n+1,1}(x) + f_{22}(x); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f_{m-1,l-2}(x) &= f_{ml}(x) + f_{ll}(x)f_{m,l-1}(x), \\ f_{m-1,m-2}(x) &= f_{mm}(x)f_{m,m-1}(x) \quad (3 \leq m \leq n, 3 \leq l \leq m-1), \\ f_{n,l-1}(x) &= f_{n+1,l}(x) + f_{l+1,l+1}(x)f_{n+1,l-1}(x) \quad (2 \leq l \leq n-1), \\ f_{n,n-1}(x) &= f_{n+1,n}(x)f_{n+1,n-1}(x), \\ f_{n+m-1,1}(x) &= f_{n+m,1}(x) + f_{2m,3}(x), \\ \text{где } s &= \begin{cases} 2m, & \text{если } 2m \leq n, \\ 2n-2m+1, & \text{если } 2m > n, \end{cases} \\ f_{n+m-1,l}(x) &= f_{n+m,l}(x) + f_{2m+l-1,s}(x)f_{n+m,l-1}(x), \\ \text{где } s &= \begin{cases} 2m+l-1, & \text{если } 2m+l-1 \leq n, \\ 2n-2m-l+2, & \text{если } 2m+l-1 > n, \end{cases} \\ f_{n+m-1,n-m+1}(x) &= f_{n+m,n-m+1}(x)f_{n+m,n-m}(x) \\ &\quad (2 \leq m \leq n-1, 2 \leq l \leq n-m). \end{aligned} \quad (8)$$

Введем на множестве B следующее упорядочение: будем считать, что пара $(i, j) \in B$ предшествует паре $(i_1, j_1) \in B$, если либо $i > i_1$, либо $i = i_1, j > j_1$. Отправляясь от равенства (6) индукцией по этому упорядочению с помощью равенства (5) и (8), показываем, что $\varphi_{ij}(y) = f_{ij}(x)$ при всех $(i, j) \in B$. Из соотношений (4) и (7) вытекает тогда, что $x_i(y) = x_i$ ($1 \leq i \leq 2n$) и пункт а) леммы 1 доказан. Чтобы

доказать пункт б), перепишем (4) и (5):

$$\begin{aligned}
\varphi_{11}(y) &= \frac{x_n(y)}{x_{2n}(y)}, & \varphi_{21}(y) &= x_{n-1}(y) - x_{2n-1}(y)\varphi_{11}(y), \\
\varphi_{22}(y) &= \frac{x_{2n}(y)}{\varphi_{21}(y)}, & \varphi_{m1}(y) &= x_{n-m+1}(y) - x_{2n-m+1}(y)\varphi_{11}(y), \\
\varphi_{m2}(y) &= x_{2n-m+2}(y) - \varphi_{22}(y)\varphi_{m1}(y), \\
\varphi_{ml}(y) &= \varphi_{m-1,l-2}(y) - \varphi_{ll}(y)\varphi_{m,l-1}(y), \\
\varphi_{mm}(y) &= \frac{\varphi_{m-1,m-2}(y)}{\varphi_{m,m-1}(y)} \quad (3 \leq m \leq n, 3 \leq l \leq m-1), \\
\varphi_{n+1,1}(y) &= x_{n+1}(y) - \varphi_{22}(y), \\
\varphi_{n+1,l}(y) &= \varphi_{n,l-1}(y) - \varphi_{l+1,l+1}(y)\varphi_{n+1,l-1}(y) \quad (2 \leq l \leq n-1), \\
\varphi_{n+1,n}(y) &= \frac{\varphi_{n,n-1}(y)}{\varphi_{n+1,n-1}(y)}, \\
\varphi_{n+m,1}(y) &= \varphi_{n+m-1,1}(y) - \varphi_{2m,s}(y), \\
\text{где } s &= \begin{cases} 2m, & \text{если } 2m \leq n, \\ 2n-2m+1, & \text{если } 2m > n, \end{cases} \\
\varphi_{n+m,l}(y) &= \varphi_{n+m-1,l}(y) - \varphi_{2m+l-1,s}(y)\varphi_{n+m,l-1}(y), \\
\text{где } s &= \begin{cases} 2m+l-1, & \text{если } 2m+l-1 \leq n, \\ 2n-2m-l+2, & \text{если } 2m+l-1 > n, \end{cases} \\
\varphi_{n+m,n-m+1}(y) &= \frac{\varphi_{n+m-1,n-m+1}(y)}{\varphi_{n+m,n-m}(y)} \\
&\quad (2 \leq m \leq n-1, 2 \leq l \leq n-m).
\end{aligned} \tag{9}$$

Исходя из равенств $x_i(y) = x_i$ ($1 \leq i \leq 2n$) индукцией по естественному лексикографическому упорядочению множества B (пара $(i, j) \in B$ предшествует паре $(i_1, j_1) \in B$, если $i < i_1$ или $i = i_1, j < j_1$) с помощью (3) и (9) показываем, что $\varphi_{ij}(y) = f_{ij}(x)$ при всех $(i, j) \in B$. В частности, $y_{2n-m+1} = \varphi_{mm}(y) = f_{mm}(x)$ ($1 \leq m \leq n$), $y_{n-m+1} = \varphi_{n+m,n-m+1}(y) = f_{n+m,n-m+1}(x)$ ($1 \leq m \leq n-1$), $y_1 = \varphi_{2n-1,1}(y) = f_{2n-1,1}(x)$. Лемма 1 доказана. Вместе с ней доказана и первая часть теоремы 2.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 2. Пусть C — подмножество кольца многочленов $k[x_1, x_2, \dots, x_{2n}]$ от переменных x_i ($1 \leq i \leq 2n$), состоящее из всех тех многочленов $h \in k[x_1, x_2, \dots, x_{2n}]$, для которых

$$h(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) \neq 0$$

при всех $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in k^{n-1} \times k^*$. Через D обозначим множество всех рациональных дробей из поля $k(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, допускающих представление в виде отношения многочленов из C . Теорема 2 утверждает, что дроби $f_{2n-1,1}$, $f_{n+m,n-m+1}$ ($1 \leq m \leq n-1$), f_{mm} ($1 \leq m \leq n$) содержатся в D . В кольце $k[x_1, x_2, \dots, x_{2n}]$ введем лексикографическую запись многочленов, соответствующую следующему упорядочению переменных: $x_{n+1} \succ x_{n+2} \succ x_{n+3} \succ$

$\dots \succ x_{2n} \succ x_n$ (запись $x_i \succ x_j$ означает, что переменная x_i выше переменной x_j); переменные x_i ($1 \leq i \leq n-1$) упорядочиваются произвольно, и считается, что они ниже x_n . Если $\alpha x_1^{u_1} x_2^{u_2} \dots x_{2n}^{u_{2n}}$ ($\alpha \in K^*$) – высший член (относительно только что введенного упорядочения переменных) некоторого полинома $h \in k[x_1, x_2, \dots, x_{2n}]$, то под степенью $\deg h$ этого полинома понимается упорядоченный набор $(u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n})$, рассматриваемый как элемент упорядоченной абелевой группы $\mathbb{Z}^n$, наделенной структурой порядка, задаваемой лексикографическим произведением n экземпляров упорядоченной абелевой группы $\mathbb{Z}$. Отношение “больше” в группе $\mathbb{Z}^n$ будем обозначать $>$. Пусть S – подмножество в $k[x_1, x_2, \dots, x_{2n}]$ такое, что $h \in S$ тогда и только тогда, когда высший член h имеет вид $\varepsilon x_n^{u_n} x_{n+1}^{u_{n+1}} \dots x_{2n}^{u_{2n}}$, где $\varepsilon = \pm 1$, и степень этого высшего члена больше степени любого другого одночлена из h . Через R обозначим множество всех рациональных дробей из поля $k(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, для которых существует представление в виде w/z , где $w, z \in S$. Под степенью рациональной дроби из поля $k(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ понимается элемент из упорядоченной абелевой группы $\mathbb{Z}^n$, равный разности между степенями ее числителя и знаменателя. Отметим следующие свойства множества R :

- 1) если $f_1, f_2 \in R$, то $f_1 f_2^{\pm 1} \in R$;
- 2) если $f_1, f_2 \in R$ и $\deg f_1 \neq \deg f_2$, то $f_1 + f_2 \in R$ и $\deg(f_1 + f_2) = \max(\deg f_1, \deg f_2)$;
- 3) $R \subseteq D$.

Положим $I = \{f_{ij} \mid (i, j) \in B\}$. Наша цель – показать, что $I \subseteq R$. Теорема 2 следует отсюда в силу свойства 3). Доказательство будем проводить индукцией по естественному лексикографическому упорядочению множества B . При этом в силу свойства 1) рассмотрение тех $f_{ij} \in I$, которые по формулам (3) представляются в виде отношения двух элементов из I , осуществляется без затруднений. Рассмотрение же тех $f_{ij} \in I$, которые по формулам (3) представлены в виде разности $f_{ij}^{(1)} - f_{ij}^{(2)}$, где $f_{ij}^{(l)}$ ($l = 1, 2$) – произведение некоторых $f_{ps} \in I$ таких, что (p, s) предшествует (i, j) , требует вычисления степеней дробей f_{ps} . Используя значения этих степеней, показывается, что степени дробей $f_{ij}^{(1)}, f_{ij}^{(2)}$ различны, после чего согласно свойству 2) можно будет найти степень дроби f_{ij} , и установить, что $f_{ij} \in R$. Для удобства разобьем доказательство на три части в соответствии с разбиением множества I на подмножества $I_1 = \{f_{ml} \mid 1 \leq m \leq n, 1 \leq l \leq m\}$, $I_2 = \{f_{n+1,l} \mid 1 \leq l \leq n\}$, $I_3 = \{f_{n+m,l} \mid 2 \leq m \leq n-1, 1 \leq l \leq n-m+1\}$. Положим $d_{ij} = \deg f_{ij}$, и пусть $d_{ij}^{(l)}$ обозначает степень дроби f_{ij} по x_l .

ЛЕММА 2. $I_1 \subseteq R$, причем если $f_{ml} \in I_1$, $l < m$, то

$$d_{ml} = \begin{cases} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-l-1}, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, -1}_l \right) & \text{при } l \text{ нечетном,} \\ \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-l-1}, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, 1}_l \right) & \text{при } l \text{ четном,} \end{cases}$$

а если $f_{mm} \in I_1$, то

$$d_{mm} = \begin{cases} \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2, -2, 2, -2, \dots, -2)}_{n-m} \right) & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2, -2, 2, -2, \dots, 2)}_{n-m} \right) & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3)

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{x_n}{x_{2n}}, & f_{21} &= x_{n-1} - x_{2n-1}f_{11}, \\ f_{22} &= \frac{x_{2n}}{f_{21}}, & f_{31} &= x_{n-2} - x_{2n-2}f_{11}, \\ f_{32} &= x_{2n-1} - f_{22}f_{31}, & f_{33} &= \frac{f_{21}}{f_{32}}. \end{aligned}$$

Вычисляя степени дробей $f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33}$ с помощью этих формул получаем, что $f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33} \in R$, причем

$$\begin{aligned} d_{11} &= \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1)}_{n-1} \right), \\ d_{21} &= \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, -1)}_{n-2} \right), \quad d_{22} = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2)}_{n-2} \right), \\ d_{31} &= \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, -1)}_{n-3} \right), \quad d_{32} = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, -1, 1)}_{n-3} \right), \quad d_{33} = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2, -2)}_{n-3} \right) \end{aligned}$$

в полном соответствии с формулами (10). Пусть $m > 3$ — целое число, $m \leq n$. Если $l = 1$, то $f_{ml} = f_{m1} = x_{n-m+1} - x_{2n-m+1}f_{11}$. Так как $x_{2n-m+1} \succ x_{n-m+1}$, то

$$\begin{aligned} d_{m1} &= \deg(x_{2n-m+1}f_{11}) = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{n-m} \right) + \left(0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n-m+1}}{0}, \dots, 0, -1 \right) \\ &= \left(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-m+1}}{1}, 0, \dots, 0, -1 \right), \end{aligned}$$

и $f_{m1} \in R$. Далее, $f_{m2} = x_{2n-m+2} - f_{22}f_{m1}$. Так как $d_{m1}^{(2n-m+1)} > 0$ и $x_{2n-m+1} \succ x_{2n-m+2}$, то $\deg x_{2n-m+2} \neq \deg(f_{22}f_{m1})$, откуда $f_{m2} \in R$, и

$$\begin{aligned} d_{m2} &= \deg(f_{22}f_{m1}) = d_{22} + d_{m1} \\ &= \left(\underbrace{(0, \dots, 0, \dots, 0, -1, 2)}_{n-m} \right) + \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1)}_{n-m} \right) \\ &= \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 1)}_{n-m} \right). \end{aligned}$$

Пусть $3 \leq l \leq m-1$. Из предположения индукции следует, что $d_{m-1,l-2}^{(n+1)} = d_{m-1,l-2}^{(n+2)} = \dots = d_{m-1,l-2}^{(2n-m+1)} = 0$ и $d_{mi}^{(2n-m+1)} > 0$ при $i < l$. Поэтому из равенства $f_{ml} = f_{m-1,l-2} - f_{il}f_{m,l-1}$ вытекает, что $\deg f_{m-1,l-2} < \deg(f_{il}f_{m,l-1})$, откуда $f_{ml} \in R$, и

$$d_{ml} = \deg(f_{il}f_{m,l-1}) = d_{il} + d_{m,l-1}$$

$$= \begin{cases} \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2, -2, 2, -2, \dots, 2)}_{n-l}, \underbrace{}_{l-1} \right) \\ \quad + \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 1, -1, 1, \dots, -1)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-l}, \underbrace{}_{l-1} \right) \\ \quad = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 1, -1, 1, \dots, 1)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-l-1}, \underbrace{}_l \right), & \text{если } l \text{ четно,} \\ \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2, -2, 2, -2, \dots, -2)}_{n-l}, \underbrace{}_{l-1} \right) \\ \quad + \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 1, -1, 1, \dots, 1)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-l}, \underbrace{}_l \right) \\ \quad = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 1, -1, 1, \dots, -1)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-l-1}, \underbrace{}_l \right), & \text{если } l \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Наконец, из равенства $f_{mm} = \frac{f_{m-1,m-2}}{f_{m,m-1}}$ следует, что $f_{mm} \in R$ и

$$d_{mm} = d_{m-1,m-2} - d_{m,m-1}$$

$$= \begin{cases} \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, -1, 1, -1, \dots, 1)}_{n-m+1}, \underbrace{}_{m-1} \right) - \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, -1, 1, -1, \dots, -1)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-1} \right) \\ \quad = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2, -2, 2, -2, \dots, 2)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-1} \right), & \text{если } m \text{ четно,} \\ \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, -1, 1, -1, \dots, -1)}_{n-m+1}, \underbrace{}_{m-1} \right) - \left(\underbrace{(0, \dots, 0, 1, -1, 1, -1, \dots, 1)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-1} \right) \\ \quad = \left(\underbrace{(0, \dots, 0, -1, 2, -2, 2, -2, \dots, -2)}_{n-m}, \underbrace{}_{m-1} \right), & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. $I_2 \subseteq R$, причем $d_{n+1,n} = \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} \right)$, $d_{n+1,n} = d_{n-1,n-1}$ и если

$1 < l < n$, то $d_{n+1,l} = d_{n,l-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем: $f_{n+1,1} = x_{n+1} - f_{22}$. Так как

$$d_{22} = \begin{cases} (-1, 2) & \text{при } n = 2, \\ (0, \dots, 0, -1, 2) & \text{при } n \geq 2, \end{cases}$$

то $\deg x_{n+1} > d_{22}$, откуда $f_{n+1,1} \in R$, и $d_{n+1,1} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}$. Пусть $2 \leq l \leq n-1$.

Тогда $f_{n+1,l} = f_{n,l-1} - f_{l+1,l+1}f_{n+1,l-1}$. Если $l < n-1$, то по предположению индукции и лемме 2

$$\begin{aligned} d_{n+1,l-1} &= d_{n,l-2} = \left(1, 0, \dots, \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \\ n-l}}, \dots\right), \\ d_{n,l-1} &= \left(1, 0, \dots, \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \\ n-l}}, \dots\right), \\ d_{l+1,l+1} &= \left(0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{\substack{\uparrow \\ n-l}}, \dots\right), \end{aligned}$$

откуда $f_{n+1,l} \in R$ и $d_{n+1,l} = d_{n,l-1}$. Если $l = n-1$, то $d_{n,l-1} = 1$, $d_{l+1,l+1}^{(n+1)} = -1$, $d_{n+1,l-1}^{(n+1)} = 1$, откуда вновь $f_{n+1,l} \in R$ и $d_{n+1,l} = d_{n,l-1}$. Наконец, $f_{n+1,n} = \frac{f_{n,n-1}}{f_{n+1,n-1}}$, откуда $f_{n+1,n} \in R$, и

$$\begin{aligned} d_{n+1,n} &= d_{n,n-1} - d_{n+1,n-1} \\ &= \begin{cases} \left(1, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, -1}_{n-1}\right) - \left(1, 0, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, 1}_{n-2}\right) \\ \quad = \left(0, -1, \underbrace{2, -2, 2, -2, \dots, -2}_{n-2}\right), & \text{если } n \text{ четно,} \\ \left(1, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, 1}_{n-1}\right) - \left(1, 0, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, -1}_{n-2}\right) \\ \quad = \left(0, -1, \underbrace{2, -2, 2, -2, \dots, 2}_{n-2}\right), & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. $d_{n+1,n} = d_{n-1,n-1}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. $I_3 \subseteq R$, причем $d_{n+m,l} = d_{n+1,l}$ ($2 \leq m \leq n-1, 2 \leq l \leq n-m$), $d_{n+m,n-m+1} = d_{n-m,n-m}$ ($2 \leq m \leq n-1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = 2$. Если $l = 1$, то

$$f_{n+m,l} = f_{n+2,1} = \begin{cases} f_{n+1,1} - f_{44}, & \text{если } 4 \leq n, \\ f_{n+1,1} - f_{4,2n-3}, & \text{если } 4 > n. \end{cases}$$

Если $n \geq 4$, то $d_{n+1,1} = (1, \dots)$, $f_{44} \in I_1$, откуда $d_{44} = (0, \dots)$. Поэтому $d_{n+1,1} > d_{44}$, $f_{n+2,1} \in R$, $d_{n+2,1} = d_{n+1,1}$. Если $n < 4$, то $n = 3$, и $d_{n+1,1} = d_{41} = (1, 0, 0)$, $d_{n+1,n-1} = d_{n-1,n-1} = d_{22} = (0, -1, 2)$, откуда $d_{n+1,1} > d_{n+1,n-1}$, $f_{n+2,1} \in R$, $d_{n+2,1} = d_{n+1,1}$.

Пусть $m = 2$, $2 \leq l \leq n - 2$. Тогда

$$f_{n+m,l} = f_{n+2,l} = \begin{cases} f_{n+1,l} - f_{l+3,l+3}f_{n+2,l-1}, & \text{если } l+3 \leq n, \\ f_{n+1,l} - f_{l+3,2n-l-2}f_{n+2,l-1}, & \text{если } l+3 > n. \end{cases}$$

Если $l+3 \leq n$, то по леммам 2, 3 и индуктивному предположению

$$\begin{aligned} d_{n+1,l} &= \left(1, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n-l+2}}{0}, \dots\right), \\ d_{l+3,l+3} &= \left(0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-l+2}}{-1}, \dots\right), \\ d_{n+2,l-1} = d_{n+1,l-2} &= \left(1, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-l+2}}{0}, \dots\right), \end{aligned}$$

откуда видно, что $d_{n+1,l} > \deg(f_{l+3,l+3}f_{n+2,l-1})$. Поэтому $f_{n+2,l} \in R$, $d_{n+2,l} = d_{n+1,l}$. Если $l+3 > n$, то $l = n-2$, $f_{n+2,l} = f_{n+2,n-2}$, $f_{n+1,l} = f_{n+1,n-2}$, $f_{l+3,2n-l-2} = f_{n+1,n}$, $f_{n+2,l-1} = f_{n+2,n-3}$. Из индуктивного предположения и лемм 2, 3 $d_{n+1,n-2} = d_{n,n-3} = (1, 0, \dots)$, $d_{n+1,n} = d_{n-1,n-1} = (0, -1, \dots)$, $d_{n+2,n-3} = d_{n+1,n-3} = d_{n,n-4} = (1, 0, \dots)$, откуда $f_{n+2,n-2} \in R$, $d_{n+2,n-2} = d_{n+1,n-2}$, т.е. вновь $f_{n+2,l} \in R$, $d_{n+2,l} = d_{n+1,l}$. Так как $f_{n+2,n-1} = \frac{f_{n+1,n-1}}{f_{n+2,n-2}}$ и по индуктивному предположению $f_{n+1,n-1}, f_{n+2,n-2} \in R$, то $f_{n+2,n-1} \in R$. Кроме того, используя индуктивное предположение, леммы 2 и 3, находим

$$\begin{aligned} d_{n+2,n-1} &= d_{n+1,n-1} - d_{n+2,n-2} = d_{n,n-2} - d_{n+1,n-2} = d_{n,n-2} - d_{n,n-3} \\ &= \begin{cases} \left(1, 0, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, 1}_{n-2}\right) - \left(1, 0, 0, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, -1}_{n-3}\right) \\ = \left(0, 0, -1, \underbrace{2, -2, 2, -2, \dots, 2}_{n-3}\right), & \text{если } n \text{ четно,} \\ \left(1, 0, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, -1}_{n-2}\right) - \left(1, 0, 0, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, 1}_{n-3}\right) \\ = \left(0, 0, -1, \underbrace{2, -2, 2, -2, \dots, -2}_{n-3}\right), & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Значит, $d_{n+2,n-1} = d_{n-2,n-2}$, и лемма 4 доказана для дробей $f_{n+2,l}$ ($1 \leq l \leq n-1$).

Пусть $2 < m \leq n-1$. Имеем:

$$f_{n+m,1} = \begin{cases} f_{n+m-1,1} - f_{2m,2m}, & \text{если } 2m \leq n, \\ f_{n+m-1,1} - f_{2m,2n-2m+1}, & \text{если } 2m > n. \end{cases}$$

По предположению индукции и лемме 3

$$d_{n+m-1,1} = d_{n+1,1} = \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}\right).$$

Если $2m \leq n$, то по лемме 2

$$d_{2m,2m} = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2m}, \underset{\substack{\uparrow \\ n-2m+1}}{-1}, \dots\right),$$

откуда $d_{n+1,1} > d_{2m,2m}$, и, значит, $f_{n+m,1} \in R$, $d_{n+m,1} = d_{n+1,1}$. Если $2m > n$, то $f_{2m,2n-2m+1} \in I_3$, и $2m < n+m$. Вновь применив индуктивное предположение и лемму 2, получим

$$d_{2m,2n-2m+1} = d_{n+(2m-n),2n-2m+1} = d_{2n-2m,2n-2m} = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2m-n}, \dots\right).$$

Так как $2m - n > 0$, то $d_{n+m-1,1} > d_{2m,2n-2m+1}$, откуда $f_{n+m,1} \in R$, $d_{n+m,1} = d_{n+m-1,1} = d_{n+1,1}$. Пусть $2 \leq l \leq n - m$. Тогда

$$f_{n+m,l} = \begin{cases} f_{n+m-1,l} - f_{2m+l-1,2m+l-1}f_{n+m,l-1}, & \text{если } 2m+l-1 \leq n, \\ f_{n+m-1,l} - f_{2m+l-1,2n-2m-l+2}f_{n+m,l-1}, & \text{если } 2m+l-1 > n. \end{cases}$$

Положим $a = d_{n+m-1,l}$, $c = d_{n+m,l-1}$. По предположению индукции, леммам 2 и 3

$$a = d_{n+1,l} = d_{n,l-1} = \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-l}, \underset{\substack{\uparrow \\ n-l+2}}{-1}, \dots\right),$$

$$c = d_{n,l-2} = \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-l+1}, \underset{\substack{\uparrow \\ n-l+3}}{-1}, \dots\right).$$

Если $2m+l-1 \leq n$, то $f_{2m+l-1,2m+l-1} \in I_1$, и по лемме 2 $b = d_{2m+l-1,2m+l-1} = \left(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-2m-l+2}}{-1}, \dots\right)$. Если $2m+l-1 = n$, то $a = (1, \dots)$, $b = (-1, \dots)$, $c = (1, \dots)$, откуда $a > b + c$, и, значит, $f_{n+m,l} \in R$, $d_{n+m,l} = d_{n+1,l}$. Если $2m+l-1 < n$, то $1 < n-2m-l+2 < n-l+2$, и

$$a = \left(1, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n-2m-l+2}}{0}, \dots\right),$$

$$b = \left(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-2m-l+2}}{-1}, \dots\right),$$

$$c = \left(1, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n-2m-l+2}}{0}, \dots\right).$$

Сравнив первые $n-2m-l+2$ координат векторов a и $b+c$, получим $a > b+c$, откуда следует $f_{n+m,l} \in R$, $d_{n+m,l} = d_{n+m-1,l} = d_{n+1,l}$. Пусть $2m+l-1 > n$. Положим $e = d_{2m+l-1, 2n-2m-l+2}$. Так как $2m+l-1-n < m$, то к e применимо индуктивное предположение, согласно которому $e = d_{2n-2m-l+1, 2n-2m-l+1}$. Применив теперь лемму 2, получим $e = \left(0, \dots, 0, \underset{2m+l-n}{\overset{\uparrow}{-1}}, \dots\right)$. Но $1 < 2m+l-n < n-l+2$. Записав

$$\begin{aligned} a &= \left(1, 0, \dots, \underset{2m+l-n}{\overset{\uparrow}{0}}, \dots\right), \\ e &= \left(0, \dots, \underset{2m+l-n}{\overset{\uparrow}{-1}}, \dots\right), \\ c &= \left(1, 0, \dots, \underset{2m+l-n}{\overset{\uparrow}{0}}, \dots\right) \end{aligned}$$

и сравнив первые $2m+l-n$ координат векторов a и $e+c$, получим $a > e+c$, откуда $f_{n+m,l} \in R$, и $d_{n+m,l} = d_{n+m-1,l} = d_{n+1,l}$. Наконец, так как $f_{n+m, n-m+1} = \frac{f_{n+m-1, n-m+1}}{f_{n+m, n-m}}$, то $f_{n+m, n-m+1} \in R$, и

$$\begin{aligned} d_{n+m, n-m+1} &= d_{n+m-1, n-m+1} - d_{n+m, n-m} \\ &= \begin{cases} \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, -1}_{n-m}\right) - \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, 1}_{n-m-1}\right) \\ \quad = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{-1, 2, -2, 2, \dots, -2}_{n-m}\right), & \text{если } n-m \text{ нечетно,} \\ \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, 1}_{n-m}\right) - \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{-1, 1, -1, 1, \dots, -1}_{n-m-1}\right) \\ \quad = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{-1, 2, -2, 2, \dots, 2}_{n-m}\right), & \text{если } n-m \text{ четно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Значит, $d_{n+m, n-m+1} = d_{n-m, n-m}$. Лемма 4 доказана.

Тем самым доказательство теоремы 2, а, значит, и теоремы 1 завершено.

§ 2. Некоторые применения

Этот параграф посвящен применениям теоремы 1 к исследованию подгруппового строения специальной линейной группы $SL_2(K)$ над бесконечным полем K характеристики $\neq 2$. Первый результат этого параграфа (теорема 3) является аналогом теоремы Диксона – утверждения хорошо известного и часто применяемого в теории конечных групп [13, теорема 2.8.4]. Далее, в теореме 4 приводится описание

групп, заключенных между группами SL_2 над различными полями. В заключение в теореме 5 описываются неприводимые подгруппы группы $\mathrm{SL}_2(K)$, содержащие группу, сопряженную в $\mathrm{GL}_2(K)$ с группой всех верхних унитреугольных матриц над полем $k \subset K$.

Прежде всего введем некоторые обозначения и примем соглашения, действующие на протяжении всего этого параграфа.

Если поле K является расширением поля k , то группа $\mathrm{SL}_2(K)$ действует в векторном K -пространстве E , полученном из векторного k -пространства E_k расширением поля скаляров k до K , т.е. $E = E_k \otimes_k K$. Действие группы $\mathrm{SL}_2(K)$ в E связывается с базисом $\{e_1, e_2\} \subseteq E_k$ пространства E . Пространство, сопряженное к E , обозначается E^* . Базис пространства E^* , сопряженный с базисом $\{e_1, e_2\}$, обозначается $\{e'_1, e'_2\}$. Трансвекция – это линейное преобразование $E \rightarrow E: x \rightarrow x + t\varphi(x)$, где $t \in E$, $\varphi \in E^*$, $\varphi(t) = 0$. Вектор t называется направлением данной трансвекции. Трансвекция g с направлением t и функционалом φ обозначается $g = g(t, \varphi)$. Если $\alpha \in K$ и $g = g(t, \varphi)$, то через g_α обозначается трансвекция с направлением t и функционалом $\alpha\varphi$. Если P – некоторое подполе поля K , и $g \in \mathrm{SL}_2(K)$ – трансвекция, то через $g(P)$ обозначается подгруппа группы $\mathrm{SL}_2(K)$, состоящая из всех преобразований g_α , где α пробегает P . Эта группа, изоморфная аддитивной группе поля P , именуется корневой P -группой.

Установим теперь два вспомогательных результата, которые будут существенным образом использованы в доказательстве теорем.

ЛЕММА 5. Пусть K – поле характеристики $\neq 2$, L, k – его подполя. Предположим, что $g = g(s, \psi) \in \mathrm{SL}_2(K)$ – трансвекция, для которой при всякой трансвекции $h(t, \varphi) \in \mathrm{SL}_2(k)$ выполняется включение $\varphi(s)\psi(t) \in L$. Тогда $g \in \mathrm{SL}_2(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $s = e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2$, $\psi = \mu_1e'_1 + \mu_2e'_2$ ($\lambda_i, \mu_i \in K$, $i = 1, 2$). Взяв в качестве $h(t, \varphi)$ трансвекции $h(e_1, e'_1)$, $h(e_2, e'_1)$, получим $\lambda_2\mu_1 \in L$, $\lambda_1\mu_2 \in L$. Положив затем $h(t, \varphi) = h(e_1 + e_2, e'_1 - e'_2)$, и учитывая, что $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = 0$, найдем $2\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 \in L$, откуда $2\lambda_1\mu_1 \in L$. Так как $\mathrm{char} k \neq 2$, то $\lambda_1\mu_1 \in L$, и, значит, $\lambda_2\mu_2 \in L$. Но g в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 \\ \lambda_2\mu_1 & 1 + \lambda_2\mu_2 \end{pmatrix},$$

откуда $g \in \mathrm{SL}_2(L)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть k – бесконечное поле характеристики $\neq 2$, поле K – алгебраическое расширение поля k . Предположим, что $g = g(s, \psi)$, $h = h(t, \varphi)$ – трансвекции из $\mathrm{SL}_2(K)$ такие, что группа $C = \langle g, h \rangle$ неприводима. Тогда группа $D = \langle g(k), h(k) \rangle$ сопряжена в группе $\mathrm{GL}_2(K)$ с группой $\mathrm{SL}_2(k(\beta))$, где $\beta = \varphi(s)\psi(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неприводимости группы C векторы $t, s \in E$ линейно независимы и $\beta \neq 0$. Следовательно, $\{s\psi(t), t\}$ – базис пространства E . В этом базисе корневые k -группы $g(k)$, $h(k)$ реализуются в виде матричных групп $t_{12}(k)$, $t_{21}(k\beta)$, соответственно. Так как $\beta \in K$, то элемент β алгебраичен над k , и по теореме 1 группа D имеет в базисе $\{s\psi(t), t\}$ матричную реализацию $\mathrm{SL}_2(k(\beta))$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если k – бесконечное поле характеристики $\neq 2$, α – элемент, алгебраический над k , то группа G , порожденная матрицами $t_{12}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t_{21}(r\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\alpha & 1 \end{pmatrix}$, где r пробегает k , совпадает с группой $\Gamma = \text{SL}_2(K)$, где $K = k(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$t_{12}(1)t_{21}(r\alpha)t_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 1+r\alpha & -r\alpha \\ r\alpha & 1-r\alpha \end{pmatrix},$$

то G порождается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1+r\alpha & -r\alpha \\ r\alpha & 1-r\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где r пробегает поле k . Положим $y = \begin{pmatrix} -\alpha^{-1} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(K)$. Тогда yGy^{-1} порождается матрицами $t_{12}(r)$, $t_{21}(-r\alpha^2)$, $\begin{pmatrix} 2 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = x$, где r пробегает k , и по теореме 1 $yGy^{-1} = \langle \text{SL}_2(P), x \rangle$, где $P = k(\alpha^2)$. Понятно, что $[K : P] \leq 2$, и если $K = P$, то $yGy^{-1} = \Gamma$, откуда $G = \Gamma$. Пусть $[K : P] = 2$. Выберем в группе $H = \text{SL}_2(P)$ элемент $\tau = \tau(e_1, e'_2)$, и положим $g = x\tau x^{-1}$. Тогда $g = g(s, \psi)$, где $s = 2e_1 + e_2\alpha$, $\psi = -\alpha e'_1 + 2e'_2$, откуда $g \in \Gamma \setminus H$. Поэтому по лемме 5 группа H содержит трансвекцию $h(t, \varphi)$ такую, что $\beta = \varphi(s)\psi(t) \in K \setminus P$. Так как $\tau(P) \leq G$, то $g(P) \leq G$. Кроме того, $h(P) \leq G$, и, следовательно, группа G содержит подгруппу $D = \langle g(P), h(P) \rangle$, которая по лемме 6 сопряжена в $\text{GL}_2(K)$ с группой $\text{SL}_2(P(\beta)) = \Gamma$. Поэтому $D = \Gamma$, откуда $G = \Gamma$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть k – бесконечное поле характеристики $\neq 2$, поле K – алгебраическое расширение поля k . Если $H = \text{SL}_2(k) \leq G \leq \text{SL}_2(K)$, то $G \geq \text{SL}_2(L)$, где L – поле такое, что $k \subseteq L \subseteq K$. При этом, если G порождается трансвекциями, то $G = \text{SL}_2(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – множество всех трансвекций, содержащихся в H , и X – группа, порожденная множеством $\bigcup_{x \in G} xMx^{-1}$. Тогда $X \trianglelefteq G$ и достаточно показать, что $X = \text{SL}_2(L)$, где L – поле, заключенное между k и K . Таким образом, можно предполагать, что G порождается трансвекциями. Покажем, что в этом случае $G = \text{SL}_2(L)$ для подходящего поля L такого, что $k \subseteq L \subseteq K$. Будем считать, что H – максимальная группа типа SL_2 , содержащаяся в G . Пусть $g = g(s, \psi) \in G$ – трансвекция. Векторное k -пространство E_k содержит вектор t , линейно независимый над K с s , и пусть $h \in H$ – трансвекция с направлением t . Положим $h = h(t, \varphi)$. В силу выбора h справедливо неравенство $\beta = \varphi(s)\psi(t) \neq 0$. В базисе $\{\psi(t)s, t\}$ K -пространства E трансвекция g реализуется в виде матрицы $t_{12}(1)$, а группа $h(k) \leq H$ – в виде матричной группы $t_{21}(k\beta)$. По теореме 3 группа $\langle g, h(k) \rangle \leq G$ реализуется в этом базисе в виде $\text{SL}_2(k(\beta))$, и, значит, $h(k(\beta)) \leq G$. Учитывая транзитивность действия группы H на множестве всех прямых из E_k ,

получаем, что $SL_2(k(\beta)) \leq G$ (реализация в стандартном базисе $\{e_1, e_2\}$), откуда $\beta \in k$ в силу максимальности H . Следовательно, для любой трансвенкции $h(t, \varphi) \in H$ имеет место включение $\varphi(s)\psi(t) \in k$, откуда согласно лемме 5 $g \in H$. Так как g — произвольная трансвенкция из G и G порождается трансвенкциями, то $G = H$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть k — бесконечное поле характеристики $\neq 2$, поле K — алгебраическое расширение поля k . Всякая неприводимая подгруппа G группы $SL_2(K)$, содержащая корневую k -группу, сопряжена в группе $GL_2(K)$ с группой, содержащей в качестве нормального делителя группу $SL_2(L)$, где L — поле такое, что $k \subseteq L \subseteq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in G$ — трансвенкция такая, что $g(k) \leq G$. Так как G неприводима, то найдется элемент $g_1 \in G$, некоммутирующий с g . Тогда $g_2 = gg_1g_1^{-1}$ — трансвенкция, некоммутирующая с g , причем $g_2(k) \leq G$. Так как группа $\langle g, g_2 \rangle$ неприводима, то по лемме 6 группа $\langle g(k), g_2(k) \rangle$ сопряжена в $GL_2(K)$ с группой $SL_2(k_1)$, где k_1 — некоторое поле, заключенное между k и K . Теорема 5 следует тогда из теоремы 4.

Список литературы

1. Башкиров Е. Л. О линейных группах, содержащих специальную унитарную группу ненулевого индекса. Минск, 1985, Деп. в ВИНТИ 7.08.85, № 5897-85 Деп.
2. Башкиров Е. Л. О линейных группах, содержащих симплектическую группу. Минск, 1986. Деп. в ВИНТИ № 2616 от 11.04.86.
3. Башкиров Е. Л. О некоторых подгруппах специальной линейной группы над полем // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1991. № 1. С. 31–35.
4. Башкиров Е. Л. О линейных группах, содержащих подгруппу корневого типа // XIX Всесоюз. алгебр. конф. Тез. докл. Львов, 1987.
5. Башкиров Е. Л. О подгруппах группы $SL_2(K)$ над несовершенным полем характеристики 2. Минск, 1986. Деп. в ВИНТИ, № 3248 от 6.05.86.
6. Vavilov N. A. Towards an infinite analogue of quadratic pairs // Международная конф. по алгебре памяти А. И. Ширшова. Тезисы докладов по теории групп.
7. Борович З. И. О подгруппах линейных групп богатых трансвенкциями // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1978. Т. 75. С. 22–31.
8. Нусжин Я. Н. О группах, заключенных между группами лиева типа над различными полями // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 5. С. 526–541.
9. Романовский Н. С. Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 3. С. 335–345.
10. Шкуратовский А. И. О подгруппах симплектической группы над алгебраически замкнутым полем // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 4. С. 466–473.
11. King O. On subgroups of the special linear group containing the special unitary group // Geometrical Dedicata. V. 19. P. 297–310.
12. Башкиров Е. Л. О подгруппах группы $SL_2(K)$ над бесконечным полем K . Минск, 1984. Деп. в ВИНТИ 19.11.84, № 7369.
13. Gorenstein D. Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.

Минский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
14.04.1992