Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, О пространствах полиномиальных узлов, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 2, 37–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:46:47

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если d нечетно, то пространство отображений (1) с кратными или особыми точками замкнуто и, следовательно, совпадает с Σ . Если d четно, то Σ есть объединение такого пространства и пространства всех отображений (1) с $a_1^1 = \dots = a_1^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ пространство отображений (1) с $a_1^1 = \dots = a_1^n = \alpha$ — это предельное положение пространств отображений (1), склеивающих точки t и $\alpha - t \in \mathbb{R}^1$, $t \rightarrow \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $n \geq 5$ или $n = d = 4$, то пространство $\mathcal{K}_d^n \setminus \Sigma$ односвязно. (В частности, гомотопическая часть теоремы 1 вытекает из гомологической в силу теоремы Уайтхеда.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Σ есть полуалгебраическое множество коразмерности $n-2$, поэтому наше предложение верно при $n \geq 5$, а в случае $n = 4$ группа $\pi_1(\mathcal{K}_d^n \setminus \Sigma)$ порождена несколькими простыми петлями, охватывающими множество Σ вблизи его неособых точек. Более того, как мы увидим в §4, если $d \geq 4$, то Σ обладает разрешением особенностей $F_1\sigma \rightarrow \Sigma$, где $F_1\sigma$ — связное гладкое многообразие с непустой границей, и коразмерность в нем полного прообраза множества особых точек Σ равна $n-2$. Следовательно, любая простая петля в $\mathcal{K}_d^n \setminus \Sigma$, охватывающая Σ вблизи неособой точки $\xi \in \Sigma$, может быть отцеплена от Σ при помощи деформации над путем, соединяющим ξ с $\partial\Sigma$ в неособой части Σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого четного d

а) пространство $\mathcal{K}_d^3 \setminus \Sigma$ является произведением некоторого топологического пространства на окружность;

б) для любого $n \geq 3$, в группе $H^{n-2}(\mathcal{K}_d^n \setminus \Sigma)$ имеется по меньшей мере одна свободная образующая: индекс зацепления с пространством отображений (1) с $a_1^1 = \dots = a_1^n$;

с) этот индекс равен индексу зацепления с (подходящим образом ориентированным) множеством отображений, имеющих особые точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа S^1 вращений $\mathbb{R}^3$ вокруг оси $(1, 1, 1)$ свободно действует на пространстве отображений (1), коэффициенты a_1^1, a_1^2, a_1^3 которых не все одинаковы, и любая орбита этого действия содержит единственное отображение (1) с $a_1^1 = a_1^2$ и $a_1^1 + a_1^2 - 2a_1^3 > 0$. Это доказывает утверждение а). Индексы зацепления всех этих орбит с множеством отображений с $a_1^1 = a_1^2 = a_1^3$ равны 1. (При $d = 4$ тождественное вложение любой из этих орбит в $\mathcal{K}_d^3 \setminus \Sigma$ индуцирует гомологическую эквивалентность, обещанную в теореме 1.)

Для произвольного n индекс зацепления, указанный в утверждении б), нетривиален, поскольку орбита отображения (1) с $x_1(t) \equiv \dots \equiv x_{n-1}(t) \equiv t^d$, $x_n(t) \equiv t^d + t^{d-1} + t$, при аналогичном действии группы $SO(n-1)$ вращений, сохраняющих ось $(1, \dots, 1)$, диффеоморфна S^{n-2} , и наш индекс зацепления равен на ней ± 1 . Утверждение с) будет доказано в п. 4.1.

Наш метод вычисления гомологий в принципе может быть применен к когомологиям пространств полиномиальных узлов произвольной степени d . При $n = 3$ и $d \rightarrow \infty$ эти когомологии стабилизируются к группам когомологий пространства узлов, включающим пространство всех инвариантов узлов. Коциклы (в частности инварианты), которые стабилизируются хорошо, были введены в [2], [3]. Здесь

мы начинаем регулярное исследование произвольных (нестабильных) коциклов и процесса их стабилизации.

§ 2. Конические разрешения дискриминанта

Как и в предыдущих работах [2], [3], мы используем идею из [4]: мы рассматриваем группу *замкнутых гомологий* дискриминанта

$$\overline{H}_*(\Sigma), \quad (2)$$

т.е. группу гомологий одноточечной компактификации Σ , приведенную по модулю добавленной точки. Группа когомологий $\mathcal{K}_d^n \setminus \Sigma$ двойственна по Александру этой группе.

Для вычисления группы (2) мы строим *конические разрешения* дискриминантных многообразий (ранее использовавшиеся в [5]), которые являются непрерывным аналогом *симплициальных разрешений*, активно используемых в алгебраической геометрии, см. также [3], [6].

2.1. Первичное коническое разрешение. В нашей ситуации простейшие конические разрешения строятся следующим образом. Обозначим через P_d пространство полиномов вида

$$t^d + a_1 t^{d-1} + \dots + a_{d-1} t, \quad (3)$$

так что $\mathcal{K}_d^n \simeq (P_d)^n$. Рассмотрим несвязное объединение всех грассмановых многообразий $G_i(P_d)$ i -мерных *аффинных* подпространств в P_d , $i = 0, \dots, d-2$. Искомое коническое разрешение является подмножеством прямого произведения пространства $\mathcal{K}_d^n$ и джойна этих грассманианов

$$G_0(P_d) * G_1(P_d) * \dots * G_{d-2}(P_d). \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Элементарное условие* на полиномы $f \in P_d$ — это условие одного из следующих трех типов:

- а) для некоторой отмеченной пары точек $t \neq s \in \mathbb{R}^1$, $f(t) = f(s)$;
- б) для некоторой отмеченной точки t , $f'(t) = 0$;
- с) (только если d четно) коэффициент a_1 полинома f равен некоторому отмеченному числу α .

Пространство всех элементарных условий обладает естественной топологией: при нечетных d , оно гомеоморфно замкнутой полуплоскости

$$\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq s\}, \quad (5)$$

где диагональ $\{t = s\}$ состоит из условий типа б). Для четных d это пространство гомеоморфно бесконечной полосе $\mathbb{R}^1 \times [0, 1]$ и получается из описанной выше полуплоскости добавлением прямой “на бесконечности”: точка $\{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, этой прямой есть общая предельная точка всех некомпактных кривых в (5), стремящихся к бесконечности таким образом, что значения функции $t + s$ на них стремятся

к α , когда t стремится к $-\infty$, а s к $+\infty$. Эта прямая называется прямой *исключительных условий*.

В обоих случаях мы обозначаем это пространство через $\Psi(d)$.

Если $d > 2$, то любое элементарное условие определяет точку многообразия $G_{d-2}(P_d)$, а именно пространство всех полиномов, удовлетворяющих этому условию. Любая точка в $G_{d-2}(P_d)$ соответствует не более чем одному элементарному условию; описанная выше топология в пространстве $\Psi(d)$ — это просто топология, индуцированная при этом соответствии из стандартной топологии в $G_{d-2}(P_d)$.

Любой набор T элементарных условий определяет аффинное подпространство $L(T)$ в P_d , состоящее из полиномов, удовлетворяющих всем этим условиям, а, следовательно, точку в некотором $G_i(P_d)$.

Обозначим через $C(d, i)$ множество всех i -мерных аффинных подпространств вида $L(T)$ в P_d , а через $\overline{C}(d, i)$ его замыкание в $G_i(P_d)$.

Джойн (4) это, грубо говоря, снабженное естественной топологией объединение всех симплексов, вершины которых принадлежат множествам $G_i(P_d)$ с различными i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Симплекс (произвольной размерности) этого джойна называется *когерентным*, если все его вершины суть точки подмножеств $\overline{C}(d, i) \subset G_i(P_d)$ с различными i , и все плоскости в P_d , соответствующие этим вершинам, инцидентны друг другу.

Обозначим через $\Lambda(d)$ объединение всех непустых когерентных симплексов в джойне (4).

Любому из симплексов Δ , составляющих $\Lambda(d)$, соответствует аффинная плоскость $L(\Delta) \subset P_d$ (а именно та из вершин симплекса Δ , которая лежит в $G_i(P_d)$ с наименьшим значением i), а, следовательно, также и некоторая плоскость $\mathcal{L}(\Delta)$ в $\mathcal{K}_d^n$: множество отображений вида (1), все n компонент которых принадлежат $L(\Delta)$.

Коническое разрешение дискриминанта, $R\Sigma$, определяется как подмножество в $\Lambda(d) \times \mathcal{K}_d^n$, состоящее из пар вида (внутренняя точка некоторого когерентного симплекса Δ , точка соответствующей ей плоскости $\mathcal{L}(\Delta) \subset \mathcal{K}_d^n$).

Определим отображение $\pi: R\Sigma \rightarrow \Sigma$ как ограничение на $R\Sigma$ очевидной проекции $\Lambda(d) \times \mathcal{K}_d^n \rightarrow \mathcal{K}_d^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого d отображение π собственно и сюръективно. Оно определяет гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций пространств $R\Sigma$ и Σ . $R\Sigma$ гомеоморфно полуалгебраическому множеству таким образом, что π становится кусочно-алгебраическим отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно, а последнее вытекает из построения, если мы реализуем джойн (4) как объединение симплексов, натянутых на точки грассманианов $G_i(P_d)$, вложенных алгебраически и в общем положении в евклидово пространство очень большой размерности. Второе утверждение вытекает теперь из того, что прообраз любой точки $\varphi \in \Sigma$ есть стягиваемый компактный CW -комплекс, а именно, объединение всех когерентных симплексов Δ , общая главная вершина $L(\Delta)$ которых есть минимальная аффинная плоскость в P_d ,

принадлежащая некоторому $\overline{C}(d, i)$ и содержащая одновременно все n компонент отображения φ .

2.2. Приведенное коническое разрешение. Как правило, построенное выше разрешение не является самым удобным и его можно несколько упростить ради сокращения вычислений.

ПРИМЕР. Типичная плоскость $L(T)$ коразмерности 2 в P_d , $d \geq 4$, выделяется двумя различными элементарными условиями $x, y \in \Psi(d)$ типа а) из определения 1. Такая точка $L(T) \in G_{d-3}(P_d)$ соединена когерентными отрезками с ровно двумя плоскостями $L(x), L(y) \in G_{d-2}(P_d)$. Однако при x стремящемся к y предельное значение $L(x, y)$ соединено с единственной точкой $L(y) \in G_{d-2}(P_d)$; это предельное значение принадлежит $\overline{C}(d, d-3)$, но не $C(d, d-3)$. (Такие предельные значения при фиксированном y пробегает окружность и зависят от угла атаки x на y ; эти предельные плоскости в P_d закрывают плоскость $L(y)$ и определяют σ -процесс в ней с центром в пространстве полиномов с нулевыми производными в обеих точках, составляющих пару y .)

В общем случае, для любой плоскости $L \in \overline{C}(d, i)$ обозначим через $\overline{L}$ минимальную плоскость вида $L(T)$, содержащую L : по определению, это точка множества $C(d, j)$ с некоторым $j \geq i$. Обратно, любой точке $L' \in C(d, j)$ соответствует подкомплекс в $\Lambda(d)$, состоящий из всех точек $L \in \overline{C}(d, i)$, $i \leq j$, таких что $L' = \overline{L}$, и из всех когерентных симплексов, натянутых на такие точки с разными i . Очевидно, что этот подкомплекс компактен и стягиваем.

Редуцирующее отображение $\text{red}: \Lambda(d) \rightarrow \tilde{\Lambda}(d)$ определяется следующим образом: для любого i и любого $L \in \overline{C}(d, i)$ мы отображаем точку L в $\overline{L}$ и продолжаем это отображение по линейности на все когерентные симплексы; образ когерентного симплекса под действием этого отображения, очевидно, вновь когерентен. Затем мы отождествляем между собой все точки в $\Lambda(d)$, отображаемые этим продолженным отображением в одну и ту же точку. Пространство $\tilde{\Lambda}(d)$ определяется как факторпространство $\Lambda(d)$ относительно этого отождествления.

Это отображение очевидным образом определяет отображение $\Lambda(d) \times \mathcal{K}_d^n \rightarrow \tilde{\Lambda}(d) \times \mathcal{K}_d^n$, а, следовательно, и отображение разрешенного дискриминанта $R\Sigma$ на некоторый подкомплекс $\tilde{R}\Sigma \subset \tilde{\Lambda}(d) \times \mathcal{K}_d^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Продолженное отображение отождествления*

$$\text{Red}: R\Sigma \rightarrow \tilde{R}\Sigma \quad (6)$$

задает гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций пространств $R\Sigma$ и $\tilde{R}\Sigma$ и факторизует отображение $\pi: R\Sigma \rightarrow \Sigma$ (т.е. существует собственное отображение $\tilde{\pi}: \tilde{R}\Sigma \rightarrow \Sigma$ такое, что $\pi = \tilde{\pi} \circ \text{Red}$).

Доказательство следует непосредственно из построения.

2.3. Фильтрации и спектральные последовательности. Пространство $\Lambda(d)$ обладает естественной возрастающей фильтрацией. Действительно, фильтрация любой внутренней точки симплекса $\Delta \subset \Lambda(d)$ равна коразмерности $d-1-i$ главной плоскости $L(\Delta) \in \overline{C}(d, i)$ этого симплекса. Следовательно, индуцируется также фильтрация на пространстве $\tilde{\Lambda}(d)$: фильтрация класса эквивалентности

$x \in \tilde{\Lambda}(d)$ равняется наименьшему значению фильтраций точек в $\Lambda(d)$, составляющих x . Очевидные проекции $R\Sigma \rightarrow \Lambda(d)$, $\tilde{R}\Sigma \rightarrow \tilde{\Lambda}(d)$ индуцируют фильтрации также и на пространствах $R\Sigma$ и $\tilde{R}\Sigma$. По построению, член $F_i \setminus F_{i-1}$ этой фильтрации на $R\Sigma$ (соответственно, на $\tilde{R}\Sigma$) является пространством $n(d-1-i)$ -мерного аффинного расслоения над аналогичным членом фильтрации на $\Lambda(d)$ (соответственно, на $\tilde{\Lambda}(d)$).

Эта фильтрация определяет спектральную последовательность, сходящуюся к группе (2): ее член $E_{p,q}^1$ изоморфен $\bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1})$. По ряду причин (см., например, [3]) удобно переименовать этот член в $E_1^{-p, n(d-1)-1-q}$ так, что спектральная последовательность становится когомологической; эта перевернутая спектральная последовательность сходится в точности к когомологиям пространства $\mathcal{K}_d^n \setminus \Sigma$.

§3. Тривиальный пример

Хотя топология пространства $\mathcal{K}_3^n \setminus \Sigma$ ясна, сейчас мы вычислим его когомологии, чтобы продемонстрировать наш общий метод.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Открытый конус* над топологическим пространством X — это обычный конус CX с выброшенной базой X .

Член F_1 естественной фильтрации на $\tilde{\Lambda}(3)$ (и на $\Lambda(3)$) — это пространство $C(3, 1) \equiv \Psi(3)$, а аналогичный член фильтрации на $\tilde{R}\Sigma$ является пространством n -мерного аффинного расслоения над $\Psi(3)$. (Именно, любой элемент $x \in \Psi(3)$ определяет (одномерное) семейство полиномов в P_3 ; слой над x обещанного расслоения является прямой суммой n копий этого семейства.) В частности, $E_1^{-1,*} \equiv 0$.

Подпространства $L(T)$ коразмерности 2 в P_3 — это просто точки, поэтому для того, чтобы вычислить член $E_1^{-2,*}$, мы рассмотрим все полиномы (3) степени $d = 3$ и для любого такого полинома f возьмем конус, база которого есть пространство всех аффинных прямых $L(x) \in C(3, 1) \equiv \Psi(3)$, содержащих f ; член $F_2 \setminus F_1$ пространства $R\Sigma$ замещается всеми такими (открытыми) конусами (основания их лежат в члене F_1). Для вычисления его гомологий нам потребуется следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Кривая отношений* $r(f)$, определяемая полиномом $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, — это множество всех пар $(t, s) \in \Psi(d)$ таких, что $f(t) = f(s)$ (если $t \neq s$) или $f'(t) = 0$ (если $t = s$); если d четно, то эта кривая содержит дополнительно точку исключительной прямой в $\Psi(d)$, равную коэффициенту a_1 полинома f .

ЛЕММА 1. *Если $f \in P_d$, d нечетно, то кривая $r(f)$ лежит в “конечной” области в $\Psi(d)$. Если d четно, то ровно одна ветвь $r(f)$ уходит на бесконечность, и прямая $\{t + s = a_1\}$ является ее асимптотой.*

Полиномы $f_1, \dots, f_k$ принадлежат подпространству $L(T)$ (см. п. 2.1) тогда и только тогда, когда множество $r(f_1) \cap \dots \cap r(f_k)$ содержит T .

Кривая отношений кубического полинома $f = t^3 + \alpha t^2 + \beta t$ задается уравнением $(t^2 + ts + s^2) + \alpha(t + s) + \beta = 0$, следовательно, либо пуста (если f' всюду положительно), либо состоит из единственной точки (если f' имеет двойной корень), либо является половиной эллипса, ортогональной к границе полуплоскости $\Psi(3)$

в своих двух концевых точках (которые суть такие диагональные точки $\{t, t\}$, что t является корнем f').

Полиномы с $f' > 0$ (множество их выделяется в P_3 неравенством $\alpha^2 < 3\beta$), очевидно, не принадлежат ни одному семейству $L(x)$ и соответствующий конус в F_2 пуст.

Пусть f — произвольный полином с двумя критическими точками. Тогда подмножество в $F_2 \setminus F_1$, соответствующее f , есть открытый конус над полуэллипсом ($\sim$ отрезком) $r(f)$: база этого конуса принадлежит F_1 . Следовательно, часть $F_2 \setminus F_1$, замеченная конусами, соответствующими таким f , является расслоением над 2-клеткой $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha^2 > 3\beta\}$ со слоем, гомеоморфным треугольнику, из которого выброшена одна замкнутая сторона. (Замкнутые) гомологии этой части тривиальны.

Наконец, для граничных значений f (т.е. $\alpha^2 = 3\beta$) сегмент $r(f)$ в основании таких открытых конусов стягивается в точку, а, следовательно, конус, соответствующий такому f в члене $F_2 \setminus F_1$ естественной фильтрации $R\Sigma$, есть полуинтервал; при переходе к $\tilde{R}\Sigma$ эти интервалы исчезают и дают тривиальный вклад в гомологии дискриминанта. Итак, столбец $E_1^{-2,*}$ также исчезает и вся группа $\bar{H}_*(\Sigma)$ тривиальна.

§ 4. Пространство узлов четвертой степени

4.1. Столбец $E_1^{-1,*}$. Для любого d член F_1 стандартной фильтрации $\tilde{R}\Sigma$ является пространством $n(d-2)$ -мерного аффинного расслоения над $\Psi(d)$, следовательно, при четных d группа $E_1^{-1,q}$ свободная циклическая, если $q = n-1$, и тривиальна для всех других q . Образующая группы $E_1^{-1,n-1}$ может быть реализована как фундаментальный класс (нормализованного) множества отображений (1) с особыми точками или (гомологичного ему) множества отображений с $a_1^1 = \dots = a_1^n$.

Это дает также доказательство утверждения с) предложения 3.

4.2. Столбец $E_1^{-2,*}$. Основной результат этого пункта — следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. $E_1^{-2,*} \equiv 0$.

В соответствии с общим алгоритмом, мы должны рассмотреть все аффинные прямые в P_4 и для каждой из них взять открытый конус над множеством всех элементарных условий $x \in \Psi(4)$, которым удовлетворяют все полиномы этой прямой. Член $F_2 \setminus F_1$ пространства $R\Sigma$ является пространством n -мерного аффинного расслоения над объединением всех таких конусов.

ЛЕММА 2. Число элементарных условий, удовлетворяемых всеми полиномами из некоторой аффинной прямой в P_d , может равняться $0, 1, \dots, (d-1)(d-2)/2$ или ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем каноническое представление этих прямых. Прямая задается выбором любой ее точки f и любого направляющего вектора g , т.е. разности любых двух различных точек. Это направление g является полиномом, степень которого строго меньше d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Параполиномов (f, g) , представляющая прямую в P_d , является *канонической*, если старший коэффициент в g равен 1, а коэффициент при мономе $t^{\deg g}$ в f равен 0.

Очевидно, любая аффинная прямая в P_d единственным образом задается канонической парой полиномов (f, g) . Множество элементарных условий, удовлетворяемых всеми полиномами такой прямой, есть не что иное, как множество $r(f) \cap r(g)$.

Кривая отношений полинома степени d есть плоская кривая степени $d - 1$, поэтому лемма 2 вытекает из теоремы Безу и из того, что кривые отношений инвариантны относительно отражения $(t, s) \rightarrow (s, t)$ и нас интересуют только точки с $t \leq s$.

В частности, при $d = 4$ мощность множества $r(f) \cap r(g)$ может равняться 0, 1, 2, 3 или ∞ . Очевидно, если это число бесконечно, то кривая $r(f)$ приводима.

ЛЕММА 3. Для полинома f степени 4 кривая $r(f)$ приводима только если f симметричен относительно некоторой точки $t_0 \in \mathbb{R}^1$, т.е. $f = (t - t_0)^4 + \lambda(t - t_0)^2 + c$ с некоторым λ и $c = -\lambda t_0^2$. В этом случае $r(t)$ состоит из отрезка $\{(t, s) \mid t + s = 2t_0\}$ и половины круга (возможно мнимого) $(t - t_0)^2 + (s - t_0)^2 + \lambda = 0$.

Очевидно, такой полукруг не может совпадать с кривой отношений полинома степени ≤ 3 , следовательно, пара (f, g) удовлетворяет бесконечному числу элементарных условий, только если $\deg g = 2$ и центры симметрии g и f в $\mathbb{R}^1$ совпадают.

Если прямая $(f, g) \subset P_4$ удовлетворяет 1 элементарному условию или не удовлетворяет ни одному, то над ней нет точек в члене $F_2 \setminus F_1$ множества $\tilde{R}\Sigma$ (во втором случае даже и в аналогичном члене множества $R\Sigma$); если она удовлетворяет 2 (соответственно, 3) условиям, то соответствующее множество в $F_2 \setminus F_1$ — открытый интервал (соответственно, звезда из трех лучей без концов).

4.2.1. Подправленное коническое разрешение. Сейчас мы слегка подправим конструкцию конического разрешения множества $\Sigma \subset P_4$, заменяя его (и каждый член $F_i \setminus F_{i-1}$ его естественной фильтрации) гомологически эквивалентным пространством. Например, трехконечные звезды без конечных точек, соответствующие в канонической конструкции пространства $\Lambda(4)$ любой прямой в P_4 , удовлетворяющей ровно трем условиям, будут заменены треугольниками без вершин.

ЛЕММА 4. Для любой пары различных элементарных условий в $\Psi(4)$, не более одного из которых является исключительным, множество полиномов в P_4 , удовлетворяющих этим двум условиям, является аффинной прямой. Все аффинные прямые в P_4 , точки которых удовлетворяют одновременно не менее, чем двум элементарным условиям, могут быть заданы таким образом.

Обозначим через $\Psi^{[2]}(4)$ пространство неупорядоченных пар различных элементарных условий, по крайней мере одно из которых — неисключительное. Тогда мы получаем непрерывное отображение

$$\nu : \Psi^{[2]}(4) \rightarrow \overline{C}(4, 1), \quad (7)$$

отображающее пару условий (x, y) в семейство всех удовлетворяющих им полиномов. Пусть $\overline{\Psi}^{[2]}(4)$ — пополнение $\Psi^{[2]}(4)$, индуцированное этим отображением из пополнения $\overline{C}(4, 1)$ пространства $C(4, 1)$ (т.е. $\overline{\Psi}^{[2]}(4)$ есть объединение $\Psi^{[2]}(4)$ и некоторого множества $\partial\Psi^{[2]}(4)$, канонически гомеоморфного $\overline{C}(4, 1) \setminus C(4, 1)$, топологизированное таким образом, что последовательность $\{x_i\} \in \Psi^{[2]}(4)$ сходится к точке $y \in \partial\Psi^{[2]}(4)$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\nu(x_i)\} \in C(4, 1)$ сходится к точке множества $\overline{C}(4, 1) \setminus C(4, 1)$, соответствующей y в силу канонического гомеоморфизма). Очевидное продолженное отображение $\overline{\Psi}^{[2]}(4) \rightarrow \overline{C}(4, 1)$ вновь будет обозначено через ν . Теперь рассмотрим джойн

$$\overline{C}(4, 0) * \overline{C}(4, 1) * \overline{\Psi}^{[2]}(4) * \overline{C}(4, 2). \quad (8)$$

Любой точке множества $\overline{C}(4, 0)$, $\overline{C}(4, 1)$, $\overline{\Psi}^{[2]}(4)$ или $\overline{C}(4, 2)$ соответствует аффинное подпространство в P_4 : для пространств $\overline{C}(4, i)$ это соответствие тавтологично, а точке $x \in \overline{\Psi}^{[2]}(4)$ соответствует прямая $\nu(x)$. Симплекс произвольной размерности в джойне (8) называется *когерентным*, если все плоскости в P_4 , соответствующие его вершинам, инцидентны друг другу (в частности, если среди вершин этого симплекса есть точки как $\overline{C}(4, 1)$, так и $\overline{\Psi}^{[2]}(4)$, то соответствующие прямые должны совпадать).

Последующее построение конических разрешений Σ , основанное на объединении когерентных симплексов в (8), повторяет конструкции из п.п. 2.1, 2.2; пространства этих разрешений обозначаются, соответственно, через $\rho\Sigma$ и $\tilde{\rho}\Sigma$, объединение когерентных симплексов через $\lambda(4)$, а его естественное факторпространство (ср. п. 2.2) через $\tilde{\lambda}(4)$.

Джойн (8) (а следовательно и его подпространство $\lambda(4)$) обладает естественной возрастающей фильтрацией: F_1 состоит из точек множества $C(4, 2)$, $F_{1.5}$ состоит из точек множеств $C(4, 2)$ и $\overline{\Psi}^{[2]}(4)$ и соединяющих их отрезков; F_2 состоит из точек $\overline{C}(4, 1)$, $\overline{\Psi}^{[2]}(4)$ и $C(4, 2)$ и соединяющих их отрезков и треугольников; наконец, F_3 это весь джойн (8). Как и в п. 2.3, эта фильтрация порождает фильтрации на $\tilde{\lambda}(4)$, $\rho\Sigma$ и $\tilde{\rho}\Sigma$.

Имеются естественные сохраняющие фильтрацию проекции

$$\lambda(4) \rightarrow \Lambda(4), \quad \tilde{\lambda}(4) \rightarrow \tilde{\Lambda}(4). \quad (9)$$

Например, первая из них линейно отображает любой когерентный симплекс из (8) на его грань, принадлежащую $\overline{C}(4, 0) * \overline{C}(4, 1) * \overline{C}(4, 2)$, тождественна на этой грани и отображает вершину $x \in \overline{\Psi}^{[2]}(4)$ в вершину $\nu(x) \in \overline{C}(4, 1)$. Вторая проекция в (9) индуцирована первой. Эти проекции определяют также отображения

$$\rho\Sigma \rightarrow R\Sigma, \quad \tilde{\rho}\Sigma \rightarrow \tilde{R}\Sigma; \quad (10)$$

действительно, отображения (9) очевидным образом поднимаются до отображений $\lambda(4) \times \mathcal{K}_4^n \rightarrow \Lambda(4) \times \mathcal{K}_4^n$, $\tilde{\lambda}(4) \times \mathcal{K}_4^n \rightarrow \tilde{\Lambda}(4) \times \mathcal{K}_4^n$; искомые отображения (10) — это их ограничения на подмножества $\rho\Sigma \subset \lambda(4) \times \mathcal{K}_4^n$, $\tilde{\rho}\Sigma \subset \tilde{\lambda}(4) \times \mathcal{K}_4^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Проекции (10) определяют гомотопические эквивалентности всех участвующих в них пространств. Более того, для любого $i = 1, 2, 3$ то же верно для индуцированных ими отображений членов F_i/F_{i-1} наших фильтраций пространств $\rho\Sigma$ (соответственно, $\tilde{\rho}\Sigma$) на аналогичные члены $R\Sigma$ (соответственно, $\tilde{R}\Sigma$). В частности, эти отображения индуцируют изоморфизмы соответствующих спектральных последовательностей.*

(Добавленный член $F_{1.5}$ фильтраций $\rho\Sigma$ и $\tilde{\rho}\Sigma$ является просто вспомогательной конструкцией для вычисления групп $E_1^{-2,i}$ этих пространств.) Теперь теорема 2 вытекает из следующих двух лемм (описывающих введенные выше фильтрации пространства $\tilde{\rho}\Sigma$).

ЛЕММА 5. $\overline{H}_*(F_{1.5} \setminus F_1) \equiv 0$.

ЛЕММА 6. $\overline{H}_*(F_2 \setminus F_{1.5}) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Член $F_{1.5} \setminus F_1$ естественной фильтрации в $\tilde{\lambda}(4)$ гомеоморфен пространству локально тривиального расслоения над $\Psi^{[2]}(4)$ со слоем интервал: действительно, любой точке $\{x, y\} \in \Psi^{[2]}(4)$ соответствует объединение двух полуинтервалов $[\{x, y\}; x)$ и $(\{x, y\}; y]$. Легко вычисляется, что единственный нетривиальный элемент фундаментальной группы $\Psi^{[2]}(4)$ изменяет ориентации этого расслоения интервалов и каждого из n линейных слагаемых канонического n -мерного аффинного расслоения $(F_{1.5} \setminus F_1)(\tilde{\rho}\Sigma) \rightarrow (F_{1.5} \setminus F_1)(\tilde{\lambda}(4))$. Следовательно, группа $\overline{H}_i((F_{1.5} \setminus F_1)(\tilde{\rho}\Sigma))$ изоморфна группе $\overline{H}_{i-n-1}(\Psi^{[2]}(4))$, если n нечетно, и группе $\overline{H}_{i-n-1}(\Psi^{[2]}(4); \pm\mathbb{Z})$ (где $\pm\mathbb{Z}$ – единственная нетривиальная локальная система со слоем $\mathbb{Z}$), если n четно. Обе эти группы легко вычисляются и оказываются тривиальными.

4.3. Доказательство леммы 6. Член $F_2 \setminus F_{1.5}$ пространства $\tilde{\lambda}(4)$ состоит из двух частей “3” и “ ∞ ”, заметаемых когерентными треугольниками

$$[(f, g) \in G_1(P_4); \{x, y\} \in \Psi^{[2]}(4); w \in \Psi(4)] \quad (11)$$

такими, что соответствующая прямая (f, g) удовлетворяет ровно трем (соответственно, бесконечно многим) элементарным условиям. Прообразы этих двух множеств при очевидной проекции $\tilde{\rho}\Sigma \rightarrow \tilde{\lambda}(4)$ обозначим через $\{3\}$ и $\{\infty\}$ и вычислим по отдельности их замкнутые гомологии.

4.3.1. Гомологии $\{3\}$. Каждой прямой (f, g) , удовлетворяющей ровно трем элементарным условиям, соответствует шесть треугольников (11) в $\tilde{\lambda}(4)$, объединение которых является открытым треугольником с барицентром в точке (f, g) : граница этого треугольника лежит в $F_{1.5}$ (а вершины даже в F_1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Множество прямых $(f, g) \in G_1(P_4)$, все элементы которых удовлетворяют ровно трем общим элементарным условиям, гомеоморфно прямому произведению прямой $\mathbb{R}^1$, интервала $(-\infty, 0)$ и плоского множества, ограниченного кривой, изображенной на рис. 1а) (где пунктирная линия обозначает часть границы, не принадлежащую множеству). В частности, замкнутые гомологии этого множества тривиальны.*

СЛЕДСТВИЕ. $\overline{H}_*(\{3\}) = 0$.

Рис. 1. Множество полиномов f , кривые отношений которых пересекают $r(g)$ в трех точках

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Действительно, $\{3\}$ есть пространство расслоения над рассмотренным в предыдущем предложении подмножеством в $G_1(P_4)$, слой которого является прямым произведением n -мерного аффинного пространства (n -й степени тавтологического расслоения) и открытого треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. По теореме Безу, если пара (f, g) удовлетворяет ровно трем условиям, то $\deg g = 3$, т.е. $g = t^3 + \alpha t^2 + \beta t$, а $r(g)$ имеет вид

$$(t^2 + ts + s^2) + \alpha(t + s) + \beta = 0. \quad (12)$$

Группа сдвигов аргумента t свободно действует на исследуемом множестве: это действие определяет первый сомножитель $\mathbb{R}^1$ в предложении 7. Следовательно, достаточно рассматривать лишь пространство пар (f, g) с коэффициентом α в g равным нулю: это пространство может быть естественно отождествлено с множеством орбит этого действия. Коэффициент β в (12), очевидно, обязан быть отрицательным; его значения определяет сомножитель $(-\infty, 0)$ в предложении 7. Нам остается доказать лишь следующую лемму.

ЛЕММА 7. Для любого отрицательного значения β множество полиномов $f = t^4 + at^2 + bt$ таких, что соответствующая кривая отношений

$$r(f) \equiv \{(t, s) \mid (t^3 + t^2s + ts^2 + s^3) + a(t + s) + b = 0\} \quad (13)$$

пересекает кривую

$$r(g) \equiv \{(t, s) \mid (t^2 + ts + s^2) + \beta = 0\} \quad (14)$$

ровно в трех точках, гомеоморфно множеству, указанному на рис. 1а). Объединение таких множеств по всем значениям β определяет локально тривиальное расслоение над множеством $(-\infty, 0)$ таких значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\mathbb{R}_+$ действует на множестве канонических пар (f, g) с $\deg g = 3$ по правилу

$$T_\lambda(f(t), g(t)) = (\lambda^{-4}f(\lambda t), \lambda^{-3}g(\lambda t)); \quad (15)$$

это действие сводит доказательство первого утверждения леммы 7 к случаю $\beta = -1$ и доказывает утверждение о локальной тривиальности.

Пара уравнений (13), (14) с $\beta = -1$, переписанная в симметрических функциях $p = t + s$ и $q = ts$, превращается в систему

$$\begin{cases} p(p^2 - 2q) + ap + b = 0, \\ p^2 - q = 1, \\ p^2 - 4q \geq 0, \end{cases} \quad (16)$$

где неравенство отвечает за вещественность решений. Исключая q , получаем систему

$$p^3 - p(a + 2) - b = 0, \quad (17)$$

$$p^2 \leq 4/3. \quad (18)$$

Нас интересуют значения a и b , при которых эта система имеет ровно три вещественных решения. Положим $A = a + 2$, тогда множество пар (A, b) , для которых уравнение (17) имеет три вещественных корня, это область, ограниченная полукубической параболой

$$27b^2 \leq 4A^3, \quad (19)$$

см. рис. 1а). Эта область замещается параметрическими кривыми $\{A = \tau^2, b = C \cdot \tau^3\}$, $\tau \in (0, +\infty)$ с $C < \sqrt{4/27}$. Для любой такой кривой квадраты всех корней (17) монотонно возрастают вдоль нее, следовательно, эта кривая покидает множество, удовлетворяющее условию (18), раз и навсегда. Граница этого множества внутри области (19) состоит из двух компонент, соответствующих знаку корня (17), покидающего это множество в соответствующей точке: эти две компоненты встречаются на прямой $\{b = 0\}$, на которой абсолютные значения двух корней совпадают.

Эта часть границы множества значений $\{a, b\}$, выделенных условиями (17), (18), принадлежит области, изучаемой в лемме 7: действительно, ее точки соответствуют парам полиномов (f, g) имеющих одну (или две в точке излома) общие особые точки и две (соответственно, одну) точку самопересечения. (Топологический вид плоских кривых, заданных отображениями $(f, g): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ для различных значений A и b , изображен на рис. 1б).) С другой стороны, часть границы, на которой неравенство (19) становится равенством, не принадлежит интересующему нас множеству: в его точках две точки самопересечения сливаются и становятся одной точкой самокасания. Это доказывает лемму 7.

СЛЕДСТВИЕ. Если все полиномы аффинной прямой $(f, g) \in P_4$ удовлетворяют ровно трем общим элементарным условиям, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

1) полином $f + \lambda g$ этой прямой имеет три вещественных критических точки (по меньшей мере две из которых геометрически различны), любой отрезок в $\mathbb{R}^1$, соединяющий две критические точки такого полинома $f + \lambda g$, содержит критическую точку g ;

2) взаимное расположение кривых отношений $r(f + \lambda g)$ и $r(g)$ топологически устроено как показано на рисунках 2а), б) или на картинках, симметричных им при отражении относительно вертикальной линии $\{t + s = \text{const}\}$,

или является их вырождением, соответствующим либо симметрическим полиномам $f + \lambda g$ (см. рис. 2 с), d)), либо совпадению некоторых критических точек f с критическими точками g (в последнем случае $r(f + \lambda g)$ и $r(g)$ пересекаются в своих концевых точках).

Рис. 2. Кривые отношений с тремя точками пересечения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda = 0$ и g вида $t^3 + \beta t$ утверждение 1 вытекает из связности множества, исследуемого в лемме 7. Для произвольных λ то же самое следует из теоремы Ролля, поскольку в любом корне g' знаки всех полиномов вида $(f + \lambda g)'$ с данным f совпадают. Наконец, случай произвольных λ и g сводится к предыдущему подходящим сдвигом аргументов.

Второе утверждение вытекает непосредственно из первого.

4.3.2. Закрытые гомологии $\{\infty\}$. Рассмотрим произвольное многообразие S и вложим его общим образом в пространство $\mathbb{R}^N$ достаточно большой размерности, так что два различных отрезка, соединяющие образы точек S , могут пересекаться только в своих концевых точках. Обозначим объединение таких отрезков через S^{*2} . Пространство S канонически вложено в него.

ЛЕММА 8. Если S компактно, то S^{*2} компактно. Гомотопический тип пары (S^{*2}, S) определяется гомотопическим типом S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Часть " ∞ " пространства $\tilde{\lambda}(4)$ гомеоморфна прямому произведению прямой $\mathbb{R}^1$ и открытого конуса над пространством S^{*2} , где S — это отрезок $[0, +\infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $r(f) \cap r(g)$ бесконечно, то по лемме 3 $\deg g = 2$, и это множество является замкнутым отрезком в $\Psi(4)$, заданным уравнением $t + s = 2t_0$ для некоторого t_0 ; этот коэффициент t_0 определяет первый сомножитель $\mathbb{R}^1$ в предложении 8. Структура конуса вытекает из конструкции разрешения.

СЛЕДСТВИЕ. $\overline{H}_*(\{\infty\}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\{\infty\}$ является пространством n -мерного аффинного расслоения над " ∞ ", поэтому $\overline{H}_i(\{\infty\}) \equiv \overline{H}_{i-n}(\infty)$; в силу предложения 8 последняя группа совпадает с группой замкнутых гомологий прямого произведения прямой линии и полуинтервала.

Теорема 2 полностью доказана.

4.4. Столбец $E_1^{-3,*}$. В этом разделе мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. $E_1^{-3,*} \equiv 0$.

На этом шаге мы рассматриваем все подпространства коразмерности три в P_4 , т.е. отдельные точки. Для любой такой точки f мы рассматриваем полный прообраз в F_2 отображения $(f, \dots, f) \in \mathcal{K}_4^n$ при очевидной проекции $\pi: \rho\Sigma \rightarrow \Sigma$ и берем открытый конус над этим прообразом. Такие конусы, соответствующие всем $f \in P_4$, замечают член $F_3 \setminus F_2$ разрешения $\rho\Sigma$; аналогичный член в $\tilde{\rho}\Sigma$ замечается такими же конусами, соответствующими тем f , которые принадлежат подмножеству $C(4,0) \subset P_4$.

Используя, как ранее, свободное действие группы сдвигов пространства аргументов, мы можем рассматривать только полиномы f вида $t^4 + at^2 + bt$, т.е. с нулевым вице-старшим коэффициентом: все пространство $F_3 \setminus F_2$ является прямым произведением прямой $\mathbb{R}^1$ и подпространства, замеченного конусами, соответствующими таким f .

Рис. 3. Классификация полиномов четвертой степени

Все такие полиномы образуют двумерную плоскость, которая естественно разбивается на 9 открытых клеток, см. рис. 3. Для каждой из этих клеток мы приводим на этом рисунке топологический тип соответствующих полиномов и кривых отношений. Клетки A и A' (соответственно, B и B') содержат строго морсовские полиномы с одной (соответственно, тремя) вещественными критическими точками. Они разделяются полукубической параболой $\{27b^2 + 8a^3 = 0\} \equiv E \cup E' \cup O$ и прямой $\{b = 0\} \equiv D \cup C \cup O$, состоящей из четных полиномов.

Для любой из девяти клеток мы рассматриваем объединение отображений $(f, \dots, f) \in \Sigma \subset \mathcal{K}_4^n$, где f пробегает эту клетку, и берем полный прообраз в $F_3 \setminus F_2$ этого объединения относительно проекции

$$\tilde{\pi}: \tilde{\rho}\Sigma \rightarrow \Sigma. \quad (20)$$

Обозначим этот прообраз через $\{X\}$, где X — обозначение клетки, $X = A, A', \dots$.

4.4.1. Клетки C и O . Все точки f луча $\{b = 0, a \geq 0\}$ не принадлежат $C(4,0)$: действительно, для таких f отрезок $r(f)$ совпадает с множеством пересечения кривых отношений всех полиномов, принадлежащих целой прямой $\{b = 0\}$. Следовательно, в этом случае $\tilde{\pi}^{-1}(f, \dots, f) \cap (F_3 \setminus F_2) = \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любой клетки X , отличной от C и O , множество $\{X\}$ является пространством локально тривиального расслоения над нашей клеткой, слой которого над f есть открытый конус над множеством $\tilde{\pi}^{-1}(f, \dots, f) \cap F_2$.

Для каждой клетки это немедленно вытекает из следующего ниже явного описания этого множества.

4.4.2. Клетки A и A' .

ЛЕММА 9. Если полином $f = t^4 + at^2 + bt$ имеет только одну вещественную критическую точку, то $\tilde{\pi}^{-1}(f, \dots, f) \cap (F_2 \setminus F_{1.5}) = \emptyset$.

Доказательство вытекает немедленно из следствия леммы 7.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого f из клеток A и A' , множество $\tilde{\pi}^{-1}(f, \dots, f) \cap (F_3 \setminus F_2)$ гомеоморфно открытому конусу над множеством S^{*2} (см. п. 4.3.2), где S — это кривая отношений f (в частности, S гомеоморфно отрезку).

СЛЕДСТВИЕ. Группы замкнутых гомологий части $\{A\}$ или $\{A'\}$ множества $F_3 \setminus F_2$ тривиальны во всех размерностях.

Доказательство немедленно вытекает из формулы Кюннета и леммы 8.

РИС. 4. Множество прямых, удовлетворяющих ровно трем элементарным условиям и проходящих через f , $f \in B$ или D

4.4.3. Клетки B и B' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для любого f из клеток B и B' множество аффинных прямых $(f, g) \subset P_4$, содержащих f , и таких, что все полиномы прямой удовлетворяют ровно трем общим элементарным условиям, состоит из двух компонент и гомеоморфно множеству, ограниченному многоугольниками на рис. 4а) (где пунктирная линия обозначает часть границы, не принадлежащую множеству).

Доказательство этого предложения и следующих предложений 11, 12 см. в §5.

СЛЕДСТВИЕ. Группы $\overline{H}_*(\{B\})$ и $\overline{H}_*(\{B'\})$ тривиальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 9 и формулы Кюннета достаточно доказать, что для любого f из нашей клетки группа замкнутых гомологий любого множества $\tilde{\pi}^{-1}(f, \dots, f) \cap F_2$ тривиальна. Эти гомологии совпадают с гомологиями $\tilde{\pi}^{-1}(f, \dots, f) \cap F_{1.5}$: действительно, в силу предложения 10 аналогичные гомологии $\tilde{\pi}^{-1}(f, \dots, f) \cap (F_2 \setminus F_{1.5})$ тривиальны. Из определения $F_{1.5}$ следует, что последняя группа совпадает с аналогичной группой множества S^{*2} , где S — кривая $r(f)$, т.е. несвязное объединение двух отрезков. Отсюда вытекает наше следствие.

4.4.4. Клетки E и E' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для любого f из клеток E и E' , множество аффинных прямых (f, g) в P_4 , проходящих через f , и таких, что все полиномы прямой удовлетворяют ровно трем общим элементарным условиям, гомеоморфно полуинтервалу.

СЛЕДСТВИЕ. Группы $\overline{H}_*(\{E\})$ и $\overline{H}_*(\{E'\})$ тривиальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – то же самое, что у следствия предложения 10 (в нашем случае кривая отношений f является несвязным объединением отрезка и точки).

4.4.5. Клетка D .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Для любого f из клетки D множество аффинных прямых (f, g) в P_4 , проходящих через f , и таких, что все полиномы прямой удовлетворяют ровно трем общим элементарным условиям, состоит из трех связных компонент и гомеоморфно ограниченному множеству на рис. 4б) (где пунктирный отрезок обозначает часть границы, не принадлежащую множеству, а двойные пунктирные отрезки внутри фигуры должны быть выброшены из нее).

СЛЕДСТВИЕ. Группа $\overline{H}_*(\{D\})$ тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – то же самое, что у следствия из предложения 10 (при $f \in D$ кривая $r(f)$ гомеоморфна замкнутому кресту и следовательно $r(f)^{*2} \sim \{\text{точка}\}$).

Теорема 3 вытекает немедленно из следствий леммы 9 и предложений 10, 11 и 12; она завершает доказательство теоремы 1.

§ 5. Доказательство предложений 10, 11 и 12

Пусть $f = t^4 + at^2 + bt$ – точка клетки B или B' . Обозначим через $x_1 < x_2 < x_3$ три корня полинома $f' \equiv 4t^3 + 2at + b$; очевидно $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Достаточно рассмотреть только одну из клеток B, B' , скажем B . Тогда x_1 отрицательно, x_2 и x_3 положительны, и топологически кривая $r(f)$ устроена так, как показано на рис. 2а), так что x_2 и x_3 соединены ее “конечной” ветвью. Прямая $\{t + s = 0\}$ является асимптотой для $r(f)$, в частности, она не пересекает ее в конечных точках и разделяет две ее ветви.

РИС. 5. Кривая отношений полинома f типа B и критические положения $r(g)$

В силу следствия из леммы 7, если $\#(r(g) \cap r(f)) = 3$, то топологически расположение этих кривых устроено как на рис. 2а) или 2б) (или на вырождении этой картинки, соответствующем совпадению одной или нескольких концевых точек $r(g)$ с таковыми для $r(f)$).

Обозначение. Для любого $f \in B$ обозначим через $\heartsuit \equiv \heartsuit(f)$ (соответственно, через $\diamond$) множество таких полиномов

$$g = t^3 + \alpha t^2 + \beta t, \quad (21)$$

что множество $r(f) \cap r(g)$ состоит из трех точек, две из которых принадлежат “бесконечной” ветви $r(f)$ (соответственно, все три точки принадлежат “конечной” ветви).

ТЕОРЕМА 4. Для любого $f \in B$ множество $\heartsuit$ (соответственно, $\diamond$) гомотопно плоскому множеству, ограниченному правой (соответственно, левой) компонентой на рис. 4а).

Доказательство этой теоремы занимает следующие пункты 5.1–5.3; предложение 10 является ее прямым следствием.

5.1. Семейства L^∇ и фокальные точки.

Обозначение. Для любого $\nabla \in \mathbb{R}^1$ обозначим через L^∇ прямую в P_3 , состоящую из полиномов (21) с $\alpha = -3\nabla$, или, что то же самое, таких, что центр $r(g)$ — это точка (∇, ∇) .

Кривые $r(g)$, $g \in L^\nabla$, являются линиями уровня функции

$$F_\nabla \equiv (t^2 + ts + s^2) - 3\nabla(t + s). \quad (22)$$

ЛЕММА 10. Ограничение любой квадратичной формы в $\mathbb{R}^2$ на кубическую кривую имеет не более 9 изолированных критических точек.

Это следует немедленно из теоремы Безу.

СЛЕДСТВИЕ. Ограничение любой функции F_∇ на кривую $r(f) \subset \Psi(4)$, $f \in B$, имеет не более трех критических точек строго внутри этой кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая (13) сохраняется инволюцией $\{t \leftrightarrow s\}$, а три ее неподвижные точки (x_i, x_i) являются критическими для любой F_∇ .

ЛЕММА 11. Существуют значения $\omega_1 > x_1$, $\omega_2 > x_2$ и $\omega_3 < x_3$ такие, что если ∇ лежит с той же стороны от ω_i , что и x_i (соответственно, ω_i разделяет ∇ и x_i), то ограничение функции F_∇ на $r(f)$ имеет в точке x_i сильный (квадратичный) локальный минимум (соответственно, максимум). А именно,

$$\omega_1 = \frac{6x_1^2 - a}{12x_1}, \quad \omega_2 = \frac{6x_2^2 - a}{12x_2}, \quad \omega_3 = \frac{6x_3^2 - a}{12x_3}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ω_i, ω_i) суть фокальные точки пар $(r(f), (x_i, x_i))$ в смысле [7] относительно евклидовой метрики $t^2 + ts + s^2$. Конкретные значения (23) находятся прямыми вычислениями.

5.2. Структура множества $\heartsuit$. Для любого $\nabla \in \mathbb{R}^1$ мы рассмотрим перестройки кривых $r(g)$ при g , пробегающем прямую L^∇ . При $\beta = 3\nabla^2$ такая кривая состоит из единственной точки (∇, ∇) , но когда параметр β уменьшается, эта кривая раздувается вокруг того же центра. Ее расположение относительно $r(f)$ может претерпеть следующие четыре существенные для нас перестройки:

M_i ($i = 1, 2, 3$): точка пересечения $r(g)$ с диагональю $\{t = s\}$ проходит через (x_i, x_i) – точку пересечения $r(f)$ с диагональю;

M_4 (возможная): кривая $r(g)$ касается “бесконечной” (т.е. лежащей в области $\{t + s < 0\}$) ветви $r(f)$ в некоторой ее внутренней точке (и пересекает эту ветвь в последующие моменты, соответствующие бóльшим эллипсам или меньшим значениям β).

Обозначим значения β , при которых происходят эти перестройки, через $\beta_1, \dots, \beta_4$, соответственно; они являются функциями от ∇ (или от $\alpha \equiv -3\nabla$) и от коэффициентов полинома f . Полином g вида (21) принадлежит $\heartsuit$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- а) перестройка M_4 в семействе L^∇ действительно происходит в некоторый момент $\beta_4(\alpha) > \beta$;
- б) $\beta \geq \beta_1(\alpha)$; $\beta_2(\alpha) \geq \beta$; $\beta \geq \beta_3(\alpha)$.

Для данного α множество значений β , для которых полином (21) удовлетворяет условиям а), б), может быть пусто, или состоять из единственной точки (если $\beta_4(\alpha) > \beta_2(\alpha) = \beta_1(\alpha) > \beta_3(\alpha)$), быть замкнутым отрезком (если $\beta_4(\alpha) > \beta_2(\alpha) > \max(\beta_1(\alpha), \beta_3(\alpha))$) или полуинтервалом (если $\beta_2(\alpha) > \beta_4(\alpha) > \max(\beta_1(\alpha), \beta_3(\alpha))$).

Сейчас мы найдем значения α , при которых эти условия выполнены.

ЛЕММА 12. *Перестройка M_4 происходит в некоторый момент $\beta_4(\alpha) > \beta_1(\alpha)$, если и только если $\nabla > \omega_1$.*

5.2.1. Точки бифуркаций. Сейчас для любого фиксированного $f \in B$ мы определим три важные точки на прямой $\mathbb{R}^1$ значений ∇ , см. рис. 5а).

Положим $\tau = (x_1 + x_2)/2$, так что (τ, τ) является центром эллипса вида (12), пересекающего диагональ в точках $\{x_1, x_1\}$ и $\{x_2, x_2\}$.

Семейство эллипсов (12), пересекающих диагональ в двух точках, бóльшая из которых (т.е. ближайшая к $(+\infty, +\infty)$) есть (x_3, x_3) , является однопараметрической кривой в плоскости $\{\alpha, \beta\}$; все эллипсы этого семейства лежат один внутри другого. Рассмотрим наименьший эллипс этого семейства, пересекающий “бесконечную” ветвь $r(f)$, и обозначим через ξ соответствующее значение $-\alpha/3$, так что (ξ, ξ) есть центр этого эллипса. Наконец, точка μ определяется аналогичным образом при помощи семейства эллипсов (12), содержащих точку (x_2, x_2) .

ЛЕММА 13. $\tau > \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 11 (и поскольку $x_1 < 0$) это утверждение эквивалентно неравенству $6x_1x_2 + a < 0$. Но при $f \in B$ и a , и x_1x_2 отрицательны.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\mu > \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\mu \geq \tau$. Но если $\mu = \tau$, то эллипс $r(g)$, проходящий через (x_2, x_2) и с центром в (μ, μ) , пересекает диагональ также и в точке (x_1, x_1) . В силу леммы 13 он ограничивает континуум точек “бесконечной” ветви, что противоречит определению μ .

СЛЕДСТВИЕ 2. $\xi > \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\xi \leq \mu$, то эллипс (12), проходящий через (x_2, x_2) и с центром в (μ, μ) (участвующий в определении точки μ), лежит строго внутри эллипса, проходящего через (x_3, x_3) и с центром в (ξ, ξ) . Поскольку первый эллипс имеет непустое пересечение с “бесконечной” ветвью $r(f)$, последний ограничивает континуум точек этой ветви, что противоречит определению ξ .

Окончательно, мы получаем, что наши точки упорядочены следующим образом: $\omega_1 < \tau < \mu < \xi$. Прямая L^∇ пересекает область $\heartsuit$ по

- точке, если $\nabla = \tau$,
- отрезку, если $\nabla \in (\tau, \mu)$,
- полуинтервалу, если $\nabla \in [\mu, \xi)$,
- пустому множеству, если $\nabla \notin [\tau, \xi)$.

Отсюда вытекает утверждение теоремы 4 о множестве $\heartsuit$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В этом доказательстве мы рассматривали слои отображения $\heartsuit \rightarrow \mathbb{R}^1$, переводящего g в центр симметрии g' . Используя другое отображение $\heartsuit \rightarrow \mathbb{R}^1$, переводящее g в его наибольшую критическую точку, мы можем установить гомеоморфизм $\heartsuit$ на прямое произведение отрезка и полуинтервала. Действительно, в силу следствия леммы 7 эта критическая точка должна принадлежать отрезку $[x_2, x_3]$, а в силу следствия 1 леммы 13 для любой точки x этого отрезка слой нашего отображения над x гомеоморфен полуинтервалу.

5.3. Структура множества $\diamond$.

ЛЕММА 14. Если прямая L^∇ имеет непустое пересечение с множеством $\diamond$, то $\nabla \leq (x_2 + x_3)/2$.

Действительно, это вытекает из следствия леммы 7.

ЛЕММА 15. $(x_2 + x_3)/2 < \omega_2$ и $(x_2 + x_3)/2 < \omega_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (23) (и поскольку $x_3 > 0 < x_2$) оба эти неравенства эквивалентны неравенству $6x_2x_3 + a < 0$. В силу формул Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a/2, \quad (24)$$

оно эквивалентно неравенству $(x_3 - x_2)^2 > 0$.

По теореме Ролля, если $r(g)$ имеет три точки пересечения с “конечной” ветвью $r(f)$, $g \in L^\nabla$, то ограничение функции F_∇ на эту ветвь имеет по меньшей мере две критических точки в своей внутренней части.

ЛЕММА 16. Пусть $\nabla \leq (x_2 + x_3)/2$. Тогда ограничение функции F_∇ имеет две критические точки внутри “конечной” области, если и только если $\nabla > \sqrt[3]{b}/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $dF_{\nabla} \parallel df$ легко вычисляется и эквивалентно во внутренней части $\Psi(4)$ уравнению $(t^2 + 4ts + s^2) + 2\alpha(t + s) - a = 0$. Вместе с уравнением кривой $r(f)$ это дает следующую систему в симметрических функциях p, q :

$$\begin{cases} p(p^2 - 2q) + ap + b = 0, \\ p^2 + 2q + 2\alpha p - a = 0, \\ p^2 - 4q \geq 0, \end{cases} \quad (25)$$

ср. (16). Два первых уравнения в ней дают следующее условие на p :

$$p^3 + \alpha p^2 + b/2 = 0. \quad (26)$$

Если $\nabla = (x_2 + x_3)/2$, то F_{∇} имеет две критических точки внутри “конечной” компоненты (в силу леммы 15 и поскольку F_{∇} принимает одинаковые значения в концах этой компоненты); при ∇ близких к $-\infty$ F_{∇} очевидно не имеет таких критических точек. Когда ∇ движется от $(x_2 + x_3)/2$ к $-\infty$, число критических точек может уменьшаться, лишь если дискриминант полинома (26) обращается в ноль или если последнее неравенство в (25) становится равенством. Последнее невозможно: действительно, это соответствует ситуации когда $t = s$, т.е. некоторая внутренняя критическая точка $F_{\nabla}|_{r(f)}$ подходит к концу компоненты, что противоречило бы лемме 15. А предыдущее дискриминантное условие, очевидно, эквивалентно условию $\nabla = \sqrt[3]{b}/2$.

ЛЕММА 17. $x_2 < \sqrt[3]{b}/2 < (x_2 + x_3)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба эти неравенства вытекают из формул Виета (24) и $b/4 = -x_1 x_2 x_3$ и из того, что $x_3 > x_2$ и $-x_1 > 2x_2$. (Правое неравенство следует также из доказательства предыдущей леммы.)

Итак, для любой точки $\nabla \in (\sqrt[3]{b}/2, (x_2 + x_3)/2]$ ограничение функции F_{∇} на конечную ветвь имеет четыре критических точки: минимумы в (x_2, x_2) и некоторой точке $m(\nabla)$ и максимумы в (x_3, x_3) и $M(\nabla)$. Обозначим через $\beta^1(\nabla), \dots, \beta^4(\nabla)$ взятые со знаком минус критические значения в этих точках, так что все эллипсы $r(g)$, $g = t^3 - 3\nabla t^2 + \beta^i(\nabla)t$, имеют касание с конечной ветвью $r(f)$. Пересечение нашей прямой L^{∇} с $\diamond$ состоит из полиномов (21) с $\alpha = -3\nabla$ и β , удовлетворяющим обоим условиям $\beta^1(\nabla) \geq \beta \geq \beta^3(\nabla)$ и $\beta^2(\nabla) > \beta > \beta^4(\nabla)$. Поэтому, для того чтобы исследовать множество $\diamond$, нам остается установить порядок точек $\beta^i(\nabla)$ для различных $\nabla \in (\sqrt[3]{b}/2, (x_2 + x_3)/2]$.

Для любого такого ∇ критические значения в обеих точках максимума, очевидно, больше значений в минимумах, поэтому $\beta^1(\nabla)$ и $\beta^2(\nabla)$ больше чем $\beta^3(\nabla)$ и $\beta^4(\nabla)$.

ЛЕММА 18. Для любого $f \in B$ существует точка $\varkappa \in (\sqrt[3]{b}/2, (x_2 + x_3)/2)$ такая, что $\beta^3(\varkappa) = \beta^4(\varkappa)$, $\beta^3(\nabla) > \beta^4(\nabla)$ при $\nabla > \varkappa$ и $\beta^3(\nabla) < \beta^4(\nabla)$ при $\nabla < \varkappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим однопараметрическое семейство полиномов (21) таких, что одна из их критических точек совпадает с x_3 , а вторая меньше или равна x_2 . Это семейство пересекает любую прямую L^{∇} , $\nabla \leq (x_2 + x_3)/2$, ровно в

одной точке, следовательно, ∇ является естественной координатой на нем. Пусть g_0 – начальная точка семейства (принадлежащая L^∇ , $\nabla = (x_2 + x_3)/2$), тогда эллипс $r(g_0)$ пересекает конечную ветвь $r(f)$ в трех точках, две из которых суть (x_2, x_2) и (x_3, x_3) , см. рис. 5b). Когда ∇ убывает, эллипсы $r(g)$ семейства монотонно расширяются, в частности, начиная с некоторого момента $\varkappa$ они содержат эту ветвь $r(f)$ внутри. В этот момент соответствующий эллипс касается этой ветви в двух точках (одна из которых (x_3, x_3)), и критические значения $-\beta^3(\varkappa)$, $-\beta^4(\varkappa)$ соответствующей функции $F_\varkappa$ совпадают. По теореме Ролля $F_\varkappa$ имеет еще одну критическую точку во внутренней нашей ветви, следовательно, в силу леммы 16 $\varkappa > \sqrt[3]{b}/2$. Очевидно, это значение $\varkappa$ является искомым.

ЛЕММА 19. *Для любого $f \in B$ найдется точка $\nu \in (\sqrt[3]{b}/2, (x_2 + x_3)/2)$ такая, что $\beta^1(\nu) = \beta^2(\nu)$, $\beta^1(\nabla) > \beta^2(\nabla)$, если $\nabla < \nu$ и $\beta^1(\nabla) < \beta^2(\nabla)$, если $\nabla > \nu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство леммы 18: мы рассматриваем семейство полиномов g с одной критической точкой равной x_2 и другой, меньшей или равной x_3 (так что начальная функция g_0 – та же самая, что в предыдущем доказательстве, см. рис. 5b)).

Топологическая структура множества $\diamond$ вытекает из лемм 14–19. А именно, пересечение прямой L^∇ с этим множеством является точкой при $\nabla = (x_2 + x_3)/2$, отрезком при $\nabla \in (\max(\varkappa, \nu), (x_2 + x_3)/2)$, полуинтервалом при $\nabla \in (\min(\varkappa, \nu), \max(\varkappa, \nu)]$, интервалом при $\nabla \in (\sqrt[3]{b}/2, \max(\varkappa, \nu)]$ и пусто при $\nabla \notin (\sqrt[3]{b}/2, (x_2 + x_3)/2]$.

5.4. Доказательство предложения 11. Множество, исследуемое в предложении 11, есть предел множеств $\heartsuit = \heartsuit(f)$, когда $f \in B$ стремится к клетке E , а, следовательно, отрезок $[x_2, x_3]$ стягивается в точку. Его структура вытекает из следствия 1 леммы 13.

5.5. Доказательство предложения 12. Группа растяжений (15) эффективно действует на клетке D и свободно действует на соответствующей части $\widehat{\rho}\Sigma$. Поэтому мы можем рассмотреть единственный полином $f = t^4 - 2t^2$, так что $r(f)$ состоит из отрезка

$$t + s = 0 \quad (27)$$

и полуокружности

$$t^2 + s^2 = 2. \quad (28)$$

ЛЕММА 20. *Множество таких значений ∇ , что для некоторого $g \in L^\nabla$ кривая $r(g)$ пересекает полуокружность (28) дважды, есть интервал $(-2/3, 2/3)$.*

Это предельный вариант леммы 11 (точнее, ее части, касающейся точек x_1 и x_3) при $f \in B$, стремящемся к нашему полиному $t^4 - 2t^2$.

Если $\nabla \in (1/2, 2/3] \cup [-2/3, -1/2)$, то расширяющиеся эллипсы семейства L^∇ пройдут через конечную точку $(1, 1)$ или $(-1, -1)$ полуокружности (28) раньше

Рис. 6. Пересечения с симметричной кривой отношений

(при больших значениях β), чем они наткнутся на компоненту (27), следовательно, такие семейства также не пересекают исследуемое множество.

При $\nabla = \pm 1/2$ пересечение семейства L^∇ с этим множеством состоит из единственного полинома $t^3 \mp (3/2)t^2$, см. рис. 6, а при $|\nabla|$ чуть меньших чем $1/2$, оно состоит из отрезка: действительно, перестройки взаиморасположений эллипсов $r(g)$ в таких семействах упорядочены следующим образом: сначала (при наибольшем значении β) они касаются полуокружности (28) в ее внутренней точке, затем впервые встречаются с отрезком (27) и после этого проходят через концевую точку $(1, 1)$ или $(-1, -1)$ полуокружности; отрезок семейства, соединяющий второе и третье происшествие – искомый.

Ситуация меняется, если первая и вторая перестройки происходят одновременно или даже меняют порядок: в этом случае граничная точка, в которой семейство входит в интересующее нас множество, не принадлежит этому множеству. Легко вычисляется, что это происходит при $|\nabla| \leq \sqrt{2}/3$. Более того, любое семейство L^∇ имеет исключительную точку – эллипс $r(g)$, проходящий через особую точку $(-1, 1)$ кривой $r(f)$, который пересекает $r(f)$ по меньшему числу точек, чем соседние эллипсы $r(g')$. Если $|\nabla| \leq 1/3$, $\nabla \neq 0$, то эта исключительная точка лежит внутри интервала интересующих нас точек семейства и поэтому должна быть выброшена из него; объединение таких точек изображается двойными пунктирными отрезками на рис. 4b).

Список литературы

1. Shastri A. R. Polynomial representations of knots // Preprint, January 1991.
2. Vassiliev V. A. Cohomology of knot spaces. Theory of Singularities and its Applications // Advances in Soviet Math. / ed. V. I. Arnold. V. 1. P. 23–69 (AMS, Providence, RI, 1990).
3. Vassiliev V. A. Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications // Revised ed. Transl. of Math. Monogr. (AMS, Providence RI, 1994).
4. Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций // Труды ММО. 1970. Т. 21. С. 27–46.
5. Васильев В. А. Геометрическая реализация гомологий классических групп Ли и комплексы, S -двойственные к флаговым многообразиям // Алгебра и Анализ. 1991. Т. 3. № 4. С. 113–120.
6. Vassiliev V. A. Invariants of ornaments. Singularities and Curves // Advances in Soviet Math. / ed. V. I. Arnold. V. 21. P. 225–262 (AMS, Providence, RI, 1994).
7. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1963.