Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Журавлев, Свободная алгебра Ли как модуль над полной линейной группой,
Матем. сб., 1996, том 187, номер 2, 59–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:49:14

УДК 512.5

В. М. Журавлев

Свободная алгебра Ли как модуль над полной линейной группой

В статье рассматривается свободная алгебра Ли над полем характеристики нуль. Эта алгебра является модулем над полной линейной группой, при этом пространства однородных элементов инвариантны относительно этого действия. В данной работе изучается разложение однородных пространств на неприводимые компоненты и считаются их кратности.

Одним из способов подсчета этих кратностей является их связь со значениями неприводимых характеров симметрической группы на классах сопряженных элементов, отвечающих произведению независимых циклов одинаковой длины. Во втором разделе дается точная формула для вычисления таких значений характеров. Эта формула аналогична формуле крюков для размерностей неприводимых модулей симметрической группы.

Во втором способе подсчета кратностей, используется формула Витта для размерностей полиоднородных компонент свободной алгебры Ли.

Остаток статьи касается соотношений между рядом Гильберта свободной двупорожденной алгебры Ли, и производящим рядом кратностей неприводимых модулей в этой алгебре.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

Известно [1, п. 3.3.9–3.3.10], что алгебра Ли $L = L(X)$ со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ над полем F является левым $G = GL(V)$ модулем, где V – векторное пространство над F с базисом X . Подпространства $L_n(X)$ однородных элементов алгебры $L(X)$ степени n инвариантны относительно этого действия. Если $\text{char } F = 0$ и F содержит первообразный корень степени n из 1, то неприводимые G -модули в пространстве $L_n(X)$ имеют вид

$$V_\lambda = T_n(V) \bigotimes_{F[S_n]} T_\lambda,$$

где T_λ – это S_n -модуль, отвечающий диаграмме Юнга $[\lambda]$, а $T_n(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_n$.

При этом V_λ – нулевой, если количество строк в диаграмме больше, чем $m = \dim V = |X|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1543) и Международного научного фонда (грант № 22000).

Цель данной работы – вычислить кратности $m(V_\lambda, L_n(V))$ неприводимых G -подмодулей модуля $L_n(X)$, отвечающих всевозможным диаграммам $[\lambda]$. В монографии [1, п. 3.4.7] приведена формула

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/d}),$$

где $\tau = (12 \dots n) \in S_n$, χ^λ – характер неприводимого S_n -модуля, отвечающего разбиению λ , а μ – функция Мёбиуса.

Эта формула позволила А. А. Клячко дать ответ на вопрос о том, какие модули V_λ входят в разложение $L_n(V)$ с ненулевой кратностью. При этом значение характера $\chi^\lambda(\tau^{n/d})$ оставалось в общем случае неизвестным.

Мы покажем, что кратности неприводимых G -модулей в $L_n(X)$ определенным образом связаны с формулой Витта (см. § 4). Основным же результатом является точное вычисление значений характеров $\chi^\lambda(\tau^{n/d})$ для всевозможных диаграмм Юнга $[\lambda]$. С данной работой связана краткая публикация автора [3].

§ 2. Основной результат

Введем обозначения, которыми мы будем пользоваться. Не определяемые здесь понятия читатель может найти в книге [2]. Через $\{a_1^{l_1}, a_2^{l_2}, \dots, a_k^{l_k}\}$ мы будем обозначать класс сопряженных элементов в группе S_n , соответствующий произведению независимых циклов с длинами $a_1, a_2, \dots, a_k$, $\sum_{i=1}^k a_i l_i = n$.

Далее в формулировках везде, где это необходимо, будем обозначать через $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ разбиение числа n , где $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$, $\lambda_i \geq 0$. Если $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$, то разбиение называется *собственным*.

Как обычно, 1_G – тривиальный характер группы G , $\uparrow G$ обозначает индуцирование на G , а $\downarrow G$ – ограничение на G . Характер неприводимого S_n -модуля, отвечающего разбиению λ , будем обозначать χ^λ . Характер модуля, индуцированного с подгруппы Юнга $S_\lambda \in S_n$, отвечающей разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, мы будем обозначать, согласно [2], [5],

$$\chi^{[\lambda_1][\lambda_2] \dots [\lambda_k]} = 1_{S_\lambda} \uparrow S_n.$$

В доказательстве предложения 2.2 нам понадобится определение λ -таблоида [2, п. 3.9]. В дальнейшем нам необходимы определения *крюка диаграммы*, *длины крюка*, *графа крюков диаграммы*, *косого крюка* [2, п. 18.2].

ЛЕММА 2.1. Пусть $\pi\rho \in S_n$, где ρ есть r -цикл, а π – перестановка остальных $n - r$ чисел. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ – разбиение числа n . Тогда

$$\chi^{[\lambda_1][\lambda_2] \dots [\lambda_n]}(\pi\rho) = \sum_{i=1}^n \chi^{[\lambda_1][\lambda_2] \dots [\lambda_{i-1}][\lambda_i - r][\lambda_{i+1}] \dots [\lambda_n]}(\pi).$$

Считается, что $[0]$ действует как мультипликативная единица, $[k] = 0$ при $k < 0$ и $\chi^{(0)}(\pi) = 0$.

Доказательство см. [2, п. 21.13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $n = ld$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ – разбиение числа n , $\pi \in \{d^l\}$. Тогда

$$\chi^{[\lambda_1][\lambda_2]\dots[\lambda_n]}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{если существует такое } \lambda_i, \text{ что } d \nmid \lambda_i; \\ (n/d)! \left(\prod_{i=1}^n (\lambda_i/d)! \right)^{-1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по l . Если $l = 1$, то $n = d$. Пусть π – цикл длины n . Тогда $\chi^{[\lambda_1][\lambda_2]\dots[\lambda_n]}(\pi)$ – это число λ -таблоидов, инвариантных относительно π . Поэтому, если $\lambda_1 < n$, то π не сохраняет λ -таблоиды, и $\chi^{[\lambda_1][\lambda_2]\dots[\lambda_n]}(\pi) = 0$. Если же $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то пространство λ -таблоидов одномерно и $\chi^{[n]}(\pi) = 1$.

Пусть теперь индукционное предположение выполнено. Рассмотрим $\pi \in \{d^{l-1}\}$, ρ – цикл длины d , $\pi\rho \in \{d^l\}$. Имеем по лемме 1:

$$\chi^{[\lambda_1]\dots[\lambda_n]}(\pi\rho) = \sum_{i=1}^n \chi^{[\lambda_1]\dots[\lambda_{i-1}][\lambda_i-d][\lambda_{i+1}]\dots[\lambda_n]}(\pi).$$

Если существует λ_i такое, что $d \nmid \lambda_i$, то и $d \nmid (\lambda_i - d)$, поэтому по индукционному предположению в правой части каждое слагаемое равно 0, и, следовательно,

$$\chi^{[\lambda_1]\dots[\lambda_n]}(\pi\rho) = 0.$$

Если $d \mid \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, то по индукционному предположению

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \chi^{[\lambda_1]\dots[\lambda_{i-1}][\lambda_i-d][\lambda_{i+1}]\dots[\lambda_n]}(\pi) &= \sum_{i=1}^n \frac{((n-d)/d)! (\lambda_i/d)}{\prod_{j=1}^n (\lambda_j/d)!} = \frac{(l-1)!}{\prod_{j=1}^n (\lambda_j/d)!} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{d} \right) \\ &= (n/d)! \left(\prod_{i=1}^n (\lambda_i/d)! \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Наша ближайшая цель – вычислить для любого разбиения λ значение $\chi^\lambda(\pi)$, где $\pi \in \{d^l\}$. Были некоторые попытки сделать это [4, гл. 5, §1], но они дали лишь частичные результаты.

Нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА 2.3 (детерминантная форма). Если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ является собственным разбиением числа n , то

$$\chi^\lambda = \chi^{\det([\lambda_i - i + j])},$$

причем мы полагаем $[m] = 0$ при $m < 0$.

Доказательство см. [2, п. 19.2].

Напомним определения: (i, j) -крюк диаграммы $[\lambda]$ есть подмножество $[\lambda]$, состоящее из клетки (i, j) , $\lambda_i - j$ клеток справа от нее (они образуют руку крюка) и

$\lambda'_j - i$ клеток снизу от нее (они образуют *ногу* крюка). Длина (i, j) -крюка — это число $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j + 1 - i - j$. Граф крюков диаграммы $[\lambda]$ получается, если заменить каждую клетку (i, j) числом h_{ij} [2, п. 18.2].

Докажем теперь основную теорему. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ — собственное разбиение числа n , $\lambda_k > 0$, $n = ld$, $\pi \in \{d^l\}$. Обозначим через c_λ количество чисел в графе крюков диаграммы, которые делятся на d , другими словами количество чисел h_{ij} таких, что $d \mid h_{ij}$.

ТЕОРЕМА 2.4 (основная). а) Если $c_\lambda \neq n/d$, то $\chi^\lambda(\pi) = 0$.

б) Если $c_\lambda = n/d$, то

$$|\chi^\lambda(\pi)| = \frac{(n/d)! d^{c_\lambda}}{\prod_{d \mid h_{ij}} h_{ij}},$$

где произведение берется по всем (i, j) . Знак характера вычисляет предложение 2.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По матрице $([\lambda_i - i + j])$ и числу d мы построим числовую матрицу $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 0$, если $\lambda_i - i + j < 0$, либо $d \nmid (\lambda_i - i + j)$, и иначе $a_{ij} = (((\lambda_i - i + j)/d)!)^{-1}$. Применяя детерминантную форму и предложение 2.2 мы имеем

$$\chi^\lambda(\pi) = \chi^{\det([\lambda_i - i + j])}(\pi) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \chi^{[\lambda_1 - 1 + \sigma(1)] \cdots [\lambda_k - k + \sigma(k)]}(\pi) = (n/d)! \det A.$$

Обозначим через q_r количество чисел $h_{11}, h_{21}, \dots, h_{k1}$, дающих остаток r при делении на d , $0 \leq r < d$, а через $e(x)$ целую часть числа x .

Элементы в последнем столбце матрицы $([\lambda_i - i + j])$ суть $[h_{11}], [h_{21}], \dots, [h_{k1}]$, поскольку $h_{i1} = \lambda_i + k - i$. Пусть $h_{i1} \equiv r \pmod{d}$, $0 \leq r < d$. Тогда в i -й строке матрицы $A = (a_{ij})$ ненулевые элементы могут стоять лишь в столбцах с номерами $k - r, k - r - d, k - r - 2d, \dots$, это следует из построения матрицы A . И, соответственно, величины элементов равны

$$a_{i, k-r} = (((h_{i1} - r)/d)!)^{-1}, a_{i, k-r-d} = (((h_{i1} - r)/d - 1)!)^{-1}, \dots$$

Число этих столбцов равняется $e((k - r - 1)/d) + 1$.

Рассмотрим все строки с номерами i , $1 \leq i \leq k$, такие, что $h_{i1} \equiv r \pmod{d}$, их количество по определению равно q_r . Если $q_r > e((k - r - 1)/d) + 1$, то очевидно, что эти q_r строк линейно зависимы и следовательно $\det A = 0$, т.е. и $\chi^\lambda(\pi) = 0$. Если $q_r < e((k - r - 1)/d) + 1$, то столбцы с номерами $k - r, k - r - d, k - r - 2d, \dots$ линейно зависимы, так как в них ненулевые элементы могут стоять только на пересечении с этими строками. Опять же $\det A = 0$ и мы имеем $\chi^\lambda(\pi) = 0$.

Мы получаем условие для $0 \leq r < d$

$$q_r = e((k - r - 1)/d) + 1. \quad (1)$$

Итак, если (1) не выполнено, то $\chi^\lambda(\pi) = 0$. Пусть далее (1) выполняется. Перестановкой строк и столбцов приведем матрицу A к блочно-диагональному виду:

$A' = \text{diag}(A_0, A_1, \dots, A_{d-1})$. Размеры блока A_r есть $q_r \times q_r$, вид блока A_r показан ниже. Имеем

$$\det A = (-1)^t \prod_{r=0}^{d-1} \det A_r,$$

где t — число перестановок строк и столбцов.

Пусть $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, $p = q_r$, — номера строк матрицы A такие, что $h_{i_1 1} \equiv h_{i_2 1} \equiv \dots \equiv h_{i_p 1} \equiv r \pmod{d}$, обозначим $f_{i_s} = (h_{i_s 1} - r)/d$. Тогда для $0 \leq r < d$ имеем

$$\begin{aligned} \det A_r &= \begin{vmatrix} \frac{1}{(f_{i_1} - q_r + 1)!} & \dots & \frac{1}{(f_{i_1} - 1)!} & \frac{1}{f_{i_1}!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{1}{(f_{i_p} - 1)!} & \frac{1}{f_{i_p}!} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{f_{i_1}! \dots f_{i_p}!} \begin{vmatrix} f_{i_1}(f_{i_1} - 1) \dots (f_{i_1} - q_r + 2) & \dots & f_{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i_p}(f_{i_p} - 1) \dots (f_{i_p} - q_r + 2) & \dots & f_{i_p} & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Последний определитель сводится к определителю Вандермонда. Нужно только из j -го столбца вычесть некоторую линейную комбинацию столбцов с номерами $j + 1, j + 2, \dots, k$. Имеем

$$\det A_r = \frac{\prod_{1 \leq j < s \leq q_r} (f_{i_j} - f_{i_s})}{f_{i_1}! \dots f_{i_p}!} = \frac{\prod_{j < s} ((h_{i_j 1} - h_{i_s 1})/d)}{e(h_{i_1 1}/d)! \dots e(h_{i_p 1}/d)!},$$

где $e(x)$ — целая часть числа x . Тогда

$$\prod_{r=0}^{d-1} \det A_r = \frac{\prod_{\substack{i < j \\ d | (h_{i 1} - h_{j 1})}} ((h_{i 1} - h_{j 1})/d)}{\prod_{i=1}^k e(h_{i 1}/d)!}. \quad (2)$$

Рассмотрим (вообще говоря не прямоугольную) таблицу M_λ :

$$\begin{bmatrix} h_{11}, & h_{11} - 1, & h_{11} - 2, & \dots, & 2, & 1 \\ h_{21}, & h_{21} - 1, & \dots, & 2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k1}, & \dots, & 2, & 1 \end{bmatrix}.$$

Если из i -й строки выбросить числа $h_{i1} - h_{j1}$, где $1 \leq i < j \leq k$, то получим таблицу, элементы которой совпадают с элементами графа крюков диаграммы $[\lambda]$. Поэтому произведение чисел, входящих в таблицу M_λ и делящихся на d , отличается от произведения чисел, которые делятся на d , в графе крюков диаграммы $[\lambda]$ на

$$\prod_{\substack{i < j \\ d | (h_{i 1} - h_{j 1})}} (h_{i 1} - h_{j 1}).$$

Другими словами, знаменатель дроби (2) нацело делится на числитель. Получаем

$$\prod_{r=0}^{d-1} \det A_r = \left(\prod_{d|h_{ij}} (h_{ij}/d) \right)^{-1},$$

где произведение в правой части берется по всем (i, j) . Тогда

$$\chi^\lambda(\pi) = (n/d)! \det A = (n/d)! (-1)^t \prod_{r=0}^{d-1} \det A_r = \frac{(-1)^t (n/d)! d^{c_\lambda}}{\prod_{d|h_{ij}} h_{ij}}.$$

Нам осталось доказать, что условие (1) эквивалентно условию $c_\lambda = n/d$. Количество чисел, которые делятся на d , в таблице M_λ равняется

$$\sum_{i=1}^k e(h_{i1}/d).$$

Так как количество h_{i1} таких, что $h_{i1} \equiv r \pmod{d}$ равняется q_r , то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k e(h_{i1}/d) &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k h_{i1} - \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} r q_r \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k (\lambda_i + k - i) - \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} r q_r \\ &= \frac{1}{d} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=1}^k (k - i) \right) - \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} r q_r \\ &= \frac{1}{d} \left(n + \frac{k(k-1)}{2} \right) - \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} r q_r. \end{aligned}$$

Количество чисел, делящихся на d , среди чисел $h_{i1} - h_{j1}$, где $1 \leq i < j \leq k$, равняется

$$\sum_{r=0}^{d-1} \frac{q_r(q_r - 1)}{2}.$$

Поэтому количество чисел, которые делятся на d , в графе крюков диаграммы равно

$$c_\lambda = \frac{n}{d} + \frac{k^2 - k}{2d} - \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} r q_r - \sum_{r=0}^{d-1} \frac{q_r(q_r - 1)}{2}.$$

Заметив, что $k = \sum_{r=0}^{d-1} q_r$, имеем

$$\begin{aligned} c_\lambda &= \frac{n}{d} - \frac{1}{2d} \left(- \left(\sum_{r=0}^{d-1} q_r \right)^2 + \sum_{r=0}^{d-1} q_r + 2 \sum_{r=0}^{d-1} r q_r + d \sum_{r=0}^{d-1} q_r^2 - d \sum_{r=0}^{d-1} q_r \right) \\ &= \frac{n}{d} - \frac{1}{2d} \left((d-1) \sum_{r=0}^{d-1} q_r^2 - 2 \sum_{0 \leq j < i \leq d-1} q_i q_j + \sum_{r=0}^{d-1} (1 + 2r - d) q_r \right) \\ &= \frac{n}{d} - \frac{1}{2d} \left(\sum_{0 \leq j < i \leq d-1} (q_i - q_j)^2 + \sum_{0 \leq j < i \leq d-1} (q_i - q_j) \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$c_\lambda = \frac{n}{d} - \frac{1}{2d} \sum_{0 \leq i < j \leq d-1} ((q_i - q_j)^2 + (q_i - q_j)). \quad (3)$$

Пусть $k - 1 \equiv s \pmod{d}$, $0 \leq s < d$, тогда, очевидно, (1) равносильно системе

$$\begin{cases} q_0 = q_1 = \cdots = q_s = (k - s - 1)/d + 1, \\ q_{s+1} = q_{s+2} = \cdots = q_{d-1} = q_s - 1. \end{cases} \quad (4)$$

Докажем теперь эквивалентность выполнения системы (4) и равенства $c_\lambda = n/d$. Пусть выполнено (4). Тогда при $0 \leq j < i \leq d-1$ либо $q_i - q_j = 0$, либо $q_i - q_j = -1$. Подставляя любое из возможных значений разности в (3), получаем, что каждое слагаемое в сумме равно нулю, и, следовательно, $c_\lambda = n/d$. Пусть теперь $c_\lambda = n/d$, тогда из (3) имеем

$$\sum_{0 \leq j < i \leq d-1} ((q_i - q_j)^2 + (q_i - q_j)) = 0. \quad (5)$$

Но так как $q_i - q_j$ — целое число, то для всех i, j

$$(q_i - q_j)^2 + (q_i - q_j) \geq 0,$$

поэтому из (5) имеем для $0 \leq j < i \leq d-1$

$$(q_i - q_j)^2 + (q_i - q_j) = 0.$$

То есть при $j < i$ либо $q_i = q_j$, либо $q_i = q_j - 1$. Рассмотрим максимальное $s', 0 \leq s' < d$, такое, что $q_{s'} = q_0$. Тогда при $r < s'$ выполняется $q_r = q_0$. Действительно, пусть $q_r = q_0 - 1$. Тогда $q_{s'} = q_r + 1$, что невозможно. Из выбора s' следует, что при $r > s'$ выполняется $q_r = q_0 - 1$. Тогда

$$k = \sum_{r=0}^{d-1} q_r = dq_0 - (d-1-s'),$$

то есть $k - 1 \equiv s' \pmod{d}$. Таким образом, система (4) выполняется. Мы тем самым доказали, что условие (1) и условие $c_\lambda = n/d$ равносильны.

Наша теорема полностью доказана.

Знак характера $\chi^\lambda(\pi)$, т.е. число $(-1)^t$, можно вычислить как знак перестановки симметрической группы S_k . Эту перестановку можно узнать, посмотрев, например, произведение каких элементов матрицы A соответствует произведению всех диагональных элементов всех блоков $A_1, A_2, \dots, A_{d-1}$. Но мы хотим определить знак характера иным путем.

Для любого собственного разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ числа $n = ld$ можно построить таблицу M_λ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 + k, & (\lambda_1 - 1 + k) - 1, & \dots, & 2, & 1 \\ \lambda_2 - 2 + k, & (\lambda_2 - 2 + k) - 1, & \dots, & 2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k, & \lambda_k - 1, & \dots, & 1 \end{bmatrix}.$$

Причем, если $\lambda_k = 0$, то последняя строка отсутствует. Введем множество Ω_λ чисел a с условием $d \mid a$, $a = (\lambda_i - i + k) - (\lambda_j - j + k)$, для подходящих $1 \leq i < j \leq k$. Из определения следует, что c_λ равно разности количества чисел, делящихся на d в таблице M_λ , и количества чисел множества Ω_λ . Рассмотрим разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ и $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0)$ числа n . Тогда, если приписать слева к таблице M_λ столбец

$$\begin{array}{c} \lambda_1 - 1 + k + 1 \\ \lambda_2 - 2 + k + 1 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_k + 1 \end{array},$$

то мы получим таблицу $M_{\lambda'}$. Используя определение, имеем, что число $c_{\lambda'} - c_\lambda$ равняется разности количества чисел, делящихся на d в добавленном столбце, и порядка множества $\Omega_{\lambda'} \setminus \Omega_\lambda$. Но множество $\Omega_{\lambda'} \setminus \Omega_\lambda$ состоит из чисел столбца. Итак, $c_{\lambda'} = c_\lambda$. Таким образом, число c_λ одно и то же для всех разбиений, отличающихся от λ лишь нулевыми частями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ – собственное разбиение числа n , μ – разбиение числа $n - d$, причем диаграмма $[\mu]$ получается удалением из диаграммы $[\lambda]$ косого крюка длины d , расположенного в строках с номерами от α до $\alpha + \beta$. Рассмотрим матрицу $B = ([b_{ij}])$, которая отличается от матрицы $([\lambda_i - i + j])$ только тем, что в строке под номером α элемент j -го столбца имеет вид $[b_{\alpha j}] = [\lambda_\alpha - \alpha + j - d]$. Тогда

$$\chi^\mu = \chi^{(-1)^\beta \det B}.$$

А при $n = ld$, будем иметь

$$c_\lambda - c_\mu = 1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν_s – число клеток в строке с номером s , которые принадлежат косому крюку $[\lambda] \setminus [\mu]$. Так как косой крюк имеет длину d и расположен в строках с номерами от α по $\alpha + \beta$, то:

- (i) $\nu_s = \lambda_s - \mu_s$;
- (ii) $\nu_s = 0$ при $s < \alpha$ либо $s > \alpha + \beta$;
- (iii) $\sum_{s=\alpha}^{\alpha+\beta} \nu_s = d$;
- (iv) $\lambda_s - \nu_s = \lambda_{s+1} - 1$ при $\alpha \leq s < \alpha + \beta$.

Сложив все равенства (iii) и (iv), получим

$$\lambda_\alpha + \nu_{\alpha+\beta} = \lambda_{\alpha+\beta} - \beta + d$$

или

$$\lambda_{\alpha+\beta} - \nu_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha - d + \beta.$$

Вспоминая (i), (ii), (iv), мы получаем:

$$\begin{aligned} \mu_s &= \lambda_s \quad \text{при } s < \alpha \quad \text{либо } s > \alpha + \beta; \\ \mu_s &= \lambda_{s+1} - 1 \quad \text{при } \alpha \leq s < \alpha + \beta; \\ \mu_{\alpha+\beta} &= \lambda_\alpha - d + \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $([\mu_i - i + j])$ отличается от матрицы B лишь циклической перестановкой строк с α по $\alpha + \beta$, т.е.

$$\det B = (-1)^\beta \det([\mu_i - i + j]).$$

Применяя детерминантную форму, получаем

$$\chi^\mu = \chi^{\det([\mu_i - i + j])} = \chi^{(-1)^\beta \det B}.$$

Заметим, что β — это длина ноги косоугольного крюка $[\lambda] \setminus [\mu]$. Пусть $n = ld$. Если к таблице M_μ добавить к строке под номером $\alpha + \beta$ числа $\lambda_\alpha - \alpha + k, \lambda_\alpha - \alpha + k - 1, \dots, \lambda_\alpha - \alpha + k - d + 1$ и циклически переставить строки, то мы получим таблицу M_λ . Следовательно, количество чисел, делящихся на d , в таблице M_λ на единицу больше чем количество чисел, делящихся на d , в таблице M_μ .

Порядок множеств Ω_λ и Ω_μ одинаков. Тогда имеем

$$c_\lambda - c_\mu = 1.$$

Что и требовалось.

Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Диаграмма $[\lambda]$ есть *объединение косых крюков*, если существует такая последовательность диаграмм $[\lambda^i]$, $0 \leq i \leq l$, что выполнены следующие условия:

- а) $[\lambda^0] = [\lambda]$, $[\lambda^l]$ — нулевая диаграмма;
- б) для всех i , $0 \leq i \leq l$, диаграмма $[\lambda^{i+1}]$ является поддиаграммой диаграммы $[\lambda^i]$ и при этом $[\lambda^i] \setminus [\lambda^{i+1}]$ является косым крюком диаграммы $[\lambda^i]$;
- в) $[\lambda] = \bigcup_{i=0}^l ([\lambda^i] \setminus [\lambda^{i+1}])$.

Соответственно, мы будем говорить, что диаграмма $[\lambda]$ есть объединение косых крюков длины d , если для всех i $[\lambda^i] \setminus [\lambda^{i+1}]$ — косой крюк длины d в диаграмме $[\lambda^i]$.

В дальнейшем мы будем использовать естественное взаимно однозначное соответствие между крюками и косыми крюками диаграммы $[\lambda]$ [2, лемма 18.4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Для разбиения λ числа n , $n = ld$, следующие условия эквивалентны:

- а) $c_\lambda = n/d$;
- б) диаграмма $[\lambda]$ есть объединение косых крюков длины d ;
- в) $\chi^\lambda(\pi) \neq 0$, $\pi \in d^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $l = n/d$. При $l = 1$ наше утверждение очевидно, так как $c_\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда диаграмма сама является крюком. Из основной теоремы следует, что условия а) и в) эквивалентны. Докажем эквивалентность условий а) и б). Пусть выполнено условие а), т.е. $c_\lambda = n/d$. Обозначим через s минимальное число в графе крюков диаграммы $[\lambda]$, делящееся на d . Докажем, что $s = d$. Пусть s стоит в графе крюков диаграммы на (i, j) месте,

$s = cd$, $c > 1$. Рассмотрим косой крюк, соответствующий крюку (i, j) . Начиная с i -й строки отметим подряд d клеток границы диаграммы, принадлежащие выбранному косому крюку. Если последняя из отмеченных клеток является нижней клеткой столбца, то при удалении отмеченных клеток получится поддиаграмма диаграммы $[\lambda]$. То есть отмеченные клетки образуют косой крюк длины d , а ему соответствует крюк длины d и число d в графе крюков. Это противоречит минимальности числа s .

Если же последняя из отмеченных клеток не нижняя в соответствующем столбце, то оставшиеся не отмеченными $s - d$ клеток косого крюка сами образуют косой крюк длины $s - d$, и ему соответствует число $s - d$ в графе крюков. Опять получаем противоречие с минимальностью числа s .

Итак $s = d$, и наш рассмотренный косой крюк имеет длину d . Удаляя его из $[\lambda]$, получаем диаграмму $[\mu]$ и, используя равенство (6), вытекающее из предложения 2.5, получаем

$$c_\mu = c_\lambda - 1 = n/d - 1 = (n - d)/d.$$

Применяем индукционное предположение для диаграммы $[\mu]$ и получаем требуемое разбиение диаграммы $[\lambda]$ на косые крюки и выполнение б). Пусть теперь б) выполнено. То есть $[\lambda]$ есть объединение косых крюков длины d . Тогда существует диаграмма $[\mu]$ такая, что $[\lambda] \setminus [\mu]$ — косой крюк длины d . Из (6) получаем

$$c_\lambda = c_\mu + 1.$$

По индукционному предположению для $[\mu]$ выполнено

$$c_\mu = n/d - 1.$$

Получаем

$$c_\lambda = n/d,$$

что и требовалось.

Пусть далее $\pi \in \{d^l\}$, $\tau \in \{d^{l-1}\}$. Матрице B из предложения 2.5 поставим в соответствие числовую матрицу A' способом, описанным в начале доказательства основной теоремы. Будем иметь

$$\chi^\mu(\tau) = \chi^{(-1)^\beta \det B} = (-1)^\beta ((n - d)/d)! \det A'. \quad (7)$$

Теперь мы можем доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть диаграмма $[\lambda]$ есть объединение l косых крюков длины d с длинами ног β_i . Тогда

$$\operatorname{sgn} \chi^\lambda(\pi) = (-1)^{\sum_{i=1}^l \beta_i}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по l . Если $l = 1$, то $[\lambda]$ является крюком с длиной ноги β_1 и тогда имеем согласно [2, п. 21.4]

$$\chi^\lambda(\pi) = (-1)^{\beta_1}.$$

Итак, пусть теперь $\tau \in \{d^{l-1}\}$, а $[\mu]$ — диаграмма, получающаяся удалением из диаграммы $[\lambda]$ косоугольного крюка длины d , расположенного в строках с номерами от α до $\alpha + \beta$. Тогда по индукционному предположению

$$\operatorname{sgn} \chi^\mu(\tau) = (-1)^{\sum_{i=2}^l \beta_i}. \quad (9)$$

Из основной теоремы следует, что

$$\chi^\lambda(\pi) = l! \det A.$$

Из (7) мы имеем

$$\chi^\mu(\tau) = (-1)^{\beta_1} (l-1)! \det A'.$$

При этом матрицы A и A' отличаются только строкой с номером α . Одинаковыми перестановками строк и столбцов приводим матрицы A и A' к блочно-диагональному виду. Так как диаграмма $[\lambda]$ является объединением косых крюков длины d , то из (6) имеем $c_\lambda = n/d$, $c_\mu = n/d - 1$. Из основной теоремы получаем $\det A \neq 0$, $\det A' \neq 0$, причем $\det A > 0$, $0 \leq i < d$. Пусть $h \equiv s \pmod{d}$, где $h_{\alpha 1}$ — длина крюка $(\alpha, 1)$ диаграммы $[\lambda]$. Тогда и $h_{\alpha 1} - d \equiv s \pmod{d}$. Поэтому отличаются только блоки A_s и A'_s . Имеем при $i \neq s$,

$$\det A'_i = \det A_i.$$

В блоке A_s в последнем столбце элементы расположены по возрастанию, что дает $\det A_s > 0$. Но

$$(h_{\alpha 1} - d - s)/d = (h_{\alpha 1} - s)/d - 1 = f_\alpha - 1.$$

Значит, монотонность элементов последнего столбца и в блоке A'_s не нарушится. И мы получаем

$$\det A'_s \geq 0.$$

А так как $\det A' \neq 0$, то $\det A'_s > 0$. Тогда

$$\operatorname{sgn}(\det A) = \operatorname{sgn}(\det A'),$$

следовательно,

$$\operatorname{sgn} \chi^\lambda(\pi) = (-1)^{\beta_1} \operatorname{sgn} \chi^\mu(\tau).$$

И, используя (9), получаем требуемое.

§ 3. Некоторые следствия основного результата

В настоящем параграфе мы будем извлекать следствия из основной теоремы и предложения 2.8. Как и прежде считается $n = ld$, $\pi \in \{d^l\}$, а функция $e(x)$ означает целую часть числа x .

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть диаграмма $[\lambda]$ есть крюк с длиной ноги $k-1$, т.е. $\lambda = (m, 1^{k-1})$, где $m+k-1 = n$. Тогда

$$\chi^\lambda(\pi) = (-1)^{k-1-e((k-1)/d)} \frac{(n/d-1)!}{e((m-1)/d)!e((k-1)/d)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нарисуем граф крюков диаграммы $[\lambda]$:

n	$m-1$	$m-2$	$\dots$	1
$k-1$				
$\vdots$				
2				
1				

Тогда

$$\prod_{d|h_{ij}} \frac{h_{ij}}{d} = \frac{n}{d} e\left(\frac{m-1}{d}\right)! e\left(\frac{k-1}{d}\right)!. \quad (10)$$

Если $d \mid (k-1)$, то диаграмма $[\lambda]$ есть объединение $(k-1)/d$ косых крюков с длинами ног $(d-1)$, и m/d косых крюков с длинами ног равными нулю. Следовательно,

$$\operatorname{sgn} \chi^\lambda(\pi) = (-1)^{(d-1)(k-1)/d} = (-1)^{k-1-(k-1)/d}.$$

Если $d \nmid (k-1)$, то диаграмма $[\lambda]$ является объединением $e((k-1)/d)$ косых крюков с длинами ног $d-1$, одного крюка с длиной ноги $k-1-de((k-1)/d)$, а длины ног остальных крюков равны нулю. Итак:

$$\operatorname{sgn} \chi^\lambda(\pi) = (-1)^{k-1-de((k-1)/d)+(d-1)e((k-1)/d)} = (-1)^{k-1-e((k-1)/d)}.$$

Применяя основную теорему, предложение 2.8 и равенство (10), получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если диаграммы $[\lambda]$ и $[\lambda^*]$ сопряжены, то

$$\chi^{\lambda^*}(\pi) = (-1)^{(d-1)n/d} \chi^\lambda(\pi). \quad (11)$$

$$|\chi^{\lambda^*}(\pi)| = |\chi^\lambda(\pi)|. \quad (12)$$

$$|\chi^{\lambda^*}(\pi)| = |\chi^\lambda(\pi)|. \quad (12)$$

$$\gamma_i + \beta_i + 1 = d.$$
$$\sum_i \gamma_i + \sum_i \beta_i = n - n/d. \quad (13)$$
$$\begin{aligned}\chi^\lambda(\pi) &= (-1)^{\sum_i \beta_i} |\chi^\lambda(\pi)|, \\ \chi^{\lambda^*}(\pi) &= (-1)^{\sum_i \gamma_i} |\chi^{\lambda^*}(\pi)|.\end{aligned}$$
$$\chi^{\lambda^*}(\pi) = (-1)^{n-n/d-\sum_i \beta_i} |\chi^\lambda(\pi)| = (-1)^{(d-1)n/d} \chi^\lambda(\pi).$$

a) $n_{pu} \lambda_1 \equiv -1 \pmod{d}$

$$\chi^\lambda(\pi) = -\frac{(n/d)!}{((\lambda_1 + 1)/d)!((\lambda_2 - 1)/d)!}; \quad (14)$$

$$\chi^\lambda(\pi) = \frac{(n/d)!}{(\lambda_1/d)! (\lambda_2/d)!}. \quad (15)$$

a) $\lambda_1 + 1 \equiv 0 \pmod{d}$;

Рассмотрим теперь случай а). Имеем $\lambda_2 \equiv 1 \pmod{d}$,

$$\prod_{d|h_{ij}} (h_{ij}/d) = ((\lambda_2 - 1)/d)! ((\lambda_1 + 1)/d)!.$$

		...	
	...		

Сумма длин ног дает нам

$$\operatorname{sgn} \chi^\lambda(\pi) = -1.$$

Используя основную теорему, получаем (14).

Рассмотрим теперь случай б). Имеем $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0 \pmod{d}$,

$$\prod_{d|h_{ij}} (h_{ij}/d) = (\lambda_1/d)! (\lambda_2/d)!.$$

А диаграмма $[\lambda]$ есть объединение косых крюков длины d с длинами ног равными нулю. Поэтому

$$\operatorname{sgn} \chi^\lambda(\pi) = 1.$$

И, используя основную теорему, получаем (15).

Заметим, что при $d = 1$ значение характера на единичном классе равняется размерности неприводимого S_n -модуля, отвечающего разбиению λ , т.е. при $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\pi \in \{1\}$

$$\chi^\lambda(\pi) = \frac{n! (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)}{(\lambda_1 + 1)! \lambda_2!},$$

что нам дает

$$\chi^\lambda(\pi) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2!} - \frac{n!}{(\lambda_1 + 1)! (\lambda_2 - 1)!}. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = (a^b)$, т.е. λ — это прямоугольник длины a и ширины b , $n = ab$, $\pi \in \{d^{n/d}\}$. Нас интересует значение $\chi^\lambda(\pi)$. Нетрудно показать, что $c_\lambda = n/d$, тогда и только тогда, когда одно из чисел a или b делится на d . Таким образом, если $d \nmid a$ и $d \nmid b$, то $c_\lambda \neq n/d$ и $\chi^\lambda(\pi) = 0$. Достаточно теперь рассмотреть случай, когда a делится нацело на d . Поскольку если b делится на d , то мы можем рассмотреть сопряженную диаграмму и использовать следствие 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $\lambda = (a^b)$, $n = ab$, $\pi \in \{d^{n/d}\}$, $a = pq$, $b = qd + r$, где $p, q, r \in \mathbb{Z}$, $p > 0$, $q \geq 0$, $0 \leq r < d$. Тогда

$$\chi^\lambda(\pi) = \frac{(n/d)!}{\left(p! \cdot \frac{(p+1)!}{1!} \cdot \dots \cdot \frac{(p+q-1)!}{(q-1)!}\right)^d \left(\frac{(p+q)!}{q!}\right)^r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждая строка нашего прямоугольника разбивается на p прямоугольников размера $d \times 1$, то диаграмма $[\lambda]$ есть объединение косых крюков длины d с длинами ног, равными нулю. Следовательно, $\operatorname{sgn} \chi^\lambda(\pi) = 1$. Знаменатель дроби в точности равен произведению чисел, делящихся на d , в графе крюков диаграммы $[\lambda]$, деленных на d . Для завершения доказательства осталось использовать теорему 2.4 и предложение 2.8.

В завершение этого раздела рассмотрим представление группы S_{m+n} , индуцированное с тензорного произведения неприводимых представлений групп S_n и S_m , отвечающих диаграммам Юнга $[\lambda]$ и $[\mu]$, соответственно. Характер этого представления обозначим через $\chi^{[\lambda;\mu]}(\pi)$. Этому представлению ставится в соответствие косая диаграмма $[\lambda; \mu]$, полученная из диаграмм $[\lambda]$ и $[\mu]$:

Аналогично предыдущему можно ввести понятие крюка (i, j) , косо́го крюка, ноги косо́го крюка и т. п. для косо́й диаграммы $[\lambda; \mu]$. Более подробно об этом представлении можно узнать в [6, п. 4.47–4.51]. Нам понадобится обобщение правила Мурнагана–Накаямы [2, п. 21.1], [6, п. 4.45], полученное Ошмой.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\pi\rho \in S_{m+n}$, где ρ – цикл длины r , а π – перестановка остальных $m + n - r$ символов. Тогда

$$\chi^{[\lambda;\mu]}(\pi\rho) = \sum (-1)^{\beta_{ij}} \chi^{[\lambda';\mu']}(\pi), \quad (17)$$

где $[\lambda; \mu] \setminus [\lambda'; \mu']$ – косо́й крюк длины r , β_{ij} – длина ноги этого косо́го крюка, а суммирование ведется по всем косо́ым крюкам (i, j) длины r из косо́й диаграммы $[\lambda; \mu]$. Мы также полагаем $\chi^{(0)} = 1$.

Доказательство см. [6, п. 4.45].

Пусть теперь $n + m = ld$, $\pi \in \{d^l\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. а) Если $d \nmid n$, то

$$\chi^{[\lambda;\mu]}(\pi) = 0.$$

б) Если $d \mid n$, $d \mid m$, $\pi_1 \in \{d^{n/d}\}$, $\pi_2 \in \{d^{m/d}\}$, тогда

$$\chi^{[\lambda;\mu]}(\pi) = \frac{((m+n)/d)!}{(m/d)!(n/d)!} \chi^\lambda(\pi_1) \chi^\mu(\pi_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по l . Если $l = 1$, то, согласно теореме 3.5, в случае а) получаем, что в сумме (17) нет ни одного слагаемого, т.е.

$$\chi^{[\lambda;\mu]}(\pi) = 0.$$

Случай б) сводится к вычислению значения характера, когда одна из диаграмм $[\lambda]$, $[\mu]$ пустая, а другая – крюк длины d , и также выполняется [2, п. 21.4]. Основание индукции выполнено. Пусть теперь наше утверждение выполняется для всех значений n_1 и m_1 таких, что $n_1 + m_1 = l_1 d$, $l_1 < l$. Докажем его для чисел n , m

таких, что $n + m = ld$. Полагаем $\pi = \pi' \rho$, где $\pi' \in \{d^{l-1}\}$, $\rho \in \{d\}$, $\pi \in \{d^l\}$. Используя (17), получаем

$$\chi^{[\lambda; \mu]}(\pi) = \sum (-1)^{\beta_{ij}} \chi^{[\lambda'; \mu']}(\pi') = \sum_1 (-1)^{\beta_{ij}} \chi^{[\lambda; \mu']}(\pi') + \sum_2 (-1)^{\beta_{pq}} \chi^{[\lambda'; \mu]}(\pi'),$$

где первая сумма считается по всем косым крюкам (i, j) длины d , полностью лежащим в диаграмме $[\mu]$, а вторая сумма – по всем косым крюкам (p, q) длины d , принадлежащим диаграмме $[\lambda]$.

Теперь можно применить индукционное предположение для косых диаграмм $[\lambda; \mu']$ и $[\lambda'; \mu]$. В случае а) обе суммы будут нулевыми. В случае б) обозначим $\pi'_2 \in \{d^{m/d-1}\}$. Получаем

$$\begin{aligned} \sum_1 (-1)^{\beta_{ij}} \chi^{[\lambda; \mu']}(\pi') &= \sum_1 (-1)^{\beta_{ij}} \frac{((m+n-d)/d)!}{(n/d)! ((m-d)/d)!} \chi^\lambda(\pi_1) \chi^{\mu'}(\pi'_2) \\ &= \frac{((m+n-d)/d)!}{(n/d)! ((m-d)/d)!} \chi^\lambda(\pi_1) \sum_1 (-1)^{\beta_{ij}} \chi^{\mu'}(\pi'_2) \\ &= \frac{((m+n-d)/d)!}{(n/d)! ((m-d)/d)!} \chi^\lambda(\pi_1) \chi^\mu(\pi_2). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\sum_2 (-1)^{\beta_{pq}} \chi^{[\lambda'; \mu]}(\pi') = \frac{((m+n-d)/d)!}{((n-d)/d)! (m/d)!} \chi^\lambda(\pi_1) \chi^\mu(\pi_2).$$

Сложив значения первой и второй суммы, получим требуемое.

§ 4. Связь с размерностями однородных компонент

Пусть F – поле, $\text{char } F = 0$, $(\varepsilon, 1/n) \in F$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ – разбиение числа n . Обозначим через ψ точный неприводимый характер подгруппы $\Gamma = \langle \tau \rangle_n \subset S_n$, действующей на F , где $\tau \in \{n\}$. Если χ и χ' – характеры G над F , то (χ, χ') – обычное скалярное произведение характеров.

Из [1, п. 3.4.7] мы имеем

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = (\psi, \chi^\lambda \downarrow \Gamma)_\Gamma = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/d}). \quad (18)$$

Значение $\chi^\lambda(\tau^{n/d})$ нам дает основная теорема, поскольку $\tau^{n/d} \in \{d^{n/d}\}$. Итак, зная разбиение λ , мы получаем численное значение для $m(V_\lambda, L_n(V))$. Явные формулы для вычисления $m(V_\lambda, L_n(V))$ можно получить также с использованием результатов статьи [5]. Имеем

$$\begin{aligned} (\psi \uparrow S_n, 1_{S_\lambda} \uparrow S_n)_{S_n} &= \dim_F L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}(Y) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|\lambda_1, \dots, \lambda_k} \mu(d) \frac{(n/d)!}{(\lambda_1/d)! \dots (\lambda_k/d)!}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}(Y)$ – полиоднородная компонента в $L(Y)$.

Положим

$$\dim_F L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}(Y) = l_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}.$$

Используя (19) и закон взаимности Фробениуса, получаем

$$(\psi, (1_{S_\lambda} \uparrow S_n) \downarrow \Gamma)_\Gamma = l_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}, \quad (20)$$

но

$$1_{S_\lambda} \uparrow S_n = \chi^{[\lambda_1] \dots [\lambda_k]},$$

и, используя детерминантную форму из (18), (20), получаем

$$\begin{aligned} m(V_\lambda, L_n(V)) &= (\psi, \chi^\lambda \downarrow \Gamma)_\Gamma = (\psi, \chi^{\det([\lambda_i - i + j])} \downarrow \Gamma)_\Gamma \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma (\psi, \chi^{[\lambda_1 - 1 + \sigma(1)][\lambda_2 - 2 + \sigma(2)] \dots [\lambda_k - k + \sigma(k)]} \downarrow \Gamma)_\Gamma \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma l_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1), \lambda_2 - 2 + \sigma(2), \dots, \lambda_k - k + \sigma(k)}, \end{aligned}$$

где последнее суммирование ведется по тем σ , для которых $\lambda_i - i + \sigma(i) \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Итак:

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma l_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1), \lambda_2 - 2 + \sigma(2), \dots, \lambda_k - k + \sigma(k)}. \quad (21)$$

Мы нашли два основных способа подсчета числа $m(V_\lambda, L_n(V))$. С помощью основной теоремы и формулы (18) или с помощью формулы (21). Формулу (21) удобно применять, если число строк в диаграмме невелико. Подсчитаем $m(V_\lambda, L_n(V))$ для некоторых частных случаев.

Как и прежде, $e(x)$ обозначает целую часть числа x .

Пусть $\lambda = (n - k + 1, 1^{k-1})$. Обозначим $m_k = m(V_\lambda, L_n(V))$. Используя формулу (18) и следствие 3.1, получаем

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) (-1)^{k-1-e((k-1)/d)} \frac{(n/d-1)!}{e((n-k)/d)! e((k-1)/d)!}.$$

Заметим, что $m_1 = 0$. Если $d \mid n$ и $d \nmid (k-1)$, то

$$e((k-1)/d) = e((k-2)/d)$$

и

$$e((n-k+1)/d) = e((n-k)/d).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
m_k + m_{k-1} &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) (-1)^{k-1-e((k-1)/d)} \frac{(n/d-1)!}{e((n-k)/d)! e((k-1)/d)!} \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) (-1)^{k-2-e((k-2)/d)} \frac{(n/d-1)!}{e((n-k+1)/d)! e((k-2)/d)!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{d|n, k-1} \mu(d) \left((-1)^{(k-1)(d-1)/d} \frac{(n/d-1)!}{((n-k+1)/d-1)! ((k-1)/d)!} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{k-2-(k-1)/d+1} \frac{(n/d-1)!}{((n-k+1)/d)! ((k-1)/d-1)!} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{d|n, k-1} \mu(d) (-1)^{(d-1)(k-1)/d} \frac{(n/d)!}{((n-k+1)/d)! ((k-1)/d)!}.
\end{aligned}$$

Используя соотношение

$$m_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-1-i} (m_{i+1} + m_i),$$

получаем в итоге

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{d|n, i} \mu(d) (-1)^{k-1-i+(d-1)i/d} \frac{(n/d)!}{((n-i)/d)! (i/d)!}. \quad (22)$$

Если n – нечетное число, то формула (22) упрощается. Поскольку все делители числа n нечетны, то

$$(-1)^{i(d-1)/d} = 1,$$

тогда для $k > 1$ имеем

$$m_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-1-i} l_{n-i, i}.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_2 \geq 1$. Из (21) получаем

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1}. \quad (23)$$

Заметим, что последнюю формулу можно получить, используя следствие 3.4 и

формулы (16) и (18). Обозначив через Id единицу группы S_n , имеем

$$\begin{aligned}
m(V_\lambda, L_n(V)) &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/d}) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/d}) + \chi^\lambda(\text{Id}) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{d|\lambda_1, \lambda_2 \\ d \neq 1}} \mu(d) \frac{(n/d)!}{((\lambda_1)/d)! ((\lambda_2)/d)!} \right. \\
&\quad - \sum_{\substack{d|\lambda_1+1, \lambda_2-1 \\ d \neq 1}} \mu(d) \frac{(n/d)!}{((\lambda_1+1)/d)! ((\lambda_2-1)/d)!} \\
&\quad \left. + \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2!} - \frac{n!}{(\lambda_1+1)! (\lambda_2-1)!} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{d|\lambda_1, \lambda_2} \mu(d) \frac{(n/d)!}{(\lambda_1/d)! (\lambda_2/d)!} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{d|\lambda_1+1, \lambda_2-1} \mu(d) \frac{(n/d)!}{((\lambda_1+1)/d)! ((\lambda_2-1)/d)!} \right) \\
&= l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь λ^* – это разбиение, сопряженное разбиению λ числа n . Как и ранее $\tau \in \{n\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)). \quad (24)$$

Если $n \equiv 2 \pmod{4}$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)) + \frac{2}{n} \sum_{d|(n/2)} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/2d}). \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (18) и следствие 3.2, имеем

$$\begin{aligned}
m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) - m(V_\lambda, L_n(V)) &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \chi^{\lambda^*}(\tau^{n/d}) - \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/d}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) ((-1)^{n(d-1)/d} \chi^\lambda(\tau^{n/d}) - \chi^\lambda(\tau^{n/d})) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) ((-1)^{n(d-1)/d} - 1) \chi^\lambda(\tau^{n/d}).
\end{aligned}$$

Если число n нечетно, то его делители также нечетны и, следовательно, $(d-1)$ – четное число, т.е. для всех d , $d \mid n$,

$$(-1)^{(d-1)n/d} - 1 = 0.$$

Если же $n \equiv 0 \pmod{4}$, то либо n/d четно и тогда

$$(-1)^{(d-1)n/d} - 1 = 0,$$

либо $d \equiv 0 \pmod{4}$ и тогда $\mu(d) = 0$. Таким образом, при $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ каждое слагаемое в последней сумме равно нулю и, следовательно, выполняется (24). Если же $n \equiv 2 \pmod{4}$, то продолжив преобразования, имеем

$$\begin{aligned} m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) - m(V_{\lambda}, L_n(V)) &= -\frac{2}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ 2 \mid d}} \mu(d) \chi^{\lambda}(\tau^{n/d}) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{d \mid (n/2)} \mu(d) \chi^{\lambda}(\tau^{n/2d}). \end{aligned}$$

Что и требовалось.

Пусть опять $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_2 \geq 1$, тогда $\lambda^* = (2^{\lambda_2}, 1^{\lambda_1 - \lambda_2})$. Если $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, то согласно предложению 4.1 и формуле (23) имеем

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1}. \quad (26)$$

Подсчитаем $m(V_{\lambda^*}, L_n(V))$, если $n \equiv 2 \pmod{4}$. Используя (14) и (15), имеем

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{d \mid (n/2)} \mu(d) \chi^{\lambda}(\tau^{n/2d}) &= \frac{2}{n} \sum_{\substack{d \mid (n/2) \\ (2d) \mid \lambda_1}} \mu(d) \frac{(n/(2d))!}{(\lambda_1/(2d))! (\lambda_2/(2d))!} \\ &\quad - \frac{2}{n} \sum_{\substack{d \mid (n/2) \\ (2d) \mid (\lambda_1+1)}} \mu(d) \frac{(n/(2d))!}{((\lambda_1+1)/(2d))! ((\lambda_2-1)/(2d))!}. \end{aligned}$$

Если λ_1 четно, то вторая сумма отсутствует, и мы получаем

$$\frac{2}{n} \sum_{d \mid (n/2)} \mu(d) \chi^{\lambda}(\tau^{n/2d}) = l_{\lambda_1/2, \lambda_2/2}.$$

Если λ_1 нечетно, то отсутствует первая сумма и получается

$$\frac{2}{n} \sum_{d \mid (n/2)} \mu(d) \chi^{\lambda}(\tau^{n/2d}) = -l_{(\lambda_1+1)/2, (\lambda_2-1)/2}.$$

Применяя предложение 4.1 и формулу (23), получаем окончательный результат:

а) для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0 \pmod{2}$ имеем:

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} + l_{\lambda_1/2, \lambda_2/2};$$

б) для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 1 \pmod{2}$ получаем:

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} - l_{(\lambda_1+1)/2, (\lambda_2-1)/2}. \quad (27)$$

Из формул (22), (26) и (27), в частности, следует, что неприводимые $GL(V)$ модули, отвечающие за тождество энгелевости степени n (разбиение $\lambda = (n-1, 1)$) или за стандартное тождество степени n (разбиение $\lambda = (2, 1^{n-2})$), входят в $GL(V)$ разложение модуля $L_n(V)$ с единичной кратностью.

§ 5. Ряды Гильберта

Рассмотрим ряд, характеризующий двупорожденную свободную алгебру Ли $L(x_1, x_2)$ над полем F , $\text{char } F = 0$. Как и в § 4, обозначаем

$$\dim_F L_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x_1, x_2) = l_{\lambda_1, \lambda_2} = \frac{1}{n} \sum_{d|\lambda_1, \lambda_2} \mu(d) \frac{(n/d)!}{(\lambda_1/d)! (\lambda_2/d)!},$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = n$. Итак,

$$H(t, s) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} l_{\lambda_1, \lambda_2} t^{\lambda_1} s^{\lambda_2}.$$

Поскольку $l_{\lambda_1, \lambda_2} = l_{\lambda_2, \lambda_1}$, то $H(t, s) = H(s, t)$. Заметим, что при $\lambda_1 > 1$, имеем $l_{\lambda_1, 0} = 0$, и

$$l_{\lambda_1+1, \lambda_1} = \frac{1}{2\lambda_1+1} \frac{(2\lambda_1+1)!}{(\lambda_1+1)! \lambda_1!} = \frac{(2\lambda_1)!}{(\lambda_1+1)! \lambda_1!}. \quad (28)$$

Неприводимые $GL(2)$ модули $V_\lambda = T_n(V) \otimes_{FS_n} T_\lambda$ отличны от нуля, если диаграмма $[\lambda]$ содержит только две строки, т.е. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1$. Пусть $m(V_\lambda, L_n(V)) = m_{\lambda_1, \lambda_2}$. Теперь можно рассмотреть ряд кратностей неприводимых $GL(2)$ модулей в $GL(2)$ -разложении модуля $L(x_1, x_2)$:

$$K(t, s) = \sum_{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1} m_{\lambda_1, \lambda_2} t^{\lambda_1} s^{\lambda_2}.$$

Ряд $K(t, s)$ не симметричен относительно переменных s и t . В оставшейся части статьи мы получим равенство (31), связывающее ряды $H(t, s)$ и $K(t, s)$. Введем вспомогательные ряды:

$$A(t, s) = \sum_{\lambda_1 > \lambda_2 \geq 1} l_{\lambda_1, \lambda_2} t^{\lambda_1} s^{\lambda_2}, \quad B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} l_{k, k} x^k.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = -x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x}).$$

Если ее разложить в ряд, то получим

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+1)! k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} l_{k+1, k} x^k.$$

Домножив равенства (23) на $t^{\lambda_1} s^{\lambda_2}$ и просуммировав по всем $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1$, получим:

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \sum_{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1} l_{\lambda_1, \lambda_2} t^{\lambda_1} s^{\lambda_2} - \sum_{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1} l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} t^{\lambda_1} s^{\lambda_2} \\ &= \sum_{\lambda_1 > \lambda_2 \geq 1} l_{\lambda_1, \lambda_2} t^{\lambda_1} s^{\lambda_2} + \sum_{\lambda_1 = \lambda_2 \geq 1} l_{\lambda_1, \lambda_2} t^{\lambda_1} s^{\lambda_2} \\ &\quad - \frac{s}{t} \sum_{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 2} l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} t^{\lambda_1+1} s^{\lambda_2-1} \\ &= A(t, s) + B(ts) - \frac{s}{t} \left[\sum_{\nu_1 > \nu_2 \geq 1} l_{\nu_1, \nu_2} t^{\nu_1} s^{\nu_2} - \sum_{\substack{\nu_1 = \nu_2 + 1, \\ \nu_2 \geq 1}} l_{\nu_1, \nu_2} t^{\nu_1} s^{\nu_2} \right], \end{aligned}$$

и, используя (28), получаем

$$K(t, s) = A(t, s) + B(ts) - \frac{s}{t} \left[A(t, s) - \frac{g(ts)}{s} \right], \quad (29)$$

тогда

$$K(s, t) = A(s, t) + B(ts) - \frac{t}{s} \left[A(s, t) - \frac{g(ts)}{t} \right]. \quad (30)$$

Из равенств (29) и (30) получаем

$$tK(t, s) - sK(s, t) = (t - s)[A(t, s) + A(s, t) + B(ts)].$$

Но, очевидно,

$$H(t, s) = A(t, s) + A(s, t) + B(ts).$$

Получаем в итоге

$$(t - s)H(t, s) = tK(t, s) - sK(s, t). \quad (31)$$

Автор благодарит Ю. А. Бахтурина за помощь и поддержку, а также М. В. Зайцева за внимание к работе.

Список литературы

1. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
2. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.
3. *Журавлев В. М.* Кратности неприводимых компонент свободной алгебры Ли как модуля полной линейной группы // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1993. №2. С. 31–35.
4. *Мурнаган Ф.* Теория представлений групп. М.: ИЛ, 1950.
5. *Blessenohl O., Laue H.* On Witt's dimension formula for free Lie algebras and a theorem of Klyachko // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 40. P. 49–57.
6. *Kerber A.* Representations of permutation groups. I // Lect. Notes in Math. V. 240: Springer-Verlag.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.07.1995