Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Кузьмин, Группы заузленных компактных поверхностей и центральные расширения, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 2, 81–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:43:12

УДК 512.04

Ю. В. Кузьмин

Группы заузленных компактных поверхностей и центральные расширения

В статье дается гомологическая характеристика групп, допускающих задание с помощью определяющих соотношений вида $x_\alpha^{-1} x_\beta x_\alpha = x_\gamma^\varepsilon$ (x_* – образующие, $\varepsilon = \pm 1$). Важность таких групп для геометрии связана с тем, что конечно определенные группы рассматриваемого класса – это в точности группы заузленных в $\mathbb{R}^4$ компактных поверхностей.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Формулировка основных результатов

Если некоторый класс групп задан геометрически, естественно попытаться дать его описание в чисто алгебраических терминах. В качестве примера можно вспомнить исчерпывающее решение этой задачи для кристаллографических групп или для конечных групп, порожденных отражениями. Хорошо известна проблема алгебраической характеристики групп зацеплений и узлов, которая, однако, до сих пор не решена. Лишь начиная с размерности $n \geq 3$ получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы абстрактная группа была изоморфна группе n -мерного зацепления (соответственно, n -мерного узла). Напомним формулировку этого результата, принадлежащего М. Керверу [1].

Пусть $n \geq 3$. Группа G изоморфна группе n -мерного зацепления тогда и только тогда, когда она конечно определена, совпадает с нормальным замыканием подмножества, которое линейно независимо по модулю коммутанта, и $H_2 G = 0$.

В случае n -мерных узлов нужно потребовать, чтобы группа G была нормальным замыканием одного элемента. Тогда условие линейной независимости означает, что факторгруппа по коммутанту $G/G' = G_{ab}$ бесконечная циклическая.

Узлы и зацепления строятся с помощью отображений сферы. Как изменится ситуация, если рассматривать и другие компактные многообразия? В. Куликов доказал следующую теорему [2].

Пусть $n \geq 2$. Группа G изоморфна фундаментальной группе дополнения к n -мерному компактному многообразию, гладко вложенному в $\mathbb{R}^{n+2}$, тогда

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 940101575) и Международного научного фонда (грант № MDL 300).

и только тогда, когда она имеет конечное копредставление $G = \langle X \mid R \rangle$ с определяющими соотношениями вида

$$x_\alpha^{-1} x_\beta x_\alpha = x_\gamma^\varepsilon \quad (x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \in X; \varepsilon = \pm 1). \quad (1)$$

В частности, любая такая группа может быть реализована с помощью вложения компактной поверхности в четырехмерное пространство. Группы, допускающие копредставление с соотношениями вида (1), Куликов предложил называть *С-группами* (по первой букве слова *conjugation*).

С-группа называется *конечно определенной*, если соответствующее копредставление конечно. По разным поводам и под другими названиями С-группы встречались во многих работах (см., например, [3]–[7]). Они являются естественным обобщением групп одномерных узлов, заданных копредставлением Виртингера [8].

Если ограничиться ориентируемыми многообразиями, то в теореме, приведенной выше, нужно рассматривать соотношения (1) только с $\varepsilon = 1$. Соответствующие С-группы будем называть *ориентируемыми*. Для ориентируемых С-групп сформулированная теорема была доказана В. Куликовым [9] и, независимо, Дж. Хауви и Н. Гильбертом [10]. Отметим также, что вложениям связных многообразий соответствуют неприводимые С-группы. По определению С-группа G *неприводима*, если для любых образующих x, x' ее копредставления либо x , либо x^{-1} сопряжен с x' . Из соотношений (1) следует, что это имеет место тогда и только тогда, когда $G_{ab} \cong \mathbb{Z}$ или $G_{ab} \cong \mathbb{Z}_2$.

В принципе сформулированная теорема решает вопрос о характеристизации фундаментальных групп рассматриваемых пространств. Есть однако некоторое неудобство. Если задана абстрактная группа, то не ясно, как можно узнать, имеет ли она копредставление с определяющими соотношениями вида (1). Нам удалось получить ответ в терминах, неожиданно близких к теореме Кервера.

В работе [11] была обнаружена естественная связь С-групп с центральными расширениями и второй группой гомологий. Как было замечено в работе [10], если G – неприводимая ориентируемая С-группа, то H_2G является фактором централизатора $C(x)$ образующего $x \in X$ ее копредставления. Основной результат предлагаемой статьи состоит в том, что последнее свойство можно использовать для характеристики С-групп и, следовательно, для характеристики фундаментальных групп соответствующих дополнений. Чтобы дать точную формулировку, введем несколько определений.

Напомним, что если G – произвольная группа, то любым двум ее перестановочным элементам g, h соответствует элемент $g \wedge h \in H_2G$. В стандартной резольвенте $g \wedge h$ задается циклом $(g \mid h) - (h \mid g)$. Можно дать и другую интерпретацию. Представим G в виде факторгруппы $G = F/N$ свободной группы F . Тогда по формуле Хопфа $H_2G \cong N \cap F'/[N, F]$, а $g \wedge h$ – это коммутатор $[\bar{g}, \bar{h}]$ произвольных прообразов элементов g и h в группе $F/[N, F]$.

Пусть $C(g)$ – централизатор элемента $g \in G$. Тогда отображение $\rho_g: C(g) \rightarrow H_2G$, определенное равенством $\rho_g(h) = g \wedge h$ ($h \in C(g)$), является гомоморфизмом. Как легко следует из определений, образ ρ_g зависит лишь от класса сопряженности элемента g . Понятно также, что для любого подмножества $B \subseteq G$ определен

гомоморфизм

$$\rho_B: \bigoplus_{g \in B} C(g) \rightarrow H_2G,$$

ограничение которого на прямое слагаемое $C(g)$ совпадает с ρ_g .

Элемент $g \in G$ назовем *ориентируемым*, если g и g^{-1} не сопряжены, и *неориентируемым* – в противном случае. Для подмножества $B \subseteq G$ обозначим B^+ множество его ориентируемых, а B^- – неориентируемых элементов. Если $h^{-1}g^{-1}h = g$, то $[h, g] = g^2$, поэтому неориентируемый элемент либо принадлежит коммутанту, либо его образ в G_{ab} имеет порядок 2. Будем говорить, что множество $B \subseteq G$ линейно независимо с учетом ориентации по модулю коммутанта, если образы в G_{ab} элементов из B^+ линейно независимы в обычном смысле, а образы элементов из B^- линейно независимы mod 2. Теперь мы можем сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Группа G является C -группой тогда и только тогда, когда она совпадает с нормальным замыканием подмножества $B \subseteq G$, которое линейно независимо с учетом ориентации по модулю коммутанта, и отображение $\rho_B: \bigoplus_{g \in B} C(g) \rightarrow H_2G$ – эпиморфизм.*

Нетрудно доказать, что C -группа G ориентируема тогда и только тогда, когда G_{ab} – свободная абелева группа, т.е. в ориентируемом случае требуется просто линейная независимость.

Понятно, что зная определяющие соотношения группы G , легко указать образующие для H_2G . Особенность теоремы 1 состоит именно в том, что удастся сделать вывод о соотношениях, исходя из информации о группе H_2G .

Отметим один частный случай теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть группа G совпадает с нормальным замыканием подмножества, которое линейно независимо с учетом ориентации по модулю коммутанта, и пусть $H_2G = 0$. Тогда G является C -группой.*

Если группа G конечно определена, а соответствующее подмножество линейно независимо в обычном смысле, то для вывода следствия 1 теореме 1 можно и не использовать. Действительно, тогда по теореме Кервера G – группа 3-мерного зацепления. Применяя теорему Куликова–Хауви–Гильберта, получим, что G – конечно определенная ориентируемая C -группа. Однако этот вывод основан на некоторых глубоких топологических результатах. В теореме Кервера используются, например, результаты Смейла о многомерных гомотопических сферах. Напротив, доказательство теоремы 1 чисто алгебраическое и использует лишь простые факты о центральных расширениях.

Предположим, что множество B , о котором говорится в теореме 1, существует, и пусть X – множество элементов сопряженных с элементами из B . Мы докажем, что в качестве определяющих соотношений группы G относительно системы образующих X можно взять все соотношения вида

$$a^{-1}ba = c^\varepsilon \quad (a, b, c \in X; \varepsilon = \pm 1), \quad (2)$$

которые выполнены в группе G . Такое копредставление конечно лишь в том случае, когда конечно множество X . Это бывает довольно редко, так как тогда центр группы G имеет конечный индекс. Тем не менее мы докажем, что если группа G конечно определена, то можно указать конечное подмножество $X_0 \subseteq X$ такое, что соотношений вида (1), где $a, b, c \in X_0$, достаточно для задания группы G . Другими словами, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Конечно определенная группа является C -группой тогда и только тогда, когда она – конечно определенная C -группа.*

Для ориентируемого случая теорема 2 была доказана в работе [11]. В следующем параграфе мы укажем, какие дополнения нужно внести в общий случай. Будет также описана процедура фактического построения множества X_0 .

Сопоставляя теоремы 1 и 2 с теоремой Куликова, получим

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $n \geq 2$. Группа G изоморфна фундаментальной группе дополнения к n -мерному компактному многообразию гладко вложенному в $\mathbb{R}^{n+2}$ тогда и только тогда, когда группа G конечно определена, совпадает с нормальным замыканием подмножества $B \subseteq G$, которое линейно независимо с учетом ориентации по модулю коммутанта, и отображение $\rho_g: \bigoplus_{g \in B} C(g) \rightarrow H_2 G$ – эпиморфизм.*

Другие следствия теоремы 1 обсуждаются в последнем параграфе. Там мы рассматриваем неприводимые ориентируемые C -группы, т.е. те, которые соответствуют вложениям связных ориентируемых многообразий. Дана характеристика таких групп, имеющих абелев коммутант (см. также [11]). Вводятся операции прямого и свободного произведения (они не совпадают с одноименными операциями в классе всех групп). Описано поведение центральных расширений. Наконец, приведены конкретные примеры, показывающие как работает теорема 1.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

Существенную роль в доказательстве играет понятие универсального C -накрытия. В ориентируемом случае эта конструкция была введена в работе [11]. Здесь нам понадобится также и неориентируемый вариант.

Пусть G – произвольная группа, Y – ее подмножество и Y^G – множество элементов, сопряженных с элементами из Y . Будем называть Y G -инвариантным, если $Y^G = Y$. Пару (G, Y) назовем *пред- C -группой*, если подмножество Y порождает группу G и G -инвариантно. Пред- C -группе (G, Y) можно сопоставить некоторую C -группу $(G, Y)^*$ или, для краткости, просто G^* . Именно, в качестве образующих группы G^* возьмем множество X элементов x_g индексированных элементами $g \in Y$, а в качестве соотношений – все соотношения вида

$$x_a^{-1} x_b x_a = x_c^\varepsilon; \quad a, b, c \in Y, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad a^{-1} b a = c^\varepsilon. \quad (3)$$

Очевидно, отображение $x_g \rightarrow g$ продолжается до эпиморфизма $\sigma: G^* \rightarrow G$. Группу G^* и эпиморфизм σ будем называть *универсальным C -накрытием* пред- C -группы (G, Y) . Если $H = \langle T \mid R \rangle$ – произвольная C -группа и $\varphi: H \rightarrow G$ – гомоморфизм такой, что $\varphi(T) \subseteq Y$, то, как следует непосредственно из определений,

отображение $t \rightarrow x_{\varphi(t)}$ ($t \in T$) продолжается до гомоморфизма $\varphi^*: H \rightarrow G^*$. Очевидно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G^* \\ & \nearrow \varphi^* & \downarrow \sigma \\ H & & \\ & \searrow \varphi & \\ & & G \end{array}$$

коммутативна. Любая C -группа изоморфна G^* для некоторой пред- C -группы (G, Y) . Действительно, пусть $G = \langle X \mid R \rangle$ – некоторая C -группа. Можно предполагать, что X – подмножество группы G . Пусть $Y = X^G$, и пусть в диаграмме $H = G$, а φ – тождественное отображение. Тогда очевидно $\varphi^* = \sigma^{-1}$ и $G \cong G^*$.

Пусть (G, Y) – произвольная пред- C -группа. Универсальное C -накрытие $G^* = (G, Y)$ можно задать следующей системой соотношений

$$x_a^{-1} x_b x_a = x_c; \quad a, b, c \in Y, \quad a^{-1} b a = c, \quad (4)$$

$$x_{c^{-1}} = x_c^{-1}; \quad c, c^{-1} \in Y. \quad (5)$$

Действительно, если выполнены соотношения (4), (5), и для некоторых $a, b, c \in Y$ $a^{-1} b a = c^{-1}$, то, поскольку Y G -инвариантно, $c^{-1} \in Y$ и $x_a^{-1} x_b x_a = x_{c^{-1}} = x_c^{-1}$, т.е. выполнены и соотношения (3). Наоборот, предположим, что имеет место (3), и $c, c^{-1} \in Y$. Тогда из равенства $c^{-1} c^{-1} c = c^{-1}$ вытекает, что $x_c^{-1} x_{c^{-1}} x_c = x_c^{-1}$, и значит, $x_c^{-1} = x_{c^{-1}}$.

Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на множестве Y

$$g \sim g' \iff h^{-1} g h = g' \quad \text{или} \quad h^{-1} g^{-1} h = g' \quad (g, g' \in Y, h \in G), \quad (6)$$

и пусть B – множество представителей классов эквивалентности.

ЛЕММА 1. *Образ множества B в группе G_{ab}^* является ее системой образующих, линейно независимой с учетом ориентации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По модулю коммутанта соотношения (4) означают, что $x_a = x_c$, если $a, c \in Y$ и a, c сопряжены, что дает свободную абелеву группу с базой из классов сопряженности, содержащихся в Y . Если такой класс S состоит из неориентируемых элементов, то для $c \in S$ соотношение (5) можно переписать в виде $2S = 0$. Если же S состоит из ориентируемых элементов, то множество элементов, которые к ним обратны, образуют класс сопряженности S^{-1} , отличный от S , а равенство (5) отождествляет S и S^{-1} . Это очевидно доказывает лемму 1.

Ядро универсального С-накрытия $\sigma: G^* \rightarrow G$ — это в точности препятствие, для того чтобы группа G была С-группой с множеством образующих Y . Мы собираемся дать описание ядра. В качестве первого шага докажем, что ядро лежит в центре. Пусть $v \in G^*$ и $w = \sigma(v)$. Тогда для любого образующего $x_g \in X$ ($g \in Y$)

$$v^{-1}x_gv = x_{w^{-1}gw}. \quad (7)$$

Действительно, при $v = x_h^{\pm 1}$ (7) следует непосредственно из определяющих соотношений. Далее можно действовать по индукции: если равенство (7) справедливо для $v = v_1$ и $v = v_2$, то оно справедливо и для $v = v_1v_2$.

Из (7) следует, что $vx_g = x_gv$ в том и только том случае, когда $wg = gw$. Это доказывает следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Прообраз центра группы G при отображении σ совпадает с центром группы G^* . В частности, G^* — центральное расширение группы G .*

Можно так же ввести ориентируемый вариант универсального С-накрытия, исключая из определяющих соотношений (3) те, в которых $\varepsilon = -1$. Мы будем обозначать универсальное ориентируемое С-накрытие G_+^* . Иногда будем пользоваться и тем же самым обозначением G^* , если из контекста ясно, какой вариант имеется в виду. Очевидно определен естественный эпиморфизм $G_+^* \rightarrow G^*$ и для любой пред-С-группы (G, Y) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G^* \\ & \nearrow & \downarrow \\ G_+^* & & G \\ & \searrow & \end{array}$$

коммутативна. Пусть D — множество представителей классов сопряженности $S \subseteq Y$. Из определяющих соотношений группы G_+^* очевидно следует, что ее факторгруппа по коммутанту — свободная абелева с базой, состоящей из образов элементов $g \in D$.

ЛЕММА 3. *С-группа G является ориентируемой С-группой тогда и только тогда, когда группа G_{ab} — свободная абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим С-группу G в виде $G = (G, Y)$ для некоторого G -инвариантного множества образующих Y . Осталось доказать, что, если G_{ab} — свободная абелева группа, то С-группа G ориентируема. Введем сначала соотношения (4). Из леммы 1 следует, что в множестве Y нет неориентируемых элементов, поэтому каждое соотношение (5) отождествляет элементы, индексы которых принадлежат разным классам сопряженности $S, S^{-1} \in Y$. Мы не изменим группу, если удалим из ее копредставления образующий $x_{c^{-1}}$, где $c^{-1} \in S^{-1}$, удалим

соотношение (5), а в каждое соотношение (4), в котором встречается x_{c-1} , подставим вместо него x_c^{-1} . Прделав такие преобразования, получим копредставление ориентируемой S -группы.

Лемма 2 и ее доказательство остаются без изменения для ориентируемого S -накрытия. Установим связь между группами G_+^* и G^* .

ЛЕММА 4. *Пусть, как и в лемме 1, B – множество представителей классов эквивалентности по отношению (6), и пусть B_0 – множество элементов $s \in B$ таких, что $s^{-1} \in Y$. Тогда ядро естественного отображения $G_+^* \rightarrow G^*$ – свободная абелева группа со свободными образующими $x_s x_{s^{-1}}$, где $s \in B_0$. Это центральная подгруппа, имеющая тривиальное пересечение с коммутантом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы знаем, группа G^* определяется соотношениями (4) и (5). Соотношения (4) задают G_+^* , поэтому ядро отображения $G_+^* \rightarrow G^*$ порождается элементами $x_s x_{s^{-1}}$, где $s, s^{-1} \in Y$. Так как ядро центрально, то для любого $g \in Y$ имеем

$$x_s x_{s^{-1}} = x_g^{-1} (x_s x_{s^{-1}}) x_g = x_{g^{-1} s g} x_{g^{-1} s^{-1} g}.$$

Отсюда следует, что, если s и d сопряжены, то $x_s x_{s^{-1}} = x_d x_{d^{-1}}$, поэтому ядро порождается элементами $x_s x_{s^{-1}}$, где $s \in B_0$. Эти элементы линейно независимы в факторгруппе по коммутанту, так как ее базу составляют образы представителей классов сопряженности множества Y .

Если число классов, сопряженности содержащихся в множестве Y , бесконечно, то группы G^* и G_+^* не имеют конечной системы образующих, так как тогда не является конечно порожденной даже факторгруппа по коммутанту G_{ab}^* . Если же число классов сопряженности в Y конечно и группа G конечно порождена, то G^* и G_+^* – также конечно порожденные группы. Для доказательства достаточно выбрать прообразы конечной системы образующих группы G и добавить к ним множество представителей классов сопряженности, содержащихся в Y .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G – конечно определенная группа, Y – ее G -инвариантное подмножество, распадающееся в объединение конечного числа классов сопряженности. Тогда соответствующее универсальное S -накрытие, как ориентируемое так и неориентируемое, является конечно определенной S -группой.*

Для ориентируемого случая эта теорема была доказана в работе [11]. В соответствии с леммой 4 в неориентируемом случае надо добавить конечное множество соотношений $x_{c-1} = x_c^{-1}$ ($c \in B_0$), которые можно переписать в виде S -соотношений $x_c^{-1} x_{c-1} x_c = x_c^{-1}$. Очевидно, теорема 2 является частным случаем теоремы 3.

Пусть $G = \langle T \mid R \rangle$ – некоторое конечное копредставление группы G . Предположим, что удалось найти G -инвариантное подмножество X такое, что соотношения $a^{-1} b a = c^\varepsilon$ ($a, b, c \in X, \varepsilon = \pm 1$) также являются определяющими соотношениями группы G . Из доказательства теоремы 3 для ориентируемого случая [11] нетрудно извлечь следующую процедуру построения конечного задания группы G с помощью S -соотношений.

Шаг 1. Считая, что $g \sim g' \iff$ элемент g или g^{-1} сопряжен с g' ($g, g' \in X$), выберем в X множество B представителей классов эквивалентности и перепишем копредставление $G = \langle T \mid R \rangle$ в системе образующих B . Это делается стандартным образом. Выразим в группе G элементы множества B через элементы множества T , и наоборот

$$b_i = v_i(t_1, \dots, t_m), \quad t_j = w_j(b_1, \dots, b_n).$$

Тогда

$$b_i = v_i(w_1(b_1, \dots, b_n), \dots, w_m(b_1, \dots, b_n)). \quad (8)$$

Кроме того, для каждого определяющего соотношения $r(t_1, \dots, t_m) = 1$ ($r \in R$) имеет место равенство

$$r(w_1(b_1, \dots, b_n), \dots, w_m(b_1, \dots, b_n)) = 1. \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) задают группу G в системе образующих B .

Шаг 2. Пусть для элементов $b, c \in B$ слова $u(b_1, \dots, b_m)$ и $\varepsilon = \pm 1$ выполнены равенство $u^{-1}bu = c^\varepsilon$. Все такие равенства дают систему определяющих соотношений группы G в системе образующих B (если группа G_{ab} – свободная абелева, то можно ограничиться $\varepsilon = 1$). Выделим конечное множество соотношений вида $u_i^{-1}b_iu_i = c_i^\varepsilon$, из которых следуют равенства (8) и (9).

Шаг 3. Для каждого слова u_i , построенного на предыдущем шаге, пусть u_{ij} – его начальный отрезок длины j . Рассмотрим множество X_0 , которое получается добавлением к B элементов $u_{ij}^{-1}b_iu_{ij}$. Тогда X_0 – конечное множество образующих и всевозможные соотношения $a^{-1}ba = c^\varepsilon$, где $a, b, c \in X_0$, $\varepsilon = \pm 1$, задают группу G .

Следующая теорема дает описание ядра отображения $\sigma: G^* \rightarrow G$ для произвольной группы G . Напомним, что в предыдущем параграфе был определен гомоморфизм $\rho_B: \bigoplus_{g \in B} C(g) \rightarrow H_2G$ и разбиение $B = B^+ \cup B^-$, где B^+ – множество ориентируемых, а B^- – неориентируемых элементов, содержащихся в B . Пусть $\mathcal{A}(B)^+$ – свободная абелева группа со свободными образующими $g \in B^+$ и $\mathcal{A}(B)^-$ – прямое произведение циклических групп порядка 2 с образующими $g \in B^-$. Положим $\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(B)^+ \oplus \mathcal{A}(B)^-$ и определим гомоморфизм $\tau_B: \mathcal{A}(B) \rightarrow H_1G$, считая, что

$$\tau_B(g) = gG' \in G_{ab} \cong H_1G \quad (g \in B).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть Y – G -инвариантное множество образующих группы G , $G^* = (G, Y)^*$ – соответствующее универсальное C -накрытие и B – система представителей для отношения эквивалентности (6) на множестве Y . Тогда ядро естественного эпиморфизма $\sigma: G^* \rightarrow G$ – центральная подгруппа, которую можно включить в точную последовательность

$$\bigoplus_{g \in B} C(g) \xrightarrow{\rho_B} H_2G \xrightarrow{\nu} \ker \sigma \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}(B) \xrightarrow{\tau_B} H_1G \longrightarrow 0.$$

Гомоморфизмы ν и η будут определены в процессе доказательства. Для ориентируемого C -накрытия $\sigma_+: G_+^* \rightarrow G$ имеет место аналогичная точная последовательность. Надо лишь в качестве B взять множество представителей классов

сопряженности, содержащихся в Y , а в качестве $\mathcal{A}(B)$ – свободную абелеву группу, порожденную элементами $g \in B$.

Как мы уже отмечали, группа G является C -группой тогда и только тогда, когда для некоторого выбора G -инвариантного множества образующих ядро отображения σ тривиально, поэтому теорема 1 – частный случай теоремы 4. Доказательство теоремы 4 проведем в три шага.

Шаг 1. Пусть G – нормальное замыкание подмножества B , которое линейно независимо по модулю коммутанта, и пусть $Y = B^G$. Тогда $G^* \cong G_+^*$ и $\ker \sigma \cong \operatorname{coker} \rho_B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм $G^* \cong G_+^*$ следует из леммы 3. Опишем $\ker \sigma$. Для этого нам понадобятся некоторые факты о центральных расширениях.

Пусть A – тривиальный G -модуль. Если группа G_{ab} свободная абелева, то по теореме об универсальных коэффициентах

$$H^2(G, A) \cong \operatorname{Hom}(H_2G, A).$$

Возьмем $A = H_2G$. Тогда в правой части имеется выделенный элемент – тождественное отображение $H_2G \rightarrow H_2G$. Соответствующий элемент группы $H^2(G, H_2G)$ определяет расширение, обладающее некоторым универсальным свойством. Опишем это расширение подробнее и установим его связь с C -группами.

Пусть заданы два центральных расширения группы G

$$E_i : 1 \longrightarrow A_i \longrightarrow \overline{G}_i \longrightarrow G \longrightarrow 1 \quad (i = 1, 2).$$

Морфизмом $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ расширений назовем гомоморфизм групп $\varphi: \overline{G}_1 \rightarrow \overline{G}_2$, действующий тождественно в факторгруппе $G \cong \overline{G}_1/A_1 \cong \overline{G}_2/A_2$. Отметим, что, если $\varphi, \varphi': E_1 \rightarrow E_2$ – два морфизма, то для любого элемента $g \in \overline{G}_1$ $\varphi'(g) = \varphi(g)a_g$, где a_g лежит в центре. Отсюда следует, что

$$\varphi'([g, h]) = [\varphi(g)a_g, \varphi(h)a_h] = \varphi([g, h]) \quad (g, h \in \overline{G}_1),$$

т.е. любые два морфизма совпадают на коммутанте.

Центральное расширение $\widehat{E}$ группы G назовем *универсальным* центральным расширением, если для любого центрального расширения E существует морфизм $\varphi: \widehat{E} \rightarrow E$, который определен однозначно с точностью до единственного морфизма $\alpha: E \rightarrow E$, действующего тождественно на ядре расширения E .

Понятно, что, если универсальное центральное расширение существует, то оно единственно с точностью до изоморфизма, тождественного в факторгруппе G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если G_{ab} – свободная абелева группа, то универсальное центральное расширение $\widehat{E}$ существует. Его ядро изоморфно H_2G , т.е. $\widehat{E}$ имеет вид

$$\widehat{E} : 0 \longrightarrow H_2G \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1. \quad (10)$$

Эпиморфизм $\widehat{G} \rightarrow G$ индуцирует изоморфизм факторгрупп по коммутанту $\widehat{G}_{ab} \cong G_{ab}$.

В литературе часто встречается частный случай этого утверждения, когда группа G совершенна, т.е. $G = G'$. Тогда существует единственный морфизм $\varphi: \widehat{E} \rightarrow E$ и $H_2\widehat{G} = 0$ (см., например, [12]). Универсальное центральное расширение используется также для конечных групп [13], но тогда оно определено неоднозначно. По этой причине мы все же приведем доказательство предложения 1, хотя оно достаточно стандартно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим группу G в виде факторгруппы свободной группы: $G = F/N$. Пусть $\widetilde{G} = F/[N, F]$, $\widetilde{N} = N/[N, F]$. Для центральной подгруппы $\widetilde{N}$ можно написать разложение $\widetilde{N} \cong H_2G \times D$, где D отображается изоморфно на подгруппу свободной абелевой группы $\widetilde{G}_{ab} \cong F_{ab}$. Факторизуя $\widetilde{G}_{ab}$ по образу D , мы получим, очевидно, G_{ab} , а так как по условию G_{ab} – свободная абелева группа, то можно написать разложение $\widetilde{G}_{ab} \cong G_{ab} \times D$. Таким образом, определен эпиморфизм $\widetilde{G} \rightarrow D$. Обозначим через $\widehat{G}$ ядро этого эпиморфизма. Непосредственно из построения следует, что имеет место точная последовательность (10) и что $\widehat{G}_{ab} \cong G_{ab}$. Проверим универсальное свойство построенного расширения. Для этого рассмотрим произвольное центральное расширение группы G

$$E: 1 \longrightarrow A \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1. \quad (11)$$

Пусть x_i – свободные образующие группы F и h_i – элементы группы $\overline{G}$, имеющие те же образы в группе G . Тогда отображение $x_i \rightarrow h_i$ индуцирует гомоморфизм $\widetilde{G} \rightarrow \overline{G}$, ограничение которого на $\widehat{G}$ дает нужный морфизм $\varphi: \widehat{E} \rightarrow E$. Предположим, что имеется два морфизма $\varphi, \varphi': \widehat{E} \rightarrow E$, и пусть $\varphi' = \alpha\varphi$, где $\alpha: E \rightarrow E$ действует тождественно на A . Очевидно α определяется своими значениями на системе представителей смежных классов $\overline{G}$ по модулю A . Пусть $\widehat{g}$ – система представителей в $\widehat{G}$. Рассмотрим систему представителей $\overline{g} = \varphi(\widehat{g})$ в $\overline{G}$. Тогда $\alpha(\overline{g}) = \overline{g}a_g$, где $a_g \in A$ и

$$a_g = \overline{g}^{-1}\alpha(\overline{g}) = \varphi(\widehat{g})^{-1}\alpha(\varphi(\widehat{g})) = \varphi(\widehat{g})^{-1}\varphi'(\widehat{g}).$$

Отсюда следует, что, если автоморфизм α существует, то он определен однозначно. Теперь ясно, как построить α : положим по определению

$$\alpha(\overline{g}a) = \overline{g}a_g a, \quad \text{где } a_g = \varphi(\widehat{g})^{-1}\varphi'(\widehat{g}) \quad (a \in A).$$

Для $c \in H_2G \subseteq \widehat{G}$ имеем

$$\alpha(\varphi(\widehat{g}c)) = \alpha(\overline{g}\varphi(c)) = \overline{g}a_g\varphi(c) = \overline{g}\varphi(\widehat{g})^{-1}\varphi'(\widehat{g})\varphi(c) = \varphi'(\widehat{g})\varphi(c).$$

Как мы уже отмечали, любые два морфизма совпадают на коммутанте, а так как $\widehat{G}' \supseteq H_2G$, то $\varphi(c) = \varphi'(c)$, следовательно $\alpha(\varphi(\widehat{g}c)) = \varphi'(\widehat{g}c)$. Легко также проверить, что α – гомоморфизм.

ЛЕММА 5. Пусть $\hat{G}$ – универсальное центральное расширение группы G . Если образ Y множества $X \subseteq \hat{G}$ порождает группу G , то множество X порождает группу $\hat{G}$.

Действительно, пусть $\overline{G}$ – подгруппа, порожденная множеством X и $A = \overline{G} \cap H_2G \subseteq \hat{G}$. Имеет место точная последовательность (11) и вложение $i: \overline{G} \rightarrow \hat{G}$ является морфизмом расширений. С другой стороны, в силу универсального свойства расширения $\hat{G}$ существует гомоморфизм $\varphi: \hat{G} \rightarrow \overline{G}$. Композиция φ с вложением – это некоторый морфизм $\hat{E} \rightarrow \hat{E}$. По свойству единственности он отличается от тождественного на морфизм, оставляющий неподвижными элементы из H_2G . В частности, $i\varphi$ – эпиморфизм, следовательно, i – изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть группа G совпадает с нормальным замыканием множества B , и пусть $\hat{B}$ – множество представителей элементов из B в универсальном центральном расширении $\hat{G}$. Тогда $\hat{G}$ совпадает с нормальным замыканием множества $\hat{B}$.

ЛЕММА 6. Предположим, что группа G совпадает с нормальным замыканием множества элементов B , линейно независимых в G_{ab} . Тогда универсальное центральное расширение $\hat{G}$ группы G является C -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Y = B^G$, $X = \hat{B}^{\hat{G}}$, где $\hat{B}$ – множество представителей элементов $g \in B$. Рассмотрим C -группы $G^* = (G, Y)^*$ и $\hat{G}^* = (\hat{G}, X)^*$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}^* & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \hat{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^* & \xrightarrow{\sigma} & G \end{array}$$

По лемме 2 прообраз центральной подгруппы $H_2G \subseteq \hat{G}$ в универсальном C -накрытии $\hat{G}^*$ лежит в центре, поэтому $\hat{G}^*$ – центральное расширение группы G . По универсальному свойству расширения $\hat{G}$ существует морфизм $\varphi: \hat{G} \rightarrow \hat{G}^*$. В силу единственности композиция φ с $\hat{\sigma}$ с точностью до морфизма $\alpha: \hat{G} \rightarrow \hat{G}$, оставляющего неподвижными элементы из H_2G , совпадает с тождественным отображением. Отсюда следует, что $\hat{G}^* \cong \hat{G} \times K$, где $K \cong \ker \hat{\sigma}$. Так как K – центральная подгруппа, то, переходя к факторгруппе по коммутанту, получим $\hat{G}_{ab}^* \cong \hat{G}_{ab} \times K$. Но из условия о линейной независимости множества B следует, что $\hat{\sigma}$ индуцирует изоморфизм $\hat{G}^* \cong \hat{G}$, поэтому прямое слагаемое K должно быть тривиально.

Теперь нетрудно доказать утверждение, выделенное как шаг 1. Мы только что доказали, что $\hat{G} \cong (\hat{G}, X)^*$, где $X = \hat{B}^G$. По универсальному свойству расширения $\hat{G}$ существует морфизм $\varphi: \hat{G} \rightarrow G^*$, который очевидно является отображением “на”. Определим гомоморфизм ν в точной последовательности теоремы 4 как

ограничение φ на H_2G . Поскольку H_2G содержится в коммутанте, ν не зависит от выбора φ . Если $g \in B$ и $h \in C(g)$, то $\nu(\rho_B(h)) = \nu(g \wedge h) = [g, h] = 1$, поэтому определен индуцированный эпиморфизм $\psi: \tilde{G} \rightarrow G^*$, где $\tilde{G} \cong \hat{G}/\text{Im } \rho_B$. Нам надо доказать, что ψ — изоморфизм. Пусть $\hat{g} \in \hat{B}$ — прообраз элемента $g \in B$. Группа $\tilde{G}$ получается из $\hat{G}$ добавлением соотношений $\hat{g} = \hat{g}^h$ ($g \in B, h \in C(g)$). Так как $\hat{g}, \hat{g}^h \in X$, эти соотношения, введенные в группе $\hat{G} = (\hat{G}, X)^*$, определяют С-группу $(\tilde{G}, T)^*$ (T — образ X в $\tilde{G}$). Гомоморфизм универсальных С-накрытий

$$\tilde{G} \cong (\tilde{G}, T)^* \longrightarrow G^* = (G, Y)^*$$

является изоморфизмом тогда и только тогда, когда соответствующее отображение $T \rightarrow Y$ биективно. Группа G действует на множествах Y и T . Из линейной независимости элементов множества B по модулю коммутанта следует, что Y — объединение орбит вида g^G , где $g \in B$, а T — объединение орбит вида $\tilde{g}^G$, где $\tilde{g}$ образ $\hat{g} \in \hat{B}$. На каждой орбите отображение $\tilde{g}^G \rightarrow g^G$ биективно, так как, если $h \in C(g)$, то $\tilde{g}^h = \tilde{g}$. На этом заканчивается рассмотрение шага 1.

Шаг 2. Рассмотрим теперь ориентируемое С-накрытие. Пусть (G, Y) — некоторая пред-С-группа и B — множество представителей классов сопряженности, содержащихся в Y . Рассмотрим точную последовательность абелевых групп

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \mathcal{A}(B) \xrightarrow{\tau_B} G_{ab} \longrightarrow 1, \quad (12)$$

где $\mathcal{A}(B)$ — свободная абелева группа с базисом B , $A = \ker \tau_B$. Пусть $\overline{G}$ — подгруппа прямого произведения $G \times \mathcal{A}(B)$, состоящая из пар (g, a) таких, что образы элементов g и a в G_{ab} совпадают. Отображение $a \rightarrow (1, a)$ ($a \in A$) определяет вложение $A \rightarrow \overline{G}$ и $\overline{G}/A \cong G$, т.е. $\overline{G}$ — центральное расширение группы G . Очевидно, $\overline{G}' \cong G'$ и $\overline{G}_{ab} \cong \mathcal{A}(B)$. Положим $\overline{B} = \{\bar{g} \in \overline{G} \mid \bar{g} = (g, g) (g \in B)\}$, $\overline{Y} = \overline{B}^{\overline{G}}$. Естественное отображение $\overline{G} \rightarrow G$ определяет биекцию $\overline{Y} \rightarrow Y$, поэтому ориентируемые С-накрытия $G^* = (G, Y)^*$ и $\overline{G}^* = (\overline{G}, \overline{Y})^*$ изоморфны. Отсюда следует, что ядра соответствующих накрывающих отображений $\sigma, \overline{\sigma}$ можно включить в точную последовательность

$$1 \longrightarrow \ker \overline{\sigma} \longrightarrow \ker \sigma \longrightarrow A \rightarrow 1.$$

Используя шаг 1 и точную последовательность (12), имеем

$$\bigoplus_{\bar{g} \in \overline{B}} C(\bar{g}) \xrightarrow{\rho_{\overline{B}}} H_2\overline{G} \longrightarrow \ker \sigma \longrightarrow \mathcal{A}(B) \longrightarrow H_1G \longrightarrow 0.$$

Осталось показать, что $\text{coker } \rho_{\overline{B}} \cong \text{coker } \rho_B$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C(\bar{g}) & \longrightarrow & H_2\overline{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(g) & \longrightarrow & H_2G \end{array}$$

Нам достаточно доказать, что вертикальные стрелки – эпиморфизмы. Для правой это следует из пятичленной точной последовательности

$$H_2\overline{G} \longrightarrow H_2G \longrightarrow A \longrightarrow \overline{G}_{ab} \longrightarrow G_{ab} \longrightarrow 1.$$

Для отображения слева это очевидно из определения $\overline{G}$.

Шаг 3. Рассмотрим общий случай. Предположим, что B – множество представителей классов сопряженности, содержащихся в Y . Можно предполагать, что, если $g \in B$, $g^{-1} \in Y$ и элемент g ориентируем, то $g^{-1} \in B$. На шаге 2 ядро $\ker \sigma_+$ ориентируемого S -накрытия было описано с помощью соответствующей точной последовательности. Чтобы получить G^* из G_+^* нужно профакторизовать по элементам $x_c x_{c^{-1}}$ ($c, c^{-1} \in Y$), причем можно ограничиться такими соотношениями, для которых $c \in B$. Если c ориентируем, то образ $x_c x_{c^{-1}}$ в $\mathcal{A}(B)$ – это $c - c^{-1}$, а соотношение $c = c^{-1}$ означает, что мы удаляем из базы $\mathcal{A}(B)$ один из элементов c, c^{-1} . Если c неориентируем, то элементу $x_c x_{c^{-1}}$ соответствует $2c$. Отсюда очевидно, что для описания $\ker \sigma$ (вместо $\ker \sigma_+$) необходимо определить $\mathcal{A}(B)$ именно так, как мы сделали в теореме 4. Это заканчивает доказательство.

§3. Неприводимые ориентируемые S -группы

Частным случаем теоремы 1 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Группа G – неприводимая ориентируемая S -группа тогда и только тогда, когда G совпадает с нормальным замыканием некоторого элемента $g \in G$, G_{ab} – бесконечная циклическая группа и любой элемент группы H_2G имеет вид $g \wedge h$ ($h \in C(g)$).*

Мы покажем, как можно использовать это утверждение в конкретных случаях. Начнем с нескольких лемм, облегчающих проверку условий следствия.

Если группа G совпадает с нормальным замыканием элемента $g \in G$, то, очевидно, G_{ab} – циклическая группа с образующим gG' . Для разрешимых групп верно и обратное.

ЛЕММА 7. *Пусть G – разрешимая группа. Тогда G совпадает с нормальным замыканием элемента g в том и только том случае, когда G_{ab} – циклическая группа с образующим gG' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма очевидна, если G – абелева группа. Пусть G имеет ступень разрешимости $l > 1$, и пусть $A = G^{(l-1)}$ – последний нетривиальный член ряда коммутантов. Если R – нормальное замыкание элемента g , то по индукции $G = RA$, поэтому

$$G/R = RA/R = A/A \cap R$$

– абелева группа, следовательно, $G' \subseteq R$. Так как G порождается по модулю G' элементом g , отсюда следует, что $G = R$.

Отметим, что в общем случае нет ничего похожего на лемму 7. Пусть, например, H – произвольная группа без кручения, совпадающая со своим коммутантом, и пусть $G = \langle g \rangle * H$ – ее свободное произведение с бесконечной циклической группой. Тогда $G_{ab} \cong \langle g \rangle$, однако, как доказал Клячко [14], G не совпадает с нормальным замыканием никакого своего элемента.

ЛЕММА 8. Пусть G_{ab} – циклическая группа с образующим gG' . Тогда элемент $g-1 \in \mathbb{Z}\langle g \rangle$ действует сюръективно в G'/G'' . Если к тому же группа G конечно порождена, то действие $g-1$ в G'/G'' биективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно предполагать, что $G'' = 1$. Тогда для любых $a, b \in G'$

$$[g^n a, g^m b] = [g^n, b][a, g^m] = b^{1-g^n} a^{g^m-1} = c^{g-1},$$

где $c \in G'$. Отсюда следует, что G' состоит из элементов вида c^{g-1} ($c \in G'$). Если группа G конечно порождена, то G' – конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом $\mathbb{Z}\langle g \rangle$. Пусть f – эндоморфизм этого модуля, определенный действием $g-1$. Если $\ker f \neq 0$, то, поскольку f – эпиморфизм, цепочка подмодулей

$$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \dots \subseteq \ker f^n \subseteq \dots$$

строго возрастает. Это противоречит нетеровости модуля G' .

ПРИМЕР 1. Если G – неприводимая S -группа, то G'/G'' не может быть циклической группой четного порядка.

Действительно, если G'/G'' – циклическая группа четного порядка с образующим a , то $a^g = a^k$, где $k \in \mathbb{Z}$, k нечетно. Тогда $g^{g-1} = a^{k-1}$, но возведение в четную степень не будет отображением “на”.

ЛЕММА 9. Пусть группа G конечно порождена и G_{ab} – бесконечная циклическая группа. Тогда вложение $G' \rightarrow G$ индуцирует изоморфизм $H_2 G' \otimes_G \mathbb{Z} \cong H_2 G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из спектральной последовательности расширения

$$1 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G_{ab} \longrightarrow 1$$

очевидно следует, что имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow H_2 G' \otimes_G \mathbb{Z} \longrightarrow H_2 G \longrightarrow H_1(G_{ab}, H_1 G') \longrightarrow 0.$$

Пусть g – образующий группы G_{ab} . Ее гомологии можно вычислить с помощью резольвенты

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\langle g \rangle \xrightarrow{g-1} \mathbb{Z}\langle g \rangle \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

По лемме 8 $g-1$ действует биективно в G'/G'' , поэтому $H_1(G_{ab}, H_1 G') = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя леммы 7–9 полезно иметь ввиду, что, если $N \triangleleft G$, G/N – циклическая группа с образующим gN и $g-1$ действует сюръективно в N_{ab} , то $N = G'$. Действительно, так как $N \supseteq G' \supseteq N'$, можно предполагать, что группа N абелева. Тогда, по условию, для любого $a \in N$ существует элемент $c \in N$ такой, что $a = c^{g-1} = [c, g] \in G'$, откуда $N = G'$.

ПРИМЕР 2. Пусть Q – группа кватернионов

$$Q = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c, c^2 = 1, c = [a, b], ac = ca, bc = cb \rangle.$$

Легко видеть, что отображение $a \rightarrow b, b \rightarrow ab, c \rightarrow c$ продолжается до автоморфизма группы Q . Рассмотрим полупрямое произведение $G = \langle g \rangle Q$, в котором g действует на Q как автоморфизм, определенный выше. Очевидно, Q_{ab} – элементарная 2-группа, порожденная элементами $\tilde{a} = aQ'$ и $\tilde{b} = bQ'$. Элемент $g - 1$ действует в Q_{ab} следующим образом

$$\tilde{a} \rightarrow \tilde{a}\tilde{b}, \quad \tilde{b} \rightarrow \tilde{a},$$

откуда следует, что $g - 1$ – автоморфизм группы Q_{ab} . В соответствии с замечанием после леммы 9 имеем $Q = G'$. Так как группа G разрешима, то по лемме 7 она совпадает с нормальным замыканием элемента g . Как хорошо известно, $H_2Q = 0$ (это, например, следует из периодичности когомологий Тейта группы Q). По лемме 9 $H_2G = 0$. Применяя следствие 4, мы видим, что G – неприводимая ориентируемая С-группа. Нетрудно задать группу G как С-группу. Для этого рассмотрим класс сопряженности элемента g . Он содержит четыре элемента

$$g, \quad x = ga, \quad y = gb, \quad z = gab.$$

Группа G задается образующими g, x, y, z и соотношениями сопряженности, которые выполнены между ними в G . Таких соотношений, очевидно, 12. Несложные вычисления показывают, что достаточно шести соотношений

$$\begin{aligned} g^{-1}xg &= y, & g^{-1}yg &= z, & g^{-1}zg &= x, \\ y^{-1}gy &= x, & y^{-1}xy &= z, & y^{-1}zy &= g. \end{aligned}$$

Неприводимые С-группы естественно изучать в зависимости от свойств коммутанта. Рассмотрим простейший случай, когда коммутант абелев.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – конечно порожденная метабелева группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) G – неприводимая ориентируемая С-группа;
- (ii) G_{ab} – бесконечная циклическая группа и $H_2G = 0$;
- (iii) $G = \langle g \rangle M$ – полупрямое произведение бесконечной циклической группы $\langle g \rangle$ и абелева нормального делителя M , причем $g - 1$ действует сюръективно в M и $M \wedge M$.

Отметим, что в формулировке этой теоремы имеется в виду, что g действует во внешнем произведении $M \wedge M$ диагонально, т. е.

$$(m_1 \wedge m_2)(g - 1) = m_1g \wedge m_2g - m_1 \wedge m_2 \quad (m_1, m_2 \in M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть G – конечно порожденная метабелева группа. Если G – неприводимая С-группа, то по следствию 4 G совпадает с нормальным замыканием некоторого элемента $g \in G$. Чтобы доказать импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii), нам достаточно проверить, что $H_2G = 0$. По лемме 8 $g - 1$ действует биективно в G' , следовательно, если $a \neq 1$, $a \in G$, то $[a, g] = a^{g-1} \neq 1$. Это означает, что $C(g) = \langle g \rangle$. Так как $g \wedge g = 0$, то, применяя следствие 4, получим $H_2G = 0$. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) вытекает из леммы 7 и следствия 4. Проверим, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Если выполнено условие (ii), то, очевидно, $G = \langle g \rangle M$, где $M = G'$ и по лемме 8 $g - 1$ действует на M биективно. По лемме 9

$$H_2G \cong H_2M \otimes_{\langle g \rangle} \mathbb{Z} \cong (M \wedge M) \otimes_{\langle g \rangle} \mathbb{Z}.$$

Так как $H_2G = 0$, это означает сюръективность действия $g - 1$ на $M \wedge M$. Так же легко получается импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii).

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \langle g \rangle M$ – полупрямое произведение бесконечной циклической группы и свободной абелевой группы конечного ранга. Тогда $M \wedge M$ – также свободная абелева группа конечного ранга. Группа G будет неприводимой (конечно определенной) С-группой в том и только том случае, когда $g - 1$ индуцирует на M и $M \wedge M$ – эндоморфизмы с определителем ± 1 .

ПРИМЕР 4. Пусть M – конечномерное пространство над простым полем $\mathbb{Z}_p$, и пусть f – невырожденное линейное преобразование пространства M . Рассмотрим полупрямое произведение $G = \langle g \rangle M$, в котором g действует на M , как линейное преобразование f . Группа G будет неприводимой (конечно определенной) С-группой в том и только том случае, когда $g - 1$ индуцирует на M и $M \wedge M$ – невырожденные линейные преобразования. Если λ_i – собственные значения преобразования f в алгебраическом замыкании поля $\mathbb{Z}_p$, то это означает, что $\lambda_i \neq 0$; 1 и $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ при $i \neq j$.

В качестве множества С-образующих неприводимой С-группы G с абелевым коммутантом можно взять класс сопряженности элемента $g \in G$ такого, что gG' – образующий группы G_{ab} . Легко видеть, что этот класс сопряженности совпадает с классом смежности gG' .

Другие примеры С-групп с абелевым коммутантом можно найти в работе [11]. Там же указан пример неприводимой ориентируемой С-группы G такой, что G'' лежит в центре, но $H_2G \neq 0$.

Рассмотрим противоположный случай, когда коммутант G' неприводимой С-группы G близок к простой группе.

ЛЕММА 10. Пусть N – простая группа и $\hat{N}$ – ее универсальное центральное расширение. Тогда прямое произведение $G = \langle t \rangle \times \hat{N}$ является неприводимой ориентируемой С-группой.

Действительно, пусть $x \in N$, $x \neq 1$. Так как N – простая группа, то нормальное замыкание элемента x совпадает с N . Тогда по следствию 3 нормальное замыкание любого его прообраза $y \in \hat{N}$ совпадает с $\hat{N}$. Отсюда следует, что $\langle t \rangle \times \hat{N} = G$ – нормальное замыкание элемента ty . Остается заметить, что $H_2G = H_2\hat{N} = 0$. В качестве множества С-образующих группы G можно взять класс сопряженности элемента $g = ty$, где y – любой нецентральный элемент групп $\hat{N}$.

ПРИМЕР 5. Пусть $N = PSL(n, q)$ – проективная специальная линейная группа над полем из q элементов. Если $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$, то, как известно, N – простая группа. Если к тому же $(n, q) \neq (2, 4), (2, 9), (3, 2), (3, 4), (4, 2)$, то универсальное центральное расширение $\widehat{N}$ изоморфно специальной линейной группе $SL(n, q)$ (см. [13, табл. 4.1]). По лемме 4 $t \times SL(n, q)$ – неприводимая ориентируемая группа.

Во всех предыдущих примерах вторая группа гомологий была тривиальна. Приведем пример, в котором следствие 4 работает в полном объеме.

ПРИМЕР 6. Прямое произведение $G = \langle t \rangle \times PSL(n, q)$ за исключением семи случаев, перечисленных в примере 5, является неприводимой C -группой.

Для доказательства рассмотрим образ x в группе $PSL(n, q) = N$ следующей матрицы $y \in SL(n, q) = \widehat{N}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как группа N проста, G совпадает с нормальным замыканием элемента $g = tx$. Проверим, что группа H_2G состоит из элементов $g \wedge h$, где $h \in C(g)$. Очевидно, $H_2G \cong H_2N$ и $C_G(g) = t \times C_N(x)$. Так как для $z \in C_N(x)$ $tx \wedge tz = x \wedge z$, то нам достаточно проверить, что H_2N исчерпывается элементами $x \wedge z$. Группа H_2N естественно отождествляется с ядром отображения $\widehat{N} \rightarrow N$, т.е. с группой скалярных матриц aE с определителем 1. Пусть $z \in C_N(x)$ и w – матрица, являющаяся прообразом элемента z в группе $\widehat{N}$. Тогда $x \wedge z = [y, w]$. Надо доказать, что, меняя z , мы получим все скалярные матрицы с определителем 1. Пусть F_q – основное поле. Достаточно найти матрицу w такую, что $[y, w] = aE$, где a – первообразный корень из 1 степени $d = (n, q - 1)$. Рассмотрим эквивалентное равенство

$$yw = awy. \quad (13)$$

Возьмем в качестве w диагональную матрицу с элементами $1, a, \dots, a^{n-1}$ по диагонали. Легко проверить, что тогда равенство (13) выполнено. Если n нечетно, то $\det(w) = a^{n(n-1)/2} = 1$ и w – искомая матрица. То же самое верно, если характеристика поля равна 2. Пусть n четно, q – нечетно, и $m = n/d$. Если m четно, то $\det(w) = (a^{n/2})^{n-1} = (a^d)^{(m/2)(n-1)} = 1$, и снова диагональная матрица дает решение. Предположим, что m нечетно. Тогда $\det(w) = (a^{n/2})^{(n-1)} = (a^{d/2})^{m(n-1)} = -1$. Пусть $l = (q - 1)/d$. Если l четно, то $a = b^2$, где $b \in F_q$. Заменяя w на bw , мы не нарушим равенство (13), но теперь уже $\det(bw) = -b^n = -a^{(n/2)} = 1$. Рассмотрим случай, когда l нечетно, т.е. a не является квадратом в F_q .

Легко проверить, что любая матрица вида

$$c = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} \\ -c_{n-1} & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} \\ -c_{n-2} & -c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in F_q$, перестановочна с y , поэтому, заменяя w на ws , мы не нарушим равенство (13). Если доказать, что существуют элементы $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in F_q$ такие, что $\det(c) = -1$, то ws будет искомой матрицей. Доказательство распадается на два случая. Предположим сначала, что $m = 1$, т.е. что $n = d$ делит $q - 1$. Так как a не является квадратом в поле F_q , квадратичное расширение F_{q^2} состоит из элементов вида $\alpha + \beta b$, где $\alpha, \beta \in F_q$, $b^2 = a$. Поскольку a — первообразный корень степени n из 1, поле F_{q^2} содержит все корни n -й степени из -1

$$b_1 = b, \quad b_2 = ba, \dots, b_n = ba^{n-1}.$$

Непосредственно проверяется, что векторы

$$u_k = (1, b_k, b_k^2, \dots, b_k^{n-1}) \quad (k = 1, \dots, n)$$

— собственные векторы матрицы c , соответствующие собственным значениям

$$\lambda_k = c_0 + c_1 b_k + \dots + c_{n-1} b_k^{n-1}.$$

Так как эти векторы линейно независимы, отсюда следует, что матрица c диагонализуема над F_{q^2} , поэтому

$$\det(c) = \prod_{k=1}^n (c_0 + c_1 b_k + \dots + c_{n-1} b_k^{n-1}). \quad (15)$$

Вектор u_k можно представить в виде $u_k = v_k + b_k w_k$, где координаты векторов

$$v_k = (c_0, 0, c_2 b_k^2, 0, \dots, c_{n-2} b_k^{n-2}, 0), \\ w_k = (0, c_1, 0, c_3 b_k^2, \dots, 0, c_{n-1} b_k^{n-2})$$

уже принадлежат полю F_q . Корни четной степени n из -1 встречаются парами $\pm b_k$. Каждой такой паре соответствует двумерное над F_q инвариантное подпространство, порожденное векторами v_k, w_k . Векторы $v_1, w_1, \dots, v_{n/2}, w_{n/2}$ образуют базис, в котором матрица c распадается на блоки размера 2×2

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ b_k^2 \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha_k + b_k \beta_k = \lambda_k$, т.е.

$$\begin{aligned}\alpha_k &= c_0 + c_2 b_k^2 + \cdots + c_{n-2} b_k^{n-2}, \\ \beta_k &= c_1 + c_3 b_k^2 + \cdots + c_{n-1} b_k^{n-2}.\end{aligned}$$

Отсюда получается выражение для определителя, использующее только элементы поля F_q ,

$$\det(c) = \prod_{k=1}^{n/2} (\alpha_k^2 - b_k^2 \beta_k^2).$$

Легко видеть, что матрица коэффициентов, с помощью которых элементы $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{n/2}, \beta_{n/2}$ выражаются через $c_0, \dots, c_{n-1}$, невырождена, поэтому эти элементы независимо пробегают поле F_q . Доказательство (в случае $m = 1$) будет закончено, если мы покажем, что для любого фиксированного ненулевого элемента $e \in F_q$ квадратичная форма $x_1^2 + ex_2^2$ принимает в F_q все значения. Беря $x_2 = 0$, получим все квадраты поля F_q . Если e не является квадратом в F_q , то при $x_1 = 0$ получаются все элементы из $F_q^* \setminus (F_q^*)^2$. Пусть $e \in (F_q^*)^2$. После очевидной замены дело сводится к форме $x_1^2 + x_2^2$. Если для всех $x_1, x_2 \in F_q$ $x_1^2 + x_2^2$ — квадрат в поле F_q , то множество всех квадратов (вместе с нулем) образуют подполе, содержащее $(q+1)/2$ элементов. Это невозможно, так как q и $(q+1)/2$ взаимно просты. Итак, $x_1^2 + x_2^2 \notin (F_q^*)^2$ для некоторой пары (x_1, x_2) . Пропорциональные пары дадут все остальные элементы смежного класса $F_q^* \setminus (F_q^*)^2$.

Пусть теперь m — произвольное нечетное число. Как и раньше $d = (n, q-1)$. Мы уже доказали, что существуют элементы $c'_0, \dots, c'_{d-1} \in F_q$ такие, что определитель $d \times d$ матрицы c' вида (14) равен -1 . Положим $c_0 = c'_0, c_m = c'_1, \dots, c_{(d-1)m} = c'_{d-1}$ и $c_i = 0$ при $i \neq 0 \pmod m$ ($0 \leq i \leq n-1$). Несложное рассуждение показывает, что для соответствующей $n \times n$ матрицы c

$$\det(c) = (\det(c'))^m = (-1)^m = -1.$$

На этом заканчивается обоснование примера 6. Много других примеров можно найти в работе [15].

Теперь мы рассмотрим конструкции, позволяющие по уже имеющимся неприводимым С-группам строить другие неприводимые С-группы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Предположим, что $\overline{G}$ — центральное расширение группы G . Если G — ориентируемая неприводимая С-группа, то $\overline{G}$ в том и только том случае является неприводимой ориентируемой С-группой, когда естественное отображение $\overline{G} \rightarrow G$ индуцирует изоморфизм $\overline{G}_{ab} \cong G_{ab}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\overline{G}_{ab} \cong G_{ab}$, и пусть $\hat{G}$ — универсальное центральное расширение группы G . Тогда существует морфизм расширений $f: \hat{G} \rightarrow \overline{G}$. Из того, что $\hat{G}_{ab} \cong \overline{G}_{ab} \cong G_{ab}$, легко следует, что f — эпиморфизм. Пусть g — С-образующий для G . Как вытекает из следствия 4, $H_2 G$ состоит из коммутаторов $[\hat{g}, \hat{h}]$, где $h \in C(g) \subseteq G$, а $\hat{}$ означает взятие прообраза в $\hat{G}$. По лемме 6 $\hat{G}$ является С-группой. Чтобы получить $\overline{G}$ из $\hat{G}$ надо профакторизовать $\hat{G}$ по

всем коммутаторам $[\hat{g}, \hat{h}]$, содержащимся в $\ker f$. Но соотношения вида $\hat{h}^{-1}\hat{g}\hat{h} = \hat{g}$ допустимы при задании С-групп. Это доказывает, что $\overline{G}$ – С-группа. В обратную сторону предложение очевидно.

Определим теперь прямое произведение в категории неприводимых ориентируемых С-групп. Сначала уточним понятие гомоморфизма. Пусть С-группы G_1 и G_2 заданы своими копредставлениями

$$G_i = \langle X_i \mid R_i \rangle \quad (i = 1, 2). \quad (16)$$

Будем предполагать, что $X_i^{G_i} = X_i$. Гомоморфизм $f: G_1 \rightarrow G_2$ назовем *гомоморфизмом С-групп*, или *С-гомоморфизмом*, если $f(X_1) \subseteq X_2$. Обычное прямое произведение групп G_1 и G_2 можно определить как группу G вместе с эпиморфизмами $\pi_i: G \rightarrow G_i$ такими, что для любой группы H и гомоморфизмов $f_i: H \rightarrow G_i$ существует единственный гомоморфизм $f: H \rightarrow G$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \pi_i \\ H & & \\ & \searrow \varphi_i & \\ & & G_i \end{array}$$

коммутативна. Прямое произведение в категории неприводимых ориентируемых С-групп определяется точно так же. Надо лишь слово “группа” заменить на “неприводимая ориентируемая С-группа” и “гомоморфизм” – на “С-гомоморфизм”. Единственность такого прямого произведения следует из его универсального свойства. Докажем существование. Пусть неприводимые ориентируемые С-группы заданы копредставлениями (16). Рассмотрим группу G с множеством образующих

$$X = \{(u_\alpha, v_\beta) \mid u_\alpha \in X_1, v_\beta \in X_2\}$$

и определяющими соотношениями

$$(u_{\alpha'}, v_{\beta'})^{-1}(u_\alpha, v_\beta)(u_{\alpha'}, v_{\beta'}) = (u_{\alpha'}^{-1}u_\alpha u_{\alpha'}, v_{\beta'}^{-1}v_\beta v_{\beta'}).$$

Очевидно, G – неприводимая ориентируемая С-группа. Проекции $(u_\alpha, v_\beta) \rightarrow u_\alpha$ и $(u_\alpha, v_\beta) \rightarrow v_\beta$ определяют эпиморфизмы $\pi_i: G \rightarrow G_i$. Непосредственно из определений следует, что построенная группа G удовлетворяет нужному универсальному свойству. Прямое произведение в категории неприводимых С-групп будем обозначать $G_1 \times_C G_2$. Установим связь введенной конструкции с обычным прямым произведением. Для этого представим G_1 и G_2 в виде полупрямого произведения $G_1 = \langle u \rangle K$, $G_2 = \langle v \rangle L$, где $u \in X_1, v \in X_2, K = G'_1, L = G'_2$. Рассмотрим, далее, группу $P = \langle w \rangle N$, где $N = K \times L, w^{-1}(a, b)w = (u^{-1}au, v^{-1}bv)$ для $a \in K, b \in L$. Множество Y элементов $w(a_\alpha, b_\beta)$ таких, что $ua_\alpha \in X_1, vb_\beta \in X_2$, инвариантно, поэтому определено универсальное С-накрытие $P^* = (P, Y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Отображение $f: (u_\alpha, v_\alpha) \rightarrow w(u^{-1}u_\alpha, v^{-1}v_\beta)$ продолжается до изоморфизма $G_1 \times_C G_2 \cong P^*$. Ядро естественного гомоморфизма $P^* \rightarrow P$ изоморфно $(K_{ab} \otimes L_{ab}) \otimes_{\langle w \rangle} \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определений следует, что отображение f продолжается до гомоморфизма $f: G_1 \times_C G_2 \rightarrow P$, а благодаря универсальному свойству C -накрытия f продолжается до гомоморфизма $f^*: G_1 \times_C G_2 \rightarrow P^*$. Теперь заметим, что определены эпиморфизмы $\varphi_i: P \rightarrow G_i$, где $\varphi_1(w(a_\alpha, b_\beta)) = ua_\alpha$, $\varphi_2(w(a_\alpha, b_\beta)) = vb_\beta$, следовательно, определены эпиморфизмы $\varphi_i^*: P^* \rightarrow G_i$. Тогда по универсальному свойству прямого произведения определен гомоморфизм $\varphi: P^* \rightarrow G_1 \times_C G_2$, который и дает отображение обратное к f^* . Вычислим ядро отображения $P^* \rightarrow P$. По теореме 4 оно совпадает с коядром отображения $\rho_w: C(w) \rightarrow H_2(P)$. Из спектральной последовательности расширения

$$1 \longrightarrow K \times L \longrightarrow P \longrightarrow \langle w \rangle \longrightarrow 1$$

и формулы Кюннета для прямого произведения $K \times L$ легко следует, что

$$H_2P = H_2G_1 \oplus H_2G_2 \oplus (H_1K \otimes H_1L) \otimes_{\langle w \rangle} \mathbb{Z}.$$

Так как G_1 и G_2 — неприводимые C -группы, образ отображений ρ_u и ρ_v совпадает, соответственно, с H_2G_1 и H_2G_2 , но $\text{Im } \rho_w = \text{Im } \rho_u \oplus \text{Im } \rho_v$, следовательно, $\text{Coker } \rho_w = (K_{ab} \oplus L_{ab}) \otimes_{\langle w \rangle} \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 7. Пусть $G = \langle w, a \mid w^{-1}aw = a^{-1}, a^3 = 1 \rangle$. Очевидно, $G' \cong \mathbb{Z}_3$ — циклическая группа порядка 3. Из следствия 4 вытекает, что G — неприводимая ориентируемая C -группа (с множеством C -образующих w, wa, wa^2). Рассмотрим прямое произведение $G \times_C G$. Тогда ядро соответствующего отображения $P^* \rightarrow P$ изоморфно $(\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3) \otimes_{\langle w \rangle} \mathbb{Z}$, а так как $(a \otimes a)w = (-a) \otimes (-a) = a \otimes a$, то ядро изоморфно $\mathbb{Z}_3$. Итак, коммутант прямого произведения $G \times_C G$ — центральное (неабелево) расширение прямого произведения $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ с помощью циклической группы $\mathbb{Z}_3$.

Наконец, введем свободное произведение. Пусть неприводимые ориентируемые C -группы G_1 и G_2 заданы своими копредставлениями (16). Их свободным произведением $G_1 *_C G_2$ в категории неприводимых ориентируемых C -групп назовем факторгруппу обычного свободного произведения $G_1 * G_2$ по соотношению $u = v$, где $u \in X_1$, $v \in X_2$. Очевидно, $G_1 *_C G_2$ — C -группа. Имеются вложения $\mu_i: G_i \rightarrow G$ ($i = 1, 2$), $G' \cong G'_1 * G'_2$ и действие образующего $u = v$ на G' согласовано с действием u на G'_1 и v на G'_2 . Для любой неприводимой ориентируемой C -группы H и гомоморфизмов $\varphi_i: G_i \rightarrow H$ таких, что $\varphi_1(u) = \varphi_2(v)$, существует единственный

гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ такой, что диаграмма

коммутативна. Если $u' \in X_1$, $v' \in X_2$ — два других образующих, то u' сопряжен с u , а v' — с v , поэтому свободное произведение $G_1 *_C G_2$ определено с точностью до автоморфизма, ограничения которого на G_1 и G_2 — внутренние автоморфизмы. Неоднозначность в выборе отождествляемых образующих похожа на произвол в выборе вырезаемых окрестностей при построении связной суммы многообразий.

Список литературы

1. *Kervaire M.* On higher dimensional knots // Differential and combinatorial Topology: Princeton Univ. Press, 1965. P. 105–120.
2. *Kulikov Vic. S., Kuzmin Yu. V.* On the fundamental groups of the complements to codimension 2 submanifolds of sphere // LMS lectures series (to appear).
3. *Simon J.* Wirtinger approximations and the knot groups of S^n in S^{n+2} // Pac. J. Math. 1980. V. 90. P. 177–190.
4. *Hausmann J., Kervaire M.* Sous-grope des dérivés des groupes de noeud // L'Enseignement M. 1978. V. 24. P. 111–123.
5. *Suzuki S.* Problems of 2-spheres in 4-sphere // Math. Sem. Notes. Kobe University. 1976. V. 4. №3.
6. *Hillman J.* 2-knots and their groups: Cambridge Univ. Press, 1989.
7. *Howie J.* On the asphericity of ribbon disk complements // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 289. P. 281–302.
8. *Кроуэл Р., Фокс Р.* Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1985.
9. *Куликов Вик. С.* Геометрическая реализация С-групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С. 194–204.
10. *Gilbert N., Howie J.* LOG groups, higher knot groups and Schur multipliers // Bull. London Math. Soc. (to appear).
11. *Кузьмин Ю. В.* Об одном способе построения С-групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 4. С. 105–124.
12. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую К-теорию. М.: Мир, 1974.
13. *Горенштейн Д.* Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
14. *Klyachko A. A.* A funny property of sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V. 21. №7. P. 2555–2575.
15. *Семенов Ю. С.* О коммутантах неприводимых С-групп // Матем. сб. 1996. Т. 187. №3 (в печати).

Московский государственный
университет путей сообщения

Поступила в редакцию
22.06.1995