Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Чувашова, Свойства отделимости для замыкающих торических орбит, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 3, 117–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:19:34

УДК 512.745

О. В. Чувашова

Свойства отделимости для замыканий торических орбит

Подмножество X векторного пространства V обладает свойством отделимости, если оно разделяет линейные функции в следующем смысле: для любой пары (α, β) линейно независимых линейных функций на V существует точка $x \in X$ такая, что $\alpha(x) = 0$ и $\beta(x) \neq 0$. Это эквивалентно тому, что любая однородная гиперплоскость $H \subseteq V$ линейно порождается своим пересечением с X .

В работе получен критерий выполнения свойства отделимости для замыканий орбит в пространствах представлений алгебраического тора. Также рассматриваются слабое и сильное свойства отделимости.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

1. Пусть V – векторное пространство над полем k , G – связная редуктивная алгебраическая группа. Рассмотрим линейное действие $G : V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [1]). Подмножество X векторного пространства V обладает *свойством отделимости* (SP), если для любой пары линейно независимых линейных функций $\alpha, \beta \in V^*$ найдется точка $x \in X$ такая, что $\alpha(x) = 0$ и $\beta(x) \neq 0$.

Другими словами, свойство отделимости для $X \subset V$ означает, что для любой пары $H \neq H'$ однородных гиперплоскостей в V выполняется $H \cap X \not\subseteq H'$. Или, эквивалентно, для любой однородной гиперплоскости H пересечение $H \cap X$ линейно порождает H .

Для проективных пространств имеется аналогичное определение: подмножество $Y \subset \mathbb{P}(V)$ обладает *свойством отделимости*, если для любой пары $D \neq D'$ гиперплоскостей в $\mathbb{P}(V)$ выполняется $D \cap Y \not\subseteq D'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\alpha \in V^*$, H_α – соответствующая гиперплоскость. Если $X \cap H_\alpha$ пусто, либо $X \cap H_\alpha$ равно нулю, либо $X \subseteq H_\alpha$, то легко видеть, что X не обладает (SP).

Впервые вопрос о выполнении свойства отделимости появился у Й.-К. Янтцена в связи с работой А. Премета [2].

ВОПРОС. Пусть k – алгебраически замкнутое поле, G – простая алгебраическая группа и $\mathfrak{g}$ – ее касательная алгебра. Верно ли, что минимальная нильпотентная орбита в $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного представления обладает свойством отделимости?

Ответ на этот вопрос получен в работе [1]. Он положителен для всех простых групп, за исключением Sp_{2n} .

ПРИМЕР 1. Минимальная нильпотентная орбита в алгебре $\mathfrak{sl}_2$ не обладает свойством отделимости.

В работе [1] также введены понятия “сильного” и “слабого” свойств отделимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Замкнутый аффинный конус $X \subseteq V$ размерности ≥ 2 обладает *сильным свойством отделимости* (SSP), если для любого линейного подпространства $W \subseteq V$ коразмерности 2 имеем $\text{codim}_X W \cap X = 2$.

Аналогичное определение можно дать и для замкнутого проективного подмногообразия $Y \subseteq \mathbb{P}(V)$: Y обладает *сильным свойством отделимости*, если для любого линейного подпространства $L \subseteq \mathbb{P}(V)$ коразмерности 2 имеем $\text{codim}_Y L \cap Y = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из выполнения сильного свойства отделимости для замкнутого проективного подмногообразия $Y \subseteq \mathbb{P}(V)$ (замкнутого аффинного конуса $X \subseteq V$) следует выполнение для него свойства отделимости. Действительно, рассмотрим проективный случай. Пусть (SP) не выполняется, т.е. существуют две различные гиперплоскости H_α и H_β в $\mathbb{P}(V)$ такие, что $H_\alpha \cap Y \subseteq H_\beta$. Тогда $(H_\alpha \cap H_\beta) \cap Y = H_\alpha \cap Y$ имеет в Y коразмерность ≤ 1 (это следует, например, из [3; теорема 1.6.4]), а значит, (SSP) тоже не выполняется. В аффинной ситуации достаточно заметить, что (SP) (соответственно (SSP)) для замкнутого аффинного конуса эквивалентно (SP) (соответственно (SSP)) для его проективизации.

Следующий пример показывает, что из (SP) не следует (SSP).

ПРИМЕР 2. Конус вырожденных матриц в пространстве всех матриц размера 2×2 не обладает (SSP), но обладает (SP).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подмножество X векторного пространства V обладает *слабым свойством отделимости* (WSP), если для любой пары однородных гиперплоскостей $H \neq H'$ имеем $H \cap X \neq H' \cap X$ (пересечения в теоретическом смысле).

Аналогично определяется слабое свойство отделимости для подмножеств проективного пространства.

Очевидно, что из выполнения свойства отделимости следует выполнение слабого свойства отделимости.

ПРИМЕР 3. Конус нильпотентных матриц в $\mathfrak{sl}_2$ обладает (WSP), но не обладает (SP).

2. Цель этой работы – исследовать свойства отделимости для замыканий орбит тора в векторных и проективных пространствах над алгебраически замкнутым полем, что является простейшим обобщением теоремы 1 из [1] на случай приводимых представлений редуктивных групп.

ТЕОРЕМА [1; теорема 1]. Пусть G – связная полупростая группа и $V(\lambda)$ – модуль Вейля группы G , отвечающий старшему весу λ с метками n_i . Обозначим через $O_{\min} \subset V(\lambda)$ орбиту старшего вектора. Тогда

- (1) $\overline{O_{\min}}$ удовлетворяет (SSP) $\Leftrightarrow \lambda$ – фундаментальный вес;
- (2) $O_{\min}$ удовлетворяет (SP) $\Leftrightarrow n_i \leq 1$ для любого i ;
- (3) $O_{\min}$ удовлетворяет (WSP) $\Leftrightarrow n_i \leq 2$ для любого i .

Пусть T – алгебраический тор, Λ – решетка характеров T , V – векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k . Рассмотрим линейное действие $T : V$, где

$$t(x_1, \dots, x_n) = (\chi_1(t)x_1, \dots, \chi_n(t)x_n).$$

Пусть Σ – полугруппа в Λ , порожденная характерами $\chi_1, \dots, \chi_n$, и K – конус в $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, порожденный Σ .

ТЕОРЕМА 3. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1, \dots, 1)} \subset V$ удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) конус K острый;
- (2) $\mathbb{Q}_+\chi_i$ является ребром K для любого i ;
- (3) $\mathbb{Q}_+\chi_i \neq \mathbb{Q}_+\chi_j$ при $i \neq j$.

Для проективного действия тора имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3'. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1 : \dots : 1)} \subset \mathbb{P}(V)$ удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) точка χ_i является вершиной выпуклой оболочки $\text{conv}\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ для любого i ;
- (2) $\chi_i \neq \chi_j$ при $i \neq j$.

Идея доказательства указанных теорем состоит в том, что если свойство отделимости нарушается для некоторой пары гиперплоскостей, то эти гиперплоскости можно считать T -инвариантными. Для обоснования этого соображения мы определяем характеристическое многообразие произвольного подмножества $X \subset V$ (либо $X \subset \mathbb{P}(V)$):

$$\text{Ch}(X) = \{(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid \alpha(x) = 0 \Rightarrow \beta(x) = 0 \forall x \in X\}.$$

После этого мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть аффинное подмногообразие $X \subset V$ неприводимо, не содержится в однородной гиперплоскости, пересекается с любой однородной гиперплоскостью и $\dim X > 1$. Тогда $\text{Ch}(X)$ замкнуто в $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$.*

Наконец, мы используем тот факт, что алгебраический тор, действующий на проективном многообразии, имеет неподвижную точку. Более точно,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если X не удовлетворяет (SP) и $\text{Ch}(X)$ замкнуто, то существует пара $(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle) \in \text{Ch}(X)$ такая, что α, β T -полуинвариантны и линейно независимы.*

Отметим, что полученные результаты доставляют весьма эффективный способ проверки выполнения свойства (SP) для аффинного (проективного) подмногообразия, инвариантного относительно действия некоторого тора (см. следствие 1). В частности, наш метод позволяет упростить доказательство критерия выполнения свойства отделимости для SL_2 -орбит бинарных форм, полученного в диссертации К. Баур.

ТЕОРЕМА [4; теорема 3.4]. *Пусть $f \in k[x, y]_n$. Тогда орбита $O_f = \text{SL}_2 f$ удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда форма f содержит линейный множитель кратности один.*

Для слабого свойства отделимости мы получили следующие результаты.

ТЕОРЕМА 4. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1, \dots, 1)} \subset V$ удовлетворяет (WSP) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) конус K острый;
- (2) во внутренности любой грани конуса K лежит не более одного характера χ_i (в частности, $\mathbb{Q}_+\chi_i \neq \mathbb{Q}_+\chi_j$ при $i \neq j$).

ТЕОРЕМА 4'. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1 : \dots : 1)} \subset \mathbb{P}(V)$ удовлетворяет (WSP) тогда и только тогда, когда во внутренности любой грани выпуклой оболочки $\text{conv}\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ лежит не более одного χ_j (в частности, $\chi_i \neq \chi_j$ при $i \neq j$).*

Наконец, мы рассматриваем сильное свойство отделимости.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1, \dots, 1)} \subset V$ является конусом. Тогда X удовлетворяет (SSP), если и только если $X = V$ (т.е. веса $\chi_1, \dots, \chi_n$ линейно независимы).*

ТЕОРЕМА 5'. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1 : \dots : 1)} \subset \mathbb{P}(V)$ удовлетворяет (SSP) тогда и только тогда, когда $X = \mathbb{P}(V)$ (т.е. точки $\chi_1, \dots, \chi_n$ аффинно независимы).*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за предложенную тему работы, постоянную поддержку, а также за ряд ценных замечаний и идей. Отдельно автор хочет поблагодарить Д. А. Тимашева за внимательное ознакомление с настоящей работой и последовавшие за этим важные комментарии, а также за указание на ошибку в предварительной версии текста.

§ 2. Гиперповерхности

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $S \subset V$ – гиперповерхность. Тогда*

- (1) S не удовлетворяет (SP) $\Leftrightarrow$ в подходящей системе координат S задается уравнением $x_2^n + x_1 F = 0$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $F \in k[V]$;
- (2) S не удовлетворяет (WSP) $\Leftrightarrow$ в подходящей системе координат S задается уравнением $x_1^n + x_2^m + x_1 x_2 F = 0$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$ и $F \in k[V]$;
- (3) однородная гиперповерхность S не удовлетворяет (SSP) $\Leftrightarrow$ в подходящей системе координат S задается уравнением $x_1 F_1 + x_2 F_2 = 0$ для некоторых однородных многочленов одной степени $F_1, F_2 \in k[V]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S задается уравнением $P = 0$. Можно считать, что у P нет кратных множителей. Тогда, так как поле k алгебраически замкнуто, P определен однозначно с точностью до константы.

Очевидно, что если в некоторой системе координат P есть многочлен указанного вида, то S не обладает соответствующим свойством.

(1) Если S не обладает (SP), то можно выбрать систему координат так, что $S \cap H_{x_1} \subseteq H_{x_2}$. По теореме Гильберта о нулях отсюда следует, что $P = cx_2^n + x_1 F$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $c \in k^*$, $F \in k[V]$.

(2) Если S не обладает (WSP), то можно считать, что $S \cap H_{x_2} = S \cap H_{x_1}$. Из п. (1) следует, что в некоторой системе координат $P = x_1^n + x_2 F_1 = x_2^m + x_1 F_2$. Отсюда следует, что $P = x_1^n + x_2^m + x_1 x_2 F$.

(3) Если S не обладает (SSP), то можно считать, что подпространство в V , задаваемое уравнениями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, имеет в S коразмерность ≤ 1 (это значит, что это подпространство содержится в S). Идеал, порожденный многочленами x_1 , x_2 , радикален, следовательно, по теореме Гильберта о нулях $P = x_1F_1 + x_2F_2$.

Пусть $I(X)$ – идеал многочленов, обращающихся в нуль на замкнутом аффинном подмногообразии $X \subseteq V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $X \subseteq V$ – замкнутое аффинное подмногообразие. Тогда

- (1) X не удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда X содержится в гиперповерхности S , не удовлетворяющей (SP);
- (2) X не удовлетворяет (WSP) тогда и только тогда, когда X содержится в гиперповерхности S , не удовлетворяющей (WSP).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X обладает (SP) (соответственно (WSP)). Тогда очевидно, что любое подмножество Z в V такое, что $X \subseteq Z$, обладает (SP) (соответственно (WSP)).

Докажем обратные импликации. Пусть X не обладает (SP), т.е. существуют линейно независимые $\alpha, \beta \in V^*$ такие, что $H_\alpha \cap X \subseteq H_\beta$. По теореме Гильберта о нулях это выполняется тогда и только тогда, когда $\beta^n = f + g\alpha$, где $n \in \mathbb{N}$, $g \in k[V]$, $f \in I(X)$. Возьмем в качестве S множество нулей f . Тогда $X \subseteq S$ и S не обладает (SP).

Пусть X не обладает (WSP), т.е. существуют линейно независимые $\alpha, \beta \in V^*$ такие, что $H_\alpha \cap X = H_\beta \cap X$. Пусть F – гиперповерхность в V , задаваемая уравнением $\alpha(x)\beta(x) = 0$. Равенство $H_\alpha \cap X = H_\beta \cap X$ эквивалентно выполнению двух равенств: $H_\alpha \cap X = F \cap X$ и $H_\beta \cap X = F \cap X$. Они выполняются тогда и только тогда, когда $\text{rad}(I(X), \alpha) = \text{rad}(I(X), \alpha\beta)$ и $\text{rad}(I(X), \beta) = \text{rad}(I(X), \alpha\beta)$ (где $(I(X), f)$ – идеал, порожденный $I(X)$ и f). Имеем

$$\begin{aligned}\alpha^k &= f_1 + g_1\alpha\beta, \\ \beta^l &= f_2 + g_2\alpha\beta\end{aligned}$$

для некоторых $k, l \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2 \in I(X)$, $g_1, g_2 \in k[V]$. Складывая эти уравнения, получаем, что $f_1 + f_2 = \alpha^k + \beta^l - \alpha\beta(g_1 + g_2)$. Пусть S – множество нулей многочлена $f_1 + f_2$. Тогда S содержит X и по предыдущему предложению не обладает (WSP).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что для (SSP) аналогичное утверждение не имеет места. Действительно, пусть X – замкнутый аффинный конус размерности ≥ 2 и $f \in I(X)$ – однородный многочлен. Тогда однородная гиперповерхность, задаваемая уравнением $x_1f(x) = 0$, содержит X и не обладает (SSP). Более того, мы приведем пример замкнутого аффинного конуса, обладающего (SSP) и содержащегося в неприводимой гиперповерхности, не обладающей (SSP).

ПРИМЕР 4. Пусть $X \subset V$ – замкнутый неприводимый аффинный конус коразмерности ≥ 2 , обладающий (SSP). Существуют однородные взаимно простые $f, p \in I(X)$. Рассмотрим пространство $W = V \oplus k^2$ (x, y – координаты в последних двух слагаемых). Пусть $S \subset W$ – гиперповерхность, задаваемая уравнением $fx^m + py = 0$ (где $\deg p = \deg f + m - 1$), и $Y = X \oplus k^2 \subset W$ – замкнутый аффинный конус. Тогда S не обладает (SSP), неприводима и $Y \subset S$.

Докажем, что Y обладает (SSP). Достаточно доказать, что если $X \subset V$ обладает (SSP), то $X' = X \oplus k \subset V' = V \oplus k$ обладает (SSP). Предположим противное, пусть (SSP) для X' нарушается на подпространстве $U' \subset V'$, задаваемом уравнениями $\alpha' = \alpha + az = 0$, $\beta' = \beta + bz = 0$ (где z – координата во втором слагаемом в $V \oplus k$).

Первый случай. Пусть α и β не пропорциональны. Так как

$$\dim(X \cap H_\alpha \cap H_\beta) = \dim(X' \cap H_{\alpha'} \cap H_{\beta'} \cap H_z) \geq \dim X' - 2 = \dim X - 1,$$

то получаем противоречие с тем, что X обладает (SSP).

Второй случай. Если $\alpha = c\beta$, то U' задается уравнениями $\alpha = 0$, $z = 0$. Но $(X' \cap H_z) \cap H_\alpha = X \cap H_\alpha$ имеет коразмерность 2 в X' , противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Пусть $Y \subseteq \mathbb{P}(V)$ – замкнутое проективное подмногообразие. Тогда

- (1) Y не удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда Y содержится в гиперповерхности R , не удовлетворяющей (SP);
- (2) Y не удовлетворяет (WSP) тогда и только тогда, когда Y содержится в гиперповерхности R , не удовлетворяющей (WSP).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство V и замкнутый аффинный конус $X \subseteq V$ над Y . Конус X обладает (SP) (или (WSP)) тогда и только тогда, когда Y обладает тем же свойством.

Если $Y \subseteq R$, R не обладает (SP) (соответственно (WSP)), то X не обладает (SP) (соответственно (WSP)).

(1) Если X не обладает (SP), то по предложению 2 существует гиперповерхность $S \subset V$ такая, что $X \subseteq S$ и S не обладает (SP). Пусть S задается уравнением $f = 0$, где $f \in I(X)$. По предложению 1 в некоторой системе координат f имеет вид $x_2^n + x_1 F$. Однородная компонента степени n этого уравнения имеет вид $x_2^n + x_1 F'$, следовательно, соответствующая ей проективная гиперповерхность содержит Y и не обладает (SP).

(2) Если X не обладает (WSP), то по предложению 2 существует гиперповерхность $S \subset V$ такая, что $X \subseteq S$ и S не обладает (WSP). Пусть S задается уравнением $f = 0$, где $f \in I(X)$. По предложению 1 в некоторой системе координат f имеет вид $x_1^n + x_2^m + x_1 x_2 F$. Если $n = m$, то компонента этой степени имеет вид $x_1^n + x_2^n + x_1 x_2 F'$ и соответствующая ей проективная гиперповерхность содержит Y и не обладает (WSP). Если $n \neq m$, то компоненты степеней n и m записываются как $x_1^n + x_1 x_2 F_1$ и $x_2^m + x_1 x_2 F_2$. Рассмотрим многочлен $(x_1^n + x_1 x_2 F_1)^m + (x_2^m + x_1 x_2 F_2)^n$. Это однородный многочлен степени mn , он принадлежит $I(X)$, и задаваемая им проективная гиперповерхность не обладает (WSP).

В работе [1] было доказано, что сильное свойство отделимости – это свойство открытого типа в следующем смысле.

Напомним, что семейство d -мерных подмногообразий в $\mathbb{P}(V)$ – это замкнутое подмногообразие $F \subset B \times \mathbb{P}(V)$, где B – произвольное алгебраическое многообразие такое, что проекция pr_B индуцирует сюръективный морфизм $p: F \rightarrow B$, все слои которого имеют размерность d .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [1; предложение 6]. Пусть $F \subset B \times \mathbb{P}(V)$ – семейство d -мерных замкнутых подмногообразий, $p: F \rightarrow B$ – проекция. Тогда подмножество $\{b \in B \mid p^{-1}(b) \text{ удовлетворяет (SSP)}\}$ открыто в B .

Следующий пример показывает, что слабое свойство делимости и свойство делимости не являются свойствами открытого типа.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим замкнутое семейство гиперповерхностей $F \subset k \times \mathbb{P}(V)$, задаваемое уравнением $b(x_1^m + x_2^m) + x_1 x_2 P = 0$, где $b \in k$ и гиперповерхность $R \subset \mathbb{P}(V)$, задаваемая уравнением $P = 0$, обладает (SP) ($\deg P = m - 2$). Тогда по предложению 1 множество $p^{-1}(b)$ не обладает (WSP) при $b \neq 0$. Множество $p^{-1}(0)$ обладает (SP), так как содержит подмножество R , обладающее (SP).

Автору неизвестен подобный пример семейства подмногообразий с неприводимым слоем над каждой точкой $b \in B$.

§ 3. Характеристические многообразия

Пусть X – подмножество в векторном пространстве V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Характеристическое многообразие* $\text{Ch}(X)$ подмножества X – это подмножество в $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$, состоящее из следующих пар:

$$\text{Ch}(X) = \{(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid \alpha(x) = 0 \Rightarrow \beta(x) = 0 \ \forall x \in X\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Слабое характеристическое многообразие* $\text{Chw}(X)$ подмножества X – это подмножество в $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$, состоящее из следующих пар:

$$\text{Chw}(X) = \{(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \beta(x) = 0 \ \forall x \in X\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. (1) Если $\varphi: \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$, $\varphi((\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle)) = (\langle \beta \rangle, \langle \alpha \rangle)$, то $\text{Chw}(X) = \text{Ch}(X) \cap \varphi(\text{Ch}(X))$.

(2) Диагональ $D = (\langle \alpha \rangle, \langle \alpha \rangle) \subseteq \text{Chw}(X) \subseteq \text{Ch}(X)$.

(3) X удовлетворяет (SP) $\Leftrightarrow \text{Ch}(X) = D$; X удовлетворяет (WSP) $\Leftrightarrow \text{Chw}(X) = D$.

В этом параграфе нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 [5; теорема 4.5]. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – доминантный морфизм неприводимых многообразий и $r = \dim X - \dim Y$. Пусть для любого замкнутого неприводимого подмногообразия $W \subseteq Y$ все неприводимые компоненты $\varphi^{-1}(W)$ имеют размерность, равную $\dim W + r$. Тогда φ – открытый морфизм.

ТЕОРЕМА 2. Пусть алгебраическое подмногообразие $X \subset V$ неприводимо, не содержится ни в одной однородной гиперплоскости, пересекается с любой однородной гиперплоскостью и $\dim X > 1$. Тогда $\text{Ch}(X)$ (а значит, и $\text{Chw}(X)$) замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутое подмногообразие

$$M = \{(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, x) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \times X \mid \alpha(x) = 0\}.$$

Пусть $\varphi: M \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$ – проекция вдоль третьей компоненты. Рассмотрим $L = \{(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, x) \in M \mid \beta(x) \neq 0\}$ – открытое подмножество в M . Заметим, что $\text{Ch}(X) = \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \setminus \varphi(L)$. Таким образом, достаточно доказать, что φ – открытый морфизм. Для этого воспользуемся теоремой 1.

(1) То, что M неприводимо, мы докажем ниже в лемме 1.

(2) Морфизм φ сюръективен. Действительно, $\varphi(M) = \{(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \mid \exists x \in X : \alpha(x) = 0\}$. Но X пересекается с любой гиперплоскостью.

(3) Пусть $W \subseteq \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$ замкнуто и неприводимо. Имеем $\varphi^{-1}(W) = (W \times X) \cap R$, где $R \subset \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \times V$ задается уравнением $\alpha(x) = 0$. Таким образом, $\varphi^{-1}(W)$ – гиперповерхность в неприводимом многообразии $W \times X$, а значит, все неприводимые компоненты $\varphi^{-1}(W)$ имеют размерность, равную $\dim X + \dim W - 1$ ($\varphi^{-1}(W)$ непусто, так как X пересекается с любой гиперплоскостью, и не совпадает с $W \times X$, так как X не содержится ни в одной гиперплоскости).

Итак, морфизм φ открытый, теорема 2 доказана.

ЛЕММА 1. В предположениях теоремы 2 многообразие M неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что многообразие $M' \subseteq V^* \times X$, $M' = \{(\alpha, x) \mid \alpha(x) = 0\}$, неприводимо.

(1) Рассмотрим многообразие $L \subseteq V^* \times V$, $L = \{(\alpha, v) \mid \alpha(v) = 0\}$, и проекцию $\psi: L \rightarrow V$. Легко видеть, что морфизм $\psi': L \setminus \psi^{-1}(0) \rightarrow V \setminus \{0\}$ является векторным расслоением.

(2) Пусть $Z = M' \setminus \psi^{-1}(0) = \psi'^{-1}(X \setminus \{0\})$. Отображение $\psi'': Z \rightarrow X \setminus \{0\}$ тоже является векторным расслоением. Многообразие X неприводимо, следовательно, $X \setminus \{0\}$ неприводимо и Z неприводимо.

(3) Имеем, что $M' = Z \sqcup Y$, где Y изоморфно V^* и замкнуто, а Z неприводимо. Пусть $M' = \bigcup M_i$, где M_i – неприводимые компоненты M' . Тогда можно считать, что $\overline{Z} \subseteq M_1$, $Y \subseteq M_2$, следовательно, неприводимых компонент не более двух. Если $Y \neq M_2$, то $M_2 = Y \cup (M_2 \cap \overline{Z})$, что противоречит неприводимости M_2 . Таким образом, Y является одной из неприводимых компонент. Но M' – гиперповерхность в неприводимом многообразии $X \times V^*$ и $\dim M_i = \dim M'$. Имеем $\dim M' = n + \dim X - 1 > n$, а $\dim Y = n$, противоречие. Значит, M' неприводимо.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если для каждой неприводимой компоненты X_i подмногообразия $X \subset V$ выполняются условия теоремы 2, то $\text{Ch}(X) = \bigcap \text{Ch}(X_i)$ замкнуто.

ПРИМЕР 6. Пусть X – это прямая $\langle v \rangle \subset k^n$, $n \geq 2$. Тогда $\text{Ch}(X)$ незамкнуто (содержит открытое в $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$ подмножество $\{(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \mid \alpha(v) \neq 0\}$).

Из теоремы 2 следует аналогичная теорема для подмножества в проективном пространстве $Y \subset \mathbb{P}(V)$ (определение характеристического многообразия для проективного случая аналогичное).

ТЕОРЕМА 2'. Пусть алгебраическое подмногообразие $Y \subset \mathbb{P}(V)$ неприводимо и не содержится в гиперплоскости. Тогда $\text{Ch}(Y)$ и $\text{Chw}(Y)$ замкнуты.

§ 4. Случай T -инвариантного подмногообразия

Пусть T – алгебраический тор, дано линейное действие $T: V$ и X – T -инвариантное подмножество в V . Тогда $\text{Ch}(X)$ и $\text{Chw}(X)$ являются T -инвариантными подмножествами в $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если X не удовлетворяет (SP) и $\text{Ch}(X)$ замкнуто, то существует $(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \in \text{Ch}(X)$, где α, β T -полуинвариантны и линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В V^* фиксируем базис $\{x_1, \dots, x_n\}$, собственный для T . Пусть λ_i – вес x_i .

Существует пара $(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \in \text{Ch}(X)$ такая, что $\langle\alpha\rangle \neq \langle\beta\rangle$. Рассмотрим действие $T : \overline{T(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle)}$. Для действия тора на проективном многообразии всегда существует неподвижная точка. Обозначим ее $(\langle\alpha'\rangle, \langle\beta'\rangle)$. Если $\langle\alpha'\rangle \neq \langle\beta'\rangle$, то все доказано. Пусть теперь $\langle\alpha'\rangle = \langle\beta'\rangle$.

Существует однопараметрическая подгруппа $\gamma : k^* \rightarrow T$ такая, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s)(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) = (\langle\alpha'\rangle, \langle\alpha'\rangle)$$

(см. [6; раздел 2.3]).

Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – координаты α и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ – координаты β . Тогда можно считать, что $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$, где $\alpha'_i = \alpha_i$, если $\langle\gamma, \lambda_i\rangle = \min_{\{j \mid \alpha_j \neq 0\}} \langle\gamma, \lambda_j\rangle$, и $\alpha'_i = 0$ иначе, и формула для β' аналогична (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – естественное спаривание между решеткой однопараметрических подгрупп и решеткой характеров). Пусть $\beta' = c\alpha'$.

Имеем $(\langle\alpha\rangle, \langle\beta - c\alpha\rangle) \in \text{Ch}(X)$ и

$$\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s)(\langle\alpha\rangle, \langle\beta - c\alpha\rangle) = (\langle\alpha'\rangle, \langle\beta''\rangle) \in \text{Ch}(X),$$

причем носители векторов α' , β'' не пересекаются (носитель вектора – это множество базисных векторов, при которых у вектора ненулевые координаты). Получаем, что $\overline{T(\langle\alpha'\rangle, \langle\beta''\rangle)} \cap D = \emptyset$ и искомая точка – это T -неподвижная точка из $\overline{T(\langle\alpha'\rangle, \langle\beta''\rangle)}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $T : V$ и все λ_i различны. Пусть $\{\epsilon_i\}$ – собственный базис в V , $\{x_i\}$ – двойственный базис в V^* и $X \subset V$ – T -инвариантное замкнутое неприводимое подмногообразие. Тогда X не удовлетворяет (SP) $\Leftrightarrow X$ лежит в гиперповерхности вида $x_i^n + x_j F = 0$ для некоторых $i \neq j$, $F \in k[V]$ и $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что свойство делимости для X нарушается на паре T -полуинвариантных линейных функций.

(1) Если X содержится в однородной гиперплоскости, то X содержится в T -инвариантной однородной гиперплоскости и (SP) нарушается на паре T -полуинвариантных функций.

(2) Если X не пересекает некоторую однородную гиперплоскость, то существуют $f, g \in k[X]$ такие, что $fg = 1$. Покажем, что функции f и g являются T -полуинвариантными. Рассмотрим их весовые разложения. Слева в равенстве получаем сумму компонент с разными весами. Выберем однопараметрическую подгруппу, у которой спаривания со всеми весами из разложений f и g разные. Она задает упорядочение на компонентах. Произведениям старших и младших членов не с чем сократиться, получили противоречие.

(3) Если $\dim X = 1$, то X есть либо кривая неподвижных точек, либо замыкание орбиты одномерного тора. В первом случае X содержится в подпространстве, задаваемом уравнениями $x_i = 0$, где $\lambda_i \neq 0$, а во втором (SP) для X нарушается на любой паре координатных функций x_i, x_j , где либо $\lambda_i = 0$, либо $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$.

(4) Если X не содержится ни в одной однородной гиперплоскости, пересекается с любой однородной гиперплоскостью и $\dim X > 1$, то по теореме 2 $\text{Ch}(X)$ замкнуто и по предложению 3 (SP) для X нарушается на паре T -полуинвариантных функций.

§ 5. Приложение к бинарным формам

Пусть $\text{char } k = 0$. Рассмотрим пространство $k[x, y]_n$ бинарных форм степени n , где SL_2 действует естественным образом, а k^* действует гомотетиями.

К. Баур в своей диссертации [4] доказала следующую теорему.

ТЕОРЕМА [4; теорема 3.4]. Пусть $f \in k[x, y]_n$. Орбита $O_f = \text{SL}_2 f$ удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда форма f содержит линейный множитель кратности один.

Для удобства читателя мы приведем здесь доказательство этой теоремы, следуя [4]. Полученное выше следствие 1 позволяет существенно упростить оригинальное доказательство предложения 4.

Доказательство состоит из нескольких лемм.

ЛЕММА 2. Пусть орбита O_f удовлетворяет (SP). Тогда f содержит линейный множитель кратности один.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем от противного. Пусть каждый линейный делитель f имеет кратность не меньше двух. Заметим, что тогда это свойство выполняется для каждого $h(x, y) = h_0x^n + h_1x^{n-1}y + \dots + h_ny^n \in O_f$. Тогда (SP) для O_f нарушается на паре линейных функций $\alpha(h) = h_0$, $\beta(h) = h_1$.

ЛЕММА 3. Орбита O_f удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{k^*O_f}$ удовлетворяет (SP).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если O_f обладает (SP), то $\overline{k^*O_f}$ обладает (SP).

Пусть O_f не обладает (SP), т.е. существуют однородные гиперплоскости $H \neq H'$ такие, что $H \cap O_f \subset H'$. Тогда $H \cap tO_f = t(H \cap O_f) \subset H'$ для любого $t \in k^*$ и $H \cap k^*O_f \subset H'$. Из леммы 4 ниже следует, что $H \cap \overline{k^*O_f} = \overline{H \cap k^*O_f} \subset H'$ и $\overline{k^*O_f}$ не обладает (SP).

ЛЕММА 4 [1; лемма 3(с)]. Пусть $G : V$ – неприводимое представление связанной алгебраической группы G , $H \subset V$ – однородная гиперплоскость и $X \subset V$ – конструктивное G -инвариантное подмножество. Тогда $\overline{H \cap X} = H \cap \overline{X}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Орбита $O_{xy^{n-1}}$ удовлетворяет (SP).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что свойством отделимости обладает

$$X = \overline{k^* \text{SL}_2 xy^{n-1}} = \overline{\text{GL}_2 xy^{n-1}} = \{(ax + by)(cx + dy)^{n-1} \mid a, b, c, d \in k\}$$

(лемма 3). Для точки $h = (ax + by)(cx + dy)^{n-1} \in X$ имеем

$$\begin{aligned} h_m &= aC_{n-1}^{m-1}c^{m-1}d^{n-m} + bC_{n-1}^m c^m d^{n-m-1} \\ &= \frac{(n-1)!c^{m-1}d^{n-m-1}(mad + (n-m)bc)}{m!(n-m)!}. \end{aligned}$$

Если свойство отделимости нарушается, то X содержится в гиперповерхности вида $h_i^k + h_j F = 0$, где F – многочлен от координат h_m (следствие 1). Подставляя в это уравнение координаты точек из X , получаем многочлен от переменных a, b, c, d , тождественно равный нулю. Отсюда следует, что h_i^k делится на h_j (как многочлен от a, b, c, d). Легко видеть, что это не выполняется ни для каких i, j, k .

Следующая лемма в совокупности с леммой 3 завершают доказательство теоремы.

ЛЕММА 5. *Если $f \in k[x, y]_n$ содержит линейный множитель кратности один, то $k^*O_f \supseteq O_{xy^{n-1}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что f имеет вид $x(y + a_2x) \cdots (y + a_nx)$. Пусть $\gamma(t)$ – диагональная матрица $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2$, тогда

$$t^{n-2}\gamma(t)f = x(y + t^2a_2x) \cdots (y + t^2a_nx) \rightarrow xy^{n-1} \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из леммы 3 следует аналогичный результат для действия $\mathrm{SL}_2 : \mathbb{P}(k[x, y]_n)$. Пусть $f \in \mathbb{P}(k[x, y]_n)$. Орбита $O_f = \mathrm{SL}_2 f$ обладает (SP) тогда и только тогда, когда форма f содержит линейный множитель кратности один.

§ 6. Замыкание орбиты тора в векторном пространстве

Пусть T – алгебраический тор и Λ – решетка характеров T . Дано линейное действие $T : V$, где $t(x_1, \dots, x_n) = (\chi_1(t)x_1, \dots, \chi_n(t)x_n)$. Пусть Σ – полугруппа в Λ , порожденная характерами $\chi_1, \dots, \chi_n$, K – конус в $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, порожденный Σ .

Нас интересует вопрос, когда $X = \overline{Tv}$ обладает свойствами отделимости. Если у вектора v есть нулевые координаты, то X содержится в однородной гиперплоскости и не обладает (WSP) (а следовательно, (SP) и (SSP)). Если у v все координаты ненулевые, то можно считать, что $v = (1, \dots, 1)$. Можно также считать, что ядро неэффективности действия $T : V$ конечно, т.е. $\dim X = \dim T$, и конус K телесный.

ЛЕММА 6 [7; лемма 4.1]. *Пусть $X = \overline{T(1, \dots, 1)}$. Тогда идеал $I(X)$ порождается (как векторное пространство над k) биномами вида $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} - x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$, где $\sum a_i \chi_i = \sum b_i \chi_i$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_+$.*

Приведем алгоритм построения конечной системы биномов, задающих X . Рассмотрим в $\mathbb{Z}^n$ подрешетку W , задаваемую системой уравнений $\sum c_i \chi_i = 0$, где $c_i \in \mathbb{Z}$. Каждой точке $c = (c_1, \dots, c_n)$ этой подрешетки соответствует бином $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} - x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$, обращающийся в нуль на X , где $a_i = c_i$, $b_i = 0$, если $c_i > 0$, и $b_i = |c_i|$, $a_i = 0$, если $c_i \leq 0$. Рассмотрим произвольный октант $D_I = \{c \in \mathbb{Z}^n \mid c_i \geq 0 \text{ при } i \in I, c_i \leq 0 \text{ при } i \notin I\}$. Тогда $W \cap D_I$ – конечно порожденная полугруппа. Построим систему порождающих $W \cap D_I$ (например, если $d_1, \dots, d_k \in W \cap D_I$ – система порождающих конуса $\mathbb{Q}_+(W \cap D_I)$, то множество $\{\sum s_i d_i \mid 0 \leq s_i \leq 1\} \cap D_I$ порождает $W \cap D_I$). Возьмем объединение таких систем порождающих для полугрупп $W \cap D_I$ по всем октантам и докажем, что соответствующее множество биномов порождает идеал $I(X)$. Действительно, элемент $x^{I_1+J_1} - x^{I_2+J_2}$ лежит в идеале, порожденном $x^{I_1} - x^{I_2}$ и $x^{J_1} - x^{J_2}$:

$$x^{I_1+J_1} - x^{I_2+J_2} = x^{J_1}(x^{I_1} - x^{I_2}) + x^{I_2}(x^{J_1} - x^{J_2})$$

(где I_1, I_2, J_1, J_2 – наборы из n неотрицательных целых чисел, и если $J = (c_1, \dots, c_n)$, где $c_i \in \mathbb{Z}_+$, то $x^J = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$). Отсюда получаем, что биномы, наборы степеней которых отвечают выбранной системе порождающих W как полугруппы, порождают идеал $I(X)$.

ТЕОРЕМА 3. Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1, \dots, 1)}$ удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (1) конус K острый;
- (2) $\forall i \mathbb{Q}_+\chi_i$ – ребро K ;
- (3) $\mathbb{Q}_+\chi_i \neq \mathbb{Q}_+\chi_j$ при $i \neq j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Легко убедиться, что эти условия эквивалентны следующим:

- (а) $\chi_i \notin \langle \chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \chi_{i+1}, \dots, \chi_n \rangle_{\mathbb{Q}_+}$ для любого i ;
- (б) $-\chi_i \notin \langle \chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \chi_{i+1}, \dots, \chi_n \rangle_{\mathbb{Q}_+}$ для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если K содержит прямую, то существуют числа $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_+$, не все равные нулю, такие, что $\sum c_i \chi_i = 0$. Тогда X лежит в гиперповерхности $x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} = 1$ и не пересекается с гиперплоскостью $x_j = 0$, где $c_j \neq 0$, а следовательно, не удовлетворяет (SP).

(2) Если $\mathbb{Q}_+\chi_i$ не является ребром K , то существуют $c_1, \dots, c_n$ такие, что $c_i \chi_i = \sum_{j \neq i} c_j \chi_j$, $c_i \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{Z}_+$. Если $\chi_i = 0$, то X не пересекается с гиперплоскостью $x_i = 0$ и не удовлетворяет (SP). Если $\chi_i \neq 0$, то существует $c_j \neq 0$, $j \neq i$, а значит, если $x \in X$, $x_j = 0$, то $x_i = 0$ и (SP) не выполняется. Эти же рассуждения проходят для случая, когда $\mathbb{Q}_+\chi_i = \mathbb{Q}_+\chi_j$.

(3) Докажем обратную импликацию. Рассмотрим отдельно частный случай, когда $\dim T = 1$. Тогда набор $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы, только если $\dim V = 1$. В этом случае $X = V$, если $\chi_1 \neq 0$, и $X = \{1\}$, если $\chi_1 = 0$, и X удовлетворяет (SP).

Пусть теперь $\dim X > 1$. Заметим, что X не содержится в гиперплоскости (иначе существуют $i \neq j$ такие, что $\chi_i = \chi_j$) и пересекается с любой гиперплоскостью (так как K острый и $\chi_i \neq 0$ для любого i , то $0 \in X$). Таким образом, по теореме 2 $\text{Ch}(X)$ замкнуто, и если X не удовлетворяет (SP), то по следствию 1 X содержится в гиперповерхности $x_i^l + x_j F$ для некоторых $i \neq j$, $F \in k[V]$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда из леммы 6 следует, что бином $x_i^l - x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$ принадлежит $I(X)$ для некоторых $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_+$, $c_j > 0$ и $l\chi_i = \sum c_m \chi_m$. Если $l \leq c_i$, то так как $\chi_j \neq 0$, получаем противоречие с остротой конуса K , иначе – с тем, что $\chi_i \notin \langle \chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \chi_{i+1}, \dots, \chi_n \rangle_{\mathbb{Q}_+}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X = \overline{T(1, \dots, 1)}$ задается обращением в нуль биномов $p_1, \dots, p_m$ и S_i – гиперповерхность $p_i = 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) X не удовлетворяет (SP);
- (2) существует i такое, что S_i не удовлетворяет (SP);
- (3) существует i такое, что p_i имеет вид $x_i^{c_i} - x_1^{c_1} \cdots x_{i-1}^{c_{i-1}} x_{i+1}^{c_{i+1}} \cdots x_n^{c_n}$, где $c_k \geq 0$, $c_i > 0$, или $x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} - 1$, где $c_k \geq 0$ и существует $c_j > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Пусть среди p_i нет уравнений указанного вида. Докажем, что X обладает (SP). Применим теорему 3.

(а) Конус K острый, и среди χ_i нет нулевых характеров, так как $0 \in X$.

(б) Если $\mathbb{Q}_+\chi_i$ не является ребром K или $\mathbb{Q}_+\chi_i = \mathbb{Q}_+\chi_j$ (т.е. на X выполняется уравнение вида $x_i^{c_i} = x_1^{c_1} \cdots x_{i-1}^{c_{i-1}} x_{i+1}^{c_{i+1}} \cdots x_n^{c_n}$, где $c_k \geq 0$, $c_i > 0$ и существует $c_j > 0$, $j \neq i$), то $X \cap H_{x_j} \subset H_{x_i}$. Но точка $(0, \dots, x_i = 1, \dots, 0) \in X$, получили противоречие. Из теоремы 3 следует, что X обладает (SP) и импликация (1) $\Rightarrow$ (3) доказана.

ПРИМЕР 7. Пусть $T = (k^*)^3$. Рассмотрим пятимерное представление T с характеристиками $\chi_1 = (1, 0, 0)$, $\chi_2 = (1, 1, 0)$, $\chi_3 = (0, 1, 2)$, $\chi_4 = (0, 2, 1)$, $\chi_5 = (1, 0, 1)$. (На рис. 1 изображен конус K , отвечающий этому представлению.) Тогда $X = \overline{T(1, 1, 1, 1, 1)}$ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_1^3 x_3 = x_2 x_5^2, \\ x_1^3 x_4 = x_2^2 x_5, \\ x_2 x_3 = x_4 x_5. \end{cases}$$

Веса этого представления удовлетворяют условиям теоремы 3 (а уравнения не удовлетворяют условиям следствия 2), следовательно, X обладает свойством отделимости.

Рис. 1

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отметим, что сама орбита тора не обладает (SP) ($x_i \neq 0$ на $T(1, \dots, 1)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Назовем подмногообразие $Y \subset V$ *биномиальным*, если Y задается обращением в нуль набора биномов. В частности, замыкание орбиты тора биномиально. Легко показать, что биномиальное многообразие является замыканием орбиты тора тогда и только тогда, когда оно неприводимо. Следующий пример показывает, что утверждение следствия 2 не выполняется для произвольного биномиального подмногообразия.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим биномиальное подмногообразие $Y \subset k^4$, задаваемое уравнениями

$$\begin{cases} x_1 x_2 = x_3 x_4, \\ x_1 x_3 = x_2 x_4, \\ x_1 x_4 = x_2 x_3. \end{cases}$$

Каждая гиперповерхность $x_i x_j = x_l x_m$ обладает (SP). Легко проверить, что (SP) (и даже (WSP)) для Y нарушается, например, на функциях $x_1 - a x_2$ и $x_1 - b x_2$, где $a, b \neq \pm 1$, $a \neq b$ (так как Y — это объединение четырех координатных осей и прямых $x_1 = \pm x_2 = \pm x_3 = \pm x_4$, где присутствует четное число минусов).

ТЕОРЕМА 4. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1, \dots, 1)}$ удовлетворяет (WSP) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) *конус K острый;*
- (2) *во внутренности любой грани конуса K лежит не более одного характера χ_i (в частности, $\mathbb{Q}_+\chi_i \neq \mathbb{Q}_+\chi_j$ при $i \neq j$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если K содержит прямую, то существуют $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_+$, причем $c_j, c_k \neq 0$ для некоторых $j \neq k$, такие, что $\sum c_i \chi_i = 0$. Тогда X лежит в гиперповерхности $x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} = 1$ и не пересекается с гиперплоскостями $x_j = 0$ и $x_k = 0$, а следовательно, не удовлетворяет (WSP).

Пусть не выполняется условие (2), т.е. во внутренности грани K , порожденной набором $\{\chi_i \mid i \in I\}$, лежат два характера (будет считать, что это χ_1, χ_2). Тогда существуют $c_i, d_i > 0$ такие, что $c_1 \chi_1 = \sum_{i \in I} c_i \chi_i$ и $d_2 \chi_2 = \sum_{i \in I} d_i \chi_i$. Имеем

$$X \cap H_{x_1} = \bigcup_{i \in I} X \cap H_{x_i} = X \cap H_{x_2}$$

и X не удовлетворяет (WSP).

Докажем обратную импликацию. Рассмотрим отдельно частный случай, когда $\dim T = 1$. Тогда конус K удовлетворяет условиям теоремы, только если $\dim V = 1$ или $\dim V = 2$ и $t(x_1, x_1) = (x_1, t^l x_2)$, где $l \neq 0$. В первом случае X удовлетворяет (SP), и легко видеть, что во втором случае X обладает (WSP).

Пусть $\dim T \geq 2$. Будем доказывать от противного. Пусть конус K удовлетворяет условиям теоремы, и (WSP) для X нарушается на линейно независимых линейных функциях $\alpha = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ и $\beta = b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n$.

Если M – конус, натянутый на некоторое подмножество ребер конуса K , $h(x)$ – линейная функция, то обозначим через h_M ограничение h на подпространство в V , задаваемое уравнениями $x_i = 0$, где $\chi_i \notin M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть L – собственная грань K . Рассмотрим W – подпространство в V , задаваемое уравнениями $x_i = 0$, где $\chi_i \notin L$. Заметим, что $X \cap W$ – замыкание T -орбиты точки с координатами $x_i = 1$, если $\chi_i \in L$, и $x_i = 0$, если $\chi_i \notin L$. Так как характеры представления $T : V$ удовлетворяют условиям теоремы, то и характеры представления $T : W$ удовлетворяют условиям теоремы (этому представлению отвечает конус L). По индукции по $\dim V$ можно считать, что $X \cap W \subset W$ обладает (WSP). Так как $H_{\alpha_L} \cap X \cap W = H_{\beta_L} \cap X \cap W$, то α_L и β_L линейно зависимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Предположим, что линейные функции $\tilde{\alpha}(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_{i-1} x_{i-1} + a_{i+1} x_{i+1} + \cdots + a_n x_n$ и $\tilde{\beta}(x) = b_1 x_1 + \cdots + b_{i-1} x_{i-1} + b_{i+1} x_{i+1} + \cdots + b_n x_n$ пропорциональны при некотором i . Тогда при $x \in X$ имеем $\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \beta(x) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(x) = 0$ и $x_i = 0$. Существует однопараметрическая подгруппа $\gamma : k^* \rightarrow T$ такая, что $\langle \gamma, \chi_r \rangle \neq \langle \gamma, \chi_j \rangle$ при $r \neq j$. Тогда уравнение $a_1 t^{\langle \gamma, \chi_1 \rangle} + \cdots + a_n t^{\langle \gamma, \chi_n \rangle} = 0$ имеет ненулевой корень. Получили противоречие.

Первый случай. Пусть среди χ_i нет нулевых характеров.

Шаг 1. Предположим, что $\alpha(x) = a_i x_i + a_j x_j$ и $\beta(x) = b_i x_i + b_j x_j$. Но $a_i x_i + a_j x_j = 0$ и $b_i x_i + b_j x_j = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i = 0$, $x_j = 0$. Так как $\chi_i \neq \chi_j$, то существует $x \in T(1, \dots, 1)$ такая, что $\alpha(x) = 0$, противоречие.

Шаг 2. Предположим, что $\alpha(x) = a_i x_i + a_j x_j + a_m x_m$ и $\beta(x) = b_i x_i + b_j x_j + b_m x_m$, причем χ_m лежит во внутренности K .

1. Если $a_i = b_i = 0$ или $a_j = b_j = 0$, то получаем противоречие (см. шаг 1).
 2. Если $a_i = 0$, $b_i \neq 0$, то существует однопараметрическая подгруппа $\gamma: k^* \rightarrow T$ такая, что $\gamma(s)\alpha \rightarrow \alpha'$, $\gamma(s)\beta \rightarrow \beta'$, где носители α' и β' не пересекаются. Так как $\text{Chw}(X)$ замкнуто, то $(\langle \alpha' \rangle, \langle \beta' \rangle) \in \text{Chw}(X)$. Существует T -инвариантная точка $(\langle x_l \rangle, \langle x_r \rangle) \in \overline{T(\langle \alpha' \rangle, \langle \beta' \rangle)}$ ($l \neq r$, так как $\overline{T(\langle \alpha' \rangle, \langle \beta' \rangle)} \cap D = \emptyset$). Следовательно, X содержится в гиперповерхности вида $x_l^c + x_r^d + x_l x_r F$ для некоторых $l \neq r, c, d \in \mathbb{N}$, $F \in k[X]$. Из леммы 5 следует, что биномы $x_l^c - x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}$ и $x_r^d - x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ принадлежат $I(X)$ для некоторых c_l, d_l , причем $c_r, d_l > 0$ и $c\chi_l = \sum c_i \chi_i$, $d\chi_r = \sum d_i \chi_i$. Если $c \leq c_l$ или $d \leq d_r$, то получаем противоречие с остротой конуса K , иначе χ_l и χ_r лежат во внутренности одной грани K , противоречие. Аналогично рассматриваются случаи, когда $a_i \neq 0$, $b_i = 0$, или $a_j = 0$, $b_j \neq 0$, или $a_j \neq 0$, $b_j = 0$.

3. Теперь $a_i, b_i, a_j, b_j \neq 0$. Можно считать, что $a_i = b_i = 1$. Существует однопараметрическая подгруппа $\gamma: k^* \rightarrow T$ такая, что $\langle \gamma, \chi_i \rangle > \langle \gamma, \chi_m \rangle > \langle \gamma, \chi_j \rangle = 0$ (пусть $n_1 = \langle \gamma, \chi_i \rangle$, $n_2 = \langle \gamma, \chi_m \rangle$). Уравнения

$$s^{n_1} + a_m s^{n_2} + a_j = 0, \quad (*)$$

$$s^{n_1} + b_m s^{n_2} + b_j = 0 \quad (**)$$

имеют одинаковые корни без учета кратностей. Если все корни одного уравнения имеют кратности 1, то и все корни другого уравнения имеют кратности 1 и уравнения пропорциональны. Кратный корень s_0 уравнения $(*)$ является корнем его производной и удовлетворяет уравнению

$$s_0^{n_1 - n_2} = -\frac{a_m n_2}{n_1}$$

(если n_1 делится на $\text{char } k$, то либо $a_m = b_m = 0$ – шаг 1, либо n_2 делится на $\text{char } k$ и, заменяя n_1 на $n_1/\text{char } k$, n_2 на $n_2/\text{char } k$, a_j, a_m, b_j, b_m на корни степени $\text{char } k$, получаем аналогичные уравнения). Подставляя полученные соотношения в уравнение $(*)$, получаем

$$s_0^{n_2} \left(-\frac{a_m n_2}{n_1} \right) + a_m s_0^{n_2} + a_j = 0.$$

Отсюда

$$s_0^{n_2} = -\frac{a_j n_1}{a_m (n_1 - n_2)}$$

(если $a_m = 0$ или $n_1 - n_2$ делится на $\text{char } k$, то n_1 делится на $\text{char } k$ и применяем предыдущие рассуждения). Также имеем

$$s_0^{n_1} = \frac{a_j n_2}{n_1 - n_2}.$$

Так как s_0 является корнем уравнения $(**)$, то, подставляя полученные соотношения в $(**)$, получаем, что

$$a_m a_j n_2 - b_m a_j n_1 + b_j a_m (n_1 - n_2) = 0.$$

Так как в уравнении $(**)$ тоже есть кратный корень, то, применяя аналогичные рассуждения, получаем симметричное уравнение

$$b_m b_j n_2 - a_m b_j n_1 + a_j b_m (n_1 - n_2) = 0.$$

Складывая полученные уравнения, имеем $(a_j - b_j)(a_m - b_m) = 0$. Получили противоречие с замечанием 11.

Шаг 3. Рассмотрим случай произвольных α, β . В случае $\dim T = 2$ получаем противоречие с шагом 2.

Теперь рассмотрим случай, когда $\dim T > 2$. Назовем подконусом конуса K конус, порожденный конечным набором векторов из K . Отметим, что внутренность подконуса содержится во внутренности одной из граней K . Рассмотрим подконус K' конуса K , порожденный характеристиками χ_i такими, что $a_i \neq 0$ или $b_i \neq 0$. Так как $\alpha_{K'}$ и $\beta_{K'}$ не пропорциональны, то в K' есть грань L_1 коразмерности 1 такая, что α_{L_1} и β_{L_1} не пропорциональны. Внутри L_1 может быть только характер χ_m , лежащий во внутренности K . (От противного, пусть χ_i – внутренняя точка для собственной грани K и L_1 содержится в этой грани K . Тогда по замечанию 10 α_{L_1} и β_{L_1} пропорциональны, противоречие.) Аналогично, в L_1 существует грань L_2 коразмерности 1 такая, что α_{L_2} и β_{L_2} не пропорциональны. Таким образом, получаем двумерную грань L_r с требуемым свойством. Существует однопараметрическая подгруппа $\gamma: k^* \rightarrow T$ такая, что $\gamma(s)\alpha \rightarrow \alpha_{L_r}$, $\gamma(s)\beta \rightarrow \beta_{L_r}$ при $s \rightarrow 0$. Так как $\text{Chw}(X)$ замкнуто, то $(\langle \alpha_{L_r} \rangle, \langle \beta_{L_r} \rangle) \in \text{Chw}(X)$. Далее применяем шаг 2.

Второй случай. Пусть среди χ_i есть нулевой характер (можно считать, что $\chi_1 = 0$). Если $a_1 = b_1 = 0$, то рассмотрим $X' \subset V'$ – образ X при проекции вдоль первого базисного вектора (V' – подпространство, задаваемое уравнением $x_1 = 0$). Тогда характеры представления $T: V'$ удовлетворяют условию теоремы и среди них нет нулевого. Из первого случая следует, что $X' \subset V'$ обладает (WSP). Но (WSP) для $X' \subset V'$ нарушается на ограничениях на V' функций α, β , противоречие.

Пусть a_1, b_1 не равны нулю одновременно. Из замечания 10 следует, что при $i \neq m$ вектор (a_i, b_i) пропорционален вектору (a_1, b_1) . Получаем, что $a_1 x_1 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} + a_{m+1} x_{m+1} + \dots + a_n x_n$ и $b_1 x_1 + \dots + b_{m-1} x_{m-1} + b_{m+1} x_{m+1} + \dots + b_n x_n$ пропорциональны, что противоречит замечанию 11.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что замыкание орбиты $X = \overline{T(1, \dots, 1)} \subset V$ является конусом. Тогда X удовлетворяет (SSP), если и только если $X = V$ (т.е. веса $\chi_1, \dots, \chi_n$ линейно независимы).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \neq V$ и бином $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} - x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n} \in I(X)$, где существуют $a_i \neq b_i$. Можно считать, что $a_i = 0$ или $b_i = 0$ для любого i . Пусть $a_1 > 0$. Так как X – конус, то существует $b_i > 0$ и

$$X \cap H_{x_1} = \bigcup_{\{i \mid b_i > 0\}} (X \cap V_i),$$

где $V_i = H_{x_1} \cap H_{x_i}$. Существует i такое, что $\dim X \cap V_i = \dim X \cap H_{x_1}$ и $X \cap V_i$ имеет в X коразмерность ≤ 1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Отметим, что доказательство теоремы 5 остается верным для любого конуса, лежащего в биномиальной гиперповерхности, в частности для биномиальных конусов.

ВОПРОС. Пусть X – замкнутое неприводимое T -инвариантное подмногообразие в T -модуле V , для которого нарушается (WSP) (соответственно (SSP)). Верно ли, что пару линейных форм, для которых нарушается (WSP) (соответственно (SSP)), можно выбрать T -собственными?

§ 7. Замыкание орбиты тора в проективном пространстве

Пусть $T : \mathbb{P}(V)$, $t(x_1 : \dots : x_n) = (\chi_1(t)x_1 : \dots : \chi_n(t)x_n)$. Нас интересует вопрос, когда $Y = \overline{T}w$ ($w \in \mathbb{P}(V)$) будет обладать свойствами отделимости. Как и в предыдущем параграфе, можно считать, что $w = (1 : \dots : 1)$ и ядро неэффективности действия $T : \mathbb{P}(V)$ конечно, т.е. $\dim X = \dim T$.

ТЕОРЕМА 3'. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1 : \dots : 1)}$ удовлетворяет (SP) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) для любого i точка χ_i – вершина выпуклой оболочки $\text{conv}\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$;
- (2) $\chi_i \neq \chi_j$ при $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим действие $T \times k^* : V$, где

$$(t, s)(x_1, \dots, x_n) = (s\chi_1(t)x_1, \dots, s\chi_n(t)x_n).$$

Весами этого представления являются $\chi'_i = \chi_i + \lambda$, где $\lambda(t, s) = s$. Тогда $X = \overline{T(1 : \dots : 1)} = \mathbb{P}(\overline{T \times k^*(1, \dots, 1)})$. Применим теорему 4 к $T \times k^*(1, \dots, 1)$.

Конус K острый, так как если $c_i \geq 0$, то $\sum c_i \chi'_i = 0$ тогда и только тогда, когда $c_i = 0$ для любого i . Далее, $\chi'_i \notin \langle \chi'_1, \dots, \chi'_{i-1}, \chi'_{i+1}, \dots, \chi'_n \rangle_{\mathbb{Q}_+}$ тогда и только тогда, когда χ_i не лежит в выпуклой оболочке множества $\{\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \chi_{i+1}, \dots, \chi_n\}$. И наконец, $\mathbb{Q}_+\chi'_i \neq \mathbb{Q}_+\chi'_j$ эквивалентно $\chi_i \neq \chi_j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Для того чтобы подмногообразие $X \subset \mathbb{P}(V)$ обладало (SP), достаточно, чтобы сечение X любой гиперплоскостью было приведено, т.е. являлось суммой простых дивизоров с коэффициентами единица (см. [1; лемма 2]). Для орбиты старшего вектора неприводимого представления редуктивной группы это условие эквивалентно (SP) (см. [1; предложение 5]). Для замыкания орбиты тора это не так. Рассмотрим действие тора $T = (k^*)^2 : \mathbb{P}(k^4)$, $(t_1, t_2)(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (t_1 t_2^2 x_0, t_1 t_2 x_1, t_1^3 x_2, t_2^3 x_3)$. Замыкание орбиты точки $(1 : 1 : 1 : 1)$ – это гиперповерхность, задаваемая уравнением $x_0 x_1^2 = x_2 x_3^2$. Она обладает (SP), но ее пересечение с H_{x_0} не приведено.

ТЕОРЕМА 4'. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1 : \dots : 1)}$ удовлетворяет (WSP) тогда и только тогда, когда во внутренней любой грани выпуклой оболочки $\text{conv}\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ лежит не более одного χ_j (в частности, $\chi_i \neq \chi_j$ при $i \neq j$).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3'.

ТЕОРЕМА 5'. *Замыкание орбиты тора $X = \overline{T(1 : \dots : 1)} \subset \mathbb{P}(V)$ удовлетворяет (SSP) тогда и только тогда, когда $X = \mathbb{P}(V)$ (т.е. точки $\chi_1, \dots, \chi_n$ аффинно независимы).*

Доказательство следует из теоремы 5.

Список литературы

- [1] H. Kraft, N.R. Wallach, “On the separation property of orbits in representation spaces”, *J. Algebra*, **258**:1 (2002), 228–254.
- [2] A. Premet, “Support varieties of non-restricted modules over Lie algebras of reductive groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **55**:2 (1997), 236–250.
- [3] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Наука, М., 1972.

- [4] K. Baur, *Two contributions to the representation theory of algebraic groups*, Doctoral Thesis, Basel, 2002.
- [5] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.
- [6] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [7] B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polytopes*, Univ. Lecture Ser., **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

О. В. Чувашова (O. V. Chuvashova)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: chuvasho@mccme.ru

Поступила в редакцию

18.10.2004 и 22.07.2005