Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Прибегин, Приближение функций из H^p , $0 < p \leq 1$,
обобщенными средними Рисса с дробными показателя-
ми, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 7, 77–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:50:42

УДК 517.5

С. Г. Прибегин

Приближение функций из H^p , $0 < p \leq 1$, обобщенными средними Рисса с дробными показателями

Для функций из H^p в единичном круге при $0 < p \leq 1$ устанавливается, что скорость приближения в метрике L^p граничной функции обобщенными средними Рисса $R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, z)$, $\varepsilon > 0$, $(l+1)p > 1$, $(\alpha+1)p > 1$, эквивалентна модулю гладкости дробного порядка l . При l натуральном этот результат известен.

Библиография: 8 названий.

Работа А. А. Соляника [1] посвящена получению двусторонних оценок скорости приближения для различных методов суммирования функций H^p в верхней полуплоскости при $0 < p \leq 1$ через модули гладкости конечного порядка. Отметим, что в [1] такая оценка была получена и для обобщенных средних Рисса $R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, x)$ при l натуральном.

Р. М. Тригубом в [2] этот результат был перенесен на случай функций из H^p , $0 < p \leq 1$, в полидиске при l четном натуральном. Укажем также работу [3], где независимо от [2] результат А. А. Соляника получен для функций из H^p в круге при l натуральном и $\varepsilon = 1/(n+1)$. Условие натуральности l , как было отмечено в [2], не является существенным и продиктовано лишь тем, что модули гладкости, в основе которых лежат конечные разности и связанные с ними дифференциальные операторы, более изучены. Целью настоящей работы является снятие ограничения натуральности l в двусторонней оценке для функций H^p , $0 < p \leq 1$, в единичном круге.

Отметим также, что настоящая статья является логическим продолжением работы [4], а в идейном плане следует [1].

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность Э. А. Стороженко за полезное обсуждение результатов работы.

§ 1. Вспомогательные факты

Классом Харди H^p , $0 < p < +\infty$, называют множество всех функций f , аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и таких, что

$$\sup_{0 \leq \rho < 1} \|f(\rho e^{i\varphi})\|_p^p = \|f\|_p^p < \infty,$$

где

$$\|f(\rho e^{i\varphi})\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^p d\varphi.$$

Если $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, то функция f имеет почти всюду угловые граничные значения $f(e^{i\varphi}) \in L^p[-\pi, \pi]$, причем $\|f(\rho e^{i\varphi})\|_p^p \leq \|f(e^{i\varphi})\|_p^p = \|f\|_p^p$ (см., например, [5; гл. IV, С, 1°, теорема]).

Пусть $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, в круге D , $\sum_{k=0}^{\infty} (f)_k z^k$ – ее ряд Тейлора, F – непрерывная экспоненциально убывающая на $[0, +\infty)$ функция. Тогда, следуя схеме работы [1], положим

$$M_{\varepsilon, F}(f; e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} F(\varepsilon k)(f)_k e^{ikt}, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$.

Если, кроме того, $F(0) = 1$, то $M_{\varepsilon, F}(f; e^{it})$ будем называть F -средними ряда Тейлора функции f , а функцию F – множителем или сумматорной функцией. Взяв в (1) в качестве $F(t)$ функцию

$$r^{l, \alpha}(t) = (1 - t^l)_+^{\alpha}, \quad \alpha > -1, \quad l > 0, \quad (2)$$

мы получим обобщенные средние Рисса

$$R_{\varepsilon}^{l, \alpha}(f; e^{it}) = \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} (1 - (\varepsilon k)^l)^{\alpha} (f)_k e^{ikt}. \quad (3)$$

Со средними Рисса $R_{\varepsilon}^{l, \alpha}(f; e^{it})$ тесно связаны средние Чезаро. Средние Чезаро имеют вид

$$\sigma_n^{\alpha}(f; e^{it}) = (A_n^{\alpha})^{-1} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha} (f)_k e^{ikt}, \quad \alpha > -1, \quad (4)$$

где

$$A_n^{\alpha} = \binom{\alpha + n}{n} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (5)$$

Известно, что

$$C_2(n + 1)^{\alpha} \leq A_n^{\alpha} \leq C_1(n + 1)^{\alpha}, \quad n \geq 0, \quad \alpha > -1. \quad (6)$$

Из результата статьи [6] следует, что для $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$,

$$\|\sigma_n^{\alpha}(f; e^{it})\|_p \leq C(\alpha, p) \|f\|_p \cdot \begin{cases} 1, & (\alpha + 1)p > 1; \\ (\ln(n + 2))^{1/p}, & (\alpha + 1)p = 1; \\ n^{1/p - (\alpha + 1)}, & 0 < (\alpha + 1)p < 1. \end{cases} \quad (7)$$

ЛЕММА 1. Пусть $F(t)$ – комплекснозначная s раз непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$ функция, причем она и все ее производные до s -го порядка включительно экспоненциально убывают и $s \geq 3$. Тогда для любой функции $f \in H^p$, $(s - 1)^{-1} < p \leq 1$,

$$\|M_{\varepsilon, F}(f; e^{it})\|_p \leq C(p) \|f\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$(f)_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i(\varphi+t)}) (\rho e^{i\varphi})^{-k} d\varphi,$$

то на основании (1)

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon, F}(f; e^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i(\varphi+t)}) \sum_{k=0}^{\infty} F(\varepsilon k) (\rho e^{i\varphi})^{-k} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i(\varphi+t)})}{(1 - \rho e^{i\varphi})^s} (1 - \rho e^{i\varphi})^s \sum_{k=0}^{\infty} F(\varepsilon k) (\rho e^{i\varphi})^{-k} d\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

В [1; § 3, (35)] получена следующая формула:

$$\begin{aligned} &(1 - \rho e^{i\varphi})^s \sum_{k=0}^{\infty} F(\varepsilon k) (\rho e^{i\varphi})^{-k} \\ &= \sum_{n=1}^s \binom{s}{n} (-1)^n \sum_{m=1}^n F(\varepsilon(n-m)) (\rho e^{i\varphi})^m + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\varepsilon}^s F(\varepsilon n) (\rho e^{i\varphi})^{-n}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Delta_{\varepsilon}^s F(\varepsilon n) = \sum_{m=0}^s \binom{s}{m} (-1)^m F(\varepsilon(n+m)).$$

На основании теоремы Коши

$$\sum_{n=1}^s \binom{s}{n} (-1)^n \sum_{m=1}^n F(\varepsilon(n-m)) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i(\varphi+t)})}{(1 - \rho e^{i\varphi})^s} (\rho e^{i\varphi})^m d\varphi = 0. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (8), с учетом (10) получаем следующее интегральное представление:

$$M_{\varepsilon, F}(f; e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i(\varphi+t)})}{(1 - \rho e^{i\varphi})^s} \sum_{n=0}^s \Delta_{\varepsilon}^s F(\varepsilon n) (\rho e^{i\varphi})^{-n} d\varphi. \quad (11)$$

Так как функция F s раз непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$ и ее s -я производная экспоненциально убывает, т.е.

$$|F^{(s)}(t)| \leq L_s e^{-a_s t}, \quad L_s > 0, \quad a_s > 0,$$

то

$$|\Delta_{\varepsilon}^s F(\varepsilon n)| < L_s e^{-a_s \varepsilon n} \varepsilon^s.$$

Тогда при $\rho = e^{-a_s \varepsilon/2}$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\varepsilon}^s F(\varepsilon n) (\rho e^{i\varphi})^{-n} \right| \leq L_s \varepsilon^s \frac{1}{1 - e^{-a_s \varepsilon/2}} \leq C(s) \varepsilon^{s-1}. \quad (12)$$

Из (11) на основании (12)

$$|M_{\varepsilon, F}(f; e^{it})| = C(s) \varepsilon^{s-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i(\varphi+t)})|}{|1 - \rho e^{i\varphi}|^s} d\varphi.$$

Возведем обе части этого неравенства в степень p , воспользовавшись следующим соотношением (см. [6; § 2, лемма 3]):

$$\|f(\rho e^{it})\|_1^p \leq \left(\frac{2}{R - \rho} \right)^{1-p} \|f(R e^{it})\|_p^p, \quad (13)$$

где $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, $0 < \rho < R \leq 1$. Взяв $R = e^{-a_s \varepsilon/4}$ и учитывая, что $\rho = e^{-a_s \varepsilon/2}$, на основании (13) получаем

$$|M_{\varepsilon, F}(f; e^{it})|^p \leq C(s, p) \varepsilon^{(s-1)p} \frac{1}{(R - \rho)^{1-p}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(Re^{i(\varphi+t)})|^p}{|1 - Re^{i\varphi}|^{sp}} d\varphi.$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по t от $-\pi$ до π . Тогда

$$\|M_{\varepsilon, F}(f; e^{it})\|_p^p \leq C(p) \varepsilon^{sp-1} \|f\|_p^p \int_0^\pi |1 - Re^{i\varphi}|^{-sp} d\varphi. \quad (14)$$

В [6; § 2, лемма 2] доказано следующее неравенство: если $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma - \beta > 1$ и $1/2 < R < 1$, то

$$\int_0^\pi t^\beta |1 - Re^{it}|^{-\gamma} dt \leq C(\beta, \gamma) (1 - R)^{1+\beta-\gamma}.$$

Так как $(s-1)^{-1} < p \leq 1$ и $s \geq 3$, то $sp > p(1/p + 1) = 1 + p > 1$ и, следовательно,

$$\int_0^\pi |1 - Re^{i\varphi}|^{-sp} d\varphi \leq C(p) (1 - R)^{1-sp} \leq C(p) \varepsilon^{1-sp}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем утверждение леммы.

Будем говорить, что $F \in E$, если F – бесконечно дифференцируемая экспоненциально убывающая на $[0, +\infty)$ функция, все производные которой также экспоненциально убывают. Для дальнейшего нам понадобится аналог (7) для $R_\varepsilon^{l, \alpha}(f; e^{it})$.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, и $\alpha > -1$. Тогда

$$\|R_\varepsilon^{l, \alpha}(f; e^{it})\|_p \leq C(\alpha, p, l) \|f\|_p \cdot \begin{cases} 1, & (\alpha + 1)p > 1; \\ \left(\ln \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 2 \right) \right)^{1/p}, & (\alpha + 1)p = 1; \\ \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \right)^{1/p - (\alpha + 1)}, & 0 < (\alpha + 1)p < 1. \end{cases} \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале (16) для $R_\varepsilon^{l, \alpha}(f; e^{it})$:

$$R_\varepsilon^{l, \alpha}(f; e^{it}) = \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} (1 - k\varepsilon)^\alpha (f)_k e^{ikt} = \varepsilon^\alpha \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} (m + \theta)^\alpha (f)_k e^{ikt}. \quad (17)$$

Здесь $m = [1/\varepsilon] - k$ и $\theta = \{1/\varepsilon\}$, если $\{1/\varepsilon\} \neq 0$, и $m = 1/\varepsilon - k - 1$, $\theta = 1$, если $\{1/\varepsilon\} = 0$.

Согласно формуле (2.5) из [7] (см. также [8; § 20, формула (20.19)])

$$(m + \theta)^\alpha = \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} a_k(\theta) A_m^{\alpha-k} + d(m, \alpha, \theta), \quad (18)$$

где $\alpha > -1$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leq 1$, $a_k(\theta) = a_k(\theta, \alpha)$ – многочлен степени k от θ , не зависящий от m , причем $a_0 = \Gamma(\alpha + 1)$, $A_m^{\alpha-k}$ – коэффициенты Чезаро (5), а

$$d(m, \alpha, \theta) = O\left(\frac{1}{m^{[\alpha]+2-\alpha}}\right). \quad (19)$$

При $m = 0$ и $0 < \theta < 1$ на основании формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\theta^\alpha = (1 - (1 - \theta))^\alpha = \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} (1 - \theta)^k + O((1 - \theta)^{[\alpha]+2}).$$

Отсюда, учитывая, что $A_0^{\alpha-k} = 1$ при $k = 0, 1, \dots, [\alpha] + 1$,

$$\theta^\alpha = \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} a_k(\theta) A_0^{\alpha-k} + d(0, \alpha, \theta) + \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} \left((-1)^k \binom{\alpha}{k} (1 - \theta)^k - a_k(\theta) \right), \quad (20)$$

где

$$d(0, \alpha, \theta) = O(1). \quad (21)$$

Будем считать, что $\{1/\varepsilon\} \neq 0$ (случай $\{1/\varepsilon\} = 0$ рассматривается аналогично). Подставляя (18) и (20) в (17), получаем

$$\begin{aligned} R_\varepsilon^{1,\alpha}(f; e^{it}) &= \varepsilon^\alpha \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} \left(\sum_{j=0}^{[\alpha]+1} a_j(\theta) A_m^{\alpha-j} + d(m, \alpha, \theta) \right) (f)_k e^{ikt} \\ &\quad + \varepsilon^\alpha \left(\sum_{j=0}^{[\alpha]+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (1 - \theta)^j - a_j(\theta) \right) (f)_{[1/\varepsilon]} e^{i[1/\varepsilon]t} \\ &= \varepsilon^\alpha \sum_{j=0}^{[\alpha]+1} a_j(\theta) \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} A_{[1/\varepsilon]-k}^{\alpha-j} (f)_k e^{ikt} \\ &\quad + \varepsilon^\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i(\varphi+t)}) \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} \left(d\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - k, \alpha, \theta \right) (\rho e^{i\varphi})^{-k} d\varphi \\ &\quad + \varepsilon^\alpha \left(\sum_{j=0}^{[\alpha]+1} \left((-1)^j \binom{\alpha}{j} (1 - \theta)^j - a_j(\theta) \right) \right) \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i(\varphi+t)}) (\rho e^{i\varphi})^{-[1/\varepsilon]} d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (4)

$$\begin{aligned} R_\varepsilon^{1,\alpha}(f; e^{it}) &= \varepsilon^\alpha \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} a_j(\theta) A_{[1/\varepsilon]}^{\alpha-j} \sigma_{[1/\varepsilon]}^{\alpha-j}(f; e^{it}) \\ &\quad + \varepsilon^\alpha Q(f; e^{it}) + \varepsilon^\alpha \cdot N(\theta)(f)_{[1/\varepsilon]} e^{i[1/\varepsilon]t}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$Q(f; e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i(\varphi+t)}) \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} d\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - k, \alpha, \theta\right) (\rho e^{i\varphi})^{-k} d\varphi,$$

$$N(\theta) = \sum_{j=0}^{[\alpha]+1} \left((-1)^j \binom{\alpha}{j} (1-\theta)^k - a_j(\theta) \right).$$

Так как $a_j(\theta)$ и $N(\theta)$ – многочлены относительно θ и $\theta \in (0, 1]$, то

$$\max_{0 \leq j \leq [\alpha]+1} \left(\max_{0 \leq \theta \leq 1} |a_j(\theta)|^p \right) \leq C(\alpha, p), \quad (23)$$

$$\max_{0 \leq \theta \leq 1} |N(\theta)|^p \leq C(\alpha, p). \quad (24)$$

Несложно видеть, что

$$\|(f)_{[1/\varepsilon]} e^{i[1/\varepsilon]t}\|_p^p \leq \rho^{-[1/\varepsilon]p} \|f(\rho e^{i\varphi})\|_1^p, \quad (25)$$

где $0 < \rho \leq 1$.

Далее, на основании (11) и (13)

$$\left| \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} d\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - k, \alpha, \theta\right) (\rho e^{i\varphi})^{-k} \right| \leq C(\alpha) \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} \frac{\rho^{-k}}{([1/\varepsilon] - k + 1)^{[\alpha]+2-\alpha}}$$

$$\leq C(\alpha) \rho^{-[1/\varepsilon]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{[\alpha]+2-\alpha}} = C(\alpha) \rho^{-[1/\varepsilon]}.$$

Отсюда следует, что

$$\|Q(f; e^{it})\|_p^p \leq C(\alpha, p) \rho^{-[1/\varepsilon]p} \|f(\rho e^{i\varphi})\|_1^p. \quad (26)$$

Из (14) на основании неравенства треугольника для метрики L^p при $0 < p \leq 1$, а также из (6), (15), (16), (17), (18) получаем

$$\|R_{\varepsilon}^{1,\alpha}(f; e^{it})\|_p^p$$

$$\leq C(\alpha, p) \left(\sum_{j=0}^{[\alpha]+1} \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-jp} \|\sigma_{[1/\varepsilon]}^{\alpha-j}(f; e^{it})\|_p^p + \varepsilon^{\alpha p} \rho^{-[1/\varepsilon]p} \|f(\rho e^{i\varphi})\|_1^p \right). \quad (27)$$

Как следует из (7),

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-jp} \|\sigma_{[1/\varepsilon]}^{\alpha-j}(f; e^{it})\|_p^p$$

$$\leq C(\alpha, p) \|f\|_p^p \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-jp} \cdot \begin{cases} 1, & (\alpha - j + 1)p > 1; \\ \ln\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2\right), & (\alpha - j + 1)p = 1; \\ \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{1-(\alpha+1)p}, & 0 < (\alpha - j + 1)p < 1, \end{cases}$$

$$\leq C(\alpha, p) \|f\|_p^p \cdot \begin{cases} 1, & (\alpha + 1)p > 1; \\ \ln\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2\right), & (\alpha + 1)p = 1; \\ \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{1-(\alpha+1)p}, & 0 < (\alpha + 1)p < 1. \end{cases} \quad (28)$$

На основании (13)

$$\varepsilon^{\alpha p} \rho^{-[1/\varepsilon]p} \|f(\rho e^{it})\|_1^p \leq 2^{1-p} \varepsilon^{\alpha p} \rho^{-[1/\varepsilon]p} (R - \rho)^{p-1} \|f\|_p^p.$$

Полагая в этом неравенстве $1 - R = R - \rho = \varepsilon$ и учитывая, что $\rho^{-[1/\varepsilon]p} = (1 - 2\varepsilon)^{-[1/\varepsilon]p} < (1 - 2\varepsilon)^{-p/\varepsilon} < e^{2p}$, имеем

$$\varepsilon^{\alpha p} \rho^{-[1/\varepsilon]p} \|f(\rho e^{it})\|_1^p \leq C(\alpha, p) \|f\|_p^p \cdot \begin{cases} 1, & (\alpha + 1)p \geq 1; \\ \varepsilon^{(\alpha+1)p-1}, & 0 < (\alpha + 1)p < 1. \end{cases} \quad (29)$$

Подставляя (28) и (29) в (27), получаем (16) для $R_\varepsilon^{1,\alpha}(f; e^{it})$.

Рассмотрим теперь случай произвольного $l > 0$. Представим $r^{l,\alpha}(t)$ в виде

$$r^{l,\alpha}(t) = r^{1,\alpha}(t) \chi_{l,\alpha}(t),$$

где функция $\chi_{l,\alpha}(t) = \left(\frac{1-t}{1-t}\right)^\alpha$ при $0 < t \leq 1$, а на $[1, +\infty)$ она продолжена гладким образом так, что $\chi_{l,\alpha}(t) \in E$. Тогда

$$R_\varepsilon^{l,\alpha}(f; e^{it}) = M_{\varepsilon, \chi_{l,\alpha}}(R_\varepsilon^{1,\alpha}(f; e^{it})).$$

Отсюда на основании леммы 1 и того, что (16) для $R_\varepsilon^{1,\alpha}(f; e^{it})$ доказано, получаем (16) в общем случае.

Согласно определению, данному в [4; § 3, (38)],

$$\omega_l(\delta; f)_p = \sup_{|\theta| \leq \delta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k f(e^{i(t+k\theta)}) \right|^p dt \right\}^{1/p}$$

есть модуль гладкости l -го порядка функции $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, при $l > 1/p - 1$. В [4; § 3, теорема 1] доказана следующая

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi(t) \in E$ и $\varphi(0) = 1$. Тогда для любой функции $f \in H^p$, $(l + 1)^{-1} < p \leq 1$, $l > 0$, имеет место следующая оценка:

$$\|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; e^{it})\|_p \leq C(l, p) \omega_l(\varepsilon; f)_p,$$

где

$$\varphi_l(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} \varphi(mt).$$

Полагая в (1)

$$F(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} e^{-mt} = 1 - (1 - e^{-t})^l, \quad l > 0,$$

получаем обобщенные средние Абеля–Пуассона $P_\varepsilon^l(f; e^{it})$ (см. [4; (31)]). Для обобщенных средних Абеля–Пуассона согласно [4; § 4, теорема 2] имеет место

ЛЕММА 4. Пусть $l > 0$, $f \in H^p$, $(l + 1)^{-1} < p \leq 1$. Тогда

$$\|f(e^{it}) - P_\varepsilon^l(f; e^{it})\|_p \asymp \omega_l(\varepsilon; f)_p.$$

§ 2. Основной результат

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$. Тогда при $(l+1)p > 1$, $l > 0$, $a > -1$

$$\|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f; e^{it})\|_p \leq C(l, \alpha, p) \omega_l(\varepsilon; f)_p \times \begin{cases} 1, & (\alpha+1)p > 1; \\ \left(\ln\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2\right)\right)^{1/p}, & (\alpha+1)p = 1; \\ \left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)^{1/p-(\alpha+1)}, & 0 < (\alpha+1)p < 1. \end{cases} \quad (30)$$

Кроме того, при $(\alpha+1)p > 1$ и $(l+1)p > 1$ имеет место аналогичная оценка снизу:

$$\|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f; e^{it})\|_p \geq C(l, \alpha, p) \omega_l(\varepsilon; f)_p. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\operatorname{tg}^2(\pi t/2)}, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi(t) \in E$ и $\varphi(0) = 1$. На основании леммы 3 при $(l+1)p > 1$

$$\|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; e^{it})\|_p \leq C(l, p) \omega_l(\varepsilon; f)_p, \quad (32)$$

где

$$\varphi_l(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} \varphi(mt).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f; e^{it})\|_p^p &\leq \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; e^{it})\|_p^p \\ &+ \|R_\varepsilon^{l,\alpha}(f; e^{it}) - M_{\varepsilon, r^l, \alpha \varphi_l}(f; e^{it})\|_p^p + \|M_{\varepsilon, r^l, \alpha \varphi_l}(f; e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; e^{it})\|_p^p. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь (см. (1) и (2))

$$M_{\varepsilon, r^l, \alpha \varphi_l}(f; e^{it}) = \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} (1 - (k\varepsilon)^l)^\alpha \varphi_l(k\varepsilon)(f)_k e^{ikt}.$$

В силу (1), (3), (32) и леммы 2

$$\begin{aligned} \|R_\varepsilon^{l,\alpha}(f; e^{it}) - M_{\varepsilon, r^l, \alpha \varphi_l}(f; e^{it})\|_p^p &= \|R_\varepsilon^{l,\alpha}(f(\cdot) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; \cdot); e^{it})\|_p^p \\ &\leq C(l, \alpha, p) \omega_l^p(\varepsilon; f)_p \cdot \begin{cases} 1, & (\alpha+1)p > 1; \\ \ln\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2\right), & (\alpha+1)p = 1; \\ \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{1-(\alpha+1)p}, & 0 < (\alpha+1)p < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку

$$M_{\varepsilon, r^l, \alpha} \varphi_l(f; e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; e^{it}) = \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} ((1 - (k\varepsilon)^l)^\alpha - 1) \varphi_l(k\varepsilon) (1 - e^{ik\varepsilon})^{-l} e^{ikl} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m (f)_k e^{ikm\varepsilon}$$

и

$$(f)_k e^{ikm\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i(\theta+m\varepsilon)}) (\rho e^{i\theta})^{-k} d\theta,$$

то

$$M_{\varepsilon, r^l, \alpha} \varphi_l(f; e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(\rho e^{i(\theta+m\varepsilon)}) \right) \times \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} F_{r^l, \alpha}(k\varepsilon) (\rho e^{i(\theta-t)})^{-k} d\theta = M_{\varepsilon, F_{r^l, \alpha}}(\Delta_{\varepsilon}^l f; e^{it}).$$

Здесь

$$F_{r^l, \alpha}(t) = ((l - t^l)_+^\alpha - 1) \varphi_l(t) (1 - e^{it})^{-l}$$

и

$$\Delta_{\varepsilon}^l f = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(z e^{im\varepsilon}).$$

Применяя лемму 1, имеем

$$\|M_{\varepsilon, F_{r^l, \alpha}}(\Delta_{\varepsilon}^l f; e^{it})\|_p^p \leq C(l, \alpha, p) \|\Delta_{\varepsilon}^l f\|_p^p \leq C(l, \alpha, p) \omega_l^p(\varepsilon; f)_p.$$

Таким образом,

$$\|M_{\varepsilon, r^l, \alpha} \varphi_l(f; e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f; e^{it})\|_p^p \leq C(l, \alpha, p) \omega_l^p(\varepsilon; f)_p. \quad (35)$$

Подстановка (32), (34) и (35) в (33) доказывает оценку сверху (30).

На основании леммы 4 при $(l+1)p > 1$

$$\begin{aligned} \omega_l^p(\varepsilon; f)_p &\leq C(l, p) \|f(e^{it}) - P_{\varepsilon}^l(f, e^{it})\|_p^p = C(l, p) \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-k\varepsilon})^l (f)_k e^{ikt} \right\|_p^p \\ &= C(l, p) \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k\varepsilon) (1 - (1 - (k\varepsilon)^l)_+^{\alpha m}) (f)_k e^{ikt} \right\|_p^p \\ &= C(l, p) \|M_{\varepsilon, \mu}(f(\cdot) - R_{\varepsilon}^{l, \alpha m}(f; \cdot); e^{it})\|_p^p. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mu(t) = \frac{(1 - e^{-t})^l}{1 - (1 - t^l)_+^{\alpha m}}, \quad m = \left(\left[\frac{1}{\alpha} \right] + 1 \right) \left(\left[\frac{1}{p} \right] + 1 \right), \quad (\alpha + 1)p > 1.$$

Нетрудно установить, что функция $\mu(t)$ удовлетворяет всем требованиям к функции $F(t)$ из леммы 1.

Тогда на основании леммы 1 и неравенства треугольника

$$\begin{aligned}
 \omega_l^p(\varepsilon; f)_p &\leq C(l, p) \|M_{\varepsilon, \mu}(f(\cdot) - R_\varepsilon^{l, \alpha m}(f; \cdot); e^{it})\|_p^p \\
 &\leq C(l, p) \|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l, \alpha m}(f; e^{it})\|_p^p \\
 &\leq C(l, p) \left(\|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l, \alpha}(f; e^{it})\|_p^p \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-1} \|R_\varepsilon^{l, \alpha k}(f; e^{it}) - R_\varepsilon^{l, \alpha(k+1)}(f; e^{it})\|_p^p \right) \\
 &= C(l, p) \left(\|f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l, \alpha}(f; e^{it})\|_p^p \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-1} \|R_\varepsilon^{l, \alpha}(R_\varepsilon^{l, \alpha}(\dots (R_\varepsilon^{l, \alpha}(f(e^{it}) - R_\varepsilon^{l, \alpha}(f; e^{it})) \dots)))\|_p^p \right).
 \end{aligned}$$

Далее, применяя последовательно лемму 2, получаем оценку снизу (31).

Список литературы

- [1] A. A. Soljanik, “On the order of approximation to function of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leq 1$) by certain of Fourier integrals”, *Anal. Math.*, **12**:1 (1986), 59–75.
- [2] Р. М. Тригуб, “Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 145–160.
- [3] С. Г. Прибегин, *Оценка сверху и снизу скорости приближения функций класса H^p , $0 < p \leq 1$* , Деп. ГНТБ Укр. 29.06.93, № 1290–Ук 93.
- [4] С. Г. Прибегин, “Об одном методе приближения в H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 123–136.
- [5] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984.
- [6] Э. А. Стороженко, “Приближение функций класса H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **105**(147):4 (1978), 601–621.
- [7] U. Westphal, “An approach to fractional powers of operators via fractional differences”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **29**:3 (1974), 557–576.
- [8] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.

С. Г. Прибегин (S. G. Pribegin)

Одесский национальный морской университет, Украина

E-mail: IVANPRIBEGIN@rambler.ru

Поступила в редакцию

20.12.2004 и 01.07.2005