Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Половинкин, Сильно выпуклый анализ, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 2, 103–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:13:28

УДК 517.977

Е. С. Половинкин

Сильно выпуклый анализ

В статье исследованы свойства сильно выпуклых множеств, т.е. множеств, каждое из которых представимо в виде пересечения шаров фиксированного для каждого множества радиуса. Установлена связь между сильно выпуклыми множествами и сильно выпуклыми функциями. Введено понятие сильно выпуклой R -оболочки множества, означающее наименьшее сильно выпуклое множество, содержащее данное, и получена явная формула для сильно выпуклой R -оболочки множества. Изучены свойства сильно выпуклой R -оболочки множества при изменении как радиуса R , так и самого множества. Получен аналог теоремы Каратеодори для сильно выпуклых множеств. Введено понятие сильно крайней точки, и доказано обобщение теоремы Крейна–Мильмана для сильно выпуклых множеств.

Рассмотрены многогранные аппроксимации выпуклых компактов и, в частности, сильно выпуклых компактов. Установлены точные оценки погрешности внутренних и внешних многогранных и сильно выпуклых аппроксимаций таких множеств.

Библиография: 18 названий.

Введение

Plis [1], изучая задачу о выпуклости множеств достижимости нелинейных управляемых систем, впервые рассмотрел семейство множеств, каждое из которых может быть представлено в виде пересечения некоторых шаров одного радиуса R , причем у различных множеств из указанного семейства радиусы могут быть различными. Он назвал это семейство *R -регулярными множествами*. При этом параметр R , вообще говоря различный для разных множеств, вынесен в название всего семейства. Это неудобно, когда для некоторого множества из данного семейства нам нужно указать значение радиуса шаров, пересечение которых дает это множество.

Мы будем употреблять другое, более удобное на наш взгляд, название этого семейства множеств — *сильно выпуклые множества*, добавляя для каждого конкретного множества, когда это нужно, значение соответствующего ему радиуса.

Lojasiewicz [2] исследовал вопрос, когда нелинейная управляемая система имеет сильно выпуклое множество достижимости, что эквивалентно исследованию сильной выпуклости определенного класса интегралов от многозначных отображений. В двумерном случае он показал сильную выпуклость интеграла от многозначной функции, значениями которой являются многоугольники, вершины которых изменяются гладко. Он показал также, что если размерность системы равна

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00771а) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант № 94-1.5-131).

по крайней мере трем, то интеграл от гладко меняющегося линейного сегмента не является сильно выпуклым множеством.

Frankowska и Olech [3] продолжили исследования, начатые Łojasiewicz, и получили некоторые необходимые и достаточные условия, при которых интегралы от многозначных отображений будут сильно выпуклыми множествами (они назвали эти множества *R -выпуклыми множествами*). При этом ими был доказан ряд интересных свойств сильно выпуклых множеств. Прежде всего то, что компактное множество A в $\mathbb{R}^n$ является пересечением шаров радиуса $R > 0$ (т.е. сильно выпуклым множеством) тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $\|x - y\| \leq 2R$, всякая дуга окружности радиуса R и длиной не более πR содержится во множестве A . Кроме того они показали, что градиент опорной функции сильно выпуклого множества существует и удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица, равной R . Еще одно важное геометрическое свойство из [3] утверждает, что всякое сильно выпуклое множество содержится в пересечении *опорных шаров* (это свойство нами усилено в этой статье в теореме 1, где показано, что сильно выпуклое множество совпадает с пересечением своих опорных шаров).

Красносельский и Покровский [4] рассмотрели сильно выпуклые множества как инструмент для изучения систем с гистерезисом.

Отметим, что семейство сильно выпуклых множеств представляет самостоятельный интерес, так как, с одной стороны, каждое сильно выпуклое множество имеет достаточно гладкую опорную функцию и строго выпуклую границу, с другой стороны, как показано в этой статье, многие результаты выпуклого анализа могут быть перенесены на сильно выпуклые множества с качественным усилением.

В данной статье получены новые свойства для сильно выпуклых множеств и для опорных функций этих множеств, связанные с линейными операциями Минковского и пределами последовательностей сильно выпуклых множеств (для которых показано, что они не выводят из семейства сильно выпуклых множеств, что несправедливо, например, для эллипсоидов). Установлена специальная форма *двойственности* для сильно выпуклых множеств (свойство *полного выметания* сильно выпуклым множеством шара данного радиуса с центром в нуле). Установлена связь между сильно выпуклыми функциями и сильно выпуклыми множествами. Введено понятие *сильно выпуклой оболочки* множества с заданным радиусом сильного овыпукления и исследованы свойства этой оболочки. Показано, что операция вычисления сильно выпуклой оболочки радиуса R компакта как отображение из пространства компактов с метрикой Хаусдорфа в себя удовлетворяет условию Липшица с константой больше единицы, зависящей от радиуса сильного овыпукления. Сильно выпуклая оболочка радиуса R фиксированного множества как многозначная функция от R является монотонной непрерывной в метрике Хаусдорфа, и в пределе, при $R \rightarrow \infty$, стремится к замкнутой выпуклой оболочке данного множества. Введено понятие *R -крайней точки* и получены обобщения известных теорем Каратеодори и Крейна–Мильмана для представления сильно выпуклого множества через сильно выпуклые оболочки своих R -крайних точек.

В последнем пункте статьи рассмотрены различные виды аппроксимаций выпуклых и сильно выпуклых множеств многогранниками и криволинейными многогранниками, а также свойства этих аппроксимаций при выполнении с исходными

множествами линейных операций Минковского. Приведено аналитическое описание этих аппроксимаций через специальные сеточные операторы, построенные по заданной на единичной сфере сетке опорных направлений, и получены оценки погрешности таких аппроксимаций, линейно зависящие от мелкости сетки. Более внимательно рассмотрены внешние и внутренние аппроксимации сильно выпуклых множеств, для которых установлены оценки погрешности, пропорциональные квадрату мелкости сетки.

В первых трех пунктах данной статьи по существу повторены результаты автора, изложенные в работе [10]. Краткое изложение (без доказательств) основных результатов данной статьи анонсировано в работах [11], [18] и частично дано в работе [17].

1. Полное выметание

Через $+$ и $*$ будем обозначать геометрические сумму и разность Минковского двух множеств A и B из $\mathbb{R}^n$, которые вместе с умножением на число λ вычисляются по формулам (см., например, [5])

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad A * B = \{c \mid c + B \subset A\}, \quad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Отметим очевидное свойство разности, которое нам потребуется в дальнейшем, т.е. равенство $A * B = \bigcap_{b \in B} (A - b)$.

Опорной функцией множества A называют функцию вида

$$s(p, A) = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle,$$

где $p \in \mathbb{R}^n$, а через $\langle p, x \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов p и x в $\mathbb{R}^n$. Через $co A$ будем обозначать *выпуклую оболочку множества A* , а через $co g$ — *выпуклую оболочку функции $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$* , где $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (подробнее см. [6], [7]). Через $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ и $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$ обозначим, соответственно, шар и сферу радиуса $r > 0$ с центром в $a \in \mathbb{R}^n$. *Диаметром* ограниченного множества A называется величина $\text{diam } A = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}$. *Расстоянием по Хаусдорфу h* между компактами A и B из $\mathbb{R}^n$ называется величина

$$h(A, B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subset B + B_r(0), B \subset A + B_r(0)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество A из $\mathbb{R}^n$ называется *сильно выпуклым множеством с радиусом $R > 0$* , если оно может быть представлено как пересечение замкнутых шаров радиуса R .

Иначе говоря, множество A сильно выпукло с радиусом R , если оно представимо в виде равенства

$$A = \bigcap_{x \in X} B_R(x), \tag{1}$$

где X некоторое множество центров шаров радиуса $R > 0$.

Основное свойство замкнутых выпуклых множеств, состоящее в том, что каждое может быть представлено в виде пересечения опорных полупространств (см. [6], [7]), для сильно выпуклых множеств может быть преобразовано к представлению их в виде пересечения опорных шаров, о чем утверждается в следующей теореме (ср. [3]).

ТЕОРЕМА 1. *Всякий выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ является сильно выпуклым множеством с радиусом $R > 0$ тогда и только тогда, когда он представим в виде*

$$A = \bigcap_{\|p\|=1} B_R(x_p - Rp), \quad (2)$$

где для любого $p \in \mathbb{R}^n$, $\|p\| = 1$, вектор $x_p \in A$ определен из равенства $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна, так как из равенства (2) следует, что A по определению 1 есть сильно выпуклое множество. Докажем необходимость. Пусть для A справедлива формула (1). Очевидно, что множество X ограничено и замкнуто. По формуле вычисления опорной функции пересечения множеств (см., например, [9]), получаем $s(p, A) = \text{co } f(p)$, где $f(p)$ имеет вид

$$f(p) = \min_{x \in X} (\langle p, x \rangle + R\|p\|). \quad (3)$$

Отбрасывая тривиальный случай, когда A состоит из одной точки и равенство (2) очевидно, получаем, что $\text{int } A \neq \emptyset$, откуда, как показано в [7], для любого $p \in S_1(0)$ существуют $\lambda_i > 0$ и $p_i \in S_1(0)$, где $i \in \overline{1, k}$ и $k \leq n + 1$ такие, что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = p \quad \text{и} \quad \text{co } f(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(p_i), \quad (4)$$

т.е. в силу (3) найдутся $x_i \in X$ такие, что

$$s(p, A) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle p_i, x_i \rangle + R. \quad (5)$$

Выберем $x_p \in A$ такой, что $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$, тогда в силу включения $A \subset B_R(x)$, для любого $x \in X$, имеем

$$\langle q, x_p \rangle \leq \langle q, x \rangle + R\|q\| \quad \forall x \in X, \quad q \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Подставляя в (5) неравенства (6) при $q = p_i$ и $x = x_i$, из (4) получаем

$$\langle p, x_p \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle p_i, x_i \rangle + R \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle p_i, x_p \rangle = \langle p, x_p \rangle. \quad (7)$$

т.е. в (7) имеет место равенство, что возможно только тогда, когда в (6) при $q = p_i$ и $x = x_i$ справедливы равенства, т.е. $\langle p_i, x_p \rangle = s(p_i, B_R(x_i))$, что для шара возможно только в случае равенства $x_i = x_p - Rp_i \forall i \in \overline{1, k}$. Обозначим $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ и $\alpha_i = \lambda_i / \lambda$, $i \in \overline{1, k}$. Очевидно, что $\lambda \geq 1$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ и $\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i = p / \lambda$. Тогда для каждого $x \in \bigcap_{i=1}^k B_R(x_i)$ выполнены неравенства $\|x - x_i\| \leq R \forall i \in \overline{1, k}$, которые в силу только что доказанных равенств для x_i эквивалентны неравенствам вида

$$\|x - x_p\|^2 + 2R \langle x - x_p, p_i \rangle \leq 0 \quad \forall i \in \overline{1, k}.$$

Суммируя эти неравенства с весами α_i соответственно, получаем неравенство $\|x - x_p\|^2 + 2R \langle x - x_p, p/\lambda \rangle \leq 0$, которое означает, что $x \in B_{R_1}(x_p - R_1 p)$, где $R_1 = R/\lambda \leq R$, т.е. получили

$$A \subset \bigcap_{i=1}^k B_R(x_i) \subset B_{R_1}(x_p - R_1 p) \subset B_R(x_p - R p). \quad (8)$$

В свою очередь из теорем отделимости [6], [7] следует, что выпуклое множество A можно представить в виде

$$A = \bigcap_{\|p\|=1} H^-(p), \quad \text{где } H^-(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq s(p, A)\} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

С другой стороны, очевидно, справедливы включения $B_R(x_p - R p) \subset H^-(p) \quad \forall p \in S_1(0)$, что в совокупности с (8) и дает равенство (2).

ТЕОРЕМА 2. *Выпуклый компакт A является сильно выпуклым множеством с радиусом $R > 0$ тогда и только тогда, когда найдется выпуклое компактное множество A^* такое, что справедливо равенство*

$$A + A^* = B_R(0). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность* очевидна, так как равенство (9) влечет равенство (1) при $X = -A^*$, откуда в силу определения 1 получаем сильную выпуклость множества A . *Докажем необходимость.* Воспользовавшись формулой (2) для сильно выпуклого множества A , аналогично формуле (3), получаем формулу для опорной функции пересечения множеств (2), и для любого $p_0 \in S_1(0)$ получаем

$$\begin{aligned} \langle p_0, x_{p_0} \rangle &= s(p_0, A) \leq \min_{\|p\|=1} s(p_0, B_R(x_p - R p)) \\ &= \min_{\|p\|=1} \langle p_0, x_p - R p \rangle + R\|p_0\| \\ &\leq s(p_0, B_R(x_{p_0} - R p_0)) = \langle p_0, x_{p_0} \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

т.е. в (10) неравенства нужно заменить на равенства. Получаем, что

$$s(p_0, A) = R\|p_0\| - \max_{\|p\|=1} \langle p_0, -x_p + R p \rangle \quad \forall p_0 \in S_1(0),$$

откуда и следует равенство (9), где

$$A^* = \overline{\text{co}} \bigcup_{\|p\|=1} (-x_p + R p).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 2 следует, что множество $-A^*$ в (9) есть максимальное множество центров шаров радиуса R , пересечение которых дает множество A . Равенства (1), (9) удобно записывать через геометрические сумму и разность Минковского, определенные выше, в виде

$$\begin{aligned} A &= B_R(0) \overset{*}{+} (-X), & A^* + (B_R(0) \overset{*}{+} (-X)) &= B_R(0), \\ A + (B_R(0) \overset{*}{+} A) &= B_R(0). \end{aligned} \quad (11)$$

В теории дифференциальных игр (см. [5]) отмеченная в равенстве (9) (или последнем равенстве из (11)) связь множеств A и $B_R(0)$ имеет специальное название, а именно, в этом случае говорят, что *множество A полностью выметает шар $B_R(0)$* . То есть множество сильно выпукло с радиусом R тогда и только тогда, когда оно полностью выметает шар радиуса R .

Из теорем 1 и 2 получаем следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если A есть сильно выпуклое множество с радиусом $R_0 > 0$, то A является сильно выпуклым множеством с радиусом R при любом $R > R_0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A_1 и A_2 — сильно выпуклые множества из $\mathbb{R}^n$ с радиусами, соответственно, R_1 и R_2 , а A_3 — компакт из $\mathbb{R}^n$. Тогда множества $A_1 + A_2$, $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \overset{*}{+} A_3$ (если они не пусты) также будут сильно выпуклыми с соответствующими радиусами $R_1 + R_2$, $\max\{R_1, R_2\}$ и R_1 .

СЛЕДСТВИЕ 3. Для того чтобы выпуклый компакт A был сильно выпуклым множеством с радиусом R необходимо и достаточно, чтобы функция $R\|p\| - s(p, A)$ была выпуклой функцией.

Доказательства следствий 1–3 очевидны.

СЛЕДСТВИЕ 4 [3]. Компакт A является сильно выпуклым с радиусом R тогда и только тогда, когда субдифференциал опорной функции $s(p, A)$ этого множества удовлетворяет условию Липшица по p на единичной сфере $S_1(0)$ с константой R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — сильно выпуклое множество с радиусом R . В теореме 1 для всякого $p \in S_1(0)$, определен вектор $x_p \in A$ такой, что $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$. Отсюда и из определения опорной функции следует, что $s(q, A) - s(p, A) \leq \langle x_p, q - p \rangle \forall q \in \mathbb{R}^n$, т.е. $\partial s(p, A) = \{x_p\}$. В силу (2) для любых $p, q \in S_1(0)$ справедливы включения $x_q \in B_R(x_p - Rp)$ и $x_p \in B_R(x_q - Rq)$, которые эквивалентны неравенствам

$$\|x_q - x_p\|^2 \leq 2R \langle x_q - x_p, p \rangle, \quad \|x_p - x_q\|^2 \leq 2R \langle x_p - x_q, q \rangle,$$

складывая которые получаем $\|x_q - x_p\| \leq R\|q - p\|$. Обратно, пусть $\partial s(p, A)$ удовлетворяет условию Липшица по p на сфере $S_1(0)$ с константой R , но не является сильно выпуклым множеством с радиусом R . Тогда по теореме 1 существует $p \in S_1(0)$ такой, что для всякого $x_p \in \partial s(p, A)$ имеем $A \not\subseteq B_R(x_p - pR)$. Так как A ограничено, то существуют $R_1 > R$ и $y \in A$ такие, что $A \subseteq B_{R_1}(x_p - pR)$ и $\|y - x_p + pR\| = R_1$. Пусть $q = (y - x_p + pR)/R_1$, очевидно, что $\langle q, y \rangle = s(q, A)$ и $\partial s(q, A) = \{y\}$, т.е. по допущению $\|y - x_p\| \leq R\|q - p\|$. В то же время $\|y - x_p\| = \|R(q - p) + (R_1 - R)q\| > R\|q - p\|$. Противоречие.

Из следствия 4 получаем критерий вычисления для данного множества минимального радиуса сильной выпуклости.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть A сильно выпуклое множество из $\mathbb{R}^n$ и для всякого p из сферы $S_1(0)$ определим вектор $x_p \in A$ такой, что $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$. Наименьший радиус $R > 0$, при котором A будет сильно выпуклым, вычисляется по формуле

$$R = \sup \left\{ \frac{\|x_p - x_q\|}{\|p - q\|} \mid p, q \in S_1(0), p \neq q \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть последовательность сильно выпуклых множеств A_k , $k \in \overline{1, \infty}$, с соответствующими радиусами $R_k > 0$ сходится в метрике Хаусдорфа к компакту A , причем существуют числа $\hat{R}_k \geq R_k$ такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{R}_k = R_0$, где $0 < R_0 < \infty$. Тогда A будет также сильно выпуклым множеством с радиусом R_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $p \in S_1(0)$, определим $x_p^k \in A_k$ такие, что для каждого A_k по теореме 1 справедливы равенства (2), которые равносильны неравенствам

$$\|x - x_p^k\|^2 + 2\hat{R}_k \langle x - x_p^k, p \rangle \leq 0 \quad \forall x \in A_k. \quad (12)$$

В силу сходимости A_k к A для всякого $a \in A$ существуют $a_k \in A_k$ такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$. Для каждого фиксированного p последовательность x_p^k ограничена, т.е. имеет предельную точку x_p^0 . Поэтому, выбирая в (12) $x = a_k$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\|a - x_p^0\|^2 + 2R_0 \langle a - x_p^0, p \rangle \leq 0 \quad \forall a \in A,$$

что в силу теоремы 1 влечет сильную выпуклость A с радиусом R_0 .

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть многозначное отображение $F: [0, 1] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, принимающее при п.в. t из $[0, 1]$ сильно выпуклые значения $F(t)$ с суммируемым по Лебегу радиусом $r(t) > 0$, измеримо на $[0, 1]$ и ограничено (т.е. существует суммируемая функция $\rho(t) > 0$ такая, что $F(t) \subseteq B_{\rho(t)}(0)$). Пусть $\int_0^1 r(t) dt = r_0 < \infty$. Тогда интеграл Аумана $\int_0^1 F(t) dt$ является сильно выпуклым множеством с радиусом r_0 .

Доказательство легко следует из возможности представления интеграла Аумана от многозначного отображения по схеме Бохнера, что описано в работе [10], и следствий 2, 5.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $f(p)$ — положительно однородная непрерывная функция, а со $f(p)$ есть собственная функция. Пусть $R > 0$, а функция $R\|p\| - f(p)$ выпукла. Тогда и функция $R\|p\| - \text{co } f(p)$ выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно из выпуклого анализа [6], [7], из приведенных условий следует существование выпуклых компактов X и Y таких, что $s(p, X) = R\|p\| - f(p)$ и $s(p, Y) = \text{co } f(p)$, откуда $\text{co}(R\|p\| - s(p, X)) = s(p, Y)$. Из формулы для опорной функции геометрической разности двух множеств (см., например, [9]) последнее равенство означает равенство множеств $Y = B_R(0) \dot{-} X$, т.е. Y сильно выпукло, откуда по следствию 3 следует, что функция $R\|p\| - s(p, Y)$ выпукла, что и означает требуемое свойство.

2. Сохранение сильной выпуклости при линейных отображениях

Рассмотрим линейное отображение $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, причем $m \geq n$ и $\text{Rang } L = n$, и эллипсоид P в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле как образ единичной сферы $B_1(0)$ из $\mathbb{R}^m$ при отображении L , т.е.

$$P = LB_1(0). \quad (13)$$

Этот эллипсоид также можно записать в эквивалентной форме

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Q^{-1}x \rangle \leq 1\}, \quad \text{где } Q = LL^T, \quad (14)$$

т.е. Q есть положительно определенная симметрическая матрица. Как известно, любой эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле может быть представлен в виде (13) или (14). Опорная функция $s(p, P)$ эллипсоида P принимает вид

$$s(p, P) = s(L^T p, B_1(0)) = \|L^T p\| = \sqrt{\langle p, LL^T p \rangle} = \sqrt{\langle p, Qp \rangle}. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3. *Всякий эллипсоид P вида (13), (14) является сильно выпуклым множеством с радиусом $R = \lambda_n / \sqrt{\lambda_1}$, где λ_n — максимальное, а λ_1 — минимальное собственные числа матрицы Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 3 и (15) достаточно доказать, что функция вида $f(p) = R\|p\| - \|L^T p\|$ является выпуклой. Прежде всего, покажем, что $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\|L^T p_1\| \|L^T p_2\| - \langle L^T p_1, L^T p_2 \rangle \leq \|Q\|(\|p_1\| \|p_2\| - \langle p_1, p_2 \rangle). \quad (16)$$

Напомним, что для положительно определенной симметрической матрицы $Q = LL^T$ существует ортогональное преобразование J такое, что $Q = J^T \tilde{Q} J$, где $\tilde{Q}$ есть диагональная матрица вида

$$\tilde{Q} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где λ_k — собственные числа матрицы Q , причем пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, т.е. $\|Q\| = \lambda_n$. Выбирая $q = Jp$ и определяя $\tilde{Q}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, получаем, что (16) эквивалентно $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ неравенству

$$\|\tilde{Q}^{1/2} q_1\| \|\tilde{Q}^{1/2} q_2\| - \langle q_1, \tilde{Q} q_2 \rangle \leq \lambda_n (\|q_1\| \|q_2\| - \langle q_1, q_2 \rangle). \quad (18)$$

Фиксируем $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$ из $\mathbb{R}^n$. Введем функцию g из $\mathbb{R}_+^n$ в $\mathbb{R}_+$ вида

$$g(x) = \|Q^{1/2}(x) q_1\| \|Q^{1/2}(x) q_2\| - \langle q_1, Q(x) q_2 \rangle,$$

где матрица $Q(x)$ задается по формуле $Q(x) = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, причем $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$. Легко убедиться, что $\forall k \in \overline{1, n}$ справедлива формула

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_k} = \frac{(q_{1k} \|Q^{1/2}(x) q_2\| - q_{2k} \|Q^{1/2}(x) q_1\|)^2}{2 \|Q^{1/2}(x) q_1\| \|Q^{1/2}(x) q_2\|} \geq 0,$$

т.е. $g(x)$ возрастает по каждой компоненте x_k в $\mathbb{R}_+$. Поэтому $g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \leq g(\lambda_n, \dots, \lambda_n)$, и неравенства (18), (16) доказаны. Также очевидно, что

$$\|\mathbf{L}^T p\| = \|\tilde{\mathbf{Q}}^{1/2} q\| \geq \sqrt{\lambda_1} \|q\| = \sqrt{\lambda_1} \|p\|. \quad (19)$$

Вернемся к доказательству теоремы. Для доказательства выпуклости $f(p)$ достаточно показать, что $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \neq p_2$ при $R = \lambda_n / \sqrt{\lambda_1}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} R\|\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2\| - \|\alpha \mathbf{L}^T p_1 + (1 - \alpha)\mathbf{L}^T p_2\| \\ \leq \alpha(R\|p_1\| - \|\mathbf{L}^T p_1\|) + (1 - \alpha)(R\|p_2\| - \|\mathbf{L}^T p_2\|). \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользовавшись неравенствами (16) и (19), получаем

$$\begin{aligned} R\|\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2\| - (\alpha R\|p_1\| + (1 - \alpha)R\|p_2\|) \\ = \frac{2R\alpha(1 - \alpha)(\langle p_1, p_2 \rangle - \|p_1\| \|p_2\|)}{\|\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2\| + \alpha\|p_1\| + (1 - \alpha)\|p_2\|} \\ \leq \frac{2\alpha(1 - \alpha)(\langle \mathbf{L}^T p_1, \mathbf{L}^T p_2 \rangle - \|\mathbf{L}^T p_1\| \|\mathbf{L}^T p_2\|)}{\|\alpha \mathbf{L}^T p_1 + (1 - \alpha)\mathbf{L}^T p_2\| + \alpha\|\mathbf{L}^T p_1\| + (1 - \alpha)\|\mathbf{L}^T p_2\|} \\ = \|\alpha \mathbf{L}^T p_1 + (1 - \alpha)\mathbf{L}^T p_2\| - (\alpha\|\mathbf{L}^T p_1\| + (1 - \alpha)\|\mathbf{L}^T p_2\|), \end{aligned}$$

что доказывает (20) и теорему.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть A — сильно выпуклое множество из $\mathbb{R}^m$ с радиусом $R > 0$, $m \geq n$, $\mathbf{L}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с $\text{Rang } \mathbf{L} = n$, причем у матрицы $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ соответственно минимальное и максимальное собственные числа равны λ_1 и λ_n . Тогда и множество $\mathbf{L}A$ также будет сильно выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$ с радиусом $R_1 = R\lambda_n / \sqrt{\lambda_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 существует A^* такое, что справедливо (9), откуда получаем $\mathbf{L}A + \mathbf{L}A^* = R\mathbf{L}B_1(0)$. По теореме 3 эллипсоид $\mathbf{L}B_1(0)$ есть сильно выпуклое множество, и по теореме 2 найдется компакт D такой, что справедливо равенство $\mathbf{L}B_1(0) + D = R_2 B_1(0)$, где $R_2 = \lambda_n / \sqrt{\lambda_1}$, откуда получаем равенство $\mathbf{L}A + (\mathbf{L}A^* + RD) = RR_2 B_1(0)$, которое в силу теоремы 2 и доказывает сильную выпуклость множества $\mathbf{L}A$ с радиусом R_1 .

3. Связь сильно выпуклых множеств с сильно выпуклыми функциями

Как известно [8], функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на выпуклом множестве X из $\mathbb{R}^n$, называется *сильно выпуклой функцией*, если существует число $\varkappa > 0$ такое, что для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + \lambda(1 - \lambda)\varkappa \|x - y\|^2. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть A — сильно выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ с радиусом $r > 0$ и $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, (x, \alpha) \in A\}$. Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ задана по формуле $f(x) = \min\{\alpha \mid (x, \alpha) \in A\}$. Тогда функция f является сильно выпуклой функцией (21) на X с числом $\varkappa = 1/(2r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству сильно выпуклого множества из [3] для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ дуга любой окружности радиуса r длины не более πr с концами в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ принадлежит множеству A . То есть существует центр (a, α) окружности, где a лежит на прямой, проходящей через точки x_1 и x_2 , а $\alpha \geq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ такой, что

$$\begin{aligned} \|x_1 - a\|^2 + (f(x_1) - \alpha)^2 &= r^2, \quad \|x_2 - a\|^2 + (f(x_2) - \alpha)^2 = r^2, \\ f(x(\lambda)) &\leq \alpha - \sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2}, \quad x(\lambda) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (22)$$

Обозначим $x_1 - x_2 = y$, тогда $x_1 = x(\lambda) + (1 - \lambda)y$, $x_2 = x(\lambda) - \lambda y$. Отсюда и из неравенства $\sqrt{1 + \beta} \leq 1 + 0.5\beta \quad \forall \beta \geq -1$ получаем

$$\begin{aligned} &\sqrt{r^2 - \|x_1 - a\|^2} \\ &\leq \sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} \left(1 - \frac{(1 - \lambda) \langle x(\lambda), y \rangle}{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} - \frac{(1 - \lambda)^2 \|y\|^2}{2(r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2)} \right), \\ &\sqrt{r^2 - \|x_2 - a\|^2} \\ &\leq \sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} \left(1 + \frac{\lambda \langle x(\lambda), y \rangle}{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} - \frac{\lambda^2 \|y\|^2}{2(r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2)} \right). \end{aligned}$$

Последовательно применяя неравенство (22) и последние два неравенства, получаем

$$\begin{aligned} f(x(\lambda)) - \lambda f(x_1) - (1 - \lambda)f(x_2) \\ \leq -\sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} + \lambda \sqrt{r^2 - \|x_1 - a\|^2} + (1 - \lambda) \sqrt{r^2 - \|x_2 - a\|^2} \\ \leq -\frac{\lambda(1 - \lambda)\|y\|^2}{2\sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2}} \leq -\frac{\lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_2\|^2}{2r}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

4. Сильно выпуклая r -оболочка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть дано ограниченное множество A из $\mathbb{R}^n$, числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что $B_\rho(0) \cap A \neq \emptyset$ и $r \geq \rho$. Сильно выпуклой оболочкой радиуса r (или короче: сильно выпуклой r -оболочкой) множества A называется пересечение всех замкнутых шаров радиуса r , содержащих данное множество A . Будем обозначать сильно выпуклую r -оболочку множества A через $\text{strco}_r A$.

Иначе говоря, сильно выпуклая r -оболочка множества A есть наименьшее по включению сильно выпуклое множество радиуса r , содержащее данное множество A . Очевидно, что сильно выпуклая r -оболочка сильно выпуклого множества A радиуса r совпадает с самим множеством A .

Напомним, что в теореме Юнга (см., например, [7], [13]) для всякого компакта A из $\mathbb{R}^n$ указана наилучшая гарантированная оценка минимального радиуса ρ шара, содержащего A (т.е. числа ρ , фигурирующего в определении 2), в зависимости от диаметра множества A и размерности пространства, а именно: $\rho = \sqrt{n/(2(n+1))} \text{diam } A$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть A – множество из $\mathbb{R}^n$, числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что $r \geq \rho$, $B_\rho(0) \stackrel{*}{\subset} A \neq \emptyset$. Тогда сильно выпуклая r -оболочка множества A удовлетворяет равенству

$$\text{strco}_r A = B_r(0) \stackrel{*}{\subset} (B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A), \quad (23)$$

а ее опорная функция вычисляется по формуле

$$s(p, \text{strco}_r A) = r\|p\| - \text{co}(r\|p\| - s(p, A)) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество $B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A$ не пусто, то по определению 1 оно сильно выпукло. Поэтому в силу теоремы 2 существует другое сильно выпуклое множество C такое, что

$$(B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A) + C = B_r(0), \quad (25)$$

т.е. $C = B_r(0) \stackrel{*}{\subset} (B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A)$. Из определения геометрической разности следует включение $(B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A) + A \subset B_r(0)$, которое означает, что

$$A \subset B_r(0) \stackrel{*}{\subset} (B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A) = C.$$

Пусть $A \subset B_r(a)$ при некотором $a \in \mathbb{R}^n$. Это значит, что $-a \in B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A$. В свою очередь в силу (25) это означает, что $C \subset B_r(0) \stackrel{*}{\subset} (-a) = B_r(a)$. Итак, C содержится в пересечении всех шаров, содержащих множество A , само сильно выпукло и $C \supset A$, т.е. по определению 2 $C = \text{strco}_r A$ и справедливо (23). Из равенства (25) получаем для опорных функций равенство

$$s(p, C) = r\|p\| - s(p, B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A) = r\|p\| - \text{co}(r\|p\| - s(p, A)) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. справедливо (24).

Из формул (23) и (11) получаем

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть A сильно выпуклое множество радиуса R , и в соответствии с определением 1 существует некоторое множество X – множество центров тех шаров, пересечение которых дает множество A по формуле (1). Заметим, что это множество центров X определяется для A не однозначно. Тогда максимальное (по включению) множество центров шаров, обладающих указанным свойством (которое в (9) обозначено $-A^*$), для заданного X равно $\text{strco}_R X$.

Для изучения сильно выпуклых оболочек нам потребуется

ТЕОРЕМА 6. Пусть $R > 0$, a_0 и a_1 из $\mathbb{R}^n$ таковы, что $0 < \|a_0 - a_1\| < 2R$. Тогда для сильно выпуклой R -оболочки двух точек a_0 и a_1 справедливо представление

$$\text{strco}_R(\{a_0\} \cup \{a_1\}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} B_{R_\lambda}(a_\lambda), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} a_\lambda &= (1 - \lambda)a_0 + \lambda a_1, \\ R_\lambda &= R - \sqrt{R^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a_1 - a_0\|^2} \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем, что левое множество в (26) содержится в правом. Для этого определим $b = (a_1 - a_0)/2$ и, сдвигая множества в (26) на $(a_0 + a_1)/2$, докажем эквивалентное включение

$$\text{strco}_R(\{-b\} \cup \{b\}) \subset \bigcup_{\lambda \in [0,1]} B_{R_\lambda}(b_\lambda), \quad (28)$$

где $b_\lambda = (2\lambda - 1)b$, $R_\lambda = R - \sqrt{R^2 - 4\lambda(1-\lambda)\|b\|^2} \quad \forall \lambda \in [0, 1]$.

Фиксируем $x \in \text{strco}_R(\{-b\} \cup \{b\})$. По определению 2 это означает, что для всякого $a \in B_R(-b) \cap B_R(b)$ справедливо неравенство $\|a - x\| \leq R$. Возможны два случая.

- а) $x \in [-b, b]$, т.е. существует $\lambda \in [0, 1]$, что $x = b_\lambda$ и требуемое неравенство очевидно;
- б) $x \notin [-b, b]$.

Прежде всего покажем, что $x \neq \mu b$ для любого $\mu \in \mathbb{R}$. Допустим противное, т.е. существует $|\mu| > 1$, что $x = \mu b$. Тогда выберем произвольный $a \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|a - b\| = R$, $\|a + b\| = R$. Из формулы (23) и включения $x \in \text{strco}_R(\{-b\} \cup \{b\})$ следует, что $\|a - x\| \leq R$. С другой стороны,

$$\|x - a\|^2 = |\mu|\|b\|^2 + \|a\|^2 > \|b\|^2 + \|a\|^2 = R^2,$$

противоречие. В силу $x \neq \mu b$ можем ввести два ортонормированных вектора $e_1 = b/\|b\|$ и $e_2 = (x - \langle x, e_1 \rangle e_1)/\|x - \langle x, e_1 \rangle e_1\|$. Выберем $a \in \mathbb{R}^n$ вида $a = -\sqrt{R^2 - \|b\|^2}e_2$. Очевидно, что $\|a - b\| = \|a + b\| = R$, откуда следует, что $\|a - x\| \leq R$. Легко проверить, что уравнение $a + \mu(x - a) = b_\lambda$ относительно μ и λ имеет решение μ_0, λ_0 вида

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{R^2 - \|b\|^2}}{\sqrt{R^2 - \|b\|^2} + \|x - \langle x, e_1 \rangle e_1\|},$$

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0 \langle x, e_1 \rangle}{\|b\|} + \frac{1}{2}.$$

Нетрудно показать, что $\mu_0 \in (0, 1)$, $\lambda_0 > 0$. Так как $\|b_{\lambda_0} - a\| = \mu_0\|x - a\| < \|x - a\| \leq R$ и $\|b_{\lambda_0} - a\|^2 = \|b_{\lambda_0}\|^2 + \|a\|^2$, то $\|b_{\lambda_0}\| < \|b\|$, т.е. $\lambda_0 < 1$. Итак, отрезки $[-b, b]$ и $[a, x]$ пересекаются в b_{λ_0} , и

$$\begin{aligned} \|x - b_{\lambda_0}\| &= (1 - \mu_0)\|x - a\| = \|x - a\| - \|b_{\lambda_0} - a\| \\ &\leq R - \sqrt{\|b_{\lambda_0}\|^2 + \|a\|^2} = R_{\lambda_0}. \end{aligned}$$

В итоге $x \in B_{R_{\lambda_0}}(b_{\lambda_0})$, включение (28) доказано.

2. Докажем обратное включение в (26). В силу теоремы 5 получаем, что

$$\text{strco}_R(\{a_0\} \cup \{a_1\}) = B_R(0) * (B_R(-a_0) \cap B_R(-a_1)).$$

Очевидно также равенство $B_{R_\lambda}(a_\lambda) = B_R(0) * B_{R-R_\lambda}(-a_\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$. Поэтому для доказательства обратного включения в (26) достаточно доказать включения

$$B_R(-a_0) \cap B_R(-a_1) \subset B_{R-R_\lambda}(-a_\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (29)$$

Пусть $x \in B_R(-a_0) \cap B_R(-a_1)$, т.е. $\|x + a_0\| \leq R$, $\|x + a_1\| \leq R$. Для каждого $\lambda \in [0, 1]$ из этих неравенств следуют неравенства

$$\|x + a_\lambda\|^2 + 2 \langle x + a_\lambda, a_0 - a_\lambda \rangle + \|a_0 - a_\lambda\|^2 \leq R^2, \quad (30)$$

$$\|x + a_\lambda\|^2 + 2 \langle x + a_\lambda, a_1 - a_\lambda \rangle + \|a_1 - a_\lambda\|^2 \leq R^2. \quad (31)$$

Так как $a_0 - a_\lambda = \lambda(a_0 - a_1)$ и $a_1 - a_\lambda = (\lambda - 1)(a_0 - a_1)$, то умножая (30) на $(1 - \lambda)$, а (31) — на λ , и затем складывая, получаем неравенство $\|x + a_\lambda\|^2 + \lambda \times (1 - \lambda)\|a_0 - a_1\|^2 \leq R^2$, т.е. $x \in B_{R-R\lambda}(-a_\lambda)$, (29) доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $R > 0$, $\delta \in (0, R)$, a_0 и a_1 из $\mathbb{R}^n$ таковы, что

- 1) либо $\|a_0 - a_1\|^2 \leq (2R - \delta)\delta$,
- 2) либо $R^2/2 > \|a_0 - a_1\|^2 > (2R - \delta)\delta$.

Определим

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + (2R\delta - \delta^2)(a_1 - a_0)/\|a_1 - a_0\|^2, \\ \mu_0 &= \|a_1 - a_0\|^2 / (\|a_1 - a_0\|^2 + 2R\delta - \delta^2), \\ a_\lambda &= (1 - \lambda)a_0 + \lambda a_1 \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad b_\mu = (1 - \mu)a_0 + \mu a_2 \quad \forall \mu \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Тогда справедлива оценка

$$\text{strco}_R(\{a_0\} \cup B_\delta(a_1)) \supseteq \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} B_{R_{\lambda, \delta}}(a_\lambda) = \bigcup_{\mu \in [0, \mu_0]} B_{\widehat{R}_\mu}(b_\mu), \quad (32)$$

где

$$\widehat{R}_\mu = R - \sqrt{R^2 - \mu(1 - \mu)\|a_2 - a_0\|^2}, \quad (33)$$

$$R_{\lambda, \delta} = R - \sqrt{R^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a_1 - a_0\|^2 - \lambda(2\delta R - \delta^2)}. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство в (32) проверяется непосредственно, в силу того, что для всех $\mu \in [0, \mu_0]$ и $\lambda \in [0, 1]$, при соответствии $\lambda = \mu/\mu_0$, справедливы равенства $b_\mu = a_\lambda$ и $\widehat{R}_\mu = R_{\lambda, \delta}$. Условия 1) и 2) в предложении 1 следуют из неотрицательности подкоренных выражений в (33) и (34) и обеспечивают непустоту сильно выпуклой оболочки в (32). Условие 1 соответствует случаю $\mu_0 \leq 1/2$, а условие 2 соответствует $\mu_0 > 1/2$.

Докажем включение в (32). Из теоремы 5 следует, что

$$\text{strco}_R(\{a_0\} \cup B_\delta(a_1)) = B_R(0) * (B_R(-a_0) \cap B_{R-\delta}(-a_1)).$$

Поэтому достаточно доказать включение

$$B_R(-a_0) \cap B_{R-\delta}(-a_1) \subset B_{R-R_{\lambda, \delta}}(-a_\lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (35)$$

Пусть $x \in B_R(-a_0) \cap B_{R-\delta}(-a_1)$, тогда аналогично доказательству теоремы 6 (см. формулы (29), (30)) из последнего включения следует неравенство

$$\|x + a_\lambda\|^2 + \lambda(1 - \lambda)\|a_0 - a_1\|^2 \leq (1 - \lambda)R^2 + \lambda(R - \delta)^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

т.е. справедливо включение (35) и, соответственно, (32).

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношения (32), (33) показывают, что сильно выпуклая R -оболочка точки a_0 и шара $B_\delta(a_1)$, при условии, что она существует, является подмножеством сильно выпуклой R -оболочки двух точек a_0 и a_2 , где a_2 соответствующим образом подобрана (см. предложение 1).

Так как в силу (33) и (27) справедливо строгое неравенство $R_{\lambda,\delta} > R_\lambda$ при всех $\lambda \in (0, 1]$, то из теоремы 6 и предложения 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть выполнены условия предложения 1. Тогда справедливо включение

$$(\text{strco}_R(\{a_0\} \cup \{a_1\})) \setminus \{a_0\} \subset \text{int}(\text{strco}_R(\{a_0\} \cup B_\delta(a_1))). \quad (36)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $R > 0$, a_0, a_1 из $\mathbb{R}^n$ такие, что $0 < \|a_0 - a_1\| < 2R$, пусть $a_\lambda = (1 - \lambda)a_0 + \lambda a_1 \ \forall \lambda \in [0, 1]$. Тогда для всякого $b \in S_R(a_0) \cap S_R(a_1)$ справедливо равенство

$$\text{strco}_R(\{a_0\} \cup \{a_1\}) \cap S_R(b) = \left\{ b + \frac{R(a_\lambda - b)}{\|a_\lambda - b\|} \mid \lambda \in [0, 1] \right\}. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 6 (равенства (26)) достаточно показать, что

$$B_{R_\lambda}(a_\lambda - b) \cap S_R(0) = \frac{R(a_\lambda - b)}{\|a_\lambda - b\|} \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (38)$$

Для любого $\lambda \in (0, 1)$ получаем, что $s(p, B_{R_\lambda}(a_\lambda - b)) = \langle p, a_\lambda - b \rangle + R_\lambda < \|a_\lambda - b\| + R_\lambda = s((a_\lambda - b)/\|a_\lambda - b\|, B_{R_\lambda}(a_\lambda - b))$ при всех $p \neq (a_\lambda - b)/\|a_\lambda - b\|$, $\|p\| = 1$, т.е. справедливо включение $B_{R_\lambda}(a_\lambda - b) \subset B_{r_\lambda}(0)$, где $r_\lambda = \|a_\lambda - b\| + R_\lambda$, причем пересечение $B_{R_\lambda}(a_\lambda - b) \cap S_{r_\lambda}(0)$ очевидно состоит из одной точки $a_\lambda - b + R_\lambda(a_\lambda - b)/\|a_\lambda - b\|$, норма которой равна r_λ . Так как по условию предложения $\langle a_0 - a_1, a_0 + a_1 - 2b \rangle = 0$, то

$$\begin{aligned} \|a_\lambda - b\|^2 &= \|b - (a_0 + a_1)/2\|^2 + (\lambda - 1/2)^2 \|a_0 - a_1\|^2 \\ &= (\|a_0 + a_1 - 2b\|^2 + \|a_0 - a_1\|^2)/4 + (\lambda^2 - \lambda) \|a_0 - a_1\|^2 \\ &= R^2 - \lambda(1 - \lambda) \|a_0 - a_1\|, \end{aligned}$$

т.е. $\|a_\lambda - b\| + R_\lambda = R$, что и доказывает (38).

Из определения 2 и теорем 5, 6 очевидно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть заданы числа $\alpha \geq 0$, ρ, r и R , $0 \leq \rho \leq r \leq R$, и ограниченные подмножества A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ такие, что $B_\rho(0) \neq A \neq \emptyset$, $B_\rho(0) \neq B \neq \emptyset$. Тогда

1. $\text{strco}_R A \subset \text{strco}_r A$, и если $A \subset B$, то $\text{strco}_R A \subset \text{strco}_R B$.
2. $\text{strco}_{r+R}(A+B) \subset \text{strco}_r A + \text{strco}_R B$, если же $A = B_r(a)$ при некотором $a \in \mathbb{R}^n$, то справедливо равенство.
3. $\text{strco}_{\alpha r}(\alpha A) = \alpha \text{strco}_r A$.
4. Если $A \neq B$ не пусто, то справедливо включение

$$\text{strco}_r(A \neq B) \subset (\text{strco}_r A) \neq B,$$

которое обращается в равенство, если A есть сильно выпуклое множество с радиусом r .

5. Существует $a \in \mathbb{R}^n$ такое, что $B_\beta(a) \subset \text{strco}_r A$, где $\beta = (\text{diam } A)^2/8r$.

Задание и изучение выпуклых множеств удобно осуществлять с помощью их опорных функций. Поэтому дадим еще одно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Сильно выпуклой r -оболочкой положительно однородной функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем функцию вида*

$$\text{strco}_r f(p) = r\|p\| - \text{co}(r\|p\| - \text{co} f(p)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При естественном предположении о том, что входящие в последнее равенство выпуклые оболочки функций не равны $-\infty$ и получаемая функция $\text{strco}_r f(p)$ непрерывна, в силу следствия 8 эта функция выпукла, а в силу теоремы 5 является опорной функцией некоторого сильно выпуклого множества. Очевидно, что всегда справедливо неравенство $\text{strco}_r f \geq \text{co} f$, а если f есть предопорная функция (т.е. такая, что $\text{co} f$ есть опорная функция) некоторого сильно выпуклого множества с радиусом r , то $\text{strco}_r f = \text{co} f$. Свойства сильно выпуклых r -оболочек множеств, описанные выше, легко можно переписать для случая сильно выпуклых r -оболочек функций.

5. Обобщение теоремы Каратеодори

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Компактное множество сильно выпукло с радиусом $r > 0$ тогда и только тогда, когда оно содержит сильно выпуклые r -оболочки любого конечного числа своих точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 1 очевидно следует, что сильно выпуклое множество с радиусом r содержит сильно выпуклые r -оболочки любого конечного числа своих точек. Обратное утверждение следует из свойства сильно выпуклых множеств, полученного Frankowska и Olech [3], состоящего в том, что компакт A является сильно выпуклым множеством с радиусом $r > 0$ тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $\|x - y\| \leq 2r$, всякая дуга окружности радиуса r и длиной не более πr содержится во множестве A . В свою очередь последнее утверждение в силу предложения 2 эквивалентно тому, что сильно выпуклая r -оболочка любых двух точек из A содержится в A .

ТЕОРЕМА 7. *Сильно выпуклая r -оболочка множества A , удовлетворяющего условиям определения 2, состоит из тех и только тех точек, каждая из которых содержится в сильно выпуклой r -оболочке некоторого конечного числа точек из A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через W объединение сильно выпуклых r -оболочек всевозможных конечных наборов точек из A . Так как $\text{strco}_r A$ является сильно выпуклым множеством и $A \subset \text{strco}_r A$, то по предложению 4 справедливо включение $W \subset \text{strco}_r A$.

С другой стороны, так как $A \subset W$, то достаточно показать, что W есть сильно выпуклое множество. Для этого в силу предложения 4 докажем, что для любых $a, b \in W$ сильно выпуклая r -оболочка этих точек a и b содержится в W . По определению W существуют $a_1, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_s$ из A такие, что $a \in \text{strco}_r \{a_1, \dots, a_m\}$, $b \in \text{strco}_r \{b_1, \dots, b_s\}$. Тогда a и b содержатся в сильно выпуклом множестве $\text{strco}_r \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_s\} \subset W$, которое в силу предложения 4 содержит $\text{strco}_r \{a, b\}$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть A компакт из $\mathbb{R}^n$ и числа $0 < r_0 \leq r$ такие, что $\text{diam } A = r_0$. Тогда справедливы оценки $\text{co } A \subset \text{strco}_r A \subset \text{co } A + B_\beta(0)$, где $\beta = r_0^2/r$, т.е. $\lim_{r \rightarrow \infty} h(\text{strco}_r A, \text{co } A) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 7 для оценки расстояния по Хаусдорфу между $\text{co } A$ и $\text{strco}_r A$ достаточно получить верхнюю оценку расстояния между выпуклыми многогранниками, содержащимися в $\text{co } A$, и сильно выпуклыми r -оболочками этих многогранников. Пусть a лежит на границе сильно выпуклой r -оболочки некоторого многогранника V из $\text{co } A$. В силу определения 2 найдутся сфера $S_r(b)$ радиуса r с центром в точке b , вершины $a_1, \dots, a_k$ многогранника V такие, что

$$a - b = \sum_{i=1}^k \alpha_i (a_i - b), \quad \text{где } \alpha_i > 0, a, a_i \in S_r(b) \forall i \in \overline{1, k}.$$

Пусть $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^k \alpha_i$, $\hat{\alpha}_i = \alpha_i / \hat{\alpha}$, $\hat{a} = \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i a_i$. Тогда $\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i = 1$ и $\hat{a} \in V$. По условию $\|a_i - a_j\| \leq r_0 \forall i, j$, поэтому $\|\hat{a} - a_j\| \leq r_0$. Складывая неравенства $r^2 = \|a_i - b\|^2 = \|\hat{a} - b\|^2 + 2\langle \hat{a} - b, a_i - \hat{a} \rangle + \|a_i - \hat{a}\|^2$ с весами $\hat{\alpha}_i$, получаем $r^2 = \|\hat{a} - b\|^2 + \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i \|a_i - \hat{a}\|^2 < \|\hat{a} - b\|^2 + r_0^2$. То есть $\|\hat{a} - b\| > r\sqrt{1 - (r_0/r)^2} > r(1 - (r_0/r)^2)$. В итоге $\|\hat{a} - a\| = \|a - b\| - \|\hat{a} - b\| \leq r_0^2/r$, что и дает нужную оценку.

Как известно (см., например, [9], [14]), операция взятия выпуклой оболочки компакта удовлетворяет условию Липшица, а именно для любых компактов A_1 и A_2 из $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $h(\text{co } A_1, \text{co } A_2) \leq h(A_1, A_2)$. Для сильно выпуклой оболочки это свойство принимает несколько другой вид.

ТЕОРЕМА 9. Пусть компакты A_1 и A_2 , векторы $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ и числа $r_0 > 0$, $h \geq 0$ такие, что $A_k \subseteq B_{r_0}(-a_k)$, $k = 1, 2$, $h(A_1, A_2) = h$. Тогда для любого $R > r_0 + h$ справедлива оценка

$$h(\text{strco}_R A_1, \text{strco}_R A_2) \leq \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}} h(A_1, A_2). \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств $B_R(0) \stackrel{*}{=} A_k + \text{strco}_R A_k = B_R(0)$, $k = 1, 2$, справедливых в силу теоремы 5, следует равенство

$$h(\text{strco}_R A_1, \text{strco}_R A_2) = h(B_R(0) \stackrel{*}{=} A_1, B_R(0) \stackrel{*}{=} A_2). \quad (40)$$

Поэтому достаточно получить требуемую оценку для расстояния между множествами $B_R(0) \stackrel{*}{=} A_1$ и $B_R(0) \stackrel{*}{=} A_2$. В силу симметрии в условиях на множества A_1 и A_2 , для этого достаточно для произвольного $a_0 \in B_R(0) \stackrel{*}{=} A_1$ найти $b_0 \in B_R(0) \stackrel{*}{=} A_2$ такой, что $\|a_0 - b_0\| \leq \sqrt{(R + r_0)/(R - r_0)} h$. Сделаем это. Из включения $A_1 \subseteq B_{r_0}(-a_1)$ следует, что $B_R(0) \stackrel{*}{=} A_1 \supset B_{R-r_0}(a_1)$, и из сильной выпуклости множества $B_R(0) \stackrel{*}{=} A_1$ получаем включение

$$\text{strco}_R(\{a_0\} \cup B_{R-r_0}(a_1)) \subseteq B_R(0) \stackrel{*}{=} A_1. \quad (41)$$

Допустим, что $\|a_0 - a_1\| \leq R - r_0$. Так как по условию $h < R - r_0$, то найдется $b_0 \in [a_0, a_1]$ такой, что $\|a_0 - b_0\| \leq h$ и $B_h(b_0) \subset B_{R-r_0}(a_1)$, откуда следует,

что $b_0 + A_2 \subset B_h(b_0) + A_1 \subset B_R(0)$, т.е. $b_0 \in B_R(0) \overset{*}{=} A_2$ и $\|a_0 - b_0\| \leq h$. Пусть $\|a_0 - a_1\| > R - r_0$. Воспользуемся предложением 1 при $\delta = R - r_0$. Без ограничения общности можно считать, что $\|a_0 - a_1\|^2 \leq (2R - \delta)\delta = R^2 - r_0^2$, т.е. $\mu_0 \leq 1/2$. Если это не так и $\mu_0 > 1/2$, то вместо точки a_1 возьмем точку $\hat{a}_1 = b_{1-\mu_0}$ (обозначения здесь и ниже из предложения 1), причем так как $\hat{R}_{1-\mu_0} = \hat{R}_{\mu_0} = \delta$, то в силу (32) получаем включение

$$B_{R-r_0}(\hat{a}_1) \subset B_R(0) \overset{*}{=} A_1 \quad \text{и} \quad \|a_0 - \hat{a}_1\|^2 \leq R^2 - r_0^2.$$

Так как в силу (33) радиус $\hat{R}_\mu$ при изменении μ от 0 до μ_0 принимает все значения от 0 до $R - r_0$, а по условию $h < R - r_0$, то найдется $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ такое, что $\hat{R}_{\mu_1} = h$. Рассмотрим функцию $f(\mu) = \|b_\mu - a_0\|/\hat{R}_\mu$ при $\mu \in (0, 1)$. В силу (33) легко убедиться, что $f'(\mu) = (\mu\|a_2 - a_0\|^2 - 2R\hat{R}_\mu)/(2\hat{R}_\mu^2)$, откуда следует, что $f'(\mu) > 0$ при всех μ , т.е. $f(\mu)$ строго возрастает. Поэтому $f(\mu_1) \leq f(\mu_0) = \|a_0 - a_1\|/(R - r_0)$, т.е. взяв в качестве $b_0 = b_{\mu_1}$, получим

$$\frac{\|a_0 - b_0\|}{h} < \frac{\|a_0 - a_1\|}{R - r_0} \leq \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{R - r_0}.$$

В заключение в силу выбора h , b_0 и из включения (41) следует, что $b_0 + A_2 \subset B_h(b_0) + A_1 \subset B_R(0)$, т.е. $b_0 \in B_R(0) \overset{*}{=} A_2$, что вместе с последним неравенством и доказывает оценку (39).

ТЕОРЕМА 10. Пусть компакт $A \subset \mathbb{R}^n$, вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и числа R_1, R_2, r_0 такие, что $R_2 \geq R_1 > r_0 > 0$ и $A \subseteq B_{r_0}(a)$. Тогда справедлива оценка

$$h(\text{strco}_{R_1} A, \text{strco}_{R_2} A) \leq \left(\sqrt{\frac{R_2 + r_0}{R_2 - r_0}} - 1 \right) (R_2 - R_1). \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известной формулы для расстояния по Хаусдорфу между выпуклыми компактными A и B (см., например, [9]) вида

$$h(A, B) = \max_{\|p\|=1} \|s(p, A) - s(p, B)\|,$$

а также в силу теоремы 5 (т.е. равенства (23)) легко доказать равенство

$$h(\text{strco}_{R_1} A, \text{strco}_{R_2} A) = h(B_{R_1}(0) \overset{*}{=} A, B_{R_2}(0) \overset{*}{=} A) - (R_2 - R_1).$$

В свою очередь из очевидных равенств $B_{R_1}(0) \overset{*}{=} A = B_{R_2}(0) \overset{*}{=} D$, где $D = A + B_{R_2-R_1}(0)$, и $h(A, D) = R_2 - R_1$, и из теоремы 9 и равенства (40) следует оценка

$$h(B_{R_2}(0) \overset{*}{=} D, B_{R_2}(0) \overset{*}{=} A) \leq \sqrt{\frac{R_2 + r_0}{R_2 - r_0}} (R_2 - R_1),$$

завершающая доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из теорем 8–10 и предложения 4, многозначное отображение $F(r) = \text{strco}_r A$ при $r > r_0$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа и монотонно убывающим по включению, с предельным значением равным $\text{co } A$.

Из теоремы Каратеодори о представлении выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [7], [8], [13]) и теорем 7–10 получаем следующее ее обобщение.

ТЕОРЕМА 11. *Сильно выпуклая r -оболочка множества A из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условиям определения 2, состоит из тех и только тех точек, каждая из которых содержится в сильно выпуклой r -оболочке некоторого, не более чем $n + 1$, числа точек из A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \text{strco}_r A$. Тогда по теореме 7 существуют точки $a_1, \dots, a_m \in A$ такие, что $a \in \text{strco}_r D$, где D есть объединение этих точек $a_1, \dots, a_m$, т.е. $D = \{a_1, \dots, a_m\}$. Допустим, что $m > n + 1$. Покажем, что можно выбрать подмножество $\tilde{D}$ в D , которое содержит не более $n + 1$ точки, и такое, что $a \in \text{strco}_r \tilde{D}$. Если $a \in \text{co } D$, то по теореме Каратеодори существует такое $\tilde{D}$, что оно содержит не более $n + 1$ точек и $a \in \text{co } \tilde{D} \subseteq \text{strco}_r \tilde{D}$, что и требуется доказать. Если $a \notin \text{co } D$, то в силу теорем 8 и 10 найдется $R \geq r$ такое, что a принадлежит границе множества $\text{strco}_R D$. Возможны два случая: либо $B_R(0) \overset{*}{=} D$ состоит из одной точки, либо имеет непустую внутренность. В первом случае $\text{strco}_R D$ в силу (23) является шаром минимального радиуса, в который можно поместить множество D . В силу теоремы Юнга (см. [7], [13]) такой шар единственный, т.е. он однозначно задается $(n + 1)$ точками из D , лежащими на его границе (т.е. на сфере), которые и обозначим через $\tilde{D}$, т.е. $\text{strco}_r D = \text{strco}_r \tilde{D}$, что опять завершает доказательство теоремы. Во втором случае, так как всякое сильно выпуклое множество является строго выпуклым, то для данного a существует $\tilde{p} \in S_1(0)$ такой, что $\langle \tilde{p}, a \rangle = s(\tilde{p}, \text{strco}_R D)$. Для всякого $p \in S_1(0)$, обозначим через $k(p) \in \overline{1, m}$ номер соответствующей точки a_k , удовлетворяющий равенству $s(p, D) = \max\{\langle p, a_k \rangle \mid a_k \in D\} = \langle p, a_{k(p)} \rangle$. Тогда опорная функция множества $B_R(0) \overset{*}{=} D$, соответственно, принимает вид $s(p, B_R(0) \overset{*}{=} D) = \text{co}(R\|p\| - \langle p, a_{k(p)} \rangle)$, причем в силу условия непустоты внутренней части множества $B_R(0) \overset{*}{=} D$ при вычислении выпуклой оболочки в последней формуле $\inf$ можно заменить на $\min$ (см., например, [9]), причем по теореме Каратеодори выпуклые комбинации можно брать не более чем по $n + 1$ точкам. В итоге для точки $\tilde{p}$ найдутся числа $\lambda_t > 0$ и точки $p_t \in S_1(0)$, $t \in \overline{1, T}$, такие, что

$$T \leq n + 1, \quad \tilde{p} = \sum_{t=1}^T \lambda_t p_t \quad \text{и} \quad s(\tilde{p}, B_R(0) \overset{*}{=} D) = \sum_{t=1}^T \lambda_t (R - \langle p_t, a_{k(p_t)} \rangle).$$

Отсюда по формуле (24) получаем равенство

$$s(\tilde{p}, \text{strco}_R D) = R - \sum_{t=1}^T \lambda_t (R - \langle p_t, a_{k(p_t)} \rangle).$$

Определим множество $\tilde{D}$ как совокупность точек $\{a_{k(p_1)}, \dots, a_{k(p_T)}\}$. Так как $a_{k(p_t)} \in \tilde{D} \subset D$, то $\langle p_t, a_{k(p_t)} \rangle \leq s(p_t, \tilde{D}) \leq s(p_t, D) = \langle p_t, a_{k(p_t)} \rangle$, т.е. $s(p_t, \tilde{D}) = s(p_t, D) \forall t \in \overline{1, T}$. Далее отсюда аналогично получаем, что

$$s(\tilde{p}, B_R(0) \overset{*}{=} D) \leq s(\tilde{p}, B_R(0) \overset{*}{=} \tilde{D}) \leq \sum_{t=1}^T \lambda_t (R - \langle p_t, a_{k(p_t)} \rangle),$$

т.е. справедливо равенство $s(\tilde{p}, \text{strco}_R D) = s(\tilde{p}, \text{strco}_R \tilde{D})$, которое в силу выбора $\tilde{p}$ влечет включение $a \in \text{strco}_R \tilde{D}$. Теорема доказана.

6. Обобщение теоремы Крейна–Мильмана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть компакт A из $\mathbb{R}^n$ и числа $\rho > 0$, $R > 0$ такие, что $B_\rho(0) \neq A \neq \emptyset$ и $R \geq \rho$. Непустое подмножество V из A называется *сильно крайним множеством радиуса R множества A* , если ни одна точка из V не содержится в сильно выпуклой R -оболочке какой-нибудь пары точек, которые принадлежат A , но не принадлежат V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $x \in A$ называется *сильно крайней точкой с радиусом R* (короче: *R -крайней точкой*) *множества A* , если одноточечное множество $\{x\}$ является сильно крайним множеством радиуса R для A .

Будем обозначать множества всех *крайних точек* и всех R -крайних точек множества A , соответственно, через $\text{extr } A$ и $\text{extr}_R A$. Из определений 4, 5 и свойств сильно выпуклой R -оболочки следует включение

$$\text{extr } A \supset \text{extr}_{R_1} A \supset \text{extr}_{R_2} A \quad \forall R_1 > R_2 \geq \rho. \quad (43)$$

Заметим, что всякий шар $B_R(a)$ радиуса R с центром в произвольной точке $a \in \mathbb{R}^n$ не имеет сильно крайних точек того же радиуса R , т.е. $\text{extr}_R B_R(a) = \emptyset$.

ЛЕММА 1. Пусть A сильно выпуклое множество радиуса $R > 0$, причем $A \neq B_R(a)$. Тогда существует число $\rho > 0$ такое, что $B_\rho(0) \neq A \neq \emptyset$ и $\rho < R$ (т.е. $\text{diam } A \leq 2\rho < 2R$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 существует компакт A^* , для которого выполнено равенство (9), и так как $A \neq B_R(a)$, то из (9) следует, что A^* состоит более чем из одной точки, т.е. $\alpha > 0$, где $\alpha = \text{diam } A^*$. По предложению 3 существует вектор $a^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что $B_r(a^*) \subset A^*$, где $r = \alpha^2/8R$. Отсюда и из (9) получаем $A = B_R(0) \neq A^* \subset B_\rho(-a^*)$, где $\rho = R - r$.

ЛЕММА 2. Пусть задан компакт A из $\mathbb{R}^n$ такой, что $A \neq B_R(0)$, $A \subset B_R(0)$. Пусть V сильно крайнее множество радиуса R множества A такое, что множество $V_1 = V \cap S_R(0)$ не пусто. Тогда множество V_1 также является сильно крайним множеством радиуса R для A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in V_1$, и пусть существуют $x \in A$ и $y \in A$ такие, что $x \neq z$, $y \neq z$, $z \in \text{strco}_R\{x; y\}$. Так как V сильно крайнее множество, то из включения $z \in V$ следуют включения $x \in V$ и $y \in V$. Лемма будет доказана, если докажем, что $x \in S_R(0)$ и $y \in S_R(0)$. Допустим противное, пусть $x \notin S_R(0)$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \subset B_R(0)$. Так как по условию $y \in B_R(0)$, то из определения 2 следует, что $\text{strco}_R(B_\varepsilon(x) \cup \{y\}) \subset B_R(0)$. Отсюда и в силу следствия 11 получаем, что $z \in \text{strco}_R\{x; y\} \setminus \{x\} \subset \text{int}(\text{strco}_R(B_\varepsilon(x) \cup \{y\}))$, т.е. $z \in \text{int } B_R(0)$, что противоречит условию $z \in V_1$.

ЛЕММА 3. Пусть задан компакт A из $\mathbb{R}^n$ такой, что $A \neq B_R(0)$, $A \subset B_R(0)$. Пусть V замкнутое сильно крайнее множество радиуса R для A такое, что $V \subset S_R(0)$, и пусть существует вектор $p \in S_1(0)$, для которого $s(p, V) = 0$. Пусть $H(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p \rangle = 0\}$. Тогда множество $V_1 = V \cap H(p)$ также является сильно крайним множеством радиуса R для A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in V_1$, и пусть существуют $x \in A$ и $y \in A$ такие, что $x \neq z$, $y \neq z$, $z \in \text{strco}_R\{x; y\}$. Так как V сильно крайнее множество, то из включения $z \in V$ следуют включения $x \in V$ и $y \in V$. Лемма будет доказана, если покажем, что $x \in H(p)$ и $y \in H(p)$. По предложению 2 и в силу включения $z \in \text{strco}_R\{x; y\} \cap S_R(0)$ существует число $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $z = R(\lambda x + (1 - \lambda)y) / \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|$. В то же время по предположению $\langle z, p \rangle = 0$, и по доказанному $\langle p, x \rangle \leq s(p, V) = 0$ и $\langle p, y \rangle \leq 0$, что вместе с последним представлением z через x и y влечет включения $x \in H(p)$ и $y \in H(p)$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть компакт A из $\mathbb{R}^n$, вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и числа $\rho > 0$ и $R > 0$ таковы, что $A \subseteq B_\rho(a)$ и $R > \rho$. Тогда A содержится в сильно выпуклой R -оболочке множества своих R -крайних точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем, что множество $\text{extr}_R A \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный вектор $p_0 \in S_1(0)$ и соответствующий $x_{p_0} \in \text{strco}_R A$ такой, что $\langle p_0, x_{p_0} \rangle = s(p_0, \text{strco}_R A)$. Для удобства вычислений сдвинем начало координат в $\mathbb{R}^n$ на вектор $(pR - x_{p_0})$ без замены обозначений. Это означает справедливость равенства $x_{p_0} = p_0 R \in \text{strco}_R A$, при этом в силу теоремы 1 справедливо включение $A \subset \text{strco}_R A \subset B_R(0)$. Покажем, что множество $A \cap S_R(0)$ не пусто. По теореме 7 существуют число m и векторы $x_k \in A$, где $k \in \overline{1, m}$, такие, что $x_{p_0} \in \text{strco}_R(\bigcup_{k=1}^m x_k)$. Именно среди этих x_k и найдутся векторы, принадлежащие $S_R(0)$. Допустим противное, все $x_k \notin S_R(0) \forall k \in \overline{1, m}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x_k) \subset B_R(0)$, т.е. $\bigcup_{k=1}^m x_k \subset B_{R-\varepsilon}(0)$. Отсюда по свойству сильно выпуклой оболочки (предложение 3, пункт 1) получаем $\text{strco}_R(\bigcup_{k=1}^m x_k) \subset B_{R-\varepsilon}(0)$, т.е. $x_{p_0} \in B_{R-\varepsilon}(0)$, противоречие. Итак, множество $A \cap S_R(0)$ не пусто.

Так как A является сильно крайним множеством радиуса R для самого себя по определению 4, то по лемме 2 непустое множество $V_0 = A \cap S_R(0)$ также будет сильно крайним множеством радиуса R для A . Рассмотрим множество $W_0 = \text{strco}_R A \cap S_R(0)$ и конусы $T_0 = \{\lambda x \mid x \in W_0, \lambda \geq 0\}$ и $K_0 = \{\lambda x \mid x \in V_0, \lambda \geq 0\}$. Очевидно, что $T_0 \subset K_0$. Покажем, что K_0 — выпуклый конус, т.е. для $\forall x, y \in K_0$ следует, что $x + y \in K_0$. Отбрасывая тривиальные случаи, т.е. полагая, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $x \neq \lambda y$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, определим $\bar{x} = (R/\|x\|)x$ и $\bar{y} = (R/\|y\|)y$. Очевидно, что $\bar{x} \in W_0$ и $\bar{y} \in W_0$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, $\bar{x} \neq -\bar{y}$. По предложению 2 векторы $z_\lambda = (\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)\bar{y})R / \|\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)\bar{y}\|$ для любого $\lambda \in [0, 1]$ принадлежат W_0 , так как z_λ лежат на дуге окружности радиуса R , соединяющей точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Возьмем $\lambda_0 = \|x\|/(\|x\| + \|y\|)$, для которого получим, что $z_{\lambda_0} = R(x + y)/\|x + y\| \in W_0$, т.е. $x + y \in K_0$. Выпуклость конуса K_0 доказана. Конус K_0 также является острым замкнутым конусом. В самом деле в противном случае существовал бы вектор $a \in W_0$ такой, что $-a \in W_0$, откуда $\text{diam}(\text{strco}_R A) \geq 2\|a\| = 2R$, что противоречит условиям теоремы, из которых следует, что $\text{diam}(\text{strco}_R A) \leq 2\rho < 2R$.

Рассмотрим нормальный конус (поляр) $N_0 = \{p \mid \langle p, x \rangle \leq 0 \forall x \in T_0\}$ к конусу $T_0 \subset K_0$. Так как K_0 — острый выпуклый конус, то конус N_0 будет телесным и $N_0 = \{p \mid s(p, V_0) \leq 0\}$. Так как по условию $p_0 \in K_0$ и K_0 — выпуклый острый конус, то по теореме Крейна–Мильмана для конусов (теорема 18.5 из [6]) существует вектор $x_0 \in S_1(0) \cap T_0$, задающий крайний луч для конуса со T_0 такой, что $\langle p_0, x_0 \rangle > 0$. В свою очередь по теореме об отделимости (теореме 11.6 из [6]) существует вектор $p_1 \in S_1(0) \cap N_0$, отделяющий x_0 от T_0 , т.е. такой, что $\langle p_1, x_0 \rangle = s(p_1, V_0) = 0$.

Рассмотрим множество $V_1 = V_0 \cap H(p_1)$, где как и в лемме 3 $H(p) = \{x \mid \langle x, p \rangle = 0\}$. По построению $x_0 \in V_1$, т.е. множество V_1 не пусто, по лемме 3 оно является сильно крайним множеством для A и лежит в $H(p_1)$, т.е. в $(n-1)$ -мерном подпространстве из $\mathbb{R}^n$.

Повторяя рассуждения случая V_0 для случая V_1 , аналогично рассмотрим замкнутый конус $T_1 = \{\lambda x \mid x \in V_1, \lambda \geq 0\} \subset K_0$ и нормальный конус $N_1 = \{p \mid s(p, V_1) \leq 0\}$ к конусу T_1 . Так как $x_0 \in T_1$ и T_1 лежит в остром выпуклом конусе в подпространстве $H(p_1)$, то по теореме Крейна–Мильмана (теореме 18.5 из [6]) существует вектор $x_1 \in S_1(0) \cap T_1$, задающий крайний луч конуса со T_1 в подпространстве $H(p_1)$ такой, что $\langle x_0, x_1 \rangle > 0$. По теореме об отделимости (теорема 11.6 из [6]) существует $p_2 \in S_1(0) \cap N_1$, отделяющий x_1 от T_1 в $H(p_1)$, т.е. такой, что $\langle x_1, p_2 \rangle = s(p_2, V_1) = 0$. Таким образом, можем построить следующее сильно крайнее множество $V_2 = V_1 \cap H(p_2)$, лежащее в $(n-2)$ -мерном подпространстве. Продолжая аналогичные построения вложенных замкнутых сильно крайних множеств и понижая на каждом шаге размерность этих множеств, мы придем не более чем за n шагов к одноточечному сильно крайнему множеству $\{a\}$, чем и докажем существование сильно крайней точки в V_0 , причем в силу построения справедливо неравенство $\langle a, p_0 \rangle > 0$.

2. Покажем, что $A \subset \text{strco}_R \text{extr}_R A$. Допустим противное, что существует $z_0 \in A$ такой, что $z_0 \notin \text{strco}_R \text{extr}_R A$. Рассмотрим $x_0 \in \text{strco}_R A$ — одну из максимально удаленных точек из $\text{strco}_R A$ от множества $\text{strco}_R \text{extr}_R A$. Обозначим через y_0 точку из $\text{strco}_R \text{extr}_R A$, которая является ортогональной проекцией на множество $\text{strco}_R \text{extr}_R A$ точки x_0 . По допущению $x_0 \neq y_0$. Определим $p_0 = (x_0 - y_0) / \|x_0 - y_0\|$. Легко проверить, что $s(p_0, \text{strco}_R A) = \langle p_0, x_0 \rangle$ и $s(p_0, \text{strco}_R \text{extr}_R A) = \langle p_0, y_0 \rangle$. Отсюда и по теореме 1 получаем, что

$$\text{strco}_R \text{extr}_R A \subset B_R(y_0 - Rp_0). \quad (44)$$

Очевидно, что полусфера вида

$$S^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0 + Rp_0\| = R, \langle x - x_0 + Rp_0, p_0 \rangle \geq 0\}$$

не пересекается с шаром $B_R(y_0 - Rp_0)$, и, учитывая включения (44), получаем, что S^+ не пересекается с $\text{strco}_R \text{extr}_R A$. По теореме 1 справедливо включение $\text{strco}_R A \subset B_R(x_0 - Rp_0)$, и по построению $x_0 \in S^+ \cap \text{strco}_R A$, откуда следует, как было показано в п. 1 доказательства теоремы, что непустое множество $V_0 = A \cap S_R(x_0 - Rp_0)$ содержит сильно крайнюю точку множества A , принадлежащую S^+ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 13. *Всякое сильно выпуклое множество A из $\mathbb{R}^n$ радиуса R , не являющееся шаром радиуса R , совпадает с сильно выпуклой R -оболочкой множества своих R -крайних точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 условие теоремы о том, что A не является шаром радиуса R означает, что существуют число $\rho \in (0, R)$ и вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такие, что $A \subset B_\rho(a)$. По теореме 12 множество $\text{extr}_R A$ не пусто, и справедливо включение $A \subset \text{strco}_R \text{extr}_R A$. Обратное включение $A \supset \text{strco}_R \text{extr}_R A$, очевидно, справедливо в силу п. 1 из предложения 3, так как сильно выпуклое множество A радиуса R содержит свои R -крайние точки.

7. Аппроксимации множеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Сеткой $\mathbf{C}$ мелкости $\Delta \in (0, 1)$ называется конечный набор точек $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \overline{1, I}$ из единичной сферы $S_1(0)$ такой, что для любого $p \neq 0$ существует подмножество индексов $I_p \subset \overline{1, I}$ и числа $\alpha_i > 0$, где $i \in I_p$, такие, что*

$$\|p_i - p_j\| < \Delta \quad \forall i, j \in I_p \quad \text{и} \quad p_i, p_j \in \mathbf{C}, \quad (45)$$

$$p = \sum_{i \in I_p} \alpha_i p_i, \quad p_i \in \mathbf{C}. \quad (46)$$

ЛЕММА 4. *Для данной сетки $\mathbf{C}$ мелкости $\Delta \in (0, 1)$ в представлении любого вектора $p \neq 0$ в виде (45), (46) справедливы оценки*

$$\|\hat{p} - p_i\| < \Delta \quad \forall i \in I_p, \quad 1 \geq \|\hat{p}\| \geq 1 - \Delta^2, \quad (47)$$

где

$$\hat{p} = p/\alpha, \quad \alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i, \quad \hat{\alpha}_i = \alpha_i/\alpha. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (45), (46) и (48) получаем, что

$$\hat{p} = \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i p_i, \quad \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i = 1.$$

Поэтому

$$\sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i (\hat{p} - p_i) = 0, \quad \|\hat{p}\| \leq \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i \|p_i\| = 1, \quad (49)$$

$$\|\hat{p} - p_j\| \leq \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i \|p_i - p_j\| \leq \Delta \quad \forall j \in I_p. \quad (50)$$

С другой стороны, суммируя равенства

$$1 = \|p_i\|^2 = \|\hat{p}\|^2 + 2 \langle \hat{p}, p_i - \hat{p} \rangle + \|p_i - \hat{p}\|^2$$

по всем $i \in I_p$ с весами $\hat{\alpha}_i$, в силу (49), (50) получаем

$$1 = \|\hat{p}\|^2 + \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i \|p_i - \hat{p}\|^2 \leq \|\hat{p}\|^2 + \Delta^2,$$

откуда следует (47).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть задана сетка $\mathbf{C}$ мелкости Δ . На множестве положительно однородных функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ зададим *сеточные операторы* $\mathcal{C}$ и $\mathcal{R}_r$ (где $r > 0$) по формулам

$$\mathcal{C}f(p) = \begin{cases} f(p), & \frac{p}{\|p\|} \in \mathbf{C}, \\ +\infty, & \frac{p}{\|p\|} \notin \mathbf{C}, \end{cases} \quad (51)$$

$$\mathcal{R}_r f(p) = r\|p\| - \text{co } \mathcal{C}(r\|p\| - f(p)). \quad (52)$$

Для получения оценок аппроксимаций множеств, использующих операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{R}_r$ введем еще два *вспомогательных сеточных оператора* $\mathcal{U}$ и $\mathcal{J}_r$, вычисляемые для данной сетки $\mathbf{C}$ по формулам

$$\mathcal{U}f(p) = \begin{cases} f(p), & \frac{p}{\|p\|} \in \mathbf{C}, \\ \sum_{i \in I_p} \alpha_i f(p_i), & \frac{p}{\|p\|} \notin \mathbf{C}, \end{cases} \quad (53)$$

$$\mathcal{J}_r f(p) = r\|p\| - \mathcal{U}(r\|p\| - f(p)), \quad (54)$$

где I_p , α_i , и $p_i \in \mathbf{C}$ выбираются для каждого $p \neq 0$ в соответствии с определением 6.

ЛЕММА 5. Пусть даны число $r > 0$ и сетка $\mathbf{C}$ мелкости $\Delta \in (0, 1)$, по которым определены операторы $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}_r$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{J}_r$, действующие на множестве положительно однородных функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

- 1) $\mathcal{U}f \geq \mathcal{J}_r f \forall f$;
- 2) если функция f выпукла, то $\text{co } \mathcal{U}f \geq f$;
- 3) если функция f такова, что функция $r\|p\| - f(p)$ выпукла, то $f \geq \mathcal{J}_r f$;
- 4) $\text{co } \mathcal{C}f = \text{co } \mathcal{U}f \forall f$;
- 5) $\text{co } \mathcal{C}p \leq \|p\|/(1 - \Delta^2) \forall p \in \mathbb{R}^n$;
- 6) $\text{co } \mathcal{J}_r f \leq \text{co } \mathcal{R}_r f = \text{strco}_r \mathcal{R}_r f \forall f$; если же функция $r\|p\| - f(p)$ выпукла, то $\text{co } \mathcal{R}_r f \leq \text{co } f$;
- 7) $\text{co } f \leq \text{co } \mathcal{C}f \leq \text{strco}_r \mathcal{C}f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения 1), 2), 3), 7) легко проверить, используя формулы (53), (54), (27), определения 6, 7 и определение выпуклой функции.

Докажем 4). Так как по (51), (53) $\mathcal{C}f \geq \mathcal{U}f$, то $\text{co } \mathcal{C}f \geq \text{co } \mathcal{U}f$. С другой стороны, из 2) и очевидных свойств сеточных операторов получаем $\text{co } \mathcal{C}f \leq \text{co } \mathcal{U} \text{ co } \mathcal{C}f \leq \mathcal{U} \text{ co } \mathcal{C}f \leq \mathcal{U} \mathcal{C}f = \mathcal{U}f$, т.е. $\text{co } \mathcal{C}f \leq \text{co } \mathcal{U}f$.

Докажем 5) для произвольного $p \in \mathbb{R}^n$. Из определения сетки $\mathbf{C}$ и леммы 4 получаем, что $\mathcal{U}\|p\| - \|p\| = \alpha(1 - \|\hat{p}\|) \leq \Delta^2 \|p\|/(1 - \Delta^2)$. Отсюда и из равенства 4) получаем неравенство 5).

Докажем 6). Воспользовавшись определением оператора $\mathcal{J}_r$ из (54), свойствами выпуклой оболочки и равенством 4), получаем

$$r\|p\| \geq \text{co } \mathcal{U}(r\|p\| - f(p)) + \text{co } \mathcal{J}_r f(p) = \text{co } \mathcal{C}(r\|p\| - f(p)) + \text{co } \mathcal{J}_r f(p),$$

т.е. $\text{co } \mathfrak{I}_r f(p) \leq \text{co } \mathcal{R}_r f(p)$. Исключая вырожденный случай, т.е. считая, что $\text{co } \mathcal{R}_r f(p) < +\infty$, получаем, что $\text{co } \mathcal{R}_r f(p)$ есть выпуклая оболочка разности опорных функций шара радиуса r и некоторого выпуклого множества, т.е. $\text{co } \mathcal{R}_r f(p)$ является опорной функцией сильно выпуклого множества радиуса r , что и влечет равенство в 6). Если же функция $r\|p\| - f(p)$ выпукла, то из неравенства $r\|p\| - f(p) \leq \mathcal{C}(r\|p\| - f(p))$ получаем $r\|p\| - f(p) \leq \text{co } \mathcal{C}(r\|p\| - f(p))$, т.е. $\mathcal{R}_r f \leq f$ и $\text{co } \mathcal{R}_r f \leq \text{co } f$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из пунктов 2), 4) и 7) леммы 5 оператор $\mathcal{C}$ задает внешнюю аппроксимацию множеств. В самом деле, пусть для данного выпуклого компакта $A \in \mathbb{R}^n$ определен выпуклый многогранник $\hat{A}$ с помощью конечного числа неравенств относительно $x \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, p_i \rangle \leq s(p_i, A) \quad \forall i \in \overline{1, I},$$

где все векторы p_i принадлежат сетке $\mathbf{C}$. Тогда этот многогранник аппроксимирует компакт A извне, причем опорная функция многогранника $\hat{A}$ удовлетворяет равенству $s(p, \hat{A}) = \text{co } \mathcal{C}s(p, A) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$. Как следует из пунктов 1) и 6) леммы 5, оператор $\mathcal{R}_r$ задает конечную внутреннюю аппроксимацию множества A по сетке $\mathcal{C}$ в случае, когда A есть сильно выпуклое множество.

Для получения оценок различных аппроксимаций выпуклых компактов сформулируем условия на положительно однородные функции, выполняемые в частности для опорных функций компактов, обладающих непустой внутренностью (см. предположения 1, 2) и для опорных функций сильно выпуклых множеств (см. предположение 3).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Положительно однородная функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на сфере $S_1(0)$ с константой $L > 0$, а ее выпуклая оболочка ограничена на сфере $S_1(0)$ константой $M > 0$ (т.е. $\| \text{co } f(p) \| \leq M\|p\| \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Существуют число $\rho > 0$ и вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$f(p) \geq \rho\|p\| + \langle p, a \rangle \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Существует $R_0 > 0$ такое, что функция $R_0\|p\| - f(p)$ выпукла.

ТЕОРЕМА 14. Пусть функция f удовлетворяет предположениям 1, 2, и задана сетка $\mathbf{C}$ мелкости $\Delta \in (0, 1/2)$, по которой определен оператор $\mathcal{C}$. Тогда справедливы оценки

$$\text{co } f(p) \leq \text{co } \mathcal{C}f(p) \leq \text{co } f(p) + 4LM\Delta\|p\|/\rho \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad (55)$$

$$\text{strco}_{R_1} f(p) \leq \text{strco}_{R_1} \mathcal{C}f(p) \leq \text{strco}_{R_0} f(p) + 4LM\Delta\|p\|/\rho \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad (56)$$

где $R_1 \geq R_0(1 + 2L\Delta/\rho)$ и $R_0 > M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \leq \mathcal{C}f$, то левые неравенства в (55), (56) очевидны. Фиксируем $p \neq 0$. Используя для данного p обозначения из определения 6 и леммы 4 и выбирая по заданной сетке $\mathcal{C}$ оператор $\mathcal{U}$ из (53), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{U}f(p) - f(p) &= \alpha \left(\sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i f(p_i) - f(\hat{p}) \right) \\ &\leq \alpha \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i L \|p_i - \hat{p}\| \leq \alpha L \Delta = \frac{\|p\|}{\|\hat{p}\|} L \Delta \leq 2\|p\| L \Delta. \end{aligned} \quad (57)$$

Выражая $\|p\|$ из неравенства в предположении 2 и подставляя это выражение в (57), получаем

$$\mathcal{U}f(p) \leq f(p)(1 + 2L\Delta/\rho) - 2L\Delta \langle p, a \rangle / \rho. \quad (58)$$

Беря выпуклую оболочку от правой и левой частей неравенства (58) и используя утверждение пункта 4) из леммы 5, получаем

$$\text{co } \mathcal{C}f(p) \leq \text{co } f(p)(1 + 2L\Delta/\rho) - 2L\Delta \langle p, a \rangle / \rho \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad (59)$$

что вместе с предположением 1 доказывает правое неравенство в (55).

Беря сильно выпуклую R_1 -оболочку от правой и левой частей неравенства (59) и используя свойства сильно выпуклой оболочки из предложения 3, получаем

$$\text{strco}_{R_1} \mathcal{C}f(p) \leq (1 + 2L\Delta/\rho) \text{strco}_{R_0} f(p) - 2L\Delta \langle p, a \rangle / \rho \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Так как из предположения 1 при $R_0 > M$ очевидно следует ограниченность функции $\text{strco}_{R_0} f(p)$ с той же константой M , то из последнего неравенства получаем правое неравенство в (56).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда f есть опорная функция выпуклого компакта A с непустой внутренностью, теорема 14 дает оценки расстояния по Хаусдорфу между этим множеством и его внешними многогранной или сильно выпуклой аппроксимациями, причем эти оценки пропорциональны мелкости сетки $\mathcal{C}$ и обратно пропорциональны радиусу ρ вписанного в A шара.

ТЕОРЕМА 15. Пусть f удовлетворяет предположениям 1–3, и пусть задана сетка $\mathcal{C}$ мелкости $\Delta \in (0, 1/2)$, по которой определен оператор $\mathcal{C}$. Пусть $R_1 \geq R_0(1 + 2R_0\Delta^2/\rho)$. Тогда справедливы оценки второго порядка относительно мелкости Δ вида

$$\text{co } f(p) \leq \text{co } \mathcal{C}f(p) \leq \text{strco}_{R_1} \mathcal{C}f(p) \leq \text{co } f(p) + 4R_0M\Delta^2\|p\|/\rho \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость первых двух неравенств в (60) показана в пункте 7) леммы 5. После взятия выпуклой оболочки от обеих частей равенства $\mathcal{C}f(p) + \mathcal{C}(R_0\|p\| - f(p)) = R_0\mathcal{C}\|p\|$, и, используя неравенство из пункта 5) леммы 5, получаем

$$\text{co } \mathcal{C}f(p) + \text{co } \mathcal{C}(R_0\|p\| - f(p)) \leq R_0 \text{co } \mathcal{C}\|p\| \leq R_0\|p\|/(1 - \Delta^2). \quad (61)$$

В силу предположения 3 справедливо неравенство

$$\text{co } \mathcal{C}(R_0 \|p\| - f(p)) \geq R_0 \|p\| - f(p),$$

что вместе с неравенством (61) и очевидной оценкой $1 - \Delta^2 > 1/2$ влечет неравенство

$$\text{co } \mathcal{C}f(p) \leq f(p) + 2R_0 \Delta^2 \|p\|. \quad (62)$$

Из неравенства (62) и предположения 2 получаем

$$\text{co } \mathcal{C}f(p) \leq (1 + 2R_0 \Delta^2 / \rho) f(p) - 2R_0 \Delta^2 \langle a, p \rangle / \rho.$$

Вычисляя выпуклую оболочку от обеих частей неравенства, получаем

$$\text{co } \mathcal{C}f(p) \leq (1 + 2R_0 \Delta^2 / \rho) \text{co } f(p) - 2R_0 \Delta^2 \langle p, a \rangle / \rho. \quad (63)$$

Взяв от обеих частей неравенства (63) сильно выпуклые оболочки с радиусом R_1 , определенным в условии, и воспользовавшись свойствами сильно выпуклой оболочки (см. пункты 3 и 2 из предложения 3), получаем неравенство

$$\text{strco}_{R_1} \mathcal{C}f(p) \leq (1 + 2R_0 \Delta^2 / \rho) \text{strco}_{R_0} f(p) - 2R_0 \Delta^2 \langle p, a \rangle / \rho.$$

Так как в силу предположения 3 и следствия 8 справедливо равенство $\text{strco}_{R_0} f = \text{co } f$, из полученного неравенства и из ограниченности $\text{co } f$ получаем неравенство (60).

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть f выпукла и удовлетворяет предположениям 1 и 3. Пусть задана сетка $\mathbf{C}$ мелкости $\Delta \in (0, 1/2)$, по которой определен оператор $\mathcal{C}$. Пусть $R_1 \geq R_0(1 + 2\Delta^2)$. Тогда оценка (60) принимает вид

$$f(p) \leq \text{co } \mathcal{C}f(p) \leq \text{strco}_{R_1} \mathcal{C}f(p) \leq f(p) + 2R_0 \Delta^2 \|p\| \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \quad (64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий следует, что $f(p)$ является опорной функцией сильно выпуклого множества с радиусом R_0 , а $f(p) + 2R_0 \Delta^2 \|p\|$ — опорной функцией сильно выпуклого множества с радиусом $R_0(1 + 2\Delta^2)$. Взяв от обеих частей неравенства (62) (которое, очевидно, справедливо в силу условий следствия) сильно выпуклые оболочки с радиусом R_1 , определенным в условии следствия, в силу свойств сильно выпуклой оболочки (см. предложение 3), получаем неравенство (64).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда функция f не выпукла и требуется найти $\text{co } f$, благодаря теоремам 14, 15, вычисление функции $\text{co } f$ может быть сведено к вычислению функции $\mathcal{C} \text{co } f$ с погрешностью, указанной, соответственно, в неравенствах (55) или (60). В свою очередь, значение функции $\text{co } \mathcal{C}f$ в каждой точке p_0 сетки $\mathbf{C}$ является решением задачи линейного программирования на максимум линейной функции $\langle p_0, x \rangle$ по всем x , удовлетворяющим системе линейных неравенств $\langle p_i, x \rangle \leq f(p_i) \quad \forall p_i \in \mathbf{C}$.

ТЕОРЕМА 16. Пусть f удовлетворяет предположениям 1–3, и пусть задана сетка $\mathcal{C}$ мелкости $\Delta \in (0, \sqrt{\rho/R_0})$, $\Delta < 1/2$, по которой определены операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{R}_{R_0}$. Пусть $R_0 \geq 5M$ и $R_1 \geq R_0/(1 - R_0\Delta^2/\rho)$. Тогда справедливы оценки второго порядка относительно мелкости Δ вида

$$\begin{aligned} \text{co}\mathcal{R}_{R_0}f(p) &\leq \text{co}f(p) \leq \text{strco}_{R_1}\mathcal{C}f(p) \\ &\leq \text{co}\mathcal{R}_{R_0}f(p) + 6R_0M\Delta^2\|p\|/\rho \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два неравенства в (65) справедливы всегда по лемме 5. Фиксируем $p \neq 0$. Используя для данного p обозначения из определения 6 и леммы 4, и выбирая по заданной сетке $\mathcal{C}$ операторы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{I}_{R_0}$, из (53), (54) и леммы 4 получаем неравенства

$$\mathcal{I}_{R_0}f(p) \geq \alpha \left(\sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i f(p_i) + R_0(\|\hat{p}\| - 1) \right) \geq \alpha \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i f(p_i) - \alpha R_0\Delta^2. \quad (66)$$

Для всякого $i \in I_p$ выпишем неравенство, данное в предположении 2, при $p = p_i$, просуммируем эти неравенства по всем $i \in I_p$ с множителями $\hat{\alpha}_i$ и получим

$$-1 \geq - \sum_{i \in I} \hat{\alpha}_i f(p_i) / \rho + \langle a, \hat{p} \rangle / \rho,$$

подставив которое в правую часть (66), будем иметь

$$\mathcal{I}_{R_0}f(p) \geq (1 - R_0\Delta^2/\rho)\mathcal{U}f(p) + R_0\Delta^2 \langle a, p \rangle / \rho.$$

Взяв выпуклые оболочки от обеих частей последнего неравенства, по лемме 5 (пункты 4), 6)) получаем

$$\text{co}\mathcal{R}_{R_0}f(p) \geq (1 - R_0\Delta^2/\rho)\text{co}\mathcal{C}f(p) + R_0\Delta^2 \langle a, p \rangle / \rho.$$

Взяв сильно выпуклые R_0 -оболочки от обеих частей последнего неравенства, по лемме 5 (пункты 3), 6)) получаем неравенство

$$\text{co}\mathcal{R}_{R_0}f(p) \geq (1 - R_0\Delta^2/\rho)\text{strco}_{R_1}\mathcal{C}f(p) + R_0\Delta^2 \langle a, p \rangle / \rho. \quad (67)$$

В силу теоремы 15 и условий на Δ в теореме 16 получаем, что $\|\text{co}\mathcal{C}f(p)\| \leq 5M\|p\|$, откуда в силу условий $R_0 \geq 5M$ получаем, что и $\|\text{strco}_{R_1}\mathcal{C}f(p)\| \leq 5M\|p\|$, в результате чего из (67) получаем (65).

Теорема 15 позволяет записать также оценку погрешности для внешней аппроксимации сильно выпуклого множества в виде конечно порожденного сильно выпуклого множества (криволинейного многогранника).

СЛЕДСТВИЕ 13. Для сильно выпуклого множества A с радиусом R задан-
дим криволинейный многогранник $\tilde{A}$ по сетке $\mathcal{C}$ мелкости $\Delta < 1/2$ системой
неравенств

$$\langle x, p_i \rangle + \|x - \text{grad } s(p_i, A)\|^2 / (2R) \leq s(p_i, A) \quad \forall p_i \in \mathcal{C}.$$

Тогда существует $\text{Const} > 0$, не зависящая от Δ , и такая, что $h(A, \tilde{A}) \leq \text{Const} \Delta^2$.

Заключение

Хочу отметить, что изложенные в данной работе результаты имеют главным образом теоретический характер. В то же время часть из приведенных в статье свойств сильно выпуклых множеств позволили Иванову и мне в работах [14], [15] получить новые алгоритмы вычисления известных в теории дифференциальных игр игровых множеств достижимости, называемых альтернированным интегралом Понтрягина (определение интеграла см., например, в [5]), оценить скорости сходимости этих алгоритмов и показать, что в случае, когда целевое множество и множество значений управления преследователя являются сильно выпуклыми множествами, скорость сходимости полученных алгоритмов является квадратичной относительно мелкости разбиения интервала времени игры.

Автор выражает большую благодарность В. М. Тихомирову за внимание и ряд ценных замечаний по работе.

Список литературы

1. *Plis A.* Accessible Sets in Control Theory // Int. Conf. on Diff. Eqs: Academic Press, 1975. P. 646–650.
2. *Lojasiewicz St.(Jr.)* Some properties of accessible sets in non linear control systems // Ann. Polon. Math. 1979. V. XXXVII. №2. P. 123–127.
3. *Frankowska H., Olech C.* R -convexity of the Integral of the Set-Valued Functions // Contributions to Analysis and Geometry. Baltimore, Md.: Johns Hopkins Univ. Press, 1981. P. 117–129.
4. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
5. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. №3. С. 307–330.
6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
8. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
9. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. Учеб. пособие. М.: Изд-во МФТИ, 1982.
10. *Половинкин Е. С.* Об интегрировании многозначных отображений // ДАН СССР. 1983. Т. 271. №5. С. 1069–1074.
11. *Половинкин Е. С.* О свойствах сильно выпуклых множеств // Моделирование процессов управления и обработки информации. М.: Изд-во МФТИ, 1994. P. 182–189.
12. *Половинкин Е. С.* О выпуклых и сильно выпуклых аппроксимациях множеств // ДАН. 1995 (в печати).
13. *Berger M.* Geometrie. Paris: CEDIC/FERNAND NATHAN, 1977.
14. *Иванов Г. Е., Половинкин Е. С.* Второй порядок сходимости алгоритма вычисления цены линейной дифференциальной игры // ДАН. 1995. Т. 340. №2. С. 151–154.
15. *Иванов Г. Е., Половинкин Е. С.* О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №10.
16. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
17. *Polovinkin E. S.* On Strongly Convex Sets // Phystech Journal. 1995. V. 2. №1.
18. *Половинкин Е. С.* Обобщение теорем Каратеодори и Крейна–Мильмана для сильно выпуклых множеств // ДАН. 1995 (в печати).