Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Григорян, Специальная факторизация необратимого интегрального оператора Фредгольма второго рода с ядром Гильберта–Шмидта, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 5, 33–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:32:08

УДК 517.968

Г. А. Григорян

Специальная факторизация необратимого интегрального оператора Фредгольма второго рода с ядром Гильберта–Шмидта

В работе рассматривается вопрос о специальной факторизации необратимого интегрального оператора Фредгольма второго рода $I - K$ с ядром Гильберта–Шмидта. Здесь I – единичный, K – интегральный оператор:

$$(Kf)(x) \equiv \int_0^1 K(x, t)f(t) dt, \quad f \in L_2[0, 1].$$

Доказывается, что $\lambda = 1$ является собственным значением оператора K кратности $n \geq 1$ тогда и только тогда, когда $I - K = W_{+,1} \circ \dots \circ W_{+,n} \circ (I - K_n) \circ W_{-,1} \circ \dots \circ W_{-,n}$, где $W_{+,j}$, $W_{-,j}$, $j = \overline{1, n}$, – ограниченные в $L_2[0, 1]$ операторы специальной конструкции, обратимые слева и справа соответственно.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

При изучении или решении дифференциальных и интегральных уравнений часто приходится расщеплять участвующие в них операторы на более простые сомножители (см. [1]–[3]). Иногда представляется удобным отделить от оператора простые множители (специальная факторизация), несущие в себе обуславливаемые изучаемой задачей особенности оператора (см. [4]).

Пусть $K: L_2^{(n)}(a, b) \rightarrow L_2^{(n)}(a, b)$ – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта, I – единичный оператор,

$$I_r = I|_{L_2^{(n)}(a, r)}, \quad (K_r f)(x) \equiv \int_a^r K(x, t)f(t) dt, \quad f \in L_2^{(n)}(a, r), \quad a \leq r \leq b.$$

Обозначим через Ω_+ (Ω_-) множество верхних (нижних) треугольных операторов с квадратируемыми ядрами. В работе [1] доказан следующий основной результат по вольтерровой факторизации обратимого интегрального оператора $I - K$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Оператор $I - K$ допускает вольтеррову факторизацию $I - K = (I - U_+)(I - U_-)$, где $U_{\pm} \in \Omega_{\pm}$ тогда и только тогда, когда обратимы все усеченные операторы $I_r - K_r$, $r \in [a, b]$.*

В работах Н. Б. Енгибаряна [5], [6] получены первые результаты по вольтерровой факторизации необратимого интегрального оператора $I - K$. В силу теоремы 1.1 если ядро оператора K интегрируемо с квадратом, то хотя бы

один из факторов $V_{\pm}$ в разложении $I - K = (I - V_+)(I - V_-)$ выпадает из соответствующего класса $\Omega_{\pm}$ (здесь V_+ (V_-) – нижний (верхний) треугольный интегральный оператор).

В работе [7] была построена специальная факторизация необратимого интегрального оператора Фредгольма второго рода, действующего в $L_1[0, 1]$, в том случае, когда ядро $K(x, t)$ – ограниченная функция. Показано, что если $\lambda = 1$ – простое собственное значение K , то имеет место следующее представление:

$$I - K = W_+(I - T)W_-, \quad (1.1)$$

где T – интегральный оператор с ограниченным ядром $T(x, t)$, $\text{Ker}(I - T) = \{0\}$, W_+ и W_- – операторы специальной конструкции, действующие в некотором расширении $L_1[0, 1]$ и обратимые слева и справа соответственно.

§ 2. Некоторые вспомогательные соотношения

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены на $[0, 1]$ и обладают свойствами:

- 1) $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$, $x \in [0, 1]$;
- 2) $\varphi^{\pm 1}, \psi^{\pm 1} \in M[0, 1]$;
- 3) $\int_0^1 \varphi(x)\psi(x) dx = 1$.

Рассмотрим следующие интегральные операторы (см. [6]):

$$\begin{aligned} (\Psi_- f)(x) &\equiv \int_0^x \varphi_1(x)\psi(t)f(t) dt, \\ (\Psi_+ f)(x) &\equiv \int_x^1 \varphi(x)\psi_1(t)f(t) dt, \\ (Sf)(x) &\equiv \varphi(x) \int_0^1 \psi(t)f(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_0^x \varphi(\xi)\psi(\xi) d\xi}, \quad \psi_1(x) = \frac{\psi(x)}{\int_0^x \varphi(\xi)\psi(\xi) d\xi}.$$

Очевидно, что S – линейный ограниченный в $L_2[0, 1]$ оператор. Покажем, что $\Psi_{\pm}$ также ограничены в $L_2[0, 1]$. Заметим, что в силу 1) и 2) ограниченность операторов $\Psi_{\pm}$ достаточно доказать в частном случае, когда $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 1$. Для произвольных $f, g \in L_2[0, 1]$ через $\langle f, g \rangle$ обозначим скалярное произведение

$$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt.$$

Пусть $f \in L_2[0, 1]$ и $f(x) \geq 0$, $x \in [0, 1]$, и пусть $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим функцию

$$f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} f(x), & \varepsilon \leq x \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x < \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что $(\Psi_- f_\varepsilon)(x)$ ограничена на $[0, 1]$. Следовательно, конечна норма $\|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2}$. Оценим сверху эту величину. Для этого воспользуемся соотношением $\Psi_+ \circ \Psi_- = \Psi_+ + \Psi_- - S$ (см. [6], [7]).

Имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2}^2 &= \langle \Psi_- f_\varepsilon, \Psi_- f_\varepsilon \rangle = \langle f_\varepsilon, \Psi_+ \circ \Psi_- f_\varepsilon \rangle = \langle f_\varepsilon, (\Psi_+ + \Psi_- - S)f_\varepsilon \rangle \\ &\leq 2\langle \Psi_- f_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle \leq 2\|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2} \cdot \|f_\varepsilon\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2} \leq 2\|f_\varepsilon\|_{L_2}. \quad (2.1)$$

Пусть, далее,

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &\equiv \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^2 dx = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x (f_\varepsilon(t) + g_\varepsilon(t)) dt \right)^2 dx \\ &\leq 2 \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x f_\varepsilon(t) dt \right)^2 dx + 2 \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x g_\varepsilon(t) dt \right)^2 dx \\ &\leq 2\|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2}^2 + 2 \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} \left(\int_0^\varepsilon f(t) dt \right)^2 dx \leq 2\|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2}^2 + 2 \int_0^\varepsilon f^2(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.1) получаем

$$I_\varepsilon \leq 2\|f\|_{L_2} + 2 \int_0^\varepsilon f^2(t) dt \rightarrow 2\|f\|_{L_2} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2} = I_0 \leq 2\|f\|_{L_2}. \quad (2.2)$$

Пусть теперь f – произвольная функция из $L_2[0, 1]$. Тогда с учетом (2.2) будем иметь

$$\|\Psi_- f_\varepsilon\|_{L_2} \leq \|\Psi_- |f|\|_{L_2} \leq 2\||f||\|_{L_2} = 2\|f\|_{L_2}. \quad (2.3)$$

Ограниченность Ψ_- установлена. Для доказательства ограниченности Ψ_+ воспользуемся соотношением (см. [7])

$$\Psi_- \circ \Psi_+ = \Psi_- + \Psi_+.$$

Для произвольного $f \in L_2[0, 1]$ ввиду (2.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Psi_+ f\|_{L_2}^2 &\leq \|\Psi_+ |f|\|_{L_2}^2 = \langle \Psi_+ |f|, \Psi_+ |f| \rangle = \langle |f|, (\Psi_- \circ \Psi_+) |f| \rangle \\ &= \langle |f|, \Psi_- |f| + \Psi_+ |f| \rangle \leq 2\|\Psi_- |f|\|_{L_2} \cdot \|f\|_{L_2} \leq 4\|f\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\Psi_+ f\|_{L_2} \leq 2\|f\|_{L_2}, \quad (2.4)$$

что доказывает ограниченность Ψ_+ в $L_2[0, 1]$.

В дальнейшем нам понадобится

ЛЕММА 2.1. Если $\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty$, то

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{x} \int_0^x K(s, t) ds \right|^2 dx dt \leq 4 \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $K(x, t) \geq 0$, $s, t \in [0, 1]$.

Пусть

$$K_\varepsilon(s, t) = \begin{cases} K(s, t), & \varepsilon \leq s \leq 1, \quad t \in [0, 1], \\ 0, & 0 \leq s \leq \varepsilon, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_x &\equiv \frac{1}{x^2} \int_0^1 \left(\int_0^x K_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dt \leq \frac{1}{x} \int_0^1 \int_0^x K_\varepsilon^2(s, t) ds dt \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 K_\varepsilon^2(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Следовательно, I_x ограничена на $[0, 1]$ и, значит,

$$J \equiv \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x K_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx dt < +\infty. \quad (2.6)$$

Оценим сверху J . Для этого воспользуемся легко проверяемым соотношением

$$\int_s^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^x K_\varepsilon(\xi, t) d\xi = \frac{1}{s} \int_0^s K_\varepsilon(\xi, t) d\xi + \int_s^1 \frac{K_\varepsilon(\xi, t)}{\xi} d\xi - \int_0^1 K_\varepsilon(\xi, t) d\xi.$$

Имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 dt \int_0^1 K_\varepsilon(s, t) ds \int_s^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^x K_\varepsilon(\xi, t) d\xi \\ &= \int_0^1 dt \int_0^1 K_\varepsilon(s, t) \left\{ \frac{1}{s} \int_0^s K_\varepsilon(\xi, t) d\xi + \int_s^1 \frac{K_\varepsilon(\xi, t)}{\xi} d\xi - \int_0^1 K_\varepsilon(\xi, t) d\xi \right\} ds \\ &\leq 2 \int_0^1 dt \int_0^1 K_\varepsilon(s, t) \frac{ds}{s} \int_0^s K_\varepsilon(\xi, t) d\xi. \end{aligned}$$

Применяя к правой части этого неравенства неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$J \leq 2\sqrt{J} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K_\varepsilon^2(s, t) ds dt \right\}^{1/2}.$$

Отсюда с учетом (2.6) будем иметь

$$J \leq 4 \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt. \quad (2.7)$$

Пусть $1 > \varepsilon > 0$ и

$$r_\varepsilon(s, t) = \begin{cases} K(s, t), & 0 \leq s < \varepsilon, \quad t \in [0, 1], \\ 0, & \varepsilon \leq s \leq 1, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &\equiv \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x K(s, t) ds \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x \{K_\varepsilon(s, t) + r_\varepsilon(s, t)\} ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x K_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx \\ &\quad + 2 \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x K_\varepsilon(s, t) ds \int_0^x r_\varepsilon(s, t) ds \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x r_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.7)

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &\leq 4 \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt + 2 \int_0^1 \left\{ \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x K_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \left\{ \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x r_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx \right\}^{1/2} dt + \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x r_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx \\ &\leq 4 \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt + 2 \left\{ \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x K_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x r_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx \right\}^{1/2} + \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x r_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 dx \\ &\leq 4 \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt + 4 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} \left(\int_0^\varepsilon r_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 \right\}^{1/2} + \int_0^1 dt \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} \left(\int_0^\varepsilon r_\varepsilon(s, t) ds \right)^2 \\ &\leq 4 \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt + 4 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^1 \int_0^\varepsilon r_\varepsilon^2(s, t) ds dt \right\}^{1/2} + \int_0^1 \int_0^\varepsilon r_\varepsilon^2(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю, отсюда получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x K(s, t) ds \right)^2 dx dt \leq 4 \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) ds dt. \quad (2.8)$$

Таким образом, оценка (2.5) верна, когда $K(x, t) \geq 0$, $x, t \in [0, 1]$. В общем случае неравенство (2.5) легко выводится из (2.8). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{x} \int_0^x K(s, t) ds \right|^2 dx dt &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x |K(s, t)| ds \right)^2 dx dt \\ &\leq 4 \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

§ 3. Специальная факторизация необратимого оператора Фредгольма второго рода

Через Ω обозначим множество функций $K(x, t)$, $x, t \in [0, 1]$, удовлетворяющих условию Гильберта–Шмидта:

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty.$$

Пусть K – интегральный оператор с ядром $K \in \Omega$, и пусть $\lambda = 1$ – собственное значение этого оператора кратности n , а η_- и η_+ – какие-нибудь ненулевые собственные функции соответственно операторов K и K^τ (τ – знак транспонирования), отвечающие этому собственному значению. Как и в работе [7], с помощью η_+ и η_- строим операторы $W_{+,1}$ и $W_{-,1}$:

$$\begin{aligned} W_{+,1} &= (I - V_{\varphi, \alpha_+}^+)(I - S_{\zeta_+}^+)(I - \Psi_+), \\ W_{-,1} &= (I - \Psi_-)(I - S_{\zeta_-}^-)(I - V_{\psi, \alpha_-}^-), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (I - V_{\varphi, \alpha_+}^+) &= [(I + \alpha_+ U_\varphi^-)^\tau]^{-1}, & (I - V_{\psi, \alpha_-}^-) &= (I + \alpha_- U_\psi^-)^{-1}, \\ (U_r^- f)(x) &\equiv \int_0^x r(t) f(t) dt, & f &\in L_2, \end{aligned}$$

$\alpha_\pm$ – постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\alpha_- \tilde{\psi}(t)} \eta_-(t) \psi(t) dt &\neq 0, & \int_0^1 e^{\alpha_+ \tilde{\varphi}(t)} \eta_+(t) \varphi(t) dt &\neq 0, \\ \tilde{\psi}(t) &= \int_0^t \psi(s) ds, & \tilde{\varphi}(t) &= \int_0^t \varphi(s) ds, \end{aligned}$$

$\zeta_\pm$ – функции из $L_2[0, 1]$, связанные с $\eta_\pm$ посредством соотношений

$$1^*) \quad (I + \alpha_- U_\psi^-) \zeta_- = \beta_- \eta_-, \quad (I + \alpha_+ U_\varphi^-) \zeta_+ = \beta_+ \eta_+;$$

$$2^*) \quad \int_0^1 \varphi(x) \zeta_+(x) dx = \int_0^1 \psi(x) \zeta_-(x) dx = 1;$$

$\beta_\pm$ – некоторые числа, а операторы $S_{\zeta_\pm}^\pm$ определяются так:

$$S_{\zeta_\pm}^\pm = S + R_{\zeta_\pm}^\pm,$$

$$(R_{\zeta_+}^+ f)(x) \equiv \varphi(x) \int_0^1 \zeta_+(t) f(t) dt, \quad (R_{\zeta_-}^- f)(x) \equiv \zeta_-(x) \int_0^1 \psi(t) f(t) dt.$$

Операторы $I - S_{\zeta_{\pm}}^{\pm}$ инволютивны в $L_2[0, 1]$ (см. [7]). Следовательно, в силу (2.3) и (2.4) $W_{\pm,1}$ односторонне обратимы и ограничены в $L_2[0, 1]$, причем $W_{+,1}$ обратим слева, а $W_{-,1}$ — справа.

Используя подход работы [7], строим разложение

$$I - K = W_{+,1}(I - K_1)W_{-,1}. \quad (3.1)$$

Ядро $K_1(x, t)$ оператора K_1 связано с ядром $K(x, t)$ посредством соотношения

$$\begin{aligned} K_1(x, t) = & T(x, t) - \int_0^x \varphi_1(x) \psi(s) T(s, t) ds - \int_0^t T(x, \tau) \varphi(\tau) \varphi_1(t) d\tau \\ & + \int_0^x \int_0^t \varphi_1(x) \psi(s) T(s, \tau) \varphi(\tau) \psi_1(t) ds d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} T(x, t) = & K(x, t) + \alpha_+ \varphi(x) \int_x^1 K(s, t) ds + \alpha_- \int_t^1 K(x, \tau) d\tau \psi(t) \\ & + \alpha_+ \alpha_- \varphi(x) \int_x^1 \int_t^1 K(s, \tau) ds d\tau \psi(t) - \alpha_+ \varphi(x) \theta(t - x) \\ & - \alpha_- \theta(x - t) \psi(t) - \alpha_+ \alpha_- \varphi(x) [1 - \max\{x, t\}] \psi(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

причем

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_0^x \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi}, \quad \psi_1(x) = \frac{\psi(x)}{\int_0^x \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При выводе формулы (3.2) мы воспользовались соотношением (см. [6])

$$I) (I - \Psi_+)(I - \Psi_-) = I - S$$

и следующими соотношениями из работы [7]:

$$II) (I - \Psi_-)(I - \Psi_+) = I;$$

$$III) (I - S)(I - S_{\zeta_-}^-) = I - R_{\zeta_-}^-;$$

$$IV) (I - S_{\zeta_+}^+)(I - S) = I - R_{\zeta_+}^+;$$

$$V) T \circ R_{\zeta_-}^- = R_{\zeta_-}^-;$$

$$VI) R_{\zeta_+}^+ \circ T = R_{\zeta_+}^+;$$

где $K_1 = (I - \Psi_-)T(I - \Psi_+)$, а также следующей леммой [7; лемма 1.2].

ЛЕММА 3.1. Для любого ненулевого $\eta \in L_2(0, 1)$ существуют комплексные постоянные α, β и функция $\zeta \in L_2(0, 1)$ такие, что

$$1^\circ) (I + \alpha U_{\psi}^-) \zeta = \beta \eta;$$

$$2^\circ) \int_0^1 \psi(x) \zeta(x) dx = 1,$$

при этом число α можно выбрать действительным и сколь угодно малым по модулю.

Из 1), 2), леммы 2.1, соотношений (3.2) и (3.3) следует, что $K_1(x, t) \in \Omega$.

Покажем, что $\lambda = 1$ является собственным значением кратности $n - 1$ фигурирующего в разложении 3.1 оператора K_1 (условимся в дальнейшем под собственным значением кратности нуль подразумевать регулярное значение оператора). Сначала покажем, что оператор K_1 не может иметь n линейно независимых собственных функций, отвечающих собственному значению $\lambda = 1$. Допустим, что это не так. Пусть тогда $u_j, j = \overline{1, n}$, – линейно независимые собственные функции оператора K_1 , отвечающие собственному значению $\lambda = 1$. Положим $v_j = W_{-,1}^{-1} u_j, j = \overline{1, n}, v_{n+1} = (I + \alpha_- U_{\psi}^-)(I - S_{\zeta_-}^-) \varphi$.

Очевидно, что $v_j, j = \overline{1, n}$, – собственные функции K , отвечающие $\lambda = 1$. Исходя из соотношений $(I - S_{\zeta_-}^-)^2 = I, (I - \Psi_-)(I - \Psi_+) = 1$ (см. [7]), $(I - \Psi_-)\varphi = 0$, легко показать, что v_{n+1} – тоже собственная функция оператора K , отвечающая $\lambda = 1$.

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j v_j = 0. \quad (3.4)$$

Тогда

$$W_{-,1}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^n \mu_j u_j \right\} + \mu_{n+1} (I + \alpha_- U_{\psi}^-)(I - S_{\zeta_-}^-) \varphi = 0.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором $W_{-,1}$ и учитывая, что справедливо $(I - \Psi_-)\varphi = 0$, получаем $\sum_{j=1}^n \mu_j u_j = 0$.

В силу линейной независимости $u_j, j = \overline{1, n}$, отсюда следует, что $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$, что вместе с (3.4) влечет равенство $\mu_{n+1} = 0$ и, одновременно, линейную независимость $v_j, j = \overline{1, n+1}$.

Полученное противоречие показывает, что оператор K_1 не может иметь больше чем $n - 1$ собственных функций, отвечающих $\lambda = 1$.

Покажем, что существует $n - 1$ линейно независимая собственная функция оператора K_1 , отвечающая $\lambda = 1$. При $n = 1$ это очевидно. Пусть $n \geq 2$, и пусть $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, v_{n+1}$ – полная система линейно независимых собственных функций оператора K , отвечающих $\lambda = 1$ (напомним, что $v_{n+1} = (I + \alpha_- U_{\psi}^-)(I - S_{\zeta_-}^-) \varphi$). Положим $\xi_j = W_{-,1} \chi_j, j = \overline{1, n-1}$. Тогда $\xi_j, j = \overline{1, n-1}$, – собственные функции оператора K_1 . Действительно, поскольку $(I - K)\chi_j = 0, j = \overline{1, n-1}$, то в силу (3.1)

$$W_{+,1}(I - K_1)\xi_j = 0, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Поскольку $W_{+,1}$ обратим слева, то отсюда следует, что $(I - K_1)\xi_j = 0, j = \overline{1, n-1}$. Таким образом, $\xi_j, j = \overline{1, n-1}$, – собственные функции оператора K_1 , отвечающие собственному значению $\lambda = 1$. Покажем, что $\xi_j, j = \overline{1, n-1}$, линейно независимы.

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \xi_j = 0.$$

Тогда

$$W_{-,1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \chi_j \right) = (I - \Psi_-) \left\{ (I - S_{\zeta_-}^-)(I - V_{\psi, \alpha_-}^-) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \chi_j \right) \right\} = 0. \quad (3.5)$$

Пусть

$$p = (I - S_{\zeta_-}^-)(I - V_{\psi, \alpha_-}^-) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \chi_j \right).$$

Очевидно, что $p \in L_2[0, 1]$.

В силу (3.5)

$$p(x) = \varphi(x) \frac{\int_0^x \psi(t) p(t) dt}{\int_0^x \varphi(t) \psi(t) dt}, \quad x \in (0, 1].$$

Отсюда

$$\frac{p(x) \psi(x) \int_0^x \varphi(t) \psi(t) dt - \varphi(x) \psi(x) \int_0^x p(t) \psi(t) dt}{\left(\int_0^x \varphi(t) \psi(t) dt \right)^2} = 0, \quad x \in (0, 1],$$

или

$$\frac{\int_0^x p(t) \psi(t) dt}{\int_0^x \varphi(t) \psi(t) dt} \equiv \nu = \text{const}, \quad x \in (0, 1].$$

Тогда

$$\int_0^x p(t) \psi(t) dt = \nu \int_0^x \varphi(t) \psi(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Продифференцировав обе части этого равенства, а затем разделив на $\psi(x)$, получим $p(x) = \nu \varphi(x)$ почти всюду на $[0, 1]$. Подействовав на обе части этого равенства оператором $(I + \alpha_- U_{\psi}^-)(I - S_{\zeta_-}^-)$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \chi_j = \nu v_{n+1}.$$

В силу линейной независимости системы $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, v_{n+1}$ отсюда следует $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = \nu = 0$, что доказывает линейную независимость системы ξ_j , $j = \overline{1, n-1}$.

Таким образом, мы показали, что $\lambda = 1$ является $n-1$ кратным собственным значением оператора K_1 .

Если $n = 1$, то оператор $I - K_1$ обратим и на этом специальная факторизация оператора $I - K$ завершается. В противном случае к оператору $I - K_1$ мы применим те же рассуждения, что и выше для оператора $I - K$. Вследствие чего будем иметь

$$I - K_1 = W_{+,2}(I - K_2)W_{-,2},$$

Следовательно, $\lambda_{n-1} = 0$. Аналогичным образом доказываются равенства $\lambda_{n-2} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$. Значит, действительно, $p_1, \dots, p_n$ линейно независимы. Покажем, что оператор K не может иметь больше чем n линейно независимых собственных функций, отвечающих собственному значению $\lambda = 1$. Предположим, что это не так. Тогда должна существовать ненулевая функция $p \in L_2$ такая, что

$$(I - K)p = 0 \quad (3.11)$$

И

$$p \neq \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k \quad \forall \lambda_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.12)$$

В силу (3.6) и (3.11) $W_+(I - K_n)W_-p = 0$. Так как W_+ обратим слева, а $I - K_n$ обратим, то отсюда следует, что $W_-p = 0$, т.е.

$$W_{-,n} \circ \cdots \circ W_{-,1} p = 0. \quad (3.13)$$

Заметим, что общее решение уравнения $W_{-,j}\chi_j = g_j$ дается формулой $\chi_j = \alpha_j\eta_j + W_{-,j}^{-1}g_j$, где α_j – произвольная постоянная. Из (3.13) последовательно находим

$$\begin{aligned} W_{-,n-1} \circ \cdots \circ W_{-,1} p &= \beta_n \eta_n, \\ W_{-,n-2} \circ \cdots \circ W_{-,1} p &= \beta_n W_{-,n-1}^{-1} \eta_n + \beta_{n-1} \eta_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ p &= \beta_n W_{-,1}^{-1} \circ \cdots \circ W_{-,n-1}^{-1} \eta_n + \cdots + \beta_1 \eta_1, \end{aligned}$$

где $\beta_1, \dots, \beta_n$ – некоторые постоянные. Из последнего равенства следует, что $p = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_n p_n$, что противоречит соотношению (3.12). Полученное противоречие показывает, что оператор K не может иметь больше чем n линейно независимых собственных функций, отвечающих $\lambda = 1$.

Полученный выше результат сформулируем в следующем виде.

ТЕОРЕМА (о специальной факторизации). Пусть K – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K(x, t)$. Тогда для того чтобы $\lambda = 1$ было n -кратным собственным значением оператора K , необходимо и достаточно, чтобы оператор $I - K$ допускал представление вида (3.6), (3.7), где $I - K_n$ обратим в L_2 , а интегральный оператор K_n задается ядром Гильберта–Шмидта $K_n(x, t)$.

Автор выражает благодарность Н. Б. Енгигаряну и Л. Г. Арабаджяну за обсуждение полученного результата и полезные советы.

Список литературы

- [1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, М., 1967; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, Transl. Math. Monogr., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.

- [2] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ*, **22** (1984), 175–244; англ. пер.: L. G. Arabadzhyan, N. B. Engibaryan, “Convolution equations and nonlinear functional equations”, *J. Soviet Math.*, **36** (1987), 745–791.
- [3] Л. М. Беркович, *Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1989.
- [4] З. Прессдорф, *Некоторые классы сингулярных уравнений*, Мир, М., 1979; пер. с нем.: S. Prössdorf, *Einige Klassen singulärer Gleichungen*, Birkhäuser, Stuttgart–Basel, 1974.
- [5] Н. Б. Енгибарян, “Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов”, *Докл. АН СССР*, **230**:5 (1976), 1021–1024; англ. пер.: N. B. Engibaryan, “Some factorization theorems for integral operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:5 (1976), 1418–1422.
- [6] Н. Б. Енгибарян, “Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 61–76; англ. пер.: N. B. Engibaryan, “Setting and solving several factorization problems for integral operators”, *Sb. Math.*, **191**:12 (2000), 1809–1825.
- [7] Г. А. Григорян, “Специальная факторизация необратимого оператора Фредгольма второго рода”, *Дифференц. уравнения*, **38**:12 (2002), 1690–1697; англ. пер.: G. A. Grigoryan, “Special factorization of a noninvertible Fredholm operator of the second kind”, *Differ. Equ.*, **38**:12 (2002), 1792–1800.

Г. А. Григорян (G. A. Grigoryan)
Институт математики НАН Армении
E-mail: mathphys2@instmath.sci.am

Поступила в редакцию
04.07.2005 и 02.08.2006