Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Артамкин, Дискретная теорема Торелли, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 8, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:28:16

УДК 512.772

И. В. Артамкин

Дискретная теорема Торелли

Для алгебраической кривой, имеющей только простейшие особенности и только рациональные неприводимые компоненты, обобщенный якобиан совпадает с многообразием модулей топологически тривиальных линейных расслоений, каноническая компактификация которого является торическим многообразием, построенным по выпуклому целочисленному многограннику. Вершинами этого многогранника являются простые циклы в пространстве одномерных рациональных гомологий двойственного к этой кривой графа. Доказывается, что для трехсвязных графов многогранник простых циклов однозначно определяет граф.

Библиография: 4 названия.

Пусть X – стабильная по Делиню–Мамфорду кривая с простейшими особенностями, все неприводимые компоненты которой рациональны, $\Gamma = \Gamma(X)$ – ее двойственный граф, множество вершин которого $V(\Gamma)$ соответствует неприводимым компонентам кривой X , а множество ребер $E(\Gamma)$ – двойным особым точкам кривой X . Стабильность в этом случае означает, что валентность $\nu(v)$ каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ не меньше трех. (Такие графы мы тоже будем для краткости называть *стабильными*.) При этом арифметический род кривой X совпадает с рангом $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$; мы будем называть это число *родом графа* Γ . Наоборот, каждому стабильному графу Γ рода g соответствует многообразие M_Γ модулей стабильных по Делиню–Мамфорду кривых арифметического рода g , двойственный граф которых совпадает с Γ , его размерность равна

$$\dim M_\Gamma = \sum_{v \in V(\Gamma)} (\nu(v) - 3) = 2|E(\Gamma)| - 3|V(\Gamma)|.$$

В частности, для трехвалентного графа M_Γ состоит из единственной точки, соответствующие кривые названы в книге А. Н. Тюринга [1] *II-кривыми*.

Для описываемых кривых обобщенный якобиан $J(X)$ совпадает с многообразием модулей топологически тривиальных расслоений на X , в [2] строится его каноническая компактификация $\overline{J(X)}$, являющаяся торическим многообразием. Эта компактификация следующим образом описывается в терминах двойственного графа $\Gamma = \Gamma(X)$. Рассмотрим решетку целочисленных гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \subset H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ и выпуклый многогранник $\Delta(\Gamma) \subset H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$, вершинами которого являются простые циклы графа Γ . (Цикл называется *простым*, если любое ребро входит в него с коэффициентом ± 1 или 0.) Тогда $\overline{J(X)}$ является торическим многообразием, построенным по выпуклому целочисленному многограннику $\Delta(\Gamma) \subset H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$.

Возникает естественный вопрос: выполняется ли в этом случае аналог теоремы Торелли, т.е. можно ли по торическому многообразию $\overline{J(X)}$ восстановить кривую X ? Поскольку торическое многообразие $\overline{J(X)}$ зависит только от двойственного графа $\Gamma = \Gamma(X)$, на положительный ответ можно надеяться только для $\mathbb{A}$ -кривых; в общем же случае мы можем только спросить, различает ли $\overline{J(X)}$ компоненты M_Γ , т.е. можем ли мы по целочисленному многограннику $\Delta \subset \mathbb{Q}^g$ восстановить стабильный граф Γ рода g , для которого $\Delta = \Delta(\Gamma)$?

Ответ на этот вопрос зависит от числа связности графа Γ . Напомним (см., например, [3]), что *числом связности* $\kappa(\Gamma)$ графа Γ называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу, а *числом реберной связности* $\lambda(\Gamma)$ графа Γ называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу, при этом всегда $\kappa(\Gamma) \leq \lambda(\Gamma)$. Отметим, что число реберной связности $\lambda(\Gamma)$ совпадает для рассматриваемых здесь графов с введенной в [4] в более общей ситуации (а именно для модулярных графов с полуребрами) толщиной¹ $\text{th}(\Gamma)$ графа Γ . Для трехвалентных графов все эти числа совпадают. Граф Γ называется n -связным, если $\kappa(\Gamma) \geq n$, и *реберно n -связным*, если $\lambda(\Gamma) \geq n$.

Оказывается, для 1-связных и 2-связных графов “дискретная теорема Торелли” неверна; ниже мы приводим универсальную схему построения контрпримеров. В этой работе доказывается, что других препятствий к выполнению этой теоремы нет.

ТЕОРЕМА 1. *Дискретная теорема Торелли верна для любого графа с числом связности не менее трех. Другими словами, 3-связный граф Γ однозначно определяется своим многогранником простых циклов $\Delta(\Gamma)$.*

Пусть Γ – некоторый (не обязательно связный) граф, $V(\Gamma)$ – множество его вершин, $E(\Gamma)$ – множество его ребер. Для всех последующих определений необходимо произвольным образом выбрать ориентацию на множестве ребер $E(\Gamma)$ и рассматривать линейные комбинации ориентированных ребер; при этом изменение ориентации ребра e на противоположную соответствует умножению e на -1 . Стандартно проверяется, что все наши определения и результаты не зависят от начального выбора ориентации, поэтому мы в этой работе не будем использовать отдельных обозначений для ориентированных и неориентированных ребер.

Множество линейных комбинаций ориентированных ребер вида

$$\sum_{e \in E(\Gamma)} \alpha_e \cdot e, \quad \alpha_e \in \mathbb{Q},$$

мы будем называть *пространством 1-цепей* графа Γ и обозначать $C_1(\Gamma, \mathbb{Q})$; в нем имеется решетка целочисленных цепей

$$C_1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \left\{ \sum_{e \in E(\Gamma)} \alpha_e \cdot e, \alpha_e \in \mathbb{Z} \right\}.$$

¹В теории графов обычно в этот термин вкладывается другой смысл.

Аналогично определяется пространство 0-цепей

$$C_0(\Gamma, \mathbb{Q}) = \left\{ \sum_{v \in V(\Gamma)} \beta_v \cdot v, \beta_v \in \mathbb{Q} \right\}.$$

На $C_0(\Gamma)$ и $C_1(\Gamma)$ имеются стандартные скалярные произведения

$$\langle v, v' \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } v = v', \\ 0, & \text{если } v \neq v', \end{cases} \quad \langle e, e' \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } e = e', \\ 0, & \text{если } e \neq e', \end{cases} \quad (1)$$

позволяющие отождествить пространства цепей и коцепей. Граничный и ко-граничный гомоморфизмы

$$\partial: C_1(\Gamma) \rightarrow C_0(\Gamma), \quad \delta: C_0(\Gamma) \rightarrow C_1(\Gamma) \quad (2)$$

определяются на базисных элементах формулами

$$\partial(e) = v - v', \quad (3)$$

где v и v' – соответственно начало и конец ориентированного ребра e , а

$$\delta(v) = \sum_{\substack{\text{по всем ориентированным} \\ \text{ребрам } e, \\ \text{исходящим из вершины } v}} e. \quad (4)$$

Линейные отображения ∂ и δ сопряжены друг другу относительно введенных скалярных произведений; их матрицы (получающиеся друг из друга транспонированием) представляют собой матрицу инцидентий графа Γ . Следовательно, подпространства $\text{Ker } \partial$ и $\text{Im } \delta$ задают ортогональное разложение пространства $C_1(\Gamma, \mathbb{Q})$; первое из них представляет собой пространство гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Q}) = \text{Ker } \partial$, второе будем называть *пространством разрезов* $S(\Gamma, \mathbb{Q}) = \text{Im } \delta$. Пространства гомологий и разрезов содержат решетки целочисленных циклов и разрезов $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) = H_1(\Gamma, \mathbb{Q}) \cap C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ и $S(\Gamma, \mathbb{Z}) = S(\Gamma, \mathbb{Q}) \cap C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Цикл или разрез $\sum_{e \in E(\Gamma)} \alpha_e \cdot e$ будем называть *простым*, если все α_e равны 0 или ± 1 . Простой цикл (соответственно разрез) будем называть *неприводимым*, если его нельзя представить в виде суммы непересекающихся простых циклов (соответственно разрезов). Выпуклую оболочку множества простых циклов (или разрезов) в $H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ (соответственно в $S(\Gamma, \mathbb{Q})$) будем называть *многогранником простых циклов* $\Delta(\Gamma)$ (соответственно *многогранником простых разрезов* $\Sigma(\Gamma)$); ниже мы проверим, что все простые циклы (разрезы) лежат на границе многогранника $\Delta(\Gamma)$ (соответственно $\Sigma(\Gamma)$). Нетрудно выписать неравенства, задающие многогранники $\Delta(\Gamma)$ и $\Sigma(\Gamma)$. Для этого для каждого ориентированного ребра e рассмотрим его ортогональное разложение $e = \xi_e + \eta_e$, где $\xi_e \in H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ и $\eta_e \in S(\Gamma, \mathbb{Q})$.

ЛЕММА 1. 1) Для любого цикла $c = \sum \beta_e \cdot e \in H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ $\beta_e = \langle e, c \rangle = \langle \xi_e, c \rangle$; для любого разреза $s = \sum \beta_e \cdot e \in S(\Gamma, \mathbb{Q})$ $\beta_e = \langle e, s \rangle = \langle \eta_e, s \rangle$.

2) Простая цепь $\sum_{i \in I} e_i \in C_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ является простым циклом тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in I} \eta_{e_i} = 0$$

и при этом

$$\sum_{i \in I} e_i = \sum_{i \in I} \xi_{e_i};$$

простая цепь $\sum_{i \in I} e_i \in C_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ является простым разрезом тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in I} \xi_{e_i} = 0$$

и при этом

$$\sum_{i \in I} e_i = \sum_{i \in I} \eta_{e_i}.$$

3) Простые циклы порождают $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$; циклы ξ_e порождают $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ (как двойственную решетку к $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \subset H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$); простые разрезы порождают решетку $S(\Gamma, \mathbb{Z})$; разрезы η_e порождают двойственную решетку $S(\Gamma, \mathbb{Z})^* \subset S(\Gamma, \mathbb{Q})$.

4) Многогранник простых циклов задается неравенствами

$$-1 \leq \langle \xi_e, c \rangle \leq 1; \quad (5)$$

многогранник простых разрезов $\Sigma(\Gamma) \subset S(\Gamma, \mathbb{Q})$ задается неравенствами

$$-1 \leq \langle \eta_e, s \rangle \leq 1. \quad (6)$$

5) Внутри многогранников $\Delta(\Gamma)$ и $\Sigma(\Gamma)$ не содержится целых точек, за исключением нуля.

Первое утверждение леммы следует из ортогональности $H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ и $S(\Gamma, \mathbb{Q})$, четвертое – из первого и определения простых циклов (разрезов), второе – из равенства $\sum_{i \in I} e_i = \sum_{i \in I} \xi_{e_i} + \sum_{i \in I} \eta_{e_i}$, в котором первое слагаемое является циклом, а второе – разрезом. Пятое утверждение следует из третьего и четвертого. Для доказательства третьего утверждения используется стандартный базис пространств гомологий и разрезов, связанный с выбором некоторого остовного леса T графа Γ . Это означает, что мы выбираем в каждой связной компоненте Γ_j графа Γ остовное поддерево T_j (т.е. такое дерево T_j , что $V(T_j) = V(\Gamma_j)$ и $E(T_j) \subset E(\Gamma_j)$) и полагаем $T = \bigcup T_j$. Для каждого $e \notin E(T)$ граф $e \cup T$ содержит единственный (с точностью до знака) простой цикл, который мы обозначим $c(T, e)$; простые циклы $\{c(T, e), e \notin E(T)\}$ образуют базис решетки гомологий $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, тогда циклы $\{\xi_e, e \notin E(T)\}$, очевидно, образуют двойственный базис решетки $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Аналогично, каждое ребро $e \in E(T_j)$ разбивает множество вершин дерева T_j (а значит, и связной компоненты графа Γ_j) на два подмножества $V(\Gamma_j) = V'_e \cup V''_e$, так что простые разрезы $\{\delta(\sum_{v \in V'_e} v), e \in E(T)\}$ образуют базис решетки разрезов $S(\Gamma, \mathbb{Z})$; тогда

разрезы $\{\eta_e, e \in E(\Gamma)\}$, очевидно, образуют двойственный базис двойственной решетки $S(\Gamma, \mathbb{Z})^* \subset S(\Gamma, \mathbb{Q})$.

Таким образом, циклы и разрезы графа доставляют следующие однотипные наборы данных $(L, \Delta, \{\xi_i\})$:

- а) решетка $L \subset L \otimes \mathbb{Q} = W$;
- б) центрально симметричный многогранник $\Delta \subset W$, вершины которого расположены в точках решетки L и порождают ее;
- с) набор $\{\xi_i \in L^*, i = 1, \dots, N\}$ элементов двойственной решетки $L^* \subset W^*$, порождающих L^* , такой, что многогранник Δ является решением системы неравенств

$$-1 \leq \xi_i(w) \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad w \in W. \quad (7)$$

Будем называть такой набор данных $(L, \Delta, \{\xi_i\})$ *оснащенным $(-1/1)$ -многогранником*. Отметим, что из условия б) следует, что многогранник Δ имеет непустую внутренность и что внутри Δ не содержится точек решетки, кроме нулевой. Последнее следует из того, что в такой точке все ξ_i должны были бы обратиться в нуль, а это противоречит тому, что все ξ_i порождают L^* .

Отметим, что определение не исключает возможности того, что решетка является нулевой, а система неравенств – избыточной. Например, допустимо, что некоторые ξ_i равны нулю. Пару (L, Δ) , удовлетворяющую условиям а)–с) (т.е. полученную “забыванием” оснащения ξ_i), мы будем называть просто $(-1/1)$ -многогранником. Если же формы оснащения ξ_i являются в точности уравнениями граней многогранника Δ (по одной на каждую пару параллельных граней), мы будем называть такое оснащение *естественным*.

Таким образом, каждому графу Γ сопоставляются два оснащенных $(-1/1)$ -многогранника: многогранник циклов

$$\mathcal{C}(\Gamma) = (H_1(\Gamma, \mathbb{Z}), \Delta(\Gamma), \{\xi_e, e \in E(\Gamma)\}) \quad (8)$$

и многогранник разрезов

$$\mathcal{S}(\Gamma) = (S(\Gamma, \mathbb{Z}), \Sigma(\Gamma), \{\eta_e, e \in E(\Gamma)\}). \quad (9)$$

Другой пример – это одномерный $(-1/1)$ -многогранник с естественным оснащением

$$\mathcal{J} = (\mathbb{Z}, [-1, 1], \{\xi\}), \quad (10)$$

где ξ – образующая двойственной решетки $\mathbb{Z}^*$.

Прямым произведением оснащенных $(-1/1)$ -многогранников

$$\mathcal{D}' = (L', \Delta', \{\xi'_i\}), \quad \mathcal{D}'' = (L'', \Delta'', \{\xi''_j\})$$

будем называть оснащенный $(-1/1)$ -многогранник

$$\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'' = (L' \times L'', \Delta' \times \Delta'', \{\xi'_i\} \cup \{\xi''_j\}).$$

Несвязному объединению графов как раз соответствует прямое произведение оснащенных $(-1/1)$ -многогранников, однако прямое произведение возникает не только в этом случае.

ЛЕММА 2. 1) Если граф Γ представляет собой несвязное объединение графов Γ' и Γ'' , то $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma') \times \mathcal{C}(\Gamma'')$ и $\mathcal{S}(\Gamma) = \mathcal{S}(\Gamma') \times \mathcal{S}(\Gamma'')$.

2) Пусть граф Γ 1-связен, причем удаление вершины $v_0 \in V(\Gamma)$ разбивает его на две части, которые мы обозначим Γ' и Γ'' (каждая вместе с вершиной v_0). Тогда $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma') \times \mathcal{C}(\Gamma'')$ и $\mathcal{S}(\Gamma) = \mathcal{S}(\Gamma') \times \mathcal{S}(\Gamma'')$.

Оказывается, $(-1/1)$ -многогранник простых циклов представляется в виде прямого произведения только в описанных в лемме 2 случаях.

ЛЕММА 3. Многогранник простых циклов $\mathcal{C}(\Gamma)$ 2-связного графа Γ не представляется в виде прямого произведения оснащенных $(-1/1)$ -многогранников.

Предположим противное. Тогда согласно определению прямого произведения $H_1(\Gamma) = L' \times L''$, где L' и L'' – подрешетки в $H_1(\Gamma)$ и $\Delta(\Gamma) = \Delta' \times \Delta''$, причем вершины многогранников Δ' и Δ'' , порождающие решетки L' и L'' , являются вершинами многогранника $\Delta(\Gamma)$, т.е. некоторыми простыми циклами. Это означает, что если имеются простые циклы $c' = \sum e'_i \in \Delta'$ и $c'' = \sum e''_i \in \Delta''$, то $c' + c''$ и $c' - c''$ также являются простыми циклами, поэтому множества ребер $\{e'_i\}$ и $\{e''_i\}$ не пересекаются. Следовательно, каждое ребро может входить с ненулевым коэффициентом в циклы не более чем одной из решеток L' и L'' , так что имеются два непересекающиеся множества ребер $E' \subset E(\Gamma)$ и $E'' \subset E(\Gamma)$ таких, что $L' \subset \{\sum \alpha_{e'} e', e' \in E'\}$ и $L'' \subset \{\sum \alpha_{e''} e'', e'' \in E''\}$. Выберем какое-нибудь ребро e'_0 , входящее в разложение какого-нибудь простого цикла $c' \in \Delta'$, и ребро e''_0 , входящее в разложение какого-нибудь простого цикла $c'' \in \Delta''$. Граф Γ 2-связен, поэтому по теореме Менгера ребра e'_0 и e''_0 можно включить в какой-нибудь неприводимый простой цикл s . Поскольку вершины многогранников Δ' и Δ'' порождают решетки L' и L'' и, следовательно, $H_1(\Gamma)$, то $s = c' + c''$, где $c' \in L'$ и $c'' \in L''$. Но, как мы уже видели, циклы $c' = \sum e'_i$ и $c'' = \sum e''_i$ не могут иметь общих слагаемых, поэтому цикл $s = c' + c''$ будет иметь слагаемыми только ребра неприводимого простого цикла s , причем e'_0 будет входить в этот цикл с тем же коэффициентом, что и в c' , а e''_0 – с противоположным, что противоречит простоте и неприводимости цикла s . Следовательно, граф Γ 1-связен.

Нетрудно описать оснащенные $(-1/1)$ -многогранники циклов и разрезов дерева.

ЛЕММА 4. Связный граф Γ является деревом с t ребрами тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}(\Gamma) = \mathcal{S}^t$ и $\mathcal{C}(\Gamma) = (0, 0, \{0, 0, \dots, 0\})$.

Отметим, что между оснащенными $(-1/1)$ -многогранниками циклов и разрезов имеется своего рода двойственность, являющаяся в простейшем случае планарных графов отражением обычной двойственности графов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Γ – связный планарный граф, $\Gamma^\vee$ – его двойственный граф. Тогда $\mathcal{C}(\Gamma^\vee) = \mathcal{S}(\Gamma)$ и $\mathcal{S}(\Gamma^\vee) = \mathcal{C}(\Gamma)$.

Попробуем построить аналогичную двойственность и для произвольного оснащенного $(-1/1)$ -многогранника $\mathcal{D} = (L, \Delta, \{\xi_i, i = 1, \dots, N\})$. Для этого заметим, что линейные формы ξ_i задают вложение

$$(\xi_1, \dots, \xi_N): W \hookrightarrow \mathbb{Q}^N, \quad (11)$$

а в пространстве $\mathbb{Q}^N$ имеются стандартный базис $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, N$, и стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, позволяющее отождествить L^* с подрешеткой в W , так что $\xi_i = \pi(e_i)$, где π – оператор ортогонального проектирования $\mathbb{Q}^N$ на W . Далее, мы можем определить ортогональное дополнение $W^\perp$, решетку $L^\perp = W^\perp \cap \mathbb{Z}^N$, элементы $\xi_i^\perp = \pi^\perp(e_i) \in (L^\perp)^* \subset W^\perp$ и многогранник $\Delta^\perp \subset W^\perp$, задаваемый неравенствами

$$-1 \leq \langle \xi_i^\perp, u \rangle \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad u \in W^\perp \quad (12)$$

($\pi^\perp$ – оператор ортогонального проектирования на $W^\perp$). Многогранник $\Delta^\perp$ по построению удовлетворяет свойствам а) и с) определения оснащенного $(-1/1)$ -многогранника, но не обязательно имеет целочисленные вершины. Если же все-таки многогранник $\Delta^\perp$ удовлетворяет свойству b), мы будем называть оснащенный $(-1/1)$ -многогранник $\mathcal{D}^\perp = (L^\perp, \Delta^\perp, \{\xi_i^\perp, i = 1, \dots, N\})$ зеркально-двойственным к многограннику $\mathcal{D}$.

ЛЕММА 5. 1) Если оснащенный $(-1/1)$ -многогранник $\mathcal{D}$ обладает зеркально-двойственным, то сопоставление $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}^\perp$ инволютивно.

2) Оснащенные $(-1/1)$ -многогранники простых циклов и простых разрезов $\mathcal{C}(\Gamma)$ и $\mathcal{S}(\Gamma)$ любого графа Γ зеркально-двойственны друг другу: $\mathcal{C}(\Gamma)^\perp = \mathcal{S}(\Gamma)$ и $\mathcal{S}(\Gamma)^\perp = \mathcal{C}(\Gamma)$.

3) Пусть даны оснащенные $(-1/1)$ -многогранники

$$\mathcal{D} = (L, \Delta, \{\xi_i, i = 1, \dots, N\}), \quad \mathcal{D}^\perp = (L^\perp, \Delta^\perp, \{\xi_i^\perp, i = 1, \dots, N\}).$$

Тогда $(\mathcal{D} \times \mathcal{S})^\perp = (L^\perp, \Delta^\perp, \{\xi_i^\perp, i = 1, \dots, N\} \cup \{0\})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Оснащенный $(-1/1)$ -многогранник $\mathcal{D}$ не имеет нулевых форм ξ_i в оснащении тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}^\perp$ не содержит одномерных прямых сомножителей (и наоборот).

Нетрудно понять, когда такая ситуация возникает с оснащенными $(-1/1)$ -многогранниками циклов и разрезов.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) Петли графа Γ находятся во взаимно однозначном соответствии с одномерными прямыми сомножителями оснащенного $(-1/1)$ -многогранника простых циклов $\mathcal{C}(\Gamma)$ и, соответственно, с нулевыми формами в оснащении $(-1/1)$ -многогранника простых разрезов $\mathcal{S}(\Gamma)$.

2) Мосты графа Γ находятся во взаимно однозначном соответствии с одномерными прямыми сомножителями оснащенного $(-1/1)$ -многогранника простых разрезов $\mathcal{S}(\Gamma)$ и, соответственно, с нулевыми формами в оснащении $(-1/1)$ -многогранника простых циклов $\mathcal{C}(\Gamma)$.

(Мостом называется ребро, удаление которого делает граф несвязным, т.е. ребро, являющееся разрезом.) Теперь мы можем также доказать аналог леммы 3 для многогранника разрезов.

ЛЕММА 6. Многогранник простых разрезов $\mathcal{S}(\Gamma)$ 2-связного графа Γ не представляется в виде прямого произведения оснащенных $(-1/1)$ -многогранников.

Действительно, если бы оснащенный $(-1/1)$ -многогранник простых разрезов $\mathcal{S}(\Gamma)$ такого графа представлялся бы в виде прямого произведения, то зеркально-двойственный к нему многогранник простых циклов также представлялся бы в виде прямого произведения, что противоречит лемме 3.

Нетрудно проследить, что происходит с многогранниками простых циклов или разрезов при удалении или стягивании некоторых ребер графа.

ЛЕММА 7. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – некоторый набор ребер графа Γ , $\mathbb{Q}^n \hookrightarrow \mathbb{Q}^N$ – соответствующее вложение, $\pi: \mathbb{Q}^N \rightarrow \mathbb{Q}^n$ – ортогональное проектирование.

1) Пусть $\tilde{\Gamma}$ – граф, полученный из Γ удалением всех ребер, кроме $e_1, \dots, e_n$, $\tilde{\pi}: \mathbb{Q}^n \rightarrow H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q}^n$ – ортогональное проектирование. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\tilde{\Gamma}) &= (H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q}^n, \Delta(\Gamma) \cap \mathbb{Q}^n, \{\tilde{\pi}(e_1), \dots, \tilde{\pi}(e_n)\}), \\ \mathcal{S}(\tilde{\Gamma}) &= (\pi(S(\Gamma, \mathbb{Z})), \pi(\Sigma(\Gamma)), \{e_1 - \tilde{\pi}(e_1), \dots, e_n - \tilde{\pi}(e_n)\}).\end{aligned}$$

2) Пусть $\hat{\Gamma}$ – граф, полученный из Γ стягиванием всех ребер, кроме $e_1, \dots, e_n$, $\hat{\pi}: \mathbb{Q}^n \rightarrow S(\Gamma, \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}^n$ – ортогональное проектирование. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\hat{\Gamma}) &= (S(\Gamma, \mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q}^n, \Sigma(\Gamma) \cap \mathbb{Q}^n, \{\hat{\pi}(e_1), \dots, \hat{\pi}(e_n)\}), \\ \mathcal{C}(\hat{\Gamma}) &= (\pi(H_1(\Gamma, \mathbb{Z})), \pi(\Delta(\Gamma)), \{e_1 - \hat{\pi}(e_1), \dots, e_n - \hat{\pi}(e_n)\}).\end{aligned}$$

Отметим еще, что если оснащение некоторого $(-1/1)$ -многогранника является естественным, то из этого не следует, что то же будет верно и относительно двойственного оснащенного $(-1/1)$ -многогранника. Другими словами, одна из систем неравенств $\{-1 \leq \xi_i \leq 1\}$, $\{-1 \leq \xi_i^\perp \leq 1\}$ может оказаться избыточной даже в случае, когда другая представляет собой точный список неравенств, задающих грани соответствующего многогранника. Простейший пример такого рода составляет тэта-граф, состоящий из двух вершин, соединенных $n+1$ ребром $e_0, e_1, \dots, e_n$. В этом случае $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ является решеткой типа A_n , высекаемой из $\mathbb{Z}^{n+1}$ плоскостью $e_0 + e_1 + \dots + e_n = 0$, а $\Delta(\Gamma)$ представляет собой сечение этой плоскостью куба $-1 \leq e_i \leq 1$. Очевидно, что оснащение $\{\xi_{e_0}, \xi_{e_1}, \dots, \xi_{e_n}\}$ является естественным. При этом, однако, $S(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$: имеется единственный простой разрез $s = e_0 + e_1 + \dots + e_n$, так что

$$\eta_{e_0} = \eta_{e_1} = \dots = \eta_{e_n} = \frac{1}{n+1} s.$$

Следовательно, $\mathcal{S}(\Gamma) = (\mathbb{Z}, [-1, 1], \{\eta_{e_0}, \eta_{e_1}, \dots, \eta_{e_n}\})$ – в оснащении одна и та же линейная форма (в данном случае единственная) повторяется $n + 1$ раз. Нетрудно заметить, что этим и исчерпывается вся возможная избыточность списка форм оснащения многогранника разрезов.

ЛЕММА 8. 1) Ребро e является петлей тогда и только тогда, когда $\eta_e = 0$.

2) Если e_1 и e_2 – кратные ребра (т.е. начала и концы ребер e_1 и e_2 совпадают), то $\eta_{e_1} = \eta_{e_2}$.

3) Если ребро e не является петлей, то η_e является уравнением одной из граней многогранника простых разрезов $\Sigma(\Gamma)$.

Первое утверждение уже упоминалось, второе следует из того, что кратные ребра входят в любой разрез с одинаковыми коэффициентами. Для доказательства третьего утверждения выберем какое-нибудь ребро e_0 , соединяющее вершины v_1 и v_2 , и обозначим остальные ребра, соединяющие v_1 и v_2 (если таковые имеются), через $e_1, \dots, e_n$. Тогда согласно предыдущему утверждению $\eta_{e_0} = \eta_{e_1} = \dots = \eta_{e_n}$. Для того чтобы доказать, что η_{e_0} является уравнением какой-нибудь грани, достаточно указать разрез s , в который ребра $e_0, e_1, \dots, e_n$ входят с коэффициентом 2, а все остальные ребра – с коэффициентами 0 или ± 1 . Тогда такой разрез удовлетворяет неравенствам (6) для всех ребер e , кроме $e_0, e_1, \dots, e_n$, что показывает, что неравенство для e_0 нельзя отбросить. Искомый разрез получается как $\delta(\sum \alpha_v \cdot v)$, где $\alpha_{v_2} = 2$, $\alpha_{v'} = 1$ для всех вершин $v' \neq v_1$, смежных с вершиной v_2 , и $\alpha_{v''} = 0$ для всех остальных вершин v'' (в том числе и для v_1).

СЛЕДСТВИЕ 3. Оснащение $(-1/1)$ -многогранника простых разрезов $\mathcal{S}(\Gamma)$ графа Γ является естественным тогда и только тогда, когда граф Γ не имеет петлей и кратных ребер.

В случае многогранника простых циклов ситуация полностью аналогичная.

ЛЕММА 9. 1) Ребро e является мостом тогда и только тогда, когда $\xi_e = 0$.

2) Если ребра e_1 и e_2 (не являющиеся мостами) входят в 2-разрез (т.е. при удалении e_1 и e_2 граф теряет связность), то $\xi_{e_1} = \xi_{e_2}$.

3) Если ребро e не является мостом, то ξ_e является уравнением одной из граней многогранника простых разрезов $\Delta(\Gamma)$.

Нулевые формы оснащения, как мы уже видели, дают мосты (т.е. 1-разрезы), а одинаковые уравнения дают ребра, входящие в 2-разрез, т.е. такие ребра e и e' (не являющиеся мостами), после удаления которых граф теряет связность. Очевидно, что такие ребра (при подходяще выбранной ориентации) входят в любой цикл с одинаковыми коэффициентами и, следовательно, определяют одинаковые формы оснащения $\xi_e = \xi_{e'}$. Остается заметить, что ребра, входящие в 2-разрезы, разбиваются на классы эквивалентности по отношению “вхождения в один 2-разрез”; все ребра $e_0, e_1, \dots, e_n$, составляющие один класс эквивалентности, задают одну и ту же форму оснащения $\xi_{e_0} = \xi_{e_1} = \dots = \xi_{e_n}$. Для того чтобы доказать, что ξ_{e_0} является уравнением какой-нибудь грани,

достаточно указать цикл c , в который ребра $e_0, e_1, \dots, e_n$ входят с коэффициентом 2, а все остальные ребра – с коэффициентами 0 или ± 1 . Тогда такой цикл удовлетворяет неравенствам (5) для всех ребер e , кроме $e_0, e_1, \dots, e_n$, что показывает, что неравенство для e_0 нельзя отбросить. Рассмотрим граф $\tilde{\Gamma}$, полученный из Γ стягиванием ребер $e_1, \dots, e_n$. В графе $\tilde{\Gamma}$ ребро e_0 не входит ни в один 2-разрез. Предположим сначала, что в графе $\tilde{\Gamma}$ ребро e_0 не является петлей и, следовательно, соединяет различные вершины v_1 и v_2 . Тогда согласно теореме Менгера в графе $\tilde{\Gamma}$ найдутся два реберно различные пути γ_1 и γ_2 , соединяющие v_1 и v_2 и не содержащие e_0 . Тогда (при подходящем выборе ориентации) искомым циклом в графе Γ будет $c = 2(e_0 + e_1 + \dots + e_n) - \gamma_1 - \gamma_2$. Если же в графе $\tilde{\Gamma}$ ребро e_0 окажется петлей, искомым циклом в графе Γ будет $c = 2(e_0 + e_1 + \dots + e_n)$.

СЛЕДСТВИЕ 4 [2]. *Оснащение $(-1/1)$ -многогранника простых циклов $\mathcal{C}(\Gamma)$ графа Γ является естественным тогда и только тогда, когда граф Γ реберно 3-связен.*

Таким образом, следствие 4 дает естественный подход к доказательству теоремы Торелли: в случае реберно 3-связного графа знание многогранника простых циклов $\Delta(\Gamma)$ позволяет восстановить его оснащение и получить оснащенный $(-1/1)$ -многогранник $\mathcal{C}(\Gamma)$, а следовательно, и оснащенный многогранник простых разрезов $\mathcal{S}(\Gamma)$ (по лемме 5). Для восстановления графа нам достаточно восстановить список его вершин. Каждой вершине v графа соответствует вершина $\delta(v)$ многогранника простых разрезов, поэтому для завершения доказательства теоремы Торелли нам остается охарактеризовать простые разрезы $\delta(v)$ в терминах многогранников $\mathcal{C}(\Gamma)$ и $\mathcal{S}(\Gamma)$.

ЛЕММА 10. *Пусть граф Γ 3-связен, $s = e_1 + \dots + e_n$ – неприводимый простой разрез, $\tilde{\Gamma}$ – граф, полученный из Γ удалением ребер $e_1, \dots, e_n$. Разрез $s = \sum e_i$ имеет вид $\delta(v)$ для некоторой вершины $v \in V(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда ни один из оснащенных $(-1/1)$ -многогранников $\mathcal{C}(\tilde{\Gamma})$ и $\mathcal{S}(\tilde{\Gamma})$ не разлагается в прямое произведение.*

Необходимость следует из того, что при удалении вершины из 3-связного графа получится по крайней мере 2-связный граф, многогранники простых циклов и разрезов которого не могут быть прямым произведением согласно леммам 3 и 6. Для доказательства достаточности заметим, что при удалении из графа Γ всех ребер некоторого неприводимого разреза получается граф $\tilde{\Gamma}$, состоящий ровно из двух связных компонент $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$. Многогранник разрезов графа без петель нетривиален, если граф содержит хотя бы одно ребро, поэтому если $\mathcal{S}(\tilde{\Gamma}) = \mathcal{S}(\tilde{\Gamma}_1) \times \mathcal{S}(\tilde{\Gamma}_2)$ не представляется в виде прямого произведения, один из связных графов $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ должен не иметь ребер, т.е. состоять из одной вершины v . А это как раз и означает, что удаленный разрез представлял собой $\delta(v)$, что и требовалось доказать.

Теперь мы можем дать конструктивное доказательство теоремы Торелли: пусть известен многогранник $\Delta(\Gamma)$ простых циклов 3-связного графа Γ . Тогда согласно следствию 4 его оснащением будет в точности список уравнений его граней, что дает список ребер графа Γ . Согласно лемме 5 знание оснащенного $(-1/1)$ -многогранника $\mathcal{C}(\Gamma)$ позволяет восстановить оснащенный $(-1/1)$ -многогранник простых разрезов $\mathcal{S}(\Gamma)$. Далее, леммы 10 и 7 позволяют перечислить вершины многогранника простых разрезов, соответствующие вершинам графа Γ , что завершает восстановление графа Γ .

Поясним теперь, почему теорема Торелли не может выполняться для стабильных 1-связных или 2-связных графов. Для случая 1-связных графов ситуация полностью объясняется второй частью леммы 2: имея два различных графа Γ' и Γ'' (мы сохраняем обозначения леммы 2), мы можем всеми возможными способами выбирать в каждом из них по вершине v'_0 и v''_0 . Склеивая их затем в одну вершину v_0 , мы будем получать различные 1-связные стабильные графы Γ , имеющие согласно лемме 2 одинаковые оснащенные $(-1/1)$ -многогранники $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}(\Gamma') \times \mathcal{C}(\Gamma'')$ и $\mathcal{S}(\Gamma) = \mathcal{S}(\Gamma') \times \mathcal{S}(\Gamma'')$. Если нас интересует только $(-1/1)$ -многогранник $\Delta(\Gamma)$ (без оснащения, как собственно и требуется в теореме Торелли), то мы можем вместо склейки вершин v'_0 и v''_0 соединить их новым ребром, $\Delta(\Gamma)$ при этом будет таким же, как в предыдущей конструкции (согласно следствию 2). С таким же успехом мы можем в качестве v'_0 и v''_0 устроить новые вершины в середине любого ребра соответствующего графа. Хотя при этом графы Γ' и Γ'' потеряют стабильность (в связи с появлением двухвалентной вершины), после склейки (или соединения ребром) снова получится стабильный граф с тем же многогранником $\Delta(\Gamma)$. Отметим, что в последнем случае из трехвалентных графов Γ' и Γ'' мы снова будем получать трехвалентные графы Γ .

Аналогичные соображения позволяют построить контрпримеры к дискретной теореме Торелли и в случае 2-связных графов. Для этого, выбрав два стабильных 2-связных графа $\tilde{\Gamma}'$ и $\tilde{\Gamma}''$, устроим на ребрах каждого из них по две новые двухвалентные вершины: v'_1 и v'_2 на ребрах $\tilde{\Gamma}'$ и v''_1 и v''_2 на ребрах $\tilde{\Gamma}''$. Новый 2-связный граф Γ_1 получится из графов $\tilde{\Gamma}'$ и $\tilde{\Gamma}''$, если соединить новым ребром e_{11} вершины v'_1 и v''_1 , а новым ребром e_{22} – вершины v'_2 и v''_2 . Аналогично из тех же графов $\tilde{\Gamma}'$ и $\tilde{\Gamma}''$ можно построить другой 2-связный граф Γ_2 , соединив теперь новым ребром e_{12} вершины v'_1 и v''_2 , а новым ребром e_{21} – вершины v'_2 и v''_1 . В общем случае (точнее, если ни у одного из графов $\tilde{\Gamma}'$ и $\tilde{\Gamma}''$ не существует автоморфизма, переставляющего две новые вершины) графы Γ_1 и Γ_2 не изоморфны.

С другой стороны, нетрудно построить изоморфизм

$$\varphi: H_1(\Gamma_1, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z}), \quad (13)$$

переводящий простые циклы в простые и, следовательно, переводящий друг в друга многогранники простых циклов. Для однозначной записи циклов из $H_1(\Gamma_1, \mathbb{Z})$ и $H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z})$ нам необходимо зафиксировать некоторую ориентацию ребер этих графов. Для этого зафиксируем как-нибудь ориентацию ребер графов

Γ' и Γ'' , а ориентацию ребер графов Γ_1 и Γ_2 выберем согласованно с естественными вложениями $i'_k: \Gamma' \hookrightarrow \Gamma_k$ и $i''_k: \Gamma'' \hookrightarrow \Gamma_k$, $k = 1, 2$. На новых ребрах e_{km} , $k, m = 1, 2$, зададим ориентацию от графа Γ' к графу Γ'' . Теперь любой цикл $c_1 \in H_1(\Gamma_1, \mathbb{Z})$ можно однозначно записать в виде

$$c_1 = \sum_{e \in E(\Gamma')} \alpha_e i'_1(e) + \sum_{e \in E(\Gamma'')} \beta_e i''_1(e) + \gamma_1 e_{11} + \gamma_2 e_{22},$$

а любой цикл $c_2 \in H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z})$ – в виде

$$c_2 = \sum_{e \in E(\Gamma')} \xi_e i'_2(e) + \sum_{e \in E(\Gamma'')} \eta_e i''_2(e) + \zeta_1 e_{12} + \zeta_2 e_{21}.$$

Тогда изоморфизм φ (13) задается явной формулой

$$\varphi(c_1) = \sum_{e \in E(\Gamma')} \alpha_e i'_2(e) - \sum_{e \in E(\Gamma'')} \beta_e i''_2(e) + \gamma_1 e_{12} + \gamma_2 e_{21};$$

тривиальную проверку того, что он действительно является изоморфизмом и переводит простые циклы в простые, мы опускаем.

Таким образом, графы Γ_1 и Γ_2 являются контрпримером к дискретной теореме Торелли. Отметим, что если графы Γ' и Γ'' были трехвалентными, то такими же будут и Γ_1 , и Γ_2 ; как и в случае 1-связных графов, конструкция допускает модификации, не сохраняющие свойство трехвалентности, когда в качестве v'_i и/или v''_i берутся уже существующие вершины графов $\tilde{\Gamma}'$ и $\tilde{\Gamma}''$, а вместо соединения вершин новым ребром допускается также их склейка. Кроме того, различные 2-связные графы с одинаковыми $(-1/1)$ -многогранниками $\Delta(\Gamma)$ (без учета оснащения) легко получаются при помощи лемм 9 и 7. А именно при стягивании любого ребра, входящего в какой-нибудь 2-разрез, мы получим граф с тем же $(-1/1)$ -многогранником простых циклов $\Delta(\Gamma)$ (без учета оснащения). На рис. 1 приведены два полученных описанной конструкцией неизоморфных трехвалентных графа, имеющие одинаковые многогранники простых циклов.

Рис. 1

Отметим в заключение, что введенное нами понятие оснащенных $(-1/1)$ -многогранников оказалось избыточно широким для описания $(-1/1)$ -многогранников простых циклов и разрезов. Как следует из лемм 9 и 8, оснащение

$(-1/1)$ -многогранников простых циклов и разрезов графа ненамного отличается от их естественного оснащения (т.е. списка уравнений граней): всякое такое оснащение получается из естественного повторением некоторых из уравнений определенное число раз и добавлением некоторого количества нулевых уравнений. Если же мы ограничимся 2-связными графами, то нулей в оснащении не будет.

Другое неудобство понятия оснащенного $(-1/1)$ -многогранника состоит в том, что, вообще говоря, для него может не существовать зеркально-двойственный $(-1/1)$ -многогранник, который всегда существует для многогранников простых циклов и разрезов.

Представляется весьма вероятным, что более правильным является понятие *взвешенного* $(-1/1)$ -многогранника, представляющего собой $(-1/1)$ -многогранник вместе с сопоставлением каждой грани старшей размерности натурального числа, показывающего, сколько раз следует включать в оснащение уравнение этой грани. Из лемм 9 и 8 тогда следует, что для любого 2-связного графа многогранники простых циклов и простых разрезов являются зеркально-двойственными друг другу взвешенными $(-1/1)$ -многогранниками.

Отнюдь не всякий взвешенный $(-1/1)$ -многогранник получается из разрезов или циклов некоторого 2-связного графа; простейшим примером такого рода является выпуклая оболочка точек с квадратом 2 решетки D_3 (кубооктаэдр), в котором все грани берутся с весом 1. Он обладает зеркально-двойственным четырехмерным четырнадцатигранником (у него также все грани берутся с весом 1) с вершинами в 14 точках с квадратом 4 и в 8 точках с квадратом 7. (На его ребрах имеется еще 12 целых точек с квадратом 3.) Этот многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (x, y, z, t) можно описать сечениями гиперплоскостями, перпендикулярными оси t : гиперплоскости $t = \pm 2$ пересекают его по вершинам $(0, 0, 0, \pm 2)$ (с квадратом 4); гиперплоскость $t = 0$ пересекает его по кубооктаэдру, построенному по решетке $\sqrt{2} \cdot D_3$ (это еще 12 вершин с квадратом 4); гиперплоскость $t = 1$ пересекает его по правильному тетраэдру с вершинами $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ (вершины тетраэдра имеют квадрат 7, середины ребер – квадрат 3); гиперплоскость $t = -1$ – по правильному тетраэдру с противоположными вершинами. Вершины порождают решетку

$$L = \{(\sqrt{2}k, \sqrt{2}l, \sqrt{2}m, t), k, l, m, t \in \mathbb{Z}, k + l + m + t \in 2\mathbb{Z}\};$$

грани задаются четырнадцатью неравенствами

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{\sqrt{2}} \right| &\leq 1, & \left| \frac{y}{\sqrt{2}} \right| &\leq 1, & \left| \frac{z}{\sqrt{2}} \right| &\leq 1, \\ \left| \frac{x+y+z}{\sqrt{2}} - t \right| &\leq 2, & \left| \frac{x+y-z}{\sqrt{2}} + t \right| &\leq 2, \\ \left| \frac{x-y+z}{\sqrt{2}} + t \right| &\leq 2, & \left| \frac{-x+y+z}{\sqrt{2}} + t \right| &\leq 2. \end{aligned}$$

ГИПОТЕЗА 1. Любой взвешенный $(-1/1)$ -многогранник обладает зеркально-двойственным взвешенным $(-1/1)$ -многогранником.

Список литературы

- [1] А. Н. Тюрин, *Квантование, классическая и квантовая теория поля и тэта-функции*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2003.
- [2] И. В. Артамкин, “Топологически тривиальные пучки на кривых с простейшими особенностями”, *Алгебраическая геометрия. Методы, связи, и приложения*, Тр. МИАН, **246**, 2004, 10–19.
- [3] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973.
- [4] И. В. Артамкин, “Канонические отображения пунктированных кривых с простейшими особенностями”, *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 3–32.

И. В. Артамкин (I. V. Artamkin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: artamkin@mail.ru

Поступила в редакцию

05.07.2005