Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Апанасов, И. Ким, Угловой инвариант Картана
и деформации в симметрических пространствах ранга 1,
Матем. сб., 2007, том 198, номер 2, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:35:11

УДК 512.813 +514.763.4+514.764.227+515.179

Б. Н. Апанасов, И. Ким

Угловой инвариант Картана и деформации в симметрических пространствах ранга 1

В работе вводятся и изучаются новые геометрические инварианты в кватернионном гиперболическом пространстве и в гиперболической плоскости Кэли. Они заменяют в этих некоммутативных и неассоциативных геометриях хорошо известные в комплексной гиперболической геометрии инвариант Толедо и угловой инвариант Картана. С помощью этих новых инвариантов изучаются квазифуксовы деформации кватернионных гиперболических многообразий. В частности, определяются изгибающие деформации таких структур, составляющих два последних класса локально симметрических структур ранга 1.

Библиография: 27 названий.

§ 1. Введение

Деформации локально симметрических пространств ранга 1 изучались многими авторами. Такие пространства локально моделируются $\mathbb{F}$ -гиперболическими пространствами $H_{\mathbb{F}}^n$ над числами $\mathbb{F}$, которые могут быть либо вещественными $\mathbb{R}$, либо комплексными $\mathbb{C}$, либо кватернионами $\mathbb{H}$, либо числами Кэли (октанионами $\mathbb{O}$; при этом $n = 2$). Так, известная теорема Мостова [1] дает жесткость деформаций $\rho: \Gamma \rightarrow H$ представления включения решетки $\Gamma \subset H$ в группе H изометрий $\mathbb{F}$ -гиперболического пространства $H_{\mathbb{F}}^n$, а известная теорема супержесткости Маргулиса [2] для неприводимых решеток в связных полупростых группах Ли H без компактных факторов и вещественного ранга по крайней мере 2 показывает, что гомоморфизмы ρ таких решеток в любую связную полупростую группу G с тривиальным центром и плотным по Зариски образом $\rho\Gamma \subset G$, не являющимся относительно компактным в G , могут быть продолжены до непрерывных гомоморфизмов всей группы H , $H \rightarrow G$. После этого К. Корлетт [3] и М. Громов, Р. Шоен [4] получили продолжение свойства супержесткости и на решетки в симметрических пространствах ранга 1. Такие пространства могут иметь своими группами автоморфизмов группы $O(n, 1)$, $U(n, 1)$, $Sp(n, 1)$ и F_4^{-20} , соответствующие вещественным, комплексным и кватернионным гиперболическим пространствам и гиперболической плоскости Кэли, и полученная в этом случае супержесткость деформации дает, что любая решетка Γ в $Sp(n, 1)$, $n \geq 2$, или в F_4^{-20} является супержесткой над архимедовыми полями и в p -адическом смысле, что также влечет ее арифметичность (геометрический взгляд на такую супержесткость кватернионных многообразий можно найти в работах Е. Камишимы [5] и Б. Н. Апанасова, И. Кима [6], [7]).

В остающихся случаях вещественных и комплексных гиперболических пространств имеется много как неарифметических решеток, так и конструкций деформаций, показывающих отсутствие здесь супержесткости; см. книгу

Б. Н. Апанасова [8] для случая вещественных гиперболических решеток и работу Б. Н. Апанасова [9] для случая изгибающих деформаций в комплексной гиперболической геометрии.

С другой стороны, У. Голдман [10] обнаружил новый вид жесткости для вложений группы замкнутой поверхности $\pi_1 S = \Gamma \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$ вблизи ее включения $\Gamma \subset \mathrm{PU}(1, 1) \hookrightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$, где $\hookrightarrow$ – естественное вложение (поднятие группы). Объяснение этого эффекта кроется в поведении инварианта Толедо для комплексных гиперболических поверхностей M , гомотопически эквивалентных замкнутой римановой поверхности S , $f: S \rightarrow M$, который определяется как интеграл по S от 2-формы $f_*\omega$ (поднятия кэлеровой формы ω на M). Согласно результату Д. Толедо [11] $f(S) \subset M$ является комплексной геодезической, если и только если этот инвариант есть $\pm 2\pi\chi(S)$. Позднее это стало частным случаем в гипотезе Голдмана–Миллсона [12] о том, что любое представление $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n + k, 1))$ равномерной решетки $\Gamma \subset \mathrm{SU}(n, 1)$ является точным дискретным представлением, сохраняющим инвариантным $H_{\mathbb{C}}^n$ в $H_{\mathbb{C}}^{n+k}$, если известно, что

$$\int_{H_{\mathbb{C}}^n/\Gamma} \rho^* \omega^n = \mathrm{Vol}(H_{\mathbb{C}}^n/\Gamma),$$

где ω – кэлерова форма. Другими словами, предельное множество группы $\rho(\Gamma)$ является “круглой сферой” в противоположность тому, что предельное множество нетривиальной квазифуксовой группы является квазисферой. Эта гипотеза была доказана К. Корлеттом [13], что дает вместе с другим доказательством [12] справедливость указанной локальной жесткости во всех размерностях: *пусть $\Gamma \subset \mathrm{PU}(n - 1, 1) \hookrightarrow \mathrm{PU}(n, 1)$, $n \geq 2$, является равномерной решеткой в $\mathrm{PU}(n - 1, 1)$. Тогда любое ее представление $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{PU}(n, 1)$ вблизи этого включения является точным и дискретным, а группа $\rho(\Gamma)$ сохраняет инвариантным некоторое геодезическое комплексное $(n - 1)$ -мерное подпространство $H_{\mathbb{C}}^{n-1} \subset H_{\mathbb{C}}^n$.*

Более того, если $n > 2$, то получаемая локальная жесткость является глобальной (по крайней мере, в связной компоненте многообразия представлений) [3]. Однако следует отметить важность обоих условий этой жесткости: действие решетки Γ на аналитическом подпространстве и ее кокомпактности. Во-первых, имеются квазифуксовы деформации неравномерных решеток в комплексной гиперболической геометрии, которые к тому же являются квазикомформно неустойчивыми, см. работы Б. Н. Апанасова [14]–[16] и Е. Фалбела, П.-В. Коселева [17]. И во-вторых, нежесткость равномерных решеток, действующих во вполне вещественных геодезических подпространствах в $H_{\mathbb{C}}^2$, следует из конструкции Б. Н. Апанасова [9] изгибающих деформаций в комплексной гиперболической геометрии.

Целью настоящей работы является рассмотрение этих проблем с деформациями в случае кватернионных и октанионных гиперболических структур. А именно, мы строим нетривиальные деформации многообразий с такими структурами бесконечного объема. Они соответствуют квазифуксовым деформациям фуксовых включений фундаментальных групп таких многообразий в $\mathrm{Sp}(n, 1)$, $n \geq 2$, или F_4^{-20} , в частности изгибающим деформациям таких включений. В другой работе мы обсудим новые эффекты жесткости для указанных

структур (см. [6]). Получаемая при этом жесткость связана с вопросом отсутствия нетривиальных деформаций для действия дискретных групп в октанионных и кватернионных пространствах, задающегося продолжением их действия (решеткой) на некоторой (октанионной или кватернионной) прямой в этом пространстве. В силу того что такие $\mathbb{F}$ -гиперболические прямые (размерности $\dim_{\mathbb{F}} = 1$) имеют геометрии, совпадающие с вещественно-гиперболическими структурами размерности 4 и 8 (в случае кватернионов и чисел Кэли соответственно), эту проблему можно переформулировать в виде вопроса о возможности “геометрического аналога” супержесткости для несупержестких решеток (действующих на $\mathbb{F}$ -прямых): *пусть Γ – несупержесткая решетка (в заданной группе $H = \mathrm{PO}(n, 1)$ или $H = \mathrm{PU}(n, 1)$), имеющая дискретное вложение $\rho_0: \Gamma \rightarrow G$ в большую группу G автоморфизмов симметрического пространства X ранга 1 и чей образ $\rho_0\Gamma$ сохраняет инвариантным некоторое вполне геодезическое аналитическое подпространство $X_0 \subset X$, $\mathrm{Aut} X_0 = H$. Будет ли любая непрерывная деформация $\{\rho_t\}$ представления ρ_0 точными дискретными представлениями $\rho_t: \Gamma \rightarrow G$ индуцироваться сопряжениями в G , т.е. будет ли любое представление ρ_t продолжаться до гомоморфизма $\phi_t: H \rightarrow G$ всей группы $H = \mathrm{Aut} X_0$, чей образ $\phi_t(H)$ имеет инвариантное вполне геодезическое подпространство в X , изометричное X_0 ?*

Для распознавания различных квазифуксовых представлений и для доказательства их нетривиальности мы определим новые геометрические инварианты для троек точек в замыкании $\overline{H_{\mathbb{F}}^n} = H_{\mathbb{F}}^n \cup \partial H_{\mathbb{F}}^n$ кватернионного гиперболического пространства или гиперболической плоскости Кэли. Мы вводим эти инварианты с использованием соответствующих эрмитовых произведений и интегрирования четырех- и восьмимерных форм (кватернионных или октанионных). Эти новые инварианты обобщают угловой инвариант Картана и инвариант Толедо, используемые в комплексной гиперболической геометрии [18], где умножение является не только ассоциативным, но и коммутативным.

Настоящая работа была выполнена при частичной поддержке Университета Оклахомы, Университета в Орсэй и Корейского высшего института по науке и технологии. Авторы также благодарны за плодотворные обсуждения многим специалистам, включая Werner Ballmann, Vicente Cortés, Михаила Громова, Ursula Hamenstädt, Yoshi Kamishima, Pierre Pansu, Frederic Paulin и Larry Siebenmann.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Симметрические пространства ранга 1. Некомпактные симметрические пространства вещественного ранга 1 исчерпываются гиперболическими $\mathbb{F}$ -пространствами $H_{\mathbb{F}}^n$, где в качестве $\mathbb{F}$ могут быть использованы либо вещественные числа $\mathbb{R}$, либо комплексные числа $\mathbb{C}$, либо кватернионы $\mathbb{H}$, либо числа Кэли $\mathbb{O}$ (октанионы; при этом $n = 2$). Возникающие в этих случаях пространства называются соответственно n -мерными вещественными, комплексными, кватернионными и октанионными гиперболическими пространствами, причем последнее пространство $H_{\mathbb{O}}^2$ также известно как гиперболическая плоскость Кэли. Эти пространства алгебраически описываются как соответствующие факторпространства: $\mathrm{SO}(n, 1)/\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n, 1)/\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n, 1)/\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1)$

и $F_4^{-20}/\text{Spin}(9)$, где в последнем случае группа F_4^{-20} автоморфизмов гиперболической плоскости Кэли $H_{\mathbb{O}}^2$ является вещественной формой группы F_4 ранга 1, см. [1], [3]. Мы имеем дело с нормализованными метриками в $H_{\mathbb{F}}^n$, имеющими отрицательную секционную кривизну, ограниченную снизу -1 .

Следуя Г. Д. Мостову [1] и используя стандартную инволюцию (сопряжение) в $\mathbb{F}$, $z \rightarrow \bar{z}$, можно определить проективные модели гиперболических пространств $H_{\mathbb{F}}^n$ как множества “отрицательных” прямых в эрмитовых векторных пространствах $\mathbb{F}^{n,1}$, где эрмитова структура задается неопределенной $(n, 1)$ -формой

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n - z_{n+1} \bar{w}_{n+1}.$$

Используя в этом определении неоднородные координаты, мы получаем шаровые модели (в единичном шаре $B_{\mathbb{F}}^n(0, 1) \subset \mathbb{F}^n$) гиперболических $\mathbb{F}$ -пространств первых трех типов. При этом следует отметить, что в силу некоммутативности умножения кватернионов мы используем “левое” векторное пространство $\mathbb{H}^{n,1}$, где умножение кватернионами происходит слева. Однако в силу неассоциативности умножения чисел Кэли (октанионов) шаровая модель $B_{\mathbb{O}}^2(0, 1) \subset \mathbb{O}^2$ для гиперболической плоскости Кэли определяется с использованием йордановой алгебры эрмитовых (3×3) -матриц с числами Кэли, чья группа автоморфизмов является F_4 (см. [1]).

Рассмотрим бесконечно удаленную сферу $\partial H_{\mathbb{F}}^n$, гомеоморфную $(n \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} - 1)$ -сфере, и зафиксируем некоторую ее точку $\infty \in \partial H_{\mathbb{F}}^n$. Можно определить расслоение пространства $H_{\mathbb{F}}^n$ на непересекающиеся орисферы с “центром” в этой точке ∞ . Эти орисферы можно отождествить с нильпотентной группой N в разложении Ивасава KAN группы автоморфизмов пространства $H_{\mathbb{F}}^n$. Эта нильпотентная группа N отождествляется с произведением $\mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F}$, где определена операция (см. [1])

$$(\xi, v) \cdot (\xi', v') = (\xi + \xi', v + v' + 2 \text{Im} \langle \xi, \xi' \rangle), \quad (\xi, v)^{-1} = (-\xi, -v).$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное эрмитово произведение в $\mathbb{F}^{n-1}$, $\langle z, w \rangle = \sum z_i \bar{w}_i$. При этом возникает нильпотентная группа Карно со степенью нильпотентности 2 и центром $\{0\} \times \text{Im } \mathbb{F} \subset \mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F} = N$, которая действует на себе левыми сдвигами $T_h(g) = h \cdot g$, $h, g \in N$. Это позволяет отождествить:

$$H_{\mathbb{F}}^n \cup \partial H_{\mathbb{F}}^n \setminus \{\infty\} \longrightarrow N \times [0, \infty) = \mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F} \times [0, \infty).$$

Возникающие таким образом орисферические координаты (ξ, v, u) задают так называемую “полупространственную” модель гиперболического пространства $H_{\mathbb{F}}^n$ (см. [19], [20], [10]). Указанное выше действие группы N на себе левыми сдвигами продолжается (с орисфер в $H_{\mathbb{F}}^n$) до изометрий всего гиперболического пространства, называемых сдвигами Карно и записываемых в этих орисферических координатах в виде

$$T_{(\xi_0, v_0)}: (\xi, v, u) \mapsto (\xi_0 + \xi, v_0 + v + 2 \text{Im} \langle \xi_0, \xi \rangle, u), \quad (\xi, v, u) \in \mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F} \times [0, \infty).$$

Группа Карно $N = \mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F}$ имеет естественную норму и индуцируемое ею расстояние. В случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ они известны как норма и расстояние Цыгана

на группе Гейзенберга N . В орисферических координатах эту норму и расстояние можно продолжить до нормы и расстояния во всем пространстве $H_{\mathbb{F}}^n$ (см. [20], [21]):

$$|(\xi, v, u)|_c = |(|\xi|^2 + u - v)|^{1/2}, \quad (1)$$

$$\rho_c((\xi, v, u), (\xi', v', u')) = | |\xi - \xi'|^2 + |u - u'| - (v - v' + 2 \operatorname{Im} \langle \xi, \xi' \rangle) |^{1/2}, \quad (2)$$

по-прежнему называемыми нормой и расстоянием Цыгана. Как видно из этих определений, ρ_c остается инвариантным относительно переносов и вращений Карно. Более того, сужения этой метрики ρ_c на различные орисферы в $H_{\mathbb{F}}^n$ с центром в $\infty \in \partial H_{\mathbb{F}}^n$ не отличаются друг от друга. Это показывает, что метрика играет в $H_{\mathbb{F}}^n$ ту же роль, что и евклидова метрика в полупространственной модели вещественного гиперболического пространства.

Для связи между двумя моделями гиперболического F -пространства $H_{\mathbb{F}}^n$ можно выписать изометрию его полупространственной и шаровой модели в $B_{\mathbb{F}}^n(0, 1)$. Продолжая эту изометрию на их бесконечно удаленные сферы, мы получаем следующую проекцию [21] одноточечной компактификации группы Карно $N \cup \infty = \partial(\mathbb{F}^{n-1} \times \operatorname{Im} \mathbb{F} \times (0, \infty))$ на единичную сферу $S(0, 1) = \partial B_{\mathbb{F}}^n(0, 1) \subset \mathbb{F}^n$, определяемую для $(z, t) \in \mathbb{F}^{n-1} \times \operatorname{Im} \mathbb{F} = N$ как

$$[z, t] \rightarrow \left[2 \frac{1 + |z|^2 + t}{|1 + |z|^2 + t|^2} z, \frac{1 + |z|^2 + t}{|1 + |z|^2 + t|^2} (1 - |z|^2 + t) \right] \in S(0, 1) \subset \mathbb{F}^n. \quad (3)$$

При этом начало координат $[0, 0] \in N$ переходит в $(0, 1) \in S(0, 1)$, а бесконечно удаленная точка ∞ переходит в $(0, -1) \in S(0, 1)$, где $(0, \pm 1) = (0, \dots, 0, \pm 1) \in \mathbb{F}^n$. В то же время, любая вещественная гиперболическая 2-мерная плоскость в шаровой модели в $B_{\mathbb{F}}^n(0, 1)$, имеющая в своей бесконечно удаленной окружности эти две точки $(0, \pm 1)$, соответствует геодезической 2-мерной плоскости $H_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{F}^{n-1} \times \operatorname{Im} \mathbb{F} \times (0, \infty)$, чья бесконечно удаленная прямая $\{[\mathbb{R}, 0]\} \subset N$ проходит через начало координат $(0, 0) \in N$ и некоторую точку $(z, 0)$ на “горизонтальной” плоскости $\mathbb{F}^{n-1} \times \{0\} \subset N$, так как граница этой 2-плоскости $\partial H_{\mathbb{R}}^2 = \{[\mathbb{R}, 0]\} \cup \{\infty\}$. Это наблюдение показывает, что группа $K_0 A$ (в разложении Ивасава), оставляющая неподвижными начало координат $(0, 0) \in N$ и ∞ , есть группа $U(n-1) \times \mathbb{R} \times U(1)$ в случае $H_{\mathbb{C}}^n$, группа $\operatorname{Sp}(n-1) \times \mathbb{R} \times \operatorname{Sp}(1)$ в случае $H_{\mathbb{H}}^n$ и группа $\operatorname{Spin}(7) \times \mathbb{R}$ в случае $H_{\mathbb{O}}^2$.

Таким образом, для любой точки $[z, 0] \in \mathbb{F}^{n-1}$, $|z| = 1$, можно найти преобразование $M \in K_0$, которое отображает $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^{n-1}$ в точку z , $M([1, 0]) = [z, 0]$. Это преобразование $M \in K_0$ отображает прямую $\{[\mathbb{R}, 0]\}$ в прямую в группе Карно N , проходящую через точку $[z, 0]$ и начало координат $(0, 0) \in N$.

Можно определить ортогональную проекцию $\Pi: H_{\mathbb{F}}^n \rightarrow L$ гиперболического $\mathbb{F}$ -пространства на его заданное $\mathbb{F}$ -подпространстве $L \subset H_{\mathbb{F}}^n$. Для ее определения мы можем использовать тот факт, что функция расстояния в $H_{\mathbb{F}}^n$ строго выпукла (в силу отрицательности секционной кривизны K в $H_{\mathbb{F}}^n$, $-1 \leq K \leq -1/4$). Отсюда вытекает, что любая точка $x \in H_{\mathbb{F}}^n$ имеет единственную ближайшую к ней точку $\Pi(x) \in L$. При этом вещественная геодезическая, соединяющая эти точки x и $\Pi(x)$, ортогональна вещественной геодезической, соединяющей $\Pi(x)$ с любой другой точкой $y \in L$. Эти две геодезические порождают вполне вещественную 2-плоскость в $H_{\mathbb{F}}^n$, см. лемму 2.2.

Заметим, что группой автоморфизмов кватернионного гиперболического пространства $H_{\mathbb{H}}^n$ является $\mathrm{PSp}(n, 1)$, а стабилизатором его точки $0 \in B_{\mathbb{H}}^n(0, 1)$ является группа $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, элементы которой могут быть представлены матрицей

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix},$$

где $M \in \mathrm{Sp}(n)$, а $\nu \in \mathrm{Sp}(1)$. При этом матрица действует умножением справа, а проективизация задается умножением слева. Таким образом, это действие в шаровой модели описывается в виде

$$z \rightarrow \nu^{-1} z M.$$

Стабилизатором вещественной геодезической, соединяющей точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$, является $MA = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n-1) \times \mathbb{R}$. Это действие может быть записано в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & \nu \operatorname{ch} r & \nu \operatorname{sh} r \\ 0 & \nu \operatorname{sh} r & \nu \operatorname{ch} r \end{bmatrix},$$

где $M \in \mathrm{Sp}(n-1)$, $\nu \in \mathrm{Sp}(1)$, $r \in \mathbb{R}$, а $\mathrm{Sp}(1)$ действует как умножение на матрицу

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}.$$

Если при этом $(0, \mathbb{H})$ является $\mathbb{H}$ -прямой, содержащей вещественную геодезическую, соединяющую $(0, 1)$ и $(0, -1)$, то действие $\mathrm{Sp}(1)$ на этой $\mathbb{H}$ -прямой задается в виде

$$\mathbb{H}^n \supset (0, \mathbb{H}) \rightarrow \nu^{-1}(0, \mathbb{H}\nu, \nu) \subset \mathbb{H}^{n,1} \rightarrow (0, \nu^{-1}\mathbb{H}\nu) \subset \mathbb{H}^n.$$

В общем случае $\nu \in \mathrm{Sp}(1)$ отображает (z, z_n) в $(\nu^{-1}z, \nu^{-1}z_n\nu)$.

Если $\triangle$ – геодезический треугольник в $\mathbb{H}$ -прямой в $B_{\mathbb{H}}^n(0, 1) \cong H_{\mathbb{H}}^n$, у которого одна сторона содержится в вещественной оси, то его орбита относительно действия $\mathrm{Sp}(1)$ является 4-мерным объектом в этой $\mathbb{H}$ -прямой (мы будем его использовать в § 4 для определения кватернионного инварианта Толедо).

Числа Кэли (октанионы) $z \in \mathbb{O}$ задаются парами кватернионов, $z = (q_1, q_2)$, и их умножение определяется по правилу

$$(q_1, q_2)(p_1, p_2) = (q_1 p_1 - \overline{p_2} q_2, p_2 q_1 + q_2 \overline{p_1}),$$

а сопряжение (стандартная инволюция) в $\mathbb{O}$ определяется как

$$\overline{(q_1, q_2)} = (\overline{q_1}, -q_2).$$

Поэтому мнимые и вещественные части чисел Кэли $z = (q_1, q_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} = \mathbb{O}$ задаются как $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} q_1, q_2)$ и $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} q_1$ и имеют место обычные свойства их умножения: $x\overline{x} = |x|^2$, $|xy| = |x||y|$, $x^{-1} = \overline{x}/|x|^2$, $\overline{xy} = \overline{y}\overline{x}$. При этом,

хотя умножение чисел Кэли некоммутативно и неассоциативно, известная лемма Артина дает ассоциативность в подалгебре, порожденной двумя элементами. Гиперболическая плоскость Кэли строится с помощью особой йордановой алгебры эрмитовых (3×3) -матриц с элементами из $\mathbb{O}$, чьей группой автоморфизмов является группа F_4 (см. [1]). Вещественная форма группы F_4 ранга 1, обозначаемая через F_4^{-20} , является группой автоморфизмов гиперболической плоскости Кэли $H_{\mathbb{O}}^2$. Стабилизатором в этой группе начала координат $(0, 0) \in B_{\mathbb{O}}^2(0, 1) = H_{\mathbb{O}}^2$ является группа $\text{Spin}(9)$, действующая в $\mathbb{O}^2 \cong \mathbb{R}^{16}$ своими спинорными представлениями. Если обозначить координатные $\mathbb{O}$ -оси в $\mathbb{O}^2$ через $L_1 = \mathbb{O} \times \{0\}$ и $L_2 = \{0\} \times \mathbb{O}$, то стабилизатор в $\text{Spin}(9)$ первой оси L_1 действует в L_1 как ортогональная группа $\text{SO}(8)$ (своими четными $\frac{1}{2}$ -spin представлениями), а на второй оси L_2 – через свои нечетные $\frac{1}{2}$ -spin представления. Стабилизатором вещественной прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$, является группа $\text{Spin}(7)$.

2.2. Бисекторы и полиэдры Дирихле. Хорошо известно, что симметрические пространства $H_{\mathbb{F}}^n$ ранга 1, отличные от вещественного гиперболического пространства $H_{\mathbb{R}}^n$, не имеют геодезических гиперповерхностей, т.е. поверхностей вещественной коразмерности 1. Неплохой их заменой могут служить так называемые бисекторы, введенные в рассмотрение Г. Д. Мостовым (в случае комплексной гиперболической геометрии), показавшим их сильную близость к вполне геодезическим гиперплоскостям. А именно, бисекторы в $H_{\mathbb{F}}^n$ являются минимальными гиперповерхностями, имеющими координатность $(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} - 1)$; все они эквивалентны друг другу относительно изометрий пространства $H_{\mathbb{F}}^n$, а также имеют естественное расслоение на вполне геодезические $\mathbb{F}$ -гиперповерхности, что мы покажем ниже.

Равноудаленный от двух точек $z_1, z_2 \in H_{\mathbb{F}}^n$ бисектор определяется как

$$\mathfrak{S}(z_1, z_2) = \{z \in H_{\mathbb{F}}^n : d(z, z_1) = d(z, z_2)\}. \quad (4)$$

Его бесконечно удаленная граница $\partial \mathfrak{S}(z_1, z_2) \subset \partial H_{\mathbb{F}}^n$ называется спинальной сферой. Здесь и в дальнейшем (при описании “слоевого расслоения” Мостова) мы используем терминологию и аргументы, хорошо известные в комплексной гиперболической геометрии после работ Мостова и Гольдмана [18]. Для данного бисектора $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$ пусть $\Sigma \subset H_{\mathbb{F}}^n$ – единственная $\mathbb{F}$ -прямая, которая проходит через точки z_1 и z_2 . Назовем ее $\mathbb{F}$ -спайном бисектора $\mathfrak{S}$ (относительно точек z_1 и z_2), а в качестве его $\mathbb{R}$ -спайна определим следующий (вещественно-гиперболический) бисектор в $\Sigma \cong H_{\mathbb{R}}^k$, $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$:

$$\sigma(z_1, z_2) = \mathfrak{S}(z_1, z_2) \cap \Sigma = \{w \in \Sigma : d(z_1, w) = d(z_2, w)\}, \quad (5)$$

который является гиперболической $(k - 1)$ -плоскостью в Σ , ортогонально пересекающей геодезический отрезок $[z_1, z_2]$ в его середине.

ТЕОРЕМА 2.1 (Мостов). Для заданного бисектора $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(z_1, z_2)$, его $\mathbb{F}$ -спайна $\Sigma \subset H_{\mathbb{F}}^n$ и $\mathbb{R}$ -спайна $\sigma \subset \Sigma$ пусть $\Pi_{\Sigma} : H_{\mathbb{F}}^n \rightarrow \Sigma$ обозначает ортогональную проекцию на Σ . Тогда

$$\mathfrak{S} = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma) = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi_{\Sigma}^{-1}(s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу строгой выпуклости функции расстояния в $H_{\mathbb{F}}^n$ каждая точка $z \in H_{\mathbb{F}}^n \setminus \Sigma$ проектируется в единственную (ближайшую к ней) точку $\Pi(z) \in \Sigma$. При этом, как хорошо известно в римановой геометрии, геодезическая, соединяющая точки $\Pi_{\Sigma}(z)$ и z , ортогональна любой геодезической в Σ , проходящей через $\Pi_{\Sigma}(z)$ и какую-либо точку $s \in \Sigma$. В самом деле, если бы эти геодезические не были ортогональны, мы могли бы уменьшить расстояние от z до $\Pi(z)$, двигаясь по геодезической, соединяющей $\Pi_{\Sigma}(z)$ и s , до тех пор, пока угол пересечения не станет равным $\pi/2$. Однако это противоречит тому, что $\Pi_{\Sigma}(z)$ является ближайшей к z точкой на Σ . Теперь, применяя теорему Пифагора и повторяя аргументы, используемые в случае пространства $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ (см. [18; лемма 3.2.13]), мы получаем, что справедлива

ЛЕММА 2.2. Пусть $\Pi: H_{\mathbb{F}}^n \rightarrow \Sigma$ – ортогональная проекция на какое-то $\mathbb{F}$ -подпространство $\Sigma \subset H_{\mathbb{F}}^n$. Тогда вещественные геодезические, соединяющие проекцию $\Pi(z)$ любой точки $z \in H_{\mathbb{F}}^n \setminus \Sigma$ с самой z и с любой точкой $s \in \Sigma$, являются ортогональными и порождают вполне вещественную 2-мерную плоскость в $H_{\mathbb{F}}^n$. Более того,

$$\operatorname{ch} \frac{d(z, s)}{2} = \operatorname{ch} \frac{d(z, \Pi(z))}{2} \operatorname{ch} \frac{d(\Pi(z), s)}{2}.$$

И наоборот, если z, w, s образуют прямоугольный треугольник на вполне вещественной 2-плоскости в $H_{\mathbb{F}}^n$, то ортогональная проекция на $\mathbb{F}$ -прямую, проходящую через z и w , отображает s в w .

Теперь, применяя эту лемму к обеим точкам z_1 и z_2 , получаем

$$\begin{aligned} z \in \mathfrak{S}(z_1, z_2) &\iff d(z, z_1) = d(z, z_2) \\ &\iff d(\Pi_{\Sigma}(z), z_1) = d(\Pi_{\Sigma}(z), z_2) \\ &\iff \Pi_{\Sigma}(z) \in \sigma(z_1, z_2), \end{aligned}$$

что заканчивает доказательство теоремы 2.1.

Следуя Г. Д. Мостову, будем называть слоями бисектора σ получающиеся $\mathbb{F}$ -гиперплоскости $\Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$, $s \in \sigma \subset \mathfrak{S}$, которые являются слоями вещественно-аналитического расслоения, задаваемого ортогональной проекцией $\Pi_{\Sigma}: H_{\mathbb{F}}^n \rightarrow \Sigma$; их бесконечно удаленные сферы будем называть $\mathbb{F}$ -сферами, а бесконечно удаленную сферу $\mathbb{R}$ -спайна $\sigma \subset \mathfrak{S}$ – вершинной сферой (ее размерность равна $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} - 2$). Тогда в силу того, что $\Pi_{\Sigma}: H_{\mathbb{F}}^n \rightarrow \Sigma$ является вещественно-аналитическим расслоением, из теоремы 2.1 непосредственно получается (ср. [18])

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Бисектор $\mathfrak{S}$ является вещественно-аналитической гиперповерхностью в $H_{\mathbb{F}}^n$, расслоенной на слои. Его спинальная сфера $\partial\mathfrak{S}$ является вещественно-аналитической гиперповерхностью в бесконечно удаленной сфере $\partial H_{\mathbb{F}}^n = N \cup \{\infty\}$, расслоенной своими $\mathbb{F}$ -сферами.

В частности, рассматривая $\partial H_{\mathbb{F}}^n$ в виде $(\mathbb{F}^{n-1} \times \operatorname{Im} \mathbb{F}) \cup \{\infty\}$, можно представить неограниченные спинальные сферы $\partial\sigma$, проходящие через начало координат $(0, 0)$, как произведения $\mathbb{F}^{n-1} \times \mathbb{R}^{\dim \mathbb{F} - 2}$ “горизонтального” $\mathbb{F}$ -подпространства $\mathbb{F}^{n-1}$ с линейными $(\dim \mathbb{F} - 2)$ -подпространствами в $\operatorname{Im} \mathbb{F}$ (пополнения последних бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ задают вершинные сферы).

При этом мы имеем естественное расслоение $\mathbb{F}^{n-1}$ (а значит, и всей спинальной сферы) на $\mathbb{F}$ -сферы, являющиеся концентрическими сферами в $\mathbb{F}^{n-1}$ с центром в начале координат.

Мы можем использовать бисекторы для построения фундаментальных полиэдров Дирихле для действия дискретной группы изометрий в симметрическом пространстве $H_{\mathbb{F}}^n$ ранга 1. А именно, полиэдр Дирихле дискретной группы $\Gamma \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$ с центром в заданной точке $z \in H_{\mathbb{F}}^n$ с тривиальным стабилизатором $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) = z\} = \{1\}$ задается в виде

$$D_z(\Gamma) = \{x \in H_{\mathbb{F}}^n : d(x, z) < d(x, \gamma(z)), \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}\} \quad (6)$$

и ограничивается бисекторами $\mathfrak{S}(z, \gamma(z))$, равноудаленными от z , $\gamma(z)$, $\gamma \in \Gamma$ (см. [22]).

Если $\Gamma \subset \text{PO}(n, 1) \hookrightarrow \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$ – какая-то $\mathbb{R}$ -фуксова группа, т.е. дискретная группа изометрий $H_{\mathbb{F}}^n$, сохраняющая инвариантным некоторое вполне вещественное n -мерное подпространство $H_{\mathbb{R}}^n \subset H_{\mathbb{F}}^n$, то свойства бисекторов Дирихле $\mathfrak{S}(z, \gamma(z)) \subset H_{\mathbb{F}}^n$, $z \in H_{\mathbb{R}}^n$, $\gamma \in \Gamma$, определяются их пересечениями с Γ -инвариантным вещественным n -подпространством $H_{\mathbb{R}}^n$. То же относится и к “полупространствам”, ограниченным этими бисекторами. Здесь мы обозначаем через

$$\mathfrak{S}^+(z, w) = \{y \in H_{\mathbb{F}}^2 : d(y, z) < d(y, w)\} \quad (7)$$

такое полупространство, содержащее центральную точку z и ограниченное бисектором $\mathfrak{S}(z, w)$, равноудаленным от z и w . А именно, полагая для простоты $n = 2$ и дословно повторяя аргументы доказательства в случае комплексного гиперболического пространства $H_{\mathbb{R}}^2$ (см. [18]), можно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.4. *Полупространства $\mathfrak{S}^+(z_1, w)$ и $\mathfrak{S}^+(z_2, w)$, определяемые тремя точками $w, z_1, z_2 \in H_{\mathbb{R}}^2$, не пересекаются, если и только если не пересекаются между собой их пересечения $\mathfrak{S}^+(z_i, w) \cap H_{\mathbb{R}}^2$ с 2-плоскостью $H_{\mathbb{R}}^2$, $i = 1, 2$.*

Закончим этот параграф замечанием, что в случае $\mathbb{F} \neq \mathbb{R}$ ортогональная проекция геодезической может уже не быть геодезической. Простой иллюстрацией этого может быть следующее. Пусть, как раньше, заданы бисектор $\mathfrak{S}(A, B) \subset H_{\mathbb{F}}^n$, единственная $\mathbb{F}$ -прямая Σ , проходящая через z_1 и z_2 , единственная вещественная геодезическая ℓ , $\ell \subset \Sigma$, проходящая через z_1 и z_2 , и $\mathbb{R}$ -спайн $\sigma(z_1, z_2)$ бисектора $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$, где $\sigma \cong H_{\mathbb{R}}^{k-1} \subset H_{\mathbb{R}}^k \cong \Sigma$ относительно вещественно-гиперболической метрики Пуанкаре на Σ , индуцированной метрикой пространства $H_{\mathbb{F}}^n \supset \Sigma \cong H_{\mathbb{R}}^k$, где $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Каждый слой $\Pi^{-1}(x)$, $x \in \sigma(z_1, z_2)$, относительно ортогональной проекции $\Pi: H_{\mathbb{F}}^n \rightarrow \Sigma$ является вполне геодезическим $\mathbb{F}$ -подпространством вещественной коразмерности k , ортогонально пересекающим Σ в точке x . Это описывает расслоение бисектора $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$ над вещественной геодезической $(k-1)$ -плоскостью σ . Так как бисектор $\mathfrak{S}$ не является вполне геодезической гиперповерхностью, мы имеем две точки $p, q \in \mathfrak{S}$, проектируемые соответственно в некоторые точки $x, y \in \sigma$ и такие, что геодезическая γ , соединяющая их, не содержится в $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$. Тогда $\Pi(\gamma) \subset \Sigma$ является кривой, соединяющей точки x и y и не лежащей в геодезической плоскости σ . Таким образом, эта проекция $\Pi(\gamma)$ не может быть

геодезической. Заметим еще, что если проекция $\Pi(\gamma) \subset \Sigma$ какой-то геодезической γ сама является геодезической, то геодезические γ и $\Pi(\gamma)$ стягивают вполне вещественную 2-мерную плоскость.

§ 3. Кватернионный угловой инвариант Картана

В комплексной гиперболической геометрии хорошо известен угловой инвариант Картана, который в частности, показывает, когда заданная тройка точек лежит на $\mathbb{C}$ -окружности или $\mathbb{R}$ -окружности в бесконечно удаленной сфере $\partial H_{\mathbb{C}}^n$ (см. [18]). Целью этого параграфа является развитие этих идей Картана и определение некоторого аналога его инварианта в кватернионной гиперболической геометрии.

Рассмотрим тройку $x = (x_1, x_2, x_3) \in (H_{\mathbb{H}}^n \cup \partial H_{\mathbb{H}}^n)^3$ различных точек, которые имеют поднятия $\tilde{x}_i \in H_{\mathbb{H}}^{n,1}$, $i = 1, 2, 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Кватернионный угловой инвариант Картана $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$, $0 \leq \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x) \leq \pi/2$, тройки точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ определяется как угол, образуемый вещественной осью $\mathbb{R}e_1 = (\mathbb{R}, 0, 0, 0) \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ и радиус-вектором кватерниона, задаваемого эрмитовым тройным произведением

$$\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle = \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle \langle \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle \langle \tilde{x}_3, \tilde{x}_1 \rangle \in \mathbb{H}.$$

Если взять другие поднятия $\nu_i \tilde{x}_i \in H_{\mathbb{H}}^{n,1}$ точек $x_i \in \overline{H_{\mathbb{H}}^n}$, $i = 1, 2, 3$, то

$$\langle \nu_1 \tilde{x}_1, \nu_2 \tilde{x}_2, \nu_3 \tilde{x}_3 \rangle = |\nu_2|^2 |\nu_3|^2 \nu_1 \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle \langle \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle \langle \tilde{x}_3, \tilde{x}_1 \rangle \overline{\nu_1}.$$

В то же время действие группы $\text{Sp}(1)$ в $\mathbb{H}$ сопряжениями задается ортогональными преобразованиями в $\mathbb{R}^4$, которые оставляют неподвижной вещественную ось $\mathbb{R}e_1$ (см. [23]). Это показывает, что угол $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$ не зависит от выбора поднятий $\tilde{x}_i$ точек x_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Кватернионный угловой инвариант Картана

$$\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x_1, x_2, x_3)$$

не изменяется при перестановке точек x_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \langle x_2, x_1, x_3 \rangle &= \langle x_2, x_1 \rangle \langle x_1, x_3 \rangle \langle x_3, x_2 \rangle = \overline{\langle x_1, x_2 \rangle} \overline{\langle x_3, x_1 \rangle} \overline{\langle x_2, x_3 \rangle} \\ &= \overline{\langle x_2, x_3 \rangle \langle x_3, x_1 \rangle \langle x_1, x_2 \rangle} = \overline{\langle x_2, x_3, x_1 \rangle}. \end{aligned}$$

Угол между e_1 и $\overline{\langle x_2, x_3, x_1 \rangle}$ равен углу между e_1 и $\langle x_2, x_3, x_1 \rangle$. Так как угол не изменяется при сопряжении на $\langle x_1, x_2 \rangle$, то угол между e_1 и $\langle x_2, x_3, x_1 \rangle$ равен углу между e_1 и $\langle x_1, x_2 \rangle \langle x_2, x_3, x_1 \rangle \langle x_1, x_2 \rangle^{-1} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$. Таким образом,

$$\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x_2, x_3, x_1) = \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x_2, x_1, x_3).$$

Теперь получим многочисленные свойства нашего инварианта $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для пары $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ троек различных точек из $\bar{H}_{\mathbb{H}}^n = H_{\mathbb{H}}^n \cup \partial H_{\mathbb{H}}^n$ имеем: $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x) = \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(y)$ тогда и только тогда, когда существует изометрия $f \in \mathrm{PSp}(n, 1)$ пространства $H_{\mathbb{H}}^n$, переводящая одну тройку точек в другую: $f(x_i) = y_i, i = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя гомотетию (являющуюся элементом группы $\mathrm{PSp}(n, 1)$), можно считать, что эрмитовы произведения точек наших троек $X = \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle$ и $Y = \langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \rangle$ имеют равные нормы $|X| = |Y|$. Теперь допустим, что $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x) = \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(y)$. Это и равенство $|X| = |Y|$ влечет существование ортогонального преобразования $M \in \mathrm{SO}(3) \times \{\mathrm{id}\}$ в $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, которое оставляет неподвижной вещественную ось в $\mathbb{H}$ и отображает X в Y . Как мы видели раньше, действие $\mathrm{Sp}(1)$ сопряжениями в $\mathbb{H}$ совпадает с действием $\mathrm{SO}(3)$ (см. п. 2.1). Поэтому имеется $\mu \in \mathrm{Sp}(1)$ такое, что $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle = \mu \langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \rangle \bar{\mu}$. Теперь для завершения доказательства достаточно выбрать такие поднятия $\tilde{x}_i$ и $\tilde{y}_i$ точек x_i и $y_i, i = 1, 2, 3$, что $\langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \rangle = \langle \tilde{y}_i, \tilde{y}_j \rangle$. В самом деле, тогда имеется такое $A \in \mathrm{Sp}(n, 1)$, что $A(\tilde{x}_i) = \tilde{y}_i, i = 1, 2, 3$. Это A определяет элемент $f \in \mathrm{PSp}(n, 1)$, $f(x_i) = y_i, i = 1, 2, 3$. Для получения нужных поднятий мы сначала заменим $\tilde{y}_1$ на $\mu \tilde{y}_1$ (сохраняя обозначение $\tilde{y}_1$). Тогда

$$\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle \langle \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle \langle \tilde{x}_3, \tilde{x}_1 \rangle = \langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \rangle \langle \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \rangle \langle \tilde{y}_3, \tilde{y}_1 \rangle.$$

Теперь, если необходимо, делая замену $\tilde{x}_2$ и $\tilde{x}_3$ на $\mu_2 \tilde{x}_2$ и $\mu_3 \tilde{x}_3$, мы получаем $\langle \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle = \langle \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \rangle$ и $\langle \tilde{x}_3, \tilde{x}_1 \rangle = \langle \tilde{y}_3, \tilde{y}_1 \rangle$. Тогда равенство превращается в соотношение

$$\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle \langle \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle \langle \tilde{x}_3, \tilde{x}_1 \rangle = |\mu_2|^2 |\mu_3|^2 \langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \rangle \langle \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \rangle \langle \tilde{y}_3, \tilde{y}_1 \rangle,$$

и мы получаем $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle = r \langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \rangle$ для $r = |\mu_2| |\mu_3|$. Теперь, заменяя $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ и $\tilde{y}_1$ соответственно на $r^{-1} \tilde{x}_1, r^{-1} \tilde{x}_2, r \tilde{x}_3$ и $r^2 \tilde{y}_1$, мы, наконец, имеем равенство $\langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \rangle = \langle \tilde{y}_i, \tilde{y}_j \rangle$, а значит, и нужное нам соотношение $f \in \mathrm{PSp}(n, 1)$.

Обратное утверждение тривиально.

ТЕОРЕМА 3.4. Для различных точек $x_1, x_2, x_3 \in \partial H_{\mathbb{H}}^n$ пусть σ_{12} и Σ_{12} обозначают соответственно вещественную и кватернионную геодезические, соединяющие две точки x_1 и x_2 , а $\Pi: H_{\mathbb{H}}^n \rightarrow \Sigma_{12}$ – ортогональную проекцию пространства $H_{\mathbb{H}}^n$ с функцией d гиперболического расстояния. Тогда

$$|\mathrm{tg} \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)| = \mathrm{sh}(d(\Pi x_3, \sigma_{12})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С точностью до изометрии (в шаровой модели $H_{\mathbb{H}}^n$) можно считать, что наша тройка x состоит из точек $x_1 = (0, -1)$, $x_2 = (0, 1)$ и $x_3 = (z', z_n)$ с поднятиями $\tilde{x}_1 = (0, -1, 1)$, $\tilde{x}_2 = (0, 1, 1)$ и $\tilde{x}_3 = (z', z_n, 1)$. Тогда $\sigma_{12} = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}, |t| < 1\}$, $\Sigma_{12} = \{(0, z) : z \in \mathbb{H}, |z| < 1\}$, $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle = 2(\bar{z}_n - 1)(1 + z_n)$, и мы имеем

$$|\mathrm{tg} \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)| = \frac{|2 \mathrm{Im}(z_n)|}{1 - |z_n|^2}.$$

С другой стороны, Σ_{12} имеет геометрию шаровой модели Пуанкаре $H_{\mathbb{R}}^4$ с секционной кривизной -1 и $\Pi(x_3) = z_n$. Рассмотрим гиперболическую 2-плоскость в Σ_{12} , соединяющую точку z_n и геодезическую σ_{12} . Ясно, что она представляет собой круг с метрикой Пуанкаре секционной кривизны -1 , где σ_{12} можно считать вещественным интервалом $(-1, 1)$, а точку z_n можно представить

в виде $z_n = \operatorname{Re} z_n + i|\operatorname{Im} z_n|$. Если гиперболическое расстояние от z_n до вещественной оси σ_{12} обозначить через d , то прямые вычисления дают, что $\operatorname{sh} d = |2\operatorname{Im}(z_n)|/(1 - |z_n|^2)$.

ТЕОРЕМА 3.5. *Три бесконечно удаленные точки $x_1, x_2, x_3 \in \partial H_{\mathbb{H}}^n$ лежат на одной $\mathbb{R}$ -окружности, если и только если $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x_1, x_2, x_3) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* С точностью до изометрии в $H_{\mathbb{H}}^n$ можно считать, что эти три точки на границе вещественно-гиперболической плоскости $H_{\mathbb{R}}^2 \subset H_{\mathbb{H}}^n$ представляются в шаровой модели $H_{\mathbb{H}}^n$ в виде $x_1 = (0, -1)$, $x_2 = (0, 1)$, $x_3 = (r, 0)$, где $r \in \mathbb{R}$. Тогда $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle \in \mathbb{R}$ и поэтому $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x) = 0$.

Достаточность. Как и в доказательстве теоремы 3.4, можно считать, что $x_1 = (0, -1)$, $x_2 = (0, 1)$ и $x_3 = (z', z_n)$, а их поднятия $\tilde{x}_1 = (0, -1, 1)$, $\tilde{x}_2 = (0, 1, 1)$, $\tilde{x}_3 = (z', z_n, 1)$, где z_n должно быть вещественным, так как $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x) = 0$. Теперь мы применим проекцию (3) из $N \cup \infty = \partial(\mathbb{H}^{n-1} \times \operatorname{Im} \mathbb{H} \times (0, \infty))$ на граничную сферу единичного шара $B_{\mathbb{H}}^n(0, 1) \subset \mathbb{H}^n$, чтобы показать, что x_3 лежит на границе вещественной гиперболической 2-плоскости, содержащей x_1 и x_2 . В самом деле, так как $z_n \in \mathbb{R}$, образ точки x_3 , задающийся парой $[z, t] \in \mathbb{H}^{n-1} \times \operatorname{Im} \mathbb{H}$, имеет $t = 0$. Это показывает, что $x_3 \in \partial H_{\mathbb{R}}^2$, где $\mathbb{R}$ -окружность $\partial H_{\mathbb{R}}^2$ проходит через точки $x_1 = (0, -1)$ и $x_2 = (0, 1)$.

ТЕОРЕМА 3.6. *Тройка точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\partial H_{\mathbb{H}}^n)^3$ лежит на бесконечно удаленной сфере некоторой $\mathbb{H}$ -прямой в $H_{\mathbb{H}}^n$, если и только если $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x) = \pi/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $x = (x_1, x_2, x_3)$ лежит на границе $\partial(H_{\mathbb{H}}^1)$ некоторой $\mathbb{H}$ -прямой $H_{\mathbb{H}}^1$, то мы можем считать (с точностью до изометрии $H_{\mathbb{H}}^n$), что в шаровой модели эти точки имеют вид $x_1 = (0, -1)$, $x_2 = (0, 1)$, $x_3 = (0, z)$ и поднимаются до точек $\tilde{x}_1 = (0, -1, 1)$, $\tilde{x}_2 = (0, 1, 1)$, $\tilde{x}_3 = (0, z, 1)$. Тогда $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle = 2(|z|^2 - z + \bar{z} - 1)$. В силу того что $|z| = 1$, вещественная часть этого числа равна 0, а значит, $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x) = \pi/2$.

Достаточность. Можно считать, что $\tilde{x}_1 = (0, -1, 1)$, $\tilde{x}_2 = (0, 1, 1)$ и $\tilde{x}_3 = (z', z_n, 1)$, а значит, $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle = 2(|z_n|^2 - 1 - z_n + \bar{z}_n)$. Для того чтобы это число было чисто мнимым, необходимо иметь $|z_n| = 1$. Это условие влечет, что $x_3 = (0, z_n)$, и поэтому наша тройка x лежит на $\mathbb{H}$ -прямой $\{(0, \mathbb{H})\}$.

§ 4. Кватернионный инвариант Толедо

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует кватернионная кэлера 4-форма ω в $H_{\mathbb{H}}^n$, ограничение которой на любую $\mathbb{H}$ -прямую в $H_{\mathbb{H}}^n$ задает ее форму объема. Более того, эта форма является замкнутой и ее значения на любых четырех векторах, два из которых порождают вполне вещественную геодезическую 2-плоскость, всегда нулевые.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того что кватернионное гиперболическое пространство $H_{\mathbb{H}}^n$ можно отождествить с $\operatorname{PSp}(n, 1)/\operatorname{Sp}(n) \operatorname{Sp}(1)$, нам достаточно доказать существование указанной 4-формы, которая инвариантна относительно действия $\operatorname{Sp}(n) \operatorname{Sp}(1)$ в касательном пространстве пространства $H_{\mathbb{H}}^n$ в начале координат, т.е. в $\mathbb{R}^{2n}$. При этом действие $\operatorname{Sp}(n) \operatorname{Sp}(1)$ в касательном пространстве задается в виде $v \rightarrow \operatorname{Sp}(1)^{-1}v \operatorname{Sp}(n)$. Такая 4-форма ω получена в [3; предложение 1.1], где из ее конструкции вытекает ее инвариантность относительно

группы изометрий $H_{\mathbb{H}}^n$, а следовательно, это параллельная 4-форма. Поэтому как стандартный факт в римановой геометрии мы имеем, что эта форма ω замкнута. Тем не менее, для доказательства последнего утверждения теоремы наметим конструкцию этой формы ω . Пусть L – какая-то кватернионная прямая, а ν_L является ее формой объема. Тогда, обозначая через Π_L ортогональную проекцию $H_{\mathbb{H}}^n$ на L , определим

$$\Omega = \int_{\mathbb{H}P^{n-1}} \Pi_L^* \nu_L dL,$$

что является усреднением над группой $\mathrm{Sp}(n)$. После этого форма ω получается из Ω распространением с помощью $\mathrm{PSp}(n, 1)$. Для того чтобы показать, что эта форма ω имеет нулевые значения на любых четырех векторах, два из которых порождают вполне вещественную геодезическую 2-плоскость H , представим эту 2-плоскость в виде $\{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 0, \dots, 0)\}$ -стандартной вполне вещественной 2-плоскости в шаровой модели $H_{\mathbb{H}}^n$, и пусть векторы e_1, e_2 образуют ее стандартный базис. Для задания кватернионной прямой L можно считать, что некоторый элемент $A \in \mathrm{Sp}(n)$ отображает ее в первую координатную $\mathbb{H}$ -прямую $LA = L_1 = \{(\mathbb{H}, 0, \dots, 0)\}$. Тогда

$$\Pi_L^* \nu_L(e_1, e_2, v, w) = \nu_{L_1}(\Pi_{L_1}(e_1 A), \Pi_{L_1}(e_2 A), \Pi_{L_1}(v A), \Pi_{L_1}(w A)).$$

Обозначим через A' элемент в $\mathrm{Sp}(n)$, получающийся из A перестановкой первой и второй строк ее матрицы, и пусть $L' = L_1 A'^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_{L'}^* \nu_{L'}(e_1, e_2, v, w) &= \nu_{L_1}(\Pi_{L_1}(e_1 A'), \dots, \Pi_{L_1}(w A')) \\ &= \nu_{L_1}(\Pi_{L_1}(e_2 A), \Pi_{L_1}(e_1 A), \Pi_{L_1}(v A), \Pi_{L_1}(w A)). \end{aligned}$$

Поэтому $\Pi_L^* \nu_L(e_1, e_2, v, w) + \Pi_{L'}^* \nu_{L'}(e_1, e_2, v, w) = 0$. Это влечет, что вышеуказанное усреднение Ω на множестве всех $\mathbb{H}$ -прямых, проходящих через начало координат, обращается в нуль, что доказывает последнее свойство 4-формы ω .

Теперь приступим к конструкции кватернионного инварианта, который наминает известный инвариант Толедо в комплексной гиперболической геометрии. Рассмотрим какую-нибудь тройку $x = (x_1, x_2, x_3)$ различных точек в $H_{\mathbb{H}}^n \cup \partial H_{\mathbb{H}}^n$ и обозначим через σ_{12} и Σ_{12} те единственные вещественную и соответственно кватернионную геодезические, которые соединяют точки x_1 и x_2 . Заметим, что стабилизатором в $\mathrm{PSp}(n, 1)$ геодезической σ_{12} является $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n-1) \times \mathbb{R}$. Пусть $\Pi: H_{\mathbb{H}}^n \rightarrow \Sigma_{12}$ – ортогональная проекция. Обозначим через $\Delta_{12} \subset \Sigma_{12}$ геодезический треугольник в этой $\mathbb{H}$ -геодезической с вершинами в $\Pi(x_1) = x_1, \Pi(x_2) = x_2$ и $\Pi(x_3)$. И пусть $\Delta_{\Pi(x)}$ – $\mathrm{Sp}(1)$ -орбита треугольника Δ_{12} , являющаяся 4-мерной областью в $\mathbb{H}$ -прямой Σ_{12} . Наконец, определим $\Delta_x \subset H_{\mathbb{H}}^n$ как любой 4-мерный объект, содержащий тройку $x = (x_1, x_2, x_3)$, Π -проекция которого на $\mathbb{H}$ -прямую Σ_{12} совпадает с $\Delta_{\Pi(x)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Для тройки точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\overline{H_{\mathbb{H}}^n})^3$ кватернионный инвариант Толедо $\tau_{\mathbb{H}}(x)$ определяется как следующий интеграл кватернионной кэлеровой формы ω из теоремы 4.1:

$$\tau_{\mathbb{H}}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_x} \omega.$$

Независимость этого определения от выбора Δ_x вытекает из следующего факта.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для любой тройки точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\overline{H_{\mathbb{H}}^n})^3$ имеем $\tau_{\mathbb{H}}(x) = 2\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Δ 5-мерный объект в $H_{\mathbb{H}}^n$, 4-мерная граница которого состоит из Δ_x , $\Delta_{\Pi(x)}$ и вполне вещественной геодезической 4-мерной вертикальной поверхности σ , соединяющей $\partial\Delta_x$ и $\partial\Delta_{\Pi(x)}$. В силу того что $d\omega = 0$, по теореме Стокса получаем

$$\int_{\Delta} d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega = 0.$$

С другой стороны, лемма 2.2 показывает, что касательное пространство к каждой точке $z \in \sigma$ содержит два вектора, определяющих вполне вещественную геодезическую 2-плоскость. Отсюда и из теоремы 4.1 вытекает, что $\int_{\sigma} \omega = 0$, поэтому

$$\int_{\Delta_x} \omega = \int_{\Delta_{\Pi(x)}} \omega = \int_{\Delta_{\Pi(x)}} \omega_{\text{vol}},$$

где, как и раньше, $\Pi: H_{\mathbb{H}}^n \rightarrow \Sigma_{12}$ – ортогональная проекция на $\mathbb{H}$ -прямую Σ_{12} с формой объема ω_{vol} и $x_1, x_2 \in \Sigma_{12}$. Можно считать, что $x_1 = (0, \dots, 0, -1)$, $x_2 = (0, \dots, 0, 1)$ и $x_3 = (z_1, \dots, z_n)$ – точки в замкнутом единичном шаре $\overline{B_{\mathbb{H}}^n(0, 1)} \subset \mathbb{H}^n$. Тогда $\int_{\Pi(\Delta_x)} \omega_{\text{vol}}$ – интеграл от формы гиперболического объема в $\Sigma_{12} \cong H_{\mathbb{R}}^4$ над 4-мерной областью $\Delta_{\Pi(x)}$, являющейся $\text{Sp}(1)$ -орбитой геодезического треугольника $\Delta_{12} = \Delta(x_1, x_2, z_n) \subset H_{\mathbb{R}}^4$ с вершинами x_1 , x_2 и $\Pi(x_3) = (0, \dots, 0, z_n)$. При этом гиперболическая метрика в $H_{\mathbb{R}}^4$ может быть представлена (относительно σ_{12}) в следующем виде:

$$d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho \cdot d\theta^2 + \text{ch}^2 \rho \cdot d\lambda^2,$$

где ρ – гиперболическое расстояние от σ_{12} , λ – расстояние вдоль σ_{12} , а θ – параметр вращения вокруг σ_{12} . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_{\Pi(x)}} \omega_{\text{vol}} &= \int_{\text{Sp}(1)\Delta(x_1, x_2, z_n)} \omega_{\text{vol}} = \int_{S^2} \int_{\Delta(x_1, x_2, z_n)} \text{sh} \rho \text{ch} \rho \, d\rho \, d\lambda \, d\theta \\ &= \text{Area}(\Delta(x_1, x_2, z_n)) \text{Area}(S^2) = 4\pi \text{Area}(\Delta(x_1, x_2, z_n)). \end{aligned}$$

Теперь достаточно показать, что $\text{Area}(\Delta(x_1, x_2, z_n)) = 2\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$. В самом деле, угловой инвариант Картана $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$ равен углу между координатной осью $\mathbb{R}e_1 \subset \mathbb{R}^4$ и вектором, задающим кватернион $(\overline{z_n} - 1)(1 + z_n)$, в силу того, что тройное эрмитово произведение $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \rangle = 2(\overline{z_n} - 1)(1 + z_n)$.

Так как гиперболическая 2-плоскость, содержащая $\Delta(x_1, x_2, z_n)$, может быть отождествлена с единичным кругом Пуанкаре, мы можем представить точку z_n в замыкании этого круга как некоторое комплексное число $z_n = \text{Re } z_n + i|\text{Im } z_n|$. При этом $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$ становится равным $|\arg((1 - \overline{z_n})(1 + z_n))|$, а образом точки z_n при отображении Кэли ϕ круга Пуанкаре на правую полуплоскость является точка $\phi(z_n) = \frac{1}{2}(1 - z_n)/(1 + z_n)$. Так как $\phi(1) = 0$, $\phi(-1) = \infty$, то легко видно, что площадь образа нашего треугольника в этой модели гиперболической

плоскости $H_{\mathbb{R}}^2$ (в правой полуплоскости), т.е. треугольника $\triangle(0, \infty, \phi(z_n))$, равняется $2|\arg \phi(z_n)|$. Так как $|\arg \phi(z_n)| = |\arg((1 - z_n)(1 + \bar{z}_n))| = \mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x)$, то это завершает доказательство теоремы 4.3.

Доказанная теорема и предложение 3.2, показывающее независимость углового инварианта $\mathbb{A}_{\mathbb{H}}(x_1, x_2, x_3)$ от перестановки точек, немедленно дают

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Кватернионный инвариант Толедо $\tau_{\mathbb{H}}(x_1, x_2, x_3)$ тройки точек в $\overline{H_{\mathbb{H}}^n}$ не изменяется при перестановке точек.*

Другими словами, это следствие показывает, что интеграл от кватернионной кэлеровой формы в определении кватернионного инварианта Толедо $\tau_{\mathbb{H}}(x_1, x_2, x_3)$ не зависит от выбора геодезического ребра $\overline{x_i x_j}$, используемого в конструкции Δ_x .

§ 5. Угловой инвариант в гиперболической плоскости Кэли

Повторяя аргументы предыдущего параграфа и применяя конструкцию Корлетта из [13], получаем октанионную замкнутую 8-форму ω в гиперболической плоскости Кэли $H_{\mathbb{O}}^2$ со свойствами, аналогичными свойствам кватернионной 4-формы в теореме 4.1. Принимая во внимание утверждение теоремы 4.3, мы можем использовать эту замкнутую 8-форму ω для определения углового инварианта в гиперболической плоскости Кэли. Так как подгруппа группы автоморфизмов F_4^{-20} пространства $H_{\mathbb{O}}^2$, оставляющая неподвижными начало координат в группе Карно $N \cong \partial H_{\mathbb{O}}^2 \setminus \{\infty\}$ и бесконечно удаленную точку ∞ , является $\text{Spin}(7)A$ (относительно разложения Ивасава $F_4^{-20} = KAN$), то стабилизатор вещественной геодезической в $H_{\mathbb{O}}^2$ (в компактной группе вращений K) сопряжен группе $\text{Spin}(7)$. Для заданной тройки x бесконечно удаленных точек $x_1, x_2, x_3 \in \partial H_{\mathbb{O}}^2$ определим σ_{12} и Σ_{12} как единственные вещественную и октанионную геодезические в $H_{\mathbb{O}}^2$, соединяющие x_1 и x_2 , и пусть $\Pi: H_{\mathbb{O}}^2 \rightarrow \Sigma_{12}$ – ортогональная проекция. Как и в предыдущем параграфе, обозначим через Δ_{12} геодезический 2-мерный треугольник в $\mathbb{O}$ -геодезической $\Sigma_{12} \cong H_{\mathbb{R}}^8$ с вершинами x_1, x_2 и $\Pi(x_3)$, а через Δ_x – его $\text{Spin}(7)$ -орбиту в Σ_{12} , получаемую вращениями вокруг вещественной геодезической σ_{12} и являющуюся 8-мерной областью в Σ_{12} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Октанионный угловой инвариант $\mathbb{A}_{\mathbb{O}}(x)$ задается как следующий интеграл от октанионной кэлеровой 8-формы ω :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{O}}(x) = \frac{1}{\text{Vol}(S^6)} \int_{\Delta_x} \omega.$$

Аналогично кватернионному случаю из свойств ортогональной проекции Π в гиперболической плоскости Кэли $H_{\mathbb{O}}^2$ и замкнутой 8-формы ω , обращающейся в нуль на 2-мерных вполне вещественных направлениях, немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 5.2. *Октанионный угловой инвариант $\mathbb{A}_{\mathbb{O}}(x)$ тройки бесконечно удаленных точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\partial H_{\mathbb{O}}^2)^3$ обладает следующими свойствами:*

- 1) $\mathbb{A}_{\mathbb{O}}$ инвариантен относительно изометрий $H_{\mathbb{O}}^2$, и поэтому тройки x и x' с различными значениями $\mathbb{A}_{\mathbb{O}}(x) \neq \mathbb{A}_{\mathbb{O}}(x')$ не изометричны друг другу;

- 2) $A_0(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x находится на границе некоторой вполне вещественной гиперболической 2-плоскости в H_0^2 ;
- 3) $A_0(x) = \pi/2$, если и только если тройка x лежит на границе некоторой октанионной геодезической.

Следует отметить, что, как и в кватернионном случае, октанионный угловой инвариант $A_0(x)$ не может различать различные конфигурации k -мерных сфер, лежащих на бесконечно удаленной сфере октанионной геодезической. В частности, это относится к вещественному линейному $(k+1)$ -мерному подпространству L , $k \leq 6$, и результату его изгибания L' относительно гиперплоскости, см. следующий параграф.

§ 6. Изгибания локально симметрических пространств ранга 1

Рассмотрим локально симметрическое пространство M_0 ранга 1 с фундаментальной группой $\Gamma = \pi_1(M_0)$ (в категории орбифолдов), действующей дискретно на его универсальном накрытии $\widetilde{M}_0$, т.е. в некотором гиперболическом $\mathbb{F}$ -пространстве $H_{\mathbb{F}}^n$. Можно определить его пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}(M_0)$ как пространство классов изотопии отмеченных $\mathbb{F}$ -гиперболических структур на M_0 . Используя представления голономии, индуцированные развертывающими отображениями таких структур на M_0 , мы можем исследовать вместо $\mathcal{T}(M_0)$ многообразие $\mathcal{T}(\Gamma)$ классов сопряженности дискретных точных представлений $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$. Здесь $\mathcal{T}(\Gamma) = \mathcal{R}_0(\Gamma)/\text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$, а многообразие $\mathcal{R}_0(\Gamma) \subset \text{Hom}(\Gamma, \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n)$ состоит из дискретных точных представлений ρ группы Γ , чей кообъем $\text{Vol}(H_{\mathbb{F}}^n/\Gamma)$ может быть бесконечен.

Здесь мы представим каноническую конструкцию изгибающих деформаций широкого класса $\mathbb{F}$ -гиперболических аналитических многообразий M_0 . Это покажет нетривиальность пространств Тейхмюллера для таких многообразий, в противовес многочисленным результатам о жесткости [1]–[3]. Для вещественных гиперболических n -многообразий, $n \geq 3$, такие деформации были впервые построены первым автором в 1978 г. и получили в дальнейшем (после примера “Микки-Мауса” Тёрстона) название “изгибаний” M_0 вдоль его вполне геодезической гиперповерхности (см. [8], [24]). Недавно Б. Н. Апанасов [9] определил изгибающие деформации для комплексных гиперболических многообразий M_0 , где такие изгибания связаны с вещественными замкнутыми геодезическими в M_0 и, кроме того, могут быть индуцированы эквивариантными квазиконформными гомеоморфизмами.

Однако кватернионные и октанионные гиперболические структуры сильно отличаются от вещественных и комплексных структур, в том числе большей жесткостью, следующей из теорем супержесткости Корлетта [3] и Громова–Шоена [4] для равномерных решеток.

6.1. Изгибающие представления. Здесь мы покажем, в какой степени изгибающие деформации могут работать в случае кватернионных и октанионных гиперболических структур на $M_0 = H_{\mathbb{F}}^n/\Gamma$, т.е. когда они могут определять кривые в пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}(\Gamma)$, состоящие из классов сопряженности нетривиальных квазифуксовых представлений $\rho_t: \Gamma \rightarrow \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$.

Сначала приведем некоторые ситуации, где такие изгибания невозможны. Пусть в первом случае дискретная группа $\Gamma \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$ оставляет инвариантной некоторую кватернионную прямую или прямую Кэли $H_{\mathbb{F}}^1 \subset H_{\mathbb{F}}^n$. Индуцированная на этой прямой метрика является метрикой Пуанкаре вещественного гиперболического пространства $H_{\mathbb{R}}^k$, где k равно соответственно 4 либо 8. Поэтому если Γ имеет изгибающую гиперплоскость $P \subset H_{\mathbb{F}}^1$, $P \cong H_{\mathbb{R}}^{k-1}$, то Γ может быть “изогнута” в большем гиперболическом вещественном пространстве $H_{\mathbb{R}}^{k+1}$ (см. [8], [24]). Тем не менее, любое аналитическое вращение U в $H_{\mathbb{F}}^n$, оставляющее P поточно неподвижной, должно быть тождественным отображением на всей $\mathbb{F}$ -прямой. Это показывает невозможность такой наивной попытки изгибать группу Γ внутри всего пространства $H_{\mathbb{F}}^n$ (ср. (10)). Вторая такая “неизгибаемая” ситуация возникает для решеток $\Gamma \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^k$, $2 \leq k \leq n$. В этом случае множество неподвижных точек (в $H_{\mathbb{F}}^k$) однопараметрической компактной подгруппы Ли в $\text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$, элементы которой необходимы для изгибания Γ (ср. (10)), является геодезическим аналитическим подпространством вещественной коразмерности не менее 2. Это показывает, что такие неразделяющие плоскости не могут служить в качестве изгибающих.

Пусть теперь $\Gamma \subset \text{Isom } H_{\mathbb{R}}^n \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$ – дискретная группа (необязательно решетка), действующая изометрически во вполне геодезическом вещественном подпространстве $H_{\mathbb{R}}^n \subset H_{\mathbb{F}}^n$, как и во всем пространстве $H_{\mathbb{F}}^n$, с функцией расстояния d . При этом Γ удовлетворяет главному условию, что она имеет вещественную изгибающую гиперплоскость $P \cong H_{\mathbb{R}}^{n-1} \subset H_{\mathbb{R}}^n$ такую, что

$$\inf\{d(\gamma(P), P) : \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_P\} = d_P > 0, \quad (8)$$

а ее стабилизатор $\Gamma_P = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(P) = P\}$ – собственная подгруппа в Γ , $\Gamma_P \neq \Gamma$.

Как известно из теоремы о тубулярной окрестности [25], [26], любая вложенная вполне геодезическая гиперповерхность S в вещественном гиперболическом многообразии, имеющая площадь A , обладает тубулярной окрестностью ширины $c_n(A)$, которая зависит только от размерности n и площади A . Отсюда получаем, что условие (8) на группу Γ , имеющую подгруппой равномерную решетку $\Gamma_P \subset \text{Isom } H_{\mathbb{R}}^{n-1}$, равносильно существованию вложенного вполне геодезического гиперпространства $P/\Gamma_P \subset H_{\mathbb{R}}^n/\Gamma$, называемого изгибающим подорбифолдом. Другими словами, мы сможем построить изгибающие деформации $\mathbb{F}$ -гиперболического многообразия M_0 в случае его гомотопической эквивалентности вполне вещественному подмногообразию с вложенной вполне геодезической гиперповерхностью. Используя модели пространств в единичных шарах, мы имеем

$$P = H_{\mathbb{R}}^{n-1} \cong B_{\mathbb{R}}^{n-1} \subset B_{\mathbb{R}}^n \cong H_{\mathbb{R}}^n \subset H_{\mathbb{F}}^n \cong B_{\mathbb{F}}^n,$$

а также некоторую $\mathbb{F}$ -гиперплоскость $H_{\mathbb{F}}^{n-1} \subset H_{\mathbb{F}}^n$, которая ортогонально пересекает наше вещественное подпространство $H_{\mathbb{R}}^n$ вдоль P . В фиксированной точке $x_0 \in P$ ортогональное дополнение к P в $H_{\mathbb{R}}^n$ является некоторой вещественной геодезической $\ell \subset H_{\mathbb{R}}^n$, получающейся как (ортогональное) пересечение пространства $H_{\mathbb{R}}^n$ и $\mathbb{F}$ -геодезической $H_{\mathbb{F}}^1 \subset H_{\mathbb{F}}^n$, равной ортогональному дополнению в $H_{\mathbb{R}}^n$ к $\mathbb{F}$ -гиперплоскости $H_{\mathbb{F}}^{n-1}$ в точке x_0 . Мы имеем связную

компактную подгруппу Ли $\mathcal{U}_{\mathbb{F}}$, состоящую из автоморфизмов $H_{\mathbb{F}}^n$, оставляющих изгибающую плоскость P поточно неподвижной. Если $\mathbb{F} \neq \mathbb{O}$, то группа $\mathcal{U}_{\mathbb{F}}$ соответствует группе единичных $\mathbb{F}$ -чисел, действующей в $H_{\mathbb{F}}^n$ и $H_{\mathbb{F}}^1$ ортогональными вращениями. При этом $\mathbb{F}$ -гиперплоскость $H_{\mathbb{F}}^{n-1}$, содержащая изгибающую плоскость P , есть множество неподвижных точек группы $\mathcal{U}_{\mathbb{F}}$. В случае плоскости Кэли наша изгибающая плоскость P является вещественной геодезической, а наша подгруппа Ли $\mathcal{U}_{\mathbb{O}} \subset \text{Spin}(9)$ есть $\text{Spin}(7)$. Она оставляет P поточно неподвижной и действует в $\mathbb{O}$ -прямой, ортогональной к P , ортогональными преобразованиями. Это показывает, что вещественная размерность $k_{\mathbb{F}}$ однородного пространства $\mathcal{U}_{\mathbb{F}}$ равна 1, 3 и 6 соответственно в комплексном, кватернионном и октанионном случаях. За исключением инволюций, все другие элементы $U \in \mathcal{U}_{\mathbb{F}}$ отображают геодезическую ℓ в геодезические $U(\ell)$, пересекающие ℓ в точке x_0 и не лежащие в $H_{\mathbb{R}}^n$. Глядя на бесконечность наших пространств в орисферических координатах (т.е. представляя их в виде $\mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F} \times [0, \infty)$), мы видим, что вращения $U \in \mathcal{U}$ оставляют поточно неподвижным подпространство $\mathbb{R}^{n-2} = \partial H_{\mathbb{R}}^{n-1} \subset \partial H_{\mathbb{F}}^{n-1}$, лежащее в вещественном подпространстве $\overline{\mathbb{R}^{n-1}} = \partial H_{\mathbb{R}}^n$ горизонтальной плоскости $\mathbb{F}^{n-1} \times \{0\}$ в группе Карно $\mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F}$.

Рассмотрим теперь дискретную группу $\Gamma \subset \text{PO}(n, 1) \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$ с инвариантным вполне вещественным n -пространством $H_{\mathbb{R}}^n \subset H_{\mathbb{F}}^n$, удовлетворяющую условию (8), т.е. имеющую вещественную изгибающую гиперплоскость $P \subset H_{\mathbb{R}}^n$ со стабилизатором $\Gamma_P \subset \Gamma$, $\Gamma_P \neq \Gamma$. Тогда в зависимости от того, разделяет или нет орбифолд P/Γ_P факторпространство $H_{\mathbb{R}}^n/\Gamma$, группа Γ может быть представлена либо как свободное амальгамированное произведение, либо как HNN -расширение:

$$\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_P} \Gamma_2 \quad \text{или} \quad \Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_P} = \langle \Gamma_1, \gamma_2 \rangle, \quad (9)$$

где Γ_1 и Γ_2 – подгруппы в Γ , $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_P$, а $\gamma_2 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ сопрягает две подгруппы в Γ_1 , изоморфные Γ_P .

Определим наши изгибающие деформации группы Γ в $\text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$ относительно вещественной изгибающей гиперплоскости $P \subset H_{\mathbb{R}}^n$. Для этого рассмотрим некоторую однопараметрическую подгруппу Ли $\{U_{\eta}\}$ вышеописанной компактной группы Ли $\mathcal{U}_{\mathbb{F}} \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$, оставляющую изгибающую плоскость P поточно неподвижной. Тогда в обоих случаях свободных амальгамированных произведений или HNN -расширений в (9) определим деформированные группы $\Gamma_{\eta} \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$ в соответствующем виде:

$$\Gamma_{\eta} = \Gamma_1 *_{\Gamma_P} U_{\eta} \Gamma_2 U_{\eta}^{-1} \quad \text{или} \quad \Gamma_{\eta} = \langle \Gamma_1, U_{\eta} \gamma_2 \rangle \cong \Gamma_1 *_{\Gamma_P}. \quad (10)$$

Мы видим, что для достаточно малых η получающиеся группы Γ_{η} являются дискретными. В общей ситуации эта дискретность следует из существования топологического сопряжения действий групп Γ_{η} и Γ во всем пространстве $H_{\mathbb{F}}^n$. С другой стороны, в случае выпуклых кокомпактных групп без кручения для этого можно также использовать результаты С. Чена и Л. Гринберга (см. [23; следствие 4.5.5]), в которых утверждается, что такие чисто локсодромические группы являются дискретными.

Теперь прямое применение определенного выше углового инварианта Картана (или инварианта Толедо) показывает, что наша конструкция, применяемая к нетривиальным подгруппам Γ_1 и Γ_2 (в частности, для вещественных

решеток Γ), дает в качестве деформированных групп Γ_η нетривиальные квазифуксовы группы в $H_{\mathbb{F}}^n$. Предельное множество такой группы Γ_η является жордановой сферой в $\partial H_{\mathbb{F}}^n$, которая не является бесконечно удаленной сферой вполне геодезического подпространства в $\partial H_{\mathbb{F}}^n$ и имеет вещественную размерность $n - 1$.

Кроме того, конструкция (10) показывает, что семейство представлений

$$\rho_\eta: \Gamma \rightarrow \Gamma_\eta \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$$

аналитически зависит от параметра η и потому задает гладкие кривые в пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}(\Gamma)$ и $\mathcal{T}(M_0)$. Вещественная размерность $k_{\mathbb{F}}$ этих кривых равна 1, 3 и 6 соответственно для случаев $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $\mathbb{F} = \mathbb{O}$, т.е. комплексных и кватернионных чисел и чисел Кэли.

6.2. Изгибания группы поверхности $\text{Isom } H_{\mathbb{F}}^n$. Предположим, что имеется вполне вещественная геодезическая поверхность $S = H_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ в $\mathbb{F}$ -гиперболическом многообразии $M_0 = H_{\mathbb{F}}^2/\Gamma$, гомотопически эквивалентном этой поверхности, и зафиксируем некоторую простую замкнутую геодезическую $\alpha \subset S$. Здесь дискретная группа $\Gamma \subset \text{PO}(2,1) \hookrightarrow \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$ задает действие фундаментальной группы $\pi_1(S) = \pi_1(M_0)$ в пространстве $H_{\mathbb{F}}^2$, которое естественным образом заменяется на n -мерное пространство $H_{\mathbb{F}}^n$ (например, кватернионное пространство $H_{\mathbb{H}}^n$). Такая замена увеличивает число параметров наших изгибающих деформаций, так как увеличивается размерность группы вращений вокруг $\mathbb{F}$ -прямой в n -мерном пространстве.

Обозначим через $P \subset H_{\mathbb{R}}^2 \subset H_{\mathbb{F}}^2$ вещественную бесконечную геодезическую, накрывающую петлю α и имеющую своими концами ∞ и начало координат группы Карно $N = \mathbb{F} \times \text{Im } \mathbb{F}$ (в орисферических координатах в $H_{\mathbb{F}}^2$). При этом мы можем считать (надлежащим образом деформируя поверхность S и ее группу голономии Γ в $\text{PO}(2,1)$), что петля α имеет достаточно малую гиперболическую длину ε и что ее трубчатая окрестность имеет достаточно большой радиус δ . Это вытекает из следующего факта [14], который справедлив, в частности, для значений $\varepsilon < 0.791411$ и $\ln 63 \leq \delta < \text{Ar csch}(2\text{sh}(\varepsilon/4))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть γ_α – гиперболический элемент неэлементарной дискретной группы $\Gamma \subset \text{PO}(2,1) \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$, задающий перенос длины ε вдоль своей оси $P \subset H_{\mathbb{R}}^2$. Тогда тубулярная окрестность $U_\delta(P)$ оси P радиуса $\delta > 0$ является собственно инвариантной относительно своего стабилизатора $\Gamma_P \subset \Gamma$, если

$$\text{sh } \frac{\varepsilon}{4} \cdot \text{sh } \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Более того, для достаточно малого ε , $\varepsilon < 4\delta$, полиэдр Дирихле $D_z(\Gamma)$ группы Γ с центром в точке $z \in P$ имеет две грани σ и σ' , пересекающие ось P и такие, что $\gamma_\alpha(\sigma) = \sigma'$.

Применяя это утверждение вместе с описанием бисекторов в п. 2.2 и теоремой 2.4, рассмотрим замкнутую геодезическую α с такой малой длиной ε , что ковертикальный бисектор в $H_{\mathbb{F}}^2$, задающийся на бесконечности как $\text{Im } \mathbb{F} \times \text{Im } \mathbb{F} \subset \mathbb{F} \times \text{Im } \mathbb{F} \subset \partial H_{\mathbb{F}}^2$, не пересекается с замкнутыми полупространствами в $\overline{H_{\mathbb{F}}^2} \setminus \{\infty\}$, ограниченными бисекторами Дирихле орбиты $\Gamma(z)$ центральной

точки $z \in D_z(\Gamma)$ и не пересекающимися с $D_z(\Gamma)$. При этом полиэдры Дирихле с центром в точке $z \in P = (0, \infty)$ для группы Γ и ее подгрупп Γ_P , Γ_1 , Γ_2 в (9) пересекаются с нашей вещественной гиперболической 2-плоскостью $H_{\mathbb{R}}^2$ вдоль многоугольников Дирихле, характерных для произведений групп (9) (см. [9], [15]). В частности, все бисекторы, ограничивающие эти полиэдры Дирихле и отличные от двух бисекторов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$, $\gamma_\alpha(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$, содержащих указанные в предложении 6.1 грани σ и σ' , содержатся в достаточно узких “конических окрестностях” C_+ и C_- двух вещественных лучей $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ в вещественной прямой $\mathbb{R} \times \{0\} = \partial H_{\mathbb{R}}^2 \setminus \{\infty\} \subset \mathbb{F} \times \text{Im } \mathbb{F} = N$. Используя метрику Цыгана (2), мы можем считать, что радиусы спинальных сфер в бесконечности этих двух бисекторов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ равны 1 и $r_0 > 1$ соответственно. Зафиксировав достаточно малое ε , $0 < \varepsilon \ll r_0 - 1$, можно представить наши конические окрестности C_+ , C_- в $\overline{H_{\mathbb{R}}^2} \setminus \{\infty\} = \mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F} \times [0, +\infty)$ как конусы с вершинами в начале координат $(0, 0, 0)$ над ε -окрестностями двух точек $(1, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0)$ относительно метрики Цыгана ρ_c в $\mathbb{F}^{n-1} \times \text{Im } \mathbb{F} \times [0, +\infty)$.

Теперь зафиксируем числа η и ζ , $0 < \zeta < \pi/2$, $0 \leq \eta < \pi - 2\zeta$, такие, что пересечение $C_+ \cap (\mathbb{F} \times \{0\} \times \{0\})$ содержится в ζ -угловой окрестности $\mathbb{F}_\zeta(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{F}$ положительного вещественного луча $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{F}$, рассматриваемого как евклидово пространство размерности $\dim \mathbb{F}$. Фиксируя какую-либо однопараметрическую подгруппу Ли $\{U_t\}$ компактной группы Ли $\mathcal{U}_{\mathbb{F}} \subset \text{Isom } \mathbb{F}$, мы определим изгибающий Γ_P -эквивариантный гомеоморфизм $\phi = \phi_{\eta, \zeta}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, который изгибает вещественную ось $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$ в начале координат на угол η и удовлетворяет условиям:

- 1) ϕ является тождественным в ζ -угловой окрестности $\mathbb{F}_\zeta(\mathbb{R}_-) \subset \mathbb{F}$ луча $\mathbb{R}_-$;
- 2) в окрестности $\mathbb{F}_\zeta(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{F}$ луча $\mathbb{R}_+$ он совпадает с вращением U_η ;
- 3) он сохраняет инвариантной любую метрическую сферу (относительно метрики Цыгана) с центром $0 \in \mathbb{F}$;
- 4) он отображает любой луч, исходящий из $0 \in \mathbb{F}$, в подобный луч.

Рассматривая расслоение проколотой группы Карно $N \setminus \{0\}$ на C -сферы $S(0, r) = \{z \in N : |z|_c = r\}$, $r > 0$, и связанное с ним расслоение всего $\mathbb{F}$ -гиперболического пространства $H_{\mathbb{F}}^2$ на бисекторы, имеющие эти C -сферы своими спинальными сферами в бесконечности, мы можем использовать нашу конструкцию в [14] и продолжить определенный выше изгибающий гомеоморфизм $\phi_{\eta, \zeta}$ до Γ_P -эквивариантного гомеоморфизма всего пространства $\overline{H_{\mathbb{F}}^2}$, согласованного с его структурой. Однако в отличие от комплексного случая кватернионные гиперболические пространства и гиперболическая плоскость Кэли обладают дополнительной жесткостью, обнаруженной П. Пансу [27] и препятствующей квазиизометричности таких гомеоморфизмов. Поэтому мы можем ограничиться более простым топологическим продолжением $\phi_{\eta, \zeta}$.

Для этого мы продолжим конические окрестности $\mathbb{F}_\zeta(\mathbb{R}_\pm) \subset \mathbb{F}$ вещественных лучей $\mathbb{R}_\pm \subset \mathbb{R}$ до их конических окрестностей $N_\zeta(\mathbb{R}_\pm) \subset N = \partial H_{\mathbb{F}}^2 \setminus \{\infty\}$ и $H_\zeta(\mathbb{R}_\pm) \subset \overline{H_{\mathbb{F}}^2}$. Эти новые конусы соответственно пересекают горизонтальную $\mathbb{F}$ -прямую $\mathbb{F} \times \{0\} \subset N$ и N по вышеопределенным коническим окрестностям лучей $\mathbb{R}_\pm$ и содержат все бисекторы (соответственно их бесконечно удаленные спинальные сферы), ограничивающие полиэдр Дирихле $D_z(\Gamma)$ и отличные от двух бисекторов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$, отождествляемых порождающим $\gamma_\alpha \in \Gamma_P$, $\gamma_\alpha(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$.

Кроме того, как видно из конструкции, замыкания этих конических окрестностей пересекают замыкание ковертикального бисектора и его спинальную сферу $(\text{Im } \mathbb{F} \times \text{Im } \mathbb{F}) \cup \{\infty\} \subset \partial H_{\mathbb{F}}^2$ только в ∞ и в начале координат группы Карно $N = \mathbb{F} \times \text{Im } \mathbb{F}$.

Теперь определим элементарный изгибающий гомеоморфизм $\varphi_{\eta, \zeta}: \overline{H_{\mathbb{F}}^2} \rightarrow \overline{H_{\mathbb{F}}^2}$ как следующее Γ_P -эквивариантное продолжение гомеоморфизма $\phi_{\eta, \zeta}$:

- 1) $\varphi_{\eta, \zeta}$ является тождественным в замыкании окрестности $H_{\zeta}(\mathbb{R}_-) \subset \overline{H_{\mathbb{F}}^2}$ луча $\mathbb{R}_- \subset \partial H_{\mathbb{F}}^2$ и в замыкании $\mathbb{F}$ -геодезической $\{0\} \times \text{Im } \mathbb{F} \times (0, \infty) \subset H_{\mathbb{F}}^2$;
- 2) в окрестности $H_{\zeta}(\mathbb{R}_+) \subset \overline{H_{\mathbb{F}}^2}$ луча $\mathbb{R}_+$ он совпадает с вращением U_{η} ;
- 3) он сохраняет инвариантным любой бисектор $\mathfrak{S}_r$, чья бесконечно удаленная сфера $\partial \mathfrak{S}_r$ есть сфера $S(0, r) \subset N$;
- 4) он коммутирует с $\gamma_{\alpha} \in \Gamma_P$ на дополнениях $\overline{\mathfrak{S} \setminus H_{\zeta}(\mathbb{R}_+)}$ и $\overline{\mathfrak{S}' \setminus H_{\zeta}(\mathbb{R}_+)}$.

Указанное продолжение получается обычным топологическим продолжением гомеоморфизма в топологический шар, зависящим от его задания на граничной сфере. В то же время, $\varphi_{\eta, \zeta}$ обладает некоторыми “метрическими” свойствами на гранях полиэдра Дирихле $D_z(\Gamma)$, отличными от граней $\sigma \subset \mathfrak{S}$ и $\sigma' \subset \mathfrak{S}'$. Если бисектор $\mathfrak{S}_0$ содержит какую-то грань полиэдра $D_z(\Gamma)$ и не является одним из бисекторов $\mathfrak{S}_r$, $r > 0$, обозначим ограниченное им полупространство, не пересекающееся с $D_z(\Gamma)$, через $\mathfrak{S}_0^+$. Тогда имеется его открытая окрестность $N(\mathfrak{S}_0^+) \subset \overline{H_{\mathbb{F}}^2}$ такая, что сужение $\varphi_{\eta, \zeta}$ на эту окрестность является либо тождественным отображением, либо совпадает с вращением $U_{\eta} \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$ на угол η вокруг “вертикальной” $\mathbb{F}$ -геодезической в $H_{\mathbb{F}}^2$, чья бесконечно удаленная сфера содержит центр $\{0\} \times \text{Im } \mathbb{F}$ группы Карно N .

Гомеоморфизм $\varphi_{\eta, \zeta}$ отображает $D_z(\Gamma)$ в полиэдр $D_{\eta} = \varphi_{\eta, \zeta}(D_z(\Gamma))$, ограниченный бисекторами и имеющий естественное отождествление его граней. А именно, пары граней, инвариантные относительно $\varphi_{\eta, \zeta}$, отождествляются исходными порождающими группы $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Для других граней s_{η} полиэдра D_{η} , которые являются образами граней s полиэдра $D_z(\Gamma)$ относительно вращения U_{η} , мы определим их отождествления на основе разложения (9) группы Γ . Если $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_P} \Gamma_2$, то мы заменим исходное отождествление граней $D_z(\Gamma)$ элементом $\gamma \in \Gamma_2$ на новую $H_{\mathbb{F}}^2$ -изометрию $U_{\eta} \gamma U_{\eta}^{-1}$. Если $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_P} = \langle \Gamma_1, \gamma_2 \rangle$, то мы заменим исходное отождествление граней $D_z(\Gamma)$ элементом γ_2 на новую $H_{\mathbb{F}}^2$ -изометрию $U_{\eta} \gamma_2$. Таким образом, деформированная группа $\Gamma_{\eta} \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$, порожденная отождествлением граней D_{η} , имеет вид (10), а наше представление $\Gamma \rightarrow \Gamma_{\eta} \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$ не зависит от ζ и аналитически зависит от углового параметра η .

Наша конструкция показывает, что для достаточно малого угла η поведение соседних полиэдров $\gamma_{\eta}(\overline{D_{\eta}})$, $\gamma_{\eta} \in \Gamma_{\eta}$, ограниченных бисекторами и содержащих какое-то ребро полиэдра $\overline{D_{\eta}}$ коразмерности 2, аналогично поведению соответствующих полиэдров $\gamma(\overline{D_z(\Gamma)})$, $\gamma \in \Gamma$, окружающих прообраз этого ребра. Более того, малые окрестности таких ребер D_{η} имеют разбиения, задаваемые полиэдрами $\gamma_{\eta}(\overline{D_{\eta}})$ и изометрически подобные соответствующим разбиениям малых окрестностей их ребер-прообразов полиэдрами $\gamma(\overline{D_z(\Gamma)})$. Из этого результата и из обобщения теоремы А. Д. Александрова (ср. [8], [24]) вытекает, что полиэдры $\gamma_{\eta}(\overline{D_{\eta}})$, $\gamma_{\eta} \in \Gamma_{\eta}$, образуют замощение $H_{\mathbb{F}}^2$, при котором внутренности полиэдров не пересекаются. Таким образом, деформированная группа $\Gamma_{\eta} \subset \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$ является дискретной, а D_{η} – ее фундаментальный полиэдр.

Рассматривая Γ -эquivариантное продолжение нашего элементарного изгибающего гомеоморфизма двух замкнутых полиэдров $\varphi_{\eta, \zeta}: \overline{D_z(\Gamma)} \rightarrow \overline{D_\eta}$ до гомеоморфизма двух замощений $H_{\mathbb{F}}^2$ полиэдрами, мы получаем искомый Γ -эquivариантный гомеоморфизм $F_\eta: \overline{H_{\mathbb{F}}^2} \setminus \Lambda(\Gamma) \rightarrow \overline{H_{\mathbb{F}}^2} \setminus \Lambda(\Gamma_\eta)$. Его продолжение по непрерывности на предельную $\mathbb{R}$ -окружность $\Lambda(\Gamma)$ совпадает с каноническим эquivариантным гомеоморфизмом $f_\chi: \Lambda(\Gamma) \rightarrow \Lambda(\Gamma_\eta)$, определяемым изоморфизмом $\chi: \Gamma \rightarrow \Gamma_\eta$ (ср. [9]). Таким образом, мы имеем Γ -эquivариантный гомеоморфизм всего $\overline{H_{\mathbb{F}}^2}$ на себя, который по-прежнему обозначается через F_η .

Для малого $\eta_0 > 0$ построенные Γ -эquivариантные гомеоморфизмы F_η задают семейство представлений $F_\eta^*: \Gamma \rightarrow \Gamma_\eta = F_\eta \Gamma F_\eta^{-1}$, $\eta \in (-\eta_0, \eta_0)$. Таким образом, мы имеем нетривиальную кривую $\mathcal{B}: (-\eta_0, \eta_0) \rightarrow \mathcal{R}_0(\Gamma)$ в многообразии представлений $\mathcal{R}_0(\Gamma)$, накрывающую кривую в пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}(\Gamma)$, состоящую из классов сопряженности нетривиальных квазифуксовых представлений $[\mathcal{B}(\eta)] = [F_\eta^*]$. Построенную деформацию $\mathcal{B}$ мы назовем изгибающей деформацией данной дискретной группы $\Gamma \subset \mathrm{PO}(2, 1) \hookrightarrow \mathrm{Isom} H_{\mathbb{F}}^2$ вдоль (малой) изгибающей геодезической. Наш параметр η представляет элементы компактной группы $\mathcal{U}_{\mathbb{F}}$ $\mathbb{F}$ -вращений, имеющей однородное пространство вещественной размерности $k_{\mathbb{F}}$, равной 1, 3 или 6 соответственно случаям комплексных и кватернионных чисел или чисел Кэли. Таким образом, построенная деформационная кривая имеет размерность $k_{\mathbb{F}}$, и мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть $\Gamma \subset \mathrm{PO}(2, 1) \hookrightarrow \mathrm{Isom} H_{\mathbb{F}}^2$ – дискретная группа, униформирующая риманову поверхность $S = H_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ с малой простой замкнутой геодезической $\alpha \subset S$. Тогда существует изгибающая деформация*

$$\mathcal{B}_\alpha: B^{k_{\mathbb{F}}}(0, \eta_0) \rightarrow \mathcal{R}_0(\Gamma) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Isom} H_{\mathbb{F}}^2)$$

группы Γ вдоль геодезической α такая, что представление $\mathcal{B}_\alpha(\eta) = \rho_\eta = F_\eta^$ индуцируется Γ -эquivариантным гомеоморфизмом*

$$F_\eta: \overline{H_{\mathbb{F}}^2} \rightarrow \overline{H_{\mathbb{F}}^2}, \quad \eta \in B^{k_{\mathbb{F}}}(0, \eta_0),$$

где $k_{\mathbb{F}} = 1, 3$ или 6 для $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$.

Следует отметить, что, деформируя группу Γ в $\mathrm{PO}(2, 1)$, можно добиться наличия $3g - 3$ непересекающихся малых замкнутых геодезических на поверхности $S_g = H_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ рода $g \geq 2$, см. предложение 6.1. При этом (10) показывает, что получаемые изгибающие деформации вдоль этих непересекающихся геодезических являются независимыми. Из этого результата и из известного факта, что пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}(S_g)$ вкладывается в $\mathbb{C}^{3g-3}$ в виде открытой области, получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Пусть $S_g = H_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ – вполне вещественная замкнутая геодезическая поверхность рода $g \geq 2$ в заданном $\mathbb{F}$ -гиперболическом многообразии $M = H_{\mathbb{F}}^2/\Gamma$, $\Gamma \subset \mathrm{PO}(2, 1) \hookrightarrow \mathrm{Isom} H_{\mathbb{F}}^2$. Тогда существует вещественно-аналитическое вложение $\mathcal{B}: B^{(6+3k_{\mathbb{F}})(g-1)} \hookrightarrow \mathcal{T}(M)$ открытого шара вещественной размерности $(6 + 3k_{\mathbb{F}})(g - 1)$ в пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}(M)$, задаваемое деформациями M вдоль его $3g - 3$ непересекающихся простых замкнутых геодезических, где число $k_{\mathbb{F}} = 1, 3$ или 6 соответственно для $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, следует отметить, что наша конструкция работает не только для $\mathbb{F}$ -гиперболических многообразий M , гомотопически эквивалентных своим вполне вещественным геодезическим поверхностям, но и для многообразий M , гомотопически эквивалентных 2-мерным поверхностям $S \subset M$, которые имеют вполне вещественные геодезические части, ограниченные замкнутыми геодезическими. В этом случае группа голономии этой части поверхности S является неэлементарной дискретной подгруппой в $\text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$, имеющей инвариантную вполне вещественную геодезическую плоскость $H_{\mathbb{R}}^2 \subset H_{\mathbb{F}}^2$. При этом (10) показывает, что изгибающие деформации вдоль непересекающихся замкнутых геодезических независимы. В дополнение к этому нам надо убедиться, что получаемые изгибающие деформации нетривиальны (т.е. не сопряжены в $\text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$ исходному включению группы $\Gamma \subset \text{PO}(2, 1) \hookrightarrow \text{Isom } H_{\mathbb{F}}^2$) и что $[\mathcal{B}(\eta)] \neq [\mathcal{B}(\eta')]$ для всех $\eta \neq \eta'$.

Нетривиальность наших деформаций непосредственно следует из (10) (ср. [8], [24]). На самом деле, ограничения $\rho_\eta|_{\Gamma_1}$ изгибающих представлений на неэлементарную подгруппу $\Gamma_1 \subset \Gamma$ (а в общем случае, на неэлементарную “вещественную” подгруппу $\Gamma_r \subset \Gamma$, соответствующую вполне вещественной геодезической части поверхности $S \subset M$, гомотопически эквивалентной M , $S \simeq M$) являются тождественными отображениями. Поэтому если бы деформация $\mathcal{B}$ была тривиальной, то она получалась бы сопряжением группы Γ некоторыми $\mathbb{F}$ -изометриями, коммутирующими с действием неэлементарной “вещественной” подгруппы $\Gamma_r \subset \Gamma$ и оставляющими поточечно неподвижной вполне вещественную геодезическую плоскость $H_{\mathbb{R}}^2 \subset H_{\mathbb{F}}^2$. Это противоречит тому, что предельное множество любой деформированной группы Γ_η , $\eta \neq 0$, не лежит в $\mathbb{R}$ -окружности, содержащей предельное (канторово) множество $\Lambda(\Gamma_r)$.

Инъективность отображения $\mathcal{B}$ получается при помощи кватернионного и октанионного углового инварианта $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}(x)$ для троек $x = (x^0, x^1, x^2)$ точек в $\partial H_{\mathbb{F}}^2 = N \cup \{\infty\}$, см. определения 3.1 и 5.1. В самом деле, рассмотрим порождающий элемент $\gamma_2 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ группы Γ в (9), чья неподвижная точка $x^2 \in \Lambda(\Gamma)$ лежит на луче $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \subset N$, и пусть $x_\eta^2 \in \Lambda(\Gamma_\eta)$ обозначает соответствующую неподвижную точку элемента $\chi_\eta(\gamma_2) \in \Gamma_\eta$, где $\chi_\eta: \Gamma \rightarrow \Gamma_\eta$ – изоморфизм, задающийся произведением (10). Как следует из нашей конструкции деформаций, орбита $\{\gamma(x_\eta^2) : \gamma \in \Gamma_p\}$ точки x_η^2 относительно локсодромической подгруппы $\Gamma_p \subset \Gamma \cap \Gamma_\eta$ (порожденной растяжением) сходится к началу координат $0 \in N$ вдоль луча $(0, \infty)$, имеющего ненулевой угол η с лучом $\mathbb{R}_- \times \{0\} \subset N$, который содержит орбиту $\{\gamma(x^1) : \gamma \in \Gamma_p\}$ предельной точки x^1 группы Γ_1 , сходящейся к $0 \in N$ с другой стороны. Рассматривая тройки точек $x = (x^1, 0, x^2)$ и $x_\eta = (x^1, 0, x_\eta^2)$ из предельных множеств $\Lambda(\Gamma)$ и $\Lambda(\Gamma_\eta)$, мы видим, что $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}(x) = 0$ и $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}(x_\eta) \neq 0, \pm\pi/2$. Таким образом, эти предельные множества (топологические окружности) не могут быть эквивалентны относительно какой-либо $\mathbb{F}$ -гиперболической изометрии. Это также дает и другой аргумент, показывающий нетривиальность деформаций.

Аналогично, для двух различных η и η' тройки точек x_η и $x_{\eta'}$ задают два луча, проходящих через точки x_η^2 и $x_{\eta'}^2$ и сходящихся к $0 \in N$ так, что угол между ними не равен нулю. Это дает, что $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}(x_\eta) \neq \mathbb{A}_{\mathbb{F}}(x_{\eta'})$, и тем самым показывает, что топологические окружности $\Lambda(\Gamma_\eta)$ и $\Lambda(\Gamma_{\eta'})$ не являются эквивалентными

относительно $\mathbb{F}$ -гиперболических изометрий. Это завершает доказательство инъективности $\mathcal{B}$.

6.3. Деформации непервоверхностных групп. Следует заметить, что, как и в кватернионном случае, октанионный угловой инвариант $\mathbb{A}_\mathbb{O}(x)$ не может различать k -мерные сферы, лежащие в бесконечно удаленной сфере какой-либо $\mathbb{O}$ -геодезической в $H_\mathbb{O}^2$, даже если они имеют различные геодезические характеристики. В частности, это относится к k -мерным линейным подпространствам $L \subset \partial H_\mathbb{O}^1$ и их изгибаниям L' в $\partial H_\mathbb{O}^1 \cong \mathbb{R}^7 \cup \{\infty\}$ относительно гиперплоскостей. В обоих случаях любая тройка точек $x \in L$ и соответствующая тройка $x' \in L'$ будут иметь $\mathbb{A}_\mathbb{O}(x) = \mathbb{A}_\mathbb{O}(x') = \pi/2$. Поэтому наш угловой инвариант $\mathbb{A}_\mathbb{O}(x)$ не в силах отличить какую-либо фуксову группу $\Gamma \subset \text{Isom } H_\mathbb{O}^1$ от ее нетривиальной квазифуксовой деформации $\rho(\Gamma) \subset \text{Isom } H_\mathbb{O}^1$. Для различия таких деформаций, не выходящих за пределы кватернионной или октанионной геодезической, необходимо использовать известные конформные инварианты (см. [8]). В качестве примера указанных нетривиальных квазифуксовых деформаций мы приведем следующую конструкцию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть Γ – решетка в $\text{PSp}(1, 1) \cong \text{Isom}_+ H_\mathbb{R}^4$, действующая изометриями в гиперболической плоскости Кэли $H_\mathbb{O}^2$ и оставляющая инвариантной кватернионную геодезическую $H_\mathbb{H}^1 \subset H_\mathbb{O}^2$, факторпространство $H_\mathbb{H}^1/\Gamma$ которой имеет замкнутое вполне геодезическое 3-многообразие. Тогда существует непрерывная квазифуксова деформация R такая, что для малого $\varepsilon_0 > 0$

$$R: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \hookrightarrow \text{Hom}(\Gamma, F_4^{-20}), \quad R(\varepsilon): \Gamma \rightarrow \text{Isom } H_\mathbb{O}^1 \subset \text{Isom } H_\mathbb{O}^2, \quad -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H_\mathbb{O}^1 \cong H_\mathbb{R}^8$, можно считать, что решетка $\Gamma \subset \text{Isom}_+ H_\mathbb{R}^4$ действует в $H_\mathbb{O}^2$, сохраняя вполне геодезическое подпространство $H_\mathbb{R}^4 \subset H_\mathbb{R}^8$ (в $\mathbb{O}$ -геодезической в $H_\mathbb{O}^2$) и имея там изгибающую гиперплоскость $P \subset H_\mathbb{R}^4$. Рассмотрим компактную подгруппу Ли $\mathcal{U}_P \subset \text{Spin}(7)$, оставляющую эту плоскость P поточечно неподвижной. Эта группа Ли изоморфна $\text{SO}(5)$ и действует транзитивно на единичной 4-мерной сфере в ортогональном дополнении к P в $H_\mathbb{O}^1$. Элементы $U_\eta \in \mathcal{U}_P$ изгибают вполне геодезическое подпространство $H_\mathbb{R}^4$ вдоль плоскости P внутри $H_\mathbb{O}^1$. Таким образом, в обоих случаях амальгамированного свободного произведения или HNN -расширения для группы Γ в (9) мы получаем нетривиальные изгибающие представления

$$\rho_\eta: \Gamma \rightarrow \Gamma_\eta \subset F_4^{-20},$$

где деформированные группы Γ_η , задаваемые в (10), продолжают сохранять октанионную геодезическую $H_\mathbb{O}^1 \subset H_\mathbb{O}^2$, зависят от четырех параметров и могут быть различены с помощью известных инвариантов вещественной гиперболической геометрии (ср. [8], [24]), индуцируемой в октанионной геодезической $H_\mathbb{O}^1 \cong H_\mathbb{R}^8$.

В противовес приведенной конструкции деформаций внутри $\mathbb{O}$ -геодезической теорема супержесткости Корлетта [3] немедленно влечет следующую теорему жесткости деформаций (ср. [5]):

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть Γ – равномерная решетка в $\mathrm{PSp}(2, 1)$, а G обозначает либо $\mathrm{PSp}(m, 1)$, $m \geq 2$, либо F_4^{-20} . Тогда любое дискретное представление $\rho: \Gamma \rightarrow G$ сопряжено естественному включению $\Gamma \subset G$. В частности, группа $\rho(\Gamma)$ оставляет инвариантным некоторое кватернионное 2-мерное подпространство $H_{\mathbb{H}}^2$ – либо в $H_{\mathbb{H}}^m$, либо в $H_{\mathbb{O}}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X является наименьшим вполне геодезическим подпространством в $H_{\mathbb{O}}^2$, бесконечно-удаленная сфера которого содержит предельное множество Λ группы $\rho(\Gamma)$. Такое подпространство описывается следующим образом.

ЛЕММА 6.6. Пусть X является вполне геодезическим подпространством в гиперболической плоскости Кэли $H_{\mathbb{O}}^2$. Тогда X изометрично либо подпространству $H_{\mathbb{R}}^k \subset H_{\mathbb{O}}^1$, $1 \leq k \leq 8$, либо подпространству $H_{\mathbb{F}}^2$, где $\mathbb{F}$ есть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$. Более того, его стабилизатор G_X в группе F_4^{-20} совпадает с $\mathrm{Aut}(X) \times K'$, где $K' \subset \mathrm{Spin}(9)$ оставляет X поточечно неподвижным.

В силу инвариантности предельного множества $\Lambda \subset \partial X$ группа $\rho(\Gamma)$ оставляет пространство $X \subset H_{\mathbb{O}}^2$ инвариантным. Поэтому мы можем считать, что $\rho(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}(X) \subset F_4^{-20}$. Тогда, так как $\rho(\Gamma)$ плотна по Зарискому в $\mathrm{Aut}(X)$, теорема супержесткости Корлетта [3] дает, что $X \neq H_{\mathbb{O}}^2$. Для дискретного точного представления $\rho: \Gamma \rightarrow G$, плотного по Зарискому в $\mathrm{Aut}(X)$, теорема супержесткости Корлетта [3] задает его голоморфное продолжение $\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{H}}^2) \rightarrow \mathrm{Aut}(X)$. С другой стороны, $\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{H}}^2)$ – полупростая группа с тривиальным центром. Поэтому полученный гомоморфизм является изоморфизмом. Это возможно только в случае $X = H_{\mathbb{H}}^2$, что завершает доказательство теоремы 6.5.

Список литературы

- [1] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
- [2] Г. А. Маргулис, “Дискретные группы движений многообразий неотрицательной кривизны”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 2 (Vancouver, BC, 1974), 1975, 21–34; англ. пер.: G. A. Margulis, “Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **109** (1977), 33–45.
- [3] K. Corlette, “Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry”, *Ann. of Math.* (2), **135**:1 (1992), 165–182.
- [4] M. Gromov, R. Schoen, “Harmonic maps into singular spaces and p -adic superrigidity for lattices in groups of rank one”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **76** (1992), 165–246.
- [5] Y. Kamishima, “Geometric rigidity of spherical hypersurfaces in quaternionic manifolds”, *Asian J. Math.*, **3**:3 (1999), 519–555.
- [6] B. Apanasov, I. Kim, *Rigidity of quaternionic and octonionic manifolds*, Preprint, Univ. Oklahoma, Norman, 1999.
- [7] Б. Апанасов, “Действие несупержестких решеток в симметрических пространствах ранга 1”, *Докл. РАН*, **374**:5 (2000), 586–589; англ. пер.: B. Apanasov, “The action of non-super-rigid lattices in symmetric spaces of rank 1”, *Dokl. Math.*, **62**:2 (2000), 237–240.
- [8] B. Apanasov, *Conformal geometry of discrete groups and manifolds*, de Gruyter, Berlin–New York, 2000.

- [9] Б. Апанасов, “Геометрия и топология комплексных гиперболических многообразий и многообразий Коши–Римана”, *УМН*, **52**:5 (1997), 9–44; англ. пер.: B. N. Apanasov, “Geometry and topology of complex hyperbolic and Cauchy–Riemannian manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **52**:5 (1997), 895–928.
- [10] W. Goldman, “Representations of fundamental groups of surfaces”, *Geometry and topology* (College Park, Md., 1983/84), Lecture Notes in Math., **1167**, Springer, Berlin, 1985, 95–117.
- [11] D. Toledo, “Representations of surface groups on complex hyperbolic space”, *J. Differential Geom.*, **29**:1 (1989), 125–133.
- [12] W. M. Goldman, J. J. Millson, “Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space”, *Invent. Math.*, **88**:3 (1987), 495–520.
- [13] K. Corlette, “Flat G -bundles with canonical metrics”, *J. Differential Geom.*, **28**:3 (1988), 361–382.
- [14] B. Apanasov, “Bending deformations of complex hyperbolic surfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **492** (1997), 75–91.
- [15] B. Apanasov, *Deformations and stability in complex hyperbolic geometry*, Preprint MSRI, Berkeley, 1997; <http://www.msri.org/MSRI-preprints/online/1997-111.html>.
- [16] Б. Апанасов, “Квазиконформно неустойчивые дисковые расслоения с комплексными структурами”, *Нелинейные аналитические дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **252**, 2006, 18–30; англ. пер.: B. Apanasov, “Quasiconformally instable disc bundles with complex structures”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **252**:1 (2006), 12–22.
- [17] E. Falbel, P.-V. Koseleff, “Flexibility of ideal triangle groups in complex hyperbolic geometry”, *Topology*, **39**:6 (2000), 1209–1223.
- [18] W. Goldman, *Complex hyperbolic geometry*, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.
- [19] B. Apanasov, X. Xie, “Geometrically finite complex hyperbolic manifolds”, *Internat. J. Math.*, **8**:6 (1997), 703–757.
- [20] B. Apanasov, X. Xie, “Discrete actions on nilpotent groups and negatively curved spaces”, *Differential Geom. Appl.*, **20**:1 (2004), 11–29.
- [21] I. Kim, *Geometric structures on manifolds and the marked length spectrum*, Thesis, Univ. California, Berkeley, 1996.
- [22] P. E. Ehrlich, H.-Ch. Im Hof, “Dirichlet regions in manifolds without conjugate points”, *Comment. Math. Helv.*, **54**:4 (1979), 642–658.
- [23] S. S. Chen, L. Greenberg, “Hyperbolic spaces”, *Contribution to analysis*, Academic Press, New York, 1974, 49–87.
- [24] Б. Н. Апанасов, *Геометрия дискретных групп и многообразий*, Наука, Физматлит, М., 1991.
- [25] P. Buser, “The collar theorem and examples”, *Manuscripta Math.*, **25**:4 (1978), 349–357.
- [26] A. Basmajian, “Generalizing the collar lemma”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **27**:1 (1992), 154–158.
- [27] P. Pansu, “Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un”, *Ann. of Math. (2)*, **129**:1 (1989), 1–60.

Б. Н. Апанасов (B. N. Apanasov)
 University of Oklahoma,
 Институт математики СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: apanasov@ou.edu

Поступила в редакцию
 13.07.2005 и 31.10.2006

И. Ким (I. Kim)
 Seoul National University, Korea
E-mail: inkang@math.snu.ac.kr