Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Куракин, Периодические функции на свободной полугруппе, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 109–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:35:07

УДК 512

В. Л. Куракин

Периодические функции на свободной полугруппе

Изучается понятие периодической функции $u: X^* \rightarrow M$, где X^* – множество слов в конечном алфавите X . Такие функции возникают при рассмотрении функций переходов и выходов автоматов. Показывается, как вычислить период и другие характеристики функции с помощью группы вектор-периодов и фундаментальной группы графа периодической функции.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Периодические функции

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ – конечный алфавит, X^* – множество всех слов в алфавите X , θ – пустое слово, $l(\bar{x})$ – длина слова $\bar{x} \in X^*$, X^n – множество всех слов длины n , $X^{[n]}$ – множество всех слов длины $\leq n$. Относительно операции умножения слов, заключающейся в их приписывании, множество X^* образует свободную полугруппу с образующими $x_1, \dots, x_k$:

$$X^* = \langle x_1, \dots, x_k \rangle.$$

Обозначим через $\langle X \rangle = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ свободную группу ранга k со свободными образующими $x_1, \dots, x_k$. Слова из X^* будем называть положительными.

Пусть M – некоторое множество, возможно бесконечное. В этой работе мы будем рассматривать функции

$$u: X^* \rightarrow M. \quad (1)$$

Такие функции возникают, например, в теории автоматов.

Пусть $A = (X, Q, M, h, f)$ – автомат, X и M – его входной и выходной алфавиты, Q – множество состояний, $h: Q \times X \rightarrow Q$ и $f: Q \times X \rightarrow M$ – функции переходов и выходов [1]. Функции h и f продолжаются до функций переходов и выходов за l шагов $h: Q \times X^* \rightarrow Q$, $f: Q \times X^* \rightarrow M$ по рекуррентному правилу

$$h(q, \bar{x}x) = h(h(q, \bar{x}), x), \quad f(q, \bar{x}x) = f(h(q, \bar{x}), x), \quad q \in Q, \quad \bar{x} \in X^*, \quad x \in X.$$

Если q – начальное состояние автомата, то функции

$$h_q: X^* \rightarrow Q, \quad h_q(\bar{x}) = h(q, \bar{x}), \quad f_q: X^* \rightarrow M, \quad f_q(\bar{x}) = f(q, \bar{x}), \quad (2)$$

Работа поддержана грантами Президента РФ № МД-2452.2004.10 и НШ-2358.2003.9.

показывают, в каком состоянии окажется автомат и какой символ окажется на выходе автомата при подаче на вход слова $\bar{x}$. Функции h_q и f_q являются примерами функций вида (1). Вводимое далее понятие периодической функции представляет наибольший интерес для автоматов специального вида – так называемых свободных регистров сдвига [2]. Прообразом этого понятия является понятие периодической k -последовательности, которое изучалось, например, в [3].

Левым и правым сдвигом функции $u: X^* \rightarrow M$ на слово $\bar{x} \in X^*$ назовем соответственно функции $\bar{x}u$ и $u\bar{x}$, определяемые равенствами

$$(\bar{x}u)(\bar{y}) = u(\bar{y}\bar{x}), \quad (u\bar{x})(\bar{y}) = u(\bar{x}\bar{y}), \quad \bar{y} \in X^*.$$

При таком определении выполняются законы ассоциативности

$$\bar{x}(\bar{y}u) = (\bar{x}\bar{y})u, \quad (u\bar{x})\bar{y} = u(\bar{x}\bar{y}), \quad (\bar{x}u)\bar{y} = \bar{x}(u\bar{y}),$$

т.е. полугруппа X^* действует слева и справа на множестве M^{X^*} всех функций $u: X^* \rightarrow M$. Если $T \subset X^*$, то обозначим

$$Tu = \{\bar{t}u : \bar{t} \in T\}, \quad uT = \{u\bar{t} : \bar{t} \in T\}.$$

В частности, X^*u и uX^* – множества всех левых и всех правых сдвигов функции u соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u: X^* \rightarrow M$ будем называть *периодической слева*, если множество X^*u всех ее левых сдвигов конечно, и *периодической справа*, если множество uX^* всех ее правых сдвигов конечно.

Из определения следует, что если функция u периодична слева, то для любого слова $\bar{x} \in X^*$ сдвиги $\bar{x}u$ и $u\bar{x}$ периодичны слева. Аналогично, если u периодична справа, то сдвиги $\bar{x}u$ и $u\bar{x}$ периодичны справа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Функция $u: X^* \rightarrow M$ периодична справа тогда и только тогда, когда $uX^* = uX^{[n]}$ для некоторого $n \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u периодична справа и $u\bar{x}_1, \dots, u\bar{x}_r$ – все ее сдвиги. Обозначим через n максимум длин слов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$. Тогда $uX^* = uX^{[n]}$. Обратное утверждение очевидно.

Будем считать, что на множестве X^* введено полное упорядочение слов, например лексикографическое. Тогда произвольное конечное подмножество $T \subset X^*$ можно записать в виде $T = \{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n\}$, где $n = |T|$ и $\bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_n$. Если $u: X^* \rightarrow M$ – некоторая функция и $u|_T$ – ее ограничение на множество T , то функцию $u|_T \in M^T$ можно отождествить с вектором ее значений $(u(\bar{t}_1), \dots, u(\bar{t}_n)) \in M^n$. Этот вектор будем называть *диаграммой значений* функции u на множестве T и обозначать

$$u[T] = (u(\bar{t}) : \bar{t} \in T) = (u(\bar{t}_1), \dots, u(\bar{t}_n)) \in M^n.$$

Если $T \subset X^*$, то множества

$$\bar{x}T = \{\bar{x}\bar{t} : \bar{t} \in T\} \quad \text{и} \quad T\bar{x} = \{\bar{t}\bar{x} : \bar{t} \in T\}$$

назовем левым и правым сдвигами множества T на слово $\bar{x} \in X^*$ соответственно. Выполняются равенства $u\bar{x}[T] = u[\bar{x}T]$ и $\bar{x}u[T] = u[T\bar{x}]$.

ТЕОРЕМА 2. *Функция $u: X^* \rightarrow M$ периодична слева тогда и только тогда, когда она периодична справа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем, что если функция u периодична справа, то она периодична слева (обратное утверждение доказывается аналогично). Вначале предположим, что множество M конечно. По утверждению 1 $uX^* = uX^{[n]}$ для некоторого n . Пусть $\bar{x}u$ и $\bar{y}u$ – два левых сдвига функции u такие, что $\bar{x}u[X^{[n]}] = \bar{y}u[X^{[n]}]$. Докажем, что $\bar{x}u = \bar{y}u$. Пусть $\bar{z} \in X^*$ – произвольное слово. Так как $uX^* = uX^{[n]}$, то $u\bar{z} = u\bar{t}$ для некоторого $\bar{t} \in X^{[n]}$. Тогда $\bar{x}u(\bar{z}) = u(\bar{z}\bar{x}) = u\bar{z}(\bar{x}) = u\bar{t}(\bar{x}) = u(\bar{t}\bar{x}) = \bar{x}u(\bar{t})$ и аналогично $\bar{y}u(\bar{z}) = \bar{y}u(\bar{t})$. Так как $\bar{x}u[X^{[n]}] = \bar{y}u[X^{[n]}]$, то $\bar{x}u(\bar{t}) = \bar{y}u(\bar{t})$. Следовательно, $\bar{x}u(\bar{z}) = \bar{y}u(\bar{z})$. Это доказывает равенство $\bar{x}u = \bar{y}u$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in X^* \quad \bar{x}u[X^{[n]}] = \bar{y}u[X^{[n]}] \Rightarrow \bar{x}u = \bar{y}u.$$

Поэтому число левых сдвигов функции u не превосходит числа диаграмм значений в $MX^{[n]}$. Так как множество $MX^{[n]}$ конечно, то и число левых сдвигов функции u конечно. Следовательно, функция u периодична слева.

Теперь рассмотрим случай, когда M бесконечно. Пусть функция u периодична справа, т.е. множество ее правых сдвигов uX^* конечно. Так как $u(\bar{x}) = u\bar{x}(\theta)$, то множество значений функции u конечно. Обозначим это множество через M_0 . Тогда M_0 – конечное подмножество множества M . Вместо функции $u: X^* \rightarrow M$ рассмотрим функцию $u_0: X^* \rightarrow M_0$, определяемую соотношением $u_0(\bar{x}) = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^*$. Таким образом, функция u_0 отличается от функции u лишь множеством значений. Из того, что функция u периодична справа, следует, что функция u_0 периодична справа. Так как множество M_0 конечно, то по доказанному функция u_0 периодична слева. Очевидно, что тогда и функция u периодична слева.

Ввиду теоремы 2 корректно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u: X^* \rightarrow M$ будем называть *периодической*, если она периодична слева (а значит, и справа).

Изучим множество сдвигов периодической функции. Подмножество $T \subset X^*$ назовем (левой) *шрейеровой системой*, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in X^*$

$$\bar{x}\bar{y} \in T \Rightarrow \bar{x} \in T,$$

и *правой шрейеровой системой*, если из включения $\bar{x}\bar{y} \in T$ следует, что $\bar{y} \in T$. С точки зрения теории периодических k -последовательностей [3] шрейерова система является аналогом диаграммы Ферре, т.е. подмножества $T \subset \mathbb{N}_0^k$ такого, что из включения $\mathbf{i} + \mathbf{j} \in T$ (где $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^k$) следует включение $\mathbf{i} \in T$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой функции $u: X^* \rightarrow M$ существует шрейерова система T такая, что $uT = uX^*$ и все сдвиги в uT различны. Множество T конечно тогда и только тогда, когда функция u периодична, при этом $|T| = |uX^*|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ всех шрейеровых систем $T \subset X^*$ таких, что все сдвиги $u\bar{x}$, $\bar{x} \in T$, различны. Множество $\mathcal{T}$ непусто, так как содержит систему $\{\theta\}$, и упорядочено по включению. По лемме Цорна

в $\mathcal{T}$ существует максимальный элемент T . Покажем, что шрейерова система T искомая, т.е. $uT = uX^*$.

Предположим противное, тогда $u\bar{x} \notin uT$ для некоторого $\bar{x} \in X^*$. Если $\bar{x} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$, то существует $m \in \overline{1, n}$ такое, что

$$x_{i_1} \dots x_{i_{m-1}} \in T \quad \text{и} \quad x_{i_1} \dots x_{i_{m-1}} x_{i_m} \notin T.$$

Число $n - m$ назовем *расстоянием* от левой шрейеровой системы T до слова $\bar{x}$. Возьмем слово $\bar{x}$, для которого $u\bar{x} \notin uT$ и расстояние от T до $\bar{x}$ наименьшее. Пусть это расстояние равно r . Так как $\bar{x} \notin T$, то $r > 0$. Если $r = 1$, то $T \cup \{\bar{x}\}$ – шрейерова система из $\mathcal{T}$, строго содержащая T , что противоречит максимальной T . Следовательно, $r > 1$.

Пусть $\bar{x} = \bar{y}x$, где $x \in X$ – последняя буква слова $\bar{x}$. Тогда расстояние от T до $\bar{y}$ равно $r - 1$ и $u\bar{y} \in uT$ в силу минимальности слова $\bar{x}$. Следовательно, $u\bar{y} = u\bar{z}$ для некоторого $\bar{z} \in T$. Но тогда $u\bar{x} = u\bar{y}x = u\bar{z}x$, где расстояние от T до $\bar{z}x$ равно 0 или 1, т.е. меньше r . Это противоречит минимальности слова $\bar{x}$. Таким образом, $uT = uX^*$ и шрейерова система T искомая.

По определению u периодична справа тогда и только тогда, когда множество uX^* конечно, поэтому последнее утверждение теоремы очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Шрейерову систему T такую, что $uT = uX^*$ и все сдвиги в uT различны, назовем *шрейеровой системой правых сдвигов функции u* .

Ниже на примерах будет показано, что периодическая функция u может иметь несколько различных шрейеровых систем правых сдвигов, причем иногда среди них могут встречаться двусторонние (т.е. одновременно левые и правые) шрейеровы системы. Отметим, что теорема 3 является аналогом леммы Шрейера для подгрупп свободных групп, а шрейерова система правых сдвигов функции u – аналогом шрейеровой системы представителей правых смежных классов свободной группы по ее подгруппе [4; лемма 7.2.1]. Теорему 3 можно следующим образом сформулировать в терминах полугрупп.

ТЕОРЕМА 3'. Пусть ρ – правая конгруэнция на свободной полугруппе X^* . Тогда существует шрейерова система $T \subset X^*$ такая, что слова из T образуют полную систему представителей отношения ρ .

Теорема 3 является частным случаем теоремы 3', если в качестве ρ взять следующее отношение: $\bar{x} \rho \bar{y}$ тогда и только тогда, когда $u\bar{x} = u\bar{y}$. Доказательство теоремы 3' аналогично доказательству теоремы 3.

§ 2. Функции на свободной группе и реверсивные функции

Пусть $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ – произвольная функция, заданная на свободной группе $\langle X \rangle = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Левый и правый сдвиги $\bar{x}U$ и $U\bar{x}$, $\bar{x} \in \langle X \rangle$, функции U определим соотношениями

$$\bar{x}U(\bar{y}) = U(\bar{y}\bar{x}), \quad U\bar{x}(\bar{y}) = U(\bar{x}\bar{y}), \quad \bar{y} \in \langle X \rangle.$$

Выполняются законы ассоциативности:

$$\bar{x}(\bar{y}U) = (\bar{x}\bar{y})U, \quad (U\bar{x})\bar{y} = U(\bar{x}\bar{y}), \quad (\bar{x}U)\bar{y} = \bar{x}(U\bar{y}).$$

Множества всех левых и всех правых сдвигов функции U будем обозначать через $\langle X \rangle \cdot U$ и $U \cdot \langle X \rangle$ соответственно.

Если функции $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ и $u: X^* \rightarrow M$ связаны соотношением $U|_{X^*} = u$, т.е. $U(\bar{x}) = u(\bar{x})$ для $\bar{x} \in X^*$, то функцию U будем называть *продолжением* функции u на множество $\langle X \rangle$, а функцию u – *сужением* функции U на множество X^* .

Функцию $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ назовем *периодической слева*, если множество $\langle X \rangle \cdot U$ конечно, и *периодической справа*, если множество $U \cdot \langle X \rangle$ конечно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если функция U периодична справа, то $U \cdot \langle X \rangle = UX^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного слова $\bar{x} \in \langle X \rangle$ через $\deg_-(\bar{x})$ обозначим число вхождений букв алфавита X в отрицательных степенях в несократимую запись слова $\bar{x}$. Например, $\deg_-(x_1^2) = 0$, $\deg_-(x_1^{-2}) = 2$. Предположим, что $U\langle X \rangle \neq UX^*$. Тогда $U\bar{x} \notin UX^*$ для некоторого слова $\bar{x} \in \langle X \rangle$. Выберем такое слово $\bar{x}$ с наименьшим значением $\deg_-(\bar{x})$. Пусть $\bar{x} = \bar{y}x^{-1}\bar{z}$, где $\bar{y} \in X^*$, $x \in X$, $\bar{z} \in \langle X \rangle$. Рассмотрим последовательность правых сдвигов $U\bar{y}$, $U\bar{y}x$, $U\bar{y}x^2, \dots$. Так как функция U периодична справа, то в этой последовательности есть повторения: $U\bar{y}x^i = U\bar{y}x^{i+m}$, где $i \geq 0$, $m \geq 1$. Домножив на x^{-i-1} , получим $U\bar{y}x^{-1} = U\bar{y}x^{m-1}$, $m-1 \geq 0$. Тогда $U\bar{x} = U\bar{y}x^{m-1}\bar{z} \notin UX^*$, причем $\deg_-(\bar{y}x^{m-1}\bar{z}) < \deg_-(\bar{x})$, что противоречит минимальности слова $\bar{x}$. Следовательно, $U\langle X \rangle = UX^*$.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция U периодична справа, то $U\langle X \rangle = UX^* = UX^{[n]}$ для некоторого $n \geq 0$.

ТЕОРЕМА 5. Функция $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ периодична слева тогда и только тогда, когда она периодична справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается точно так же, как теорема 2, причем ссылка на утверждение 1 заменяется ссылкой на утверждение 4 и его следствие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ будем называть *периодической*, если она периодична слева (а значит, и справа).

Вернемся к изучению функций на полугруппе X^* . Пусть $u: X^* \rightarrow M$ – произвольная функция. Для $s \in \overline{1, k}$ отображение

$$\sigma_s: uX^* \rightarrow uX^*, \quad \sigma_s(v) = vx_s, \quad v \in uX^*, \quad (3)$$

будем называть *отображением правого сдвига* (в направлении s).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u: X^* \rightarrow M$ назовем *реверсивной справа*, если все отображения правого сдвига σ_s , $s \in \overline{1, k}$, биективны.

Если функция u реверсивна справа, то для любого правого сдвига $u\bar{x} \in uX^*$ и любой буквы $x_s \in X$ определен сдвиг $u\bar{x}x_s^{-1} = \sigma_s^{-1}(u\bar{x})$, снова принадлежащий uX^* . Поэтому для любого слова $\bar{y} = y_{i_1} \dots y_{i_n} \in \langle X \rangle$, где $y_{i_j} \in X \cup X^{-1}$, определен правый сдвиг

$$u\bar{y} = (\dots((uy_{i_1})y_{i_2})\dots)y_{i_n}.$$

В результате для реверсивной справа функции u определено правое действие группы $\langle X \rangle$ на множестве uX^* . При этом

$$u \cdot \langle X \rangle = uX^*. \quad (4)$$

Реверсивная слева функция определяется аналогично.

Заметим, что если автомат A регулярен, т.е. все его частичные функции переходов $h_x: Q \rightarrow Q$, $x \in X$, биективны, то функции h_q из (2) реверсивны справа. Поэтому введенное понятие реверсивной функции является аналогом понятия регулярного автомата. Реверсивные k -последовательности ранее изучались в [3].

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ периодична, $u = U|_{X^*}$. Тогда функция u периодична, реверсивна слева, реверсивна справа и $|uX^*| = |UX^*|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество $U\langle X \rangle = UX^*$ конечно, то и множество uX^* конечно. Поэтому функция u периодична. Для доказательства биективности отображения $\sigma_s: uX^* \rightarrow uX^*$ достаточно проверить его сюръективность. Пусть $u\bar{x} \in uX^*$. Рассмотрим сдвиг $U\bar{x}$. По утверждению 4 $U\bar{x}x_s^{-1} = U\bar{y}$ для некоторого $\bar{y} \in X^*$. Тогда $U\bar{x} = U\bar{y}x_s$, откуда $u\bar{x} = u\bar{y}x_s = \sigma_s(u\bar{y})$. Этим доказано, что отображение σ_s сюръективно. Следовательно, функция u реверсивна справа. Аналогично проверяется, что функция u реверсивна слева.

Если $U\bar{x} = U\bar{y}$, где $\bar{x}, \bar{y} \in X^*$, то очевидно $u\bar{x} = u\bar{y}$. Для доказательства равенства $|uX^*| = |UX^*|$ достаточно проверить обратную импликацию. Пусть $U\bar{x} \neq U\bar{y}$, тогда существует $\bar{z} \in \langle X \rangle$ такое, что $U\bar{x}(\bar{z}) \neq U\bar{y}(\bar{z})$, или $\bar{z}U\bar{x}(\theta) \neq \bar{z}U\bar{y}(\theta)$. Ввиду левого аналога утверждения 4 $\bar{z}U = \bar{t}U$ для некоторого $\bar{t} \in X^*$. Тогда $\bar{t}U\bar{x}(\theta) \neq \bar{t}U\bar{y}(\theta)$, или $U\bar{x}(\bar{t}) \neq U\bar{y}(\bar{t})$. Следовательно, $u\bar{x}(\bar{t}) \neq u\bar{y}(\bar{t})$, откуда $u\bar{x} \neq u\bar{y}$. Таким образом, $|uX^*| = |UX^*|$.

ТЕОРЕМА 7. Периодическая функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна слева тогда и только тогда, когда она реверсивна справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция u периодична и реверсивна справа. Тогда определены правые сдвиги $u\bar{x}$ для $\bar{x} \in \langle X \rangle$. Рассмотрим функцию

$$U: \langle X \rangle \rightarrow M, \quad U(\bar{x}) = u\bar{x}(\theta), \quad \bar{x} \in \langle X \rangle.$$

Тогда $U|_{X^*} = u$. Покажем, что функция U периодична справа. Пусть $uX^* = \{u\bar{x}_1, \dots, u\bar{x}_r\}$ – все правые сдвиги функции u . Рассмотрим произвольный правый сдвиг $U\bar{x}$, $\bar{x} \in \langle X \rangle$. Так как $u\langle X \rangle = uX^*$ ввиду (4), то $u\bar{x} = u\bar{x}_i$ для некоторого $i \in \overline{1, r}$. Тогда

$$U\bar{x}(\bar{y}) = U(\bar{x}\bar{y}) = u\bar{x}\bar{y}(\theta) = u\bar{x}_i\bar{y}(\theta) = U(\bar{x}_i\bar{y}) = U\bar{x}_i(\bar{y}), \quad \bar{y} \in \langle X \rangle,$$

т.е. $U\bar{x} = U\bar{x}_i$. Следовательно, число правых сдвигов функции U не превосходит r , и функция U периодична справа. По теореме 5 функция U периодична слева. В силу теоремы 6 функция u реверсивна слева.

В обратную сторону теорема доказывается аналогично.

Интересно выяснить, верна ли теорема 7 без предположения о периодичности функции u .

Ввиду теоремы 7 корректно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u: X^* \rightarrow M$ будем называть *реверсивной и периодической*, если она реверсивна слева и периодична слева (а значит, также реверсивна справа и периодична справа).

ТЕОРЕМА 8. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, то существует единственная периодическая функция $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ такая, что $u = U|_{X^*}$. При этом

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \langle X \rangle \quad u\bar{z}\bar{x} = u\bar{z}\bar{y} \Leftrightarrow U\bar{z}\bar{x} = U\bar{z}\bar{y}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию U равенством $U(\bar{x}) = u\bar{x}(\theta)$, $\bar{x} \in \langle X \rangle$. Тогда $u = U|_{X^*}$ и, как легко проверить, выполняется соотношение (5). Из него следует, что $u\bar{x} = u\bar{y}$ тогда и только тогда, когда $U\bar{x} = U\bar{y}$. Поэтому $|u\langle X \rangle| = |U\langle X \rangle|$ или ввиду (4) $|uX^*| = |U\langle X \rangle|$. Следовательно, функция U периодична. Остается доказать ее единственность.

Для этого достаточно доказать следующее утверждение: если $U, V: \langle X \rangle \rightarrow M$ – две периодические функции такие, что $U|_{X^*} = V|_{X^*}$, то $U = V$.

Предположим, что $U(\bar{x}) \neq V(\bar{x})$ для некоторого $\bar{x} \in \langle X \rangle$. Выберем такое слово $\bar{x}$ с наименьшим значением $\deg_-(\bar{x})$. Пусть $\bar{x} = \bar{y}x^{-1}\bar{z}$, где $\bar{y} \in X^*$, $x \in X$, $\bar{z} \in \langle X \rangle$. Так как функция U периодична, то в последовательности сдвигов $U\bar{y}x^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, есть повторения: $U\bar{y}x^i = U\bar{y}x^{i+m}$, $m \geq 1$. Домножив справа на x^{-i} , получим равенство $U\bar{y} = U\bar{y}x^m$. Аналогично $V\bar{y} = V\bar{y}x^n$ для некоторого $n \geq 1$. Тогда для слова $\bar{x}' = \bar{y}x^{mn-1}\bar{z}$ верны равенства $U(\bar{x}') = U(\bar{x})$ и $V(\bar{x}') = V(\bar{x})$. Следовательно, $U(\bar{x}') \neq V(\bar{x}')$, что противоречит минимальности слова $\bar{x}$. Полученное противоречие показывает, что $U = V$.

§ 3. Период периодической функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Периодическую функцию $u: X^* \rightarrow M$ будем называть *чисто периодической слева*, если

$$\forall \bar{x} \in X^* \quad \exists \bar{y} \in X^* \quad \bar{y}\bar{x}u = u,$$

и *чисто периодической справа*, если

$$\forall \bar{x} \in X^* \quad \exists \bar{y} \in X^* \quad u\bar{x}\bar{y} = u. \quad (6)$$

Например, если $k = 1$, то $X = \{x_1\}$ и функция $u: X^* \rightarrow M$ есть последовательность $u = (u(\theta), u(x_1), u(x_1^2), \dots)$. Тогда последовательность $u = (0, 0, 0, 0, \dots)$ чисто периодична, а последовательность $v = (1, 0, 0, 0, \dots)$ – нет. Условие (6) показывает, что функция u присутствует как правый сдвиг в любом своем правом сдвиге. В дальнейшем будет приведен пример функции, чисто периодической справа, но не слева.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ чисто периодична справа, то каждый ее левый сдвиг и каждый правый сдвиг чисто периодичен справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция u периодична, то сдвиги $\bar{z}u$ и $u\bar{z}$ являются периодическими функциями. Докажем, что эти сдвиги удовлетворяют

условию (6). Для левого сдвига $\bar{z}u$ это очевидно. Рассмотрим правый сдвиг $u\bar{z}$. Возьмем произвольное слово $\bar{x}$. Ввиду (6) для слова $\bar{z}\bar{x}$ существует слово $\bar{y}$ такое, что $u\bar{z}\bar{x}\bar{y} = u$. Домножая справа на $\bar{z}$, получим, что $u\bar{z}\bar{x}\bar{y}\bar{z} = u\bar{z}$. Это показывает, что функция $u\bar{z}$ чисто периодична справа.

ТЕОРЕМА 10. *Если функция $u: X^* \rightarrow M$ периодична справа, то существует ее правый сдвиг, который чисто периодичен справа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как u периодична справа, то $|uX^*| = n < \infty$. Докажем теорему индукцией по n . При $n = 1$ утверждение очевидно, так как любой правый сдвиг функции u совпадает с u . Проведем шаг индукции. Если сама функция u чисто периодична, то все доказано. Предположим, что это не так. Тогда $\exists \bar{x} \forall \bar{y} \quad u\bar{x}\bar{y} \neq u$. Рассмотрим сдвиг $u\bar{x}$. Среди его правых сдвигов нет функции u , поэтому $|u\bar{x}X^*| < n$. По предположению индукции существует сдвиг $u\bar{x}\bar{z}$, являющийся чисто периодической функцией.

Теперь дадим определение периода и длины подхода периодической функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция u периодична. *Правым периодом $T_r(u)$ функции u назовем число ее правых сдвигов, являющихся чисто периодическими справа функциями. Правой длиной подхода $\Lambda_r(u)$ функции u назовем число ее правых сдвигов, не являющихся чисто периодическими справа функциями.*

Аналогично определяются *левый период $T_l(u)$ и левая длина подхода $\Lambda_l(u)$ периодической функции u .*

Таким образом,

$$\Lambda_r(u) + T_r(u) = |uX^*|, \quad \Lambda_r(u) \geq 0, \quad T_r(u) \geq 1.$$

Из утверждения 9 следует, что периодическая функция u чисто периодична справа тогда и только тогда, когда $\Lambda_r(u) = 0$ и $T_r(u) = |uX^*|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Для произвольной функции $u: X^* \rightarrow M$ множество L всех слов $\bar{x} \in X^*$ таких, что правый сдвиг $u\bar{x}$ не является чисто периодической справа функцией, является шрейеровой системой. Если функция u периодична, а T – произвольная шрейерова система ее правых сдвигов, то*

$$\Lambda_r(u) = |T \cap L|, \quad T_r(u) = |T \setminus L|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{x}\bar{y} \in L$, то функция $u\bar{x}\bar{y}$ не чисто периодична справа. По утверждению 9 функция $u\bar{x}$ не чисто периодична справа, т.е. $\bar{x} \in L$. Таким образом, L – шрейерова система. Пусть функция u периодична. Тогда $|T \cap L|$ и $|T \setminus L|$ – это в точности число правых сдвигов функции u , соответственно не являющихся и являющихся чисто периодическими справа функциями. Поэтому приведенные равенства следуют из определения длины подхода и периода.

ТЕОРЕМА 12. *Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, то она чисто периодична слева и справа, а также выполняется следующее свойство:*

$$\exists m \geq 1 \quad \forall \bar{x}, \bar{z} \in X^* \quad u\bar{z}\bar{x}^m = u\bar{z}. \quad (7)$$

Обратно, если функция u периодична, а также выполняется условие (7), то эта функция реверсивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x} \in X^*$. Так как функция u реверсивна, то отображение $\sigma: uX^* \rightarrow uX^*$, $\sigma(u\bar{z}) = u\bar{z}\bar{x}$, $\bar{z} \in X^*$, биективно. Так как функция u периодична, то множество uX^* конечно. Тогда $\sigma^m = 1$, где m – экспонента симметрической группы $S(uX^*)$. Отсюда вытекает условие (7). Из него при $\bar{z} = \theta$ следует, что функция u чисто периодична справа. Аналогично доказывается, что u чисто периодична слева.

Обратно, пусть функция u периодична и выполняется условие (7). Докажем, что отображение $\sigma_s: uX^* \rightarrow uX^*$ ($1 \leq s \leq k$), определенное в (3), биективно. Если $u\bar{z} \in uX^*$, то ввиду (7) $u\bar{z} = u\bar{z}x_s^m = \sigma_s(u\bar{z}x_s^{m-1}) \in \sigma_s(uX^*)$, т.е. отображение σ_s сюръективно. Так как функция u периодична, то множество uX^* конечно и отображение σ_s биективно. По определению функция u реверсивна справа. По теореме 7 функция u реверсивна также слева.

Периодические свойства функции характеризуются полугруппами ее вектор-периодов, которые определяются ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слово $\bar{x} \in X^*$ назовем *правым вектор-периодом функции u* , если существует $n \geq 0$ такое, что $u\bar{z}\bar{x} = u\bar{z}$ для любого слова $\bar{z} \in X^*$ длины $l(\bar{z}) \geq n$. Слово $\bar{x}$ назовем *чистым правым вектор-периодом функции u* , если $u\bar{x} = u$.

Аналогично определяются *левый* и *чистый левый вектор-периоды*: в приведенных формулах равенства $u\bar{z}\bar{x} = u\bar{z}$ и $u\bar{x} = u$ заменяются соответственно на равенства $\bar{x}\bar{z}u = \bar{z}u$ и $\bar{x}u = u$.

Например, слово x_1 является вектор-периодом последовательностей $u = (0, 0, 0, 0, \dots)$ и $v = (1, 0, 0, 0, \dots)$, а также чистым вектор-периодом последовательности u . Последовательность v не имеет чистых вектор-периодов.

Множество всех правых и множество всех чистых правых вектор-периодов функции u обозначим $P_r(u)$ и $Q_r(u)$ соответственно. Они являются подполугруппами в X^* . Таким образом,

$$Q_r(u) = \{\bar{x} \in X^* : u\bar{x} = u\}. \quad (8)$$

Аналогично определяются полугруппы $P_l(u)$ и $Q_l(u)$. Вопрос о том, как найти период реверсивной функции с помощью полугруппы чистых вектор-периодов, решается в следующем параграфе.

§ 4. Граф периодической функции

Графом правых сдвигов функции $u: X^* \rightarrow M$ назовем ориентированный граф $\Gamma_r(u)$, множеством вершин которого является множество uX^* всех правых сдвигов функции u и из каждой вершины $u\bar{x}$ выходит k ориентированных ребер, помеченных буквами $x_1, \dots, x_k$ и ведущих в вершины $u\bar{x}x_1, \dots, u\bar{x}x_k$ соответственно. Граф $\Gamma_r(u)$ конечен тогда и только тогда, когда функция u периодична. Вершину u графа $\Gamma_r(u)$ будем называть отмеченной или выделенной.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна справа тогда и только тогда, когда в каждую вершину графа $\Gamma_r(u)$ входит в точности k ребер,

помеченных соответственно символами $x_1, \dots, x_k$. Функция u чисто периодична справа тогда и только тогда, когда из любой вершины графа $\Gamma_r(u)$ ведет положительный путь в отмеченную вершину u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие о том, что в каждую вершину входит в точности k ребер $x_1, \dots, x_k$, равносильно тому, что отображения сдвига $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ инъективны и сюръективны, т.е. тому, что функция u реверсивна справа. Второе условие означает, что для любой вершины $u\bar{x} \in uX^*$ существует путь $\bar{y} \in X^*$ такой, что $u\bar{x}\bar{y} = u$. Это равносильно тому, что функция u чисто периодична справа.

Рассмотрим множество всех путей в графе $\Gamma_r(u)$, начинающихся и заканчивающихся в отмеченной вершине u , при этом ребра могут проходиться как вдоль, так и против направления. Путь указанного вида, проходящий через ребра $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$, обозначается $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_j = 1$, если ребро x_{i_j} проходит-ся вдоль его направления, и $\varepsilon_j = -1$, если – против направления. Каждый такой путь записывается как элемент $\bar{x} = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ свободной группы $\langle X \rangle$. Произведением путей $\bar{x}$ и $\bar{y}$ назовем путь $\bar{x}\bar{y}$. Тогда множество всех путей графа $\Gamma_r(u)$, начинающихся и заканчивающихся в отмеченной вершине, образуют подгруппу в $\langle X \rangle$, которая называется *фундаментальной группой графа $\Gamma_r(u)$* и обозначается $\pi(\Gamma_r(u))$. Мы будем использовать более короткое обозначение $\pi_r(u)$.

Аналогично определяются граф левых сдвигов $\Gamma_l(u)$ и группа $\pi_l(u)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна справа, то

$$\pi_r(u) = \{\bar{x} \in \langle X \rangle : u\bar{x} = u\}, \quad (9)$$

а число правых сдвигов функции u равно индексу подгруппы $\pi_r(u)$ группы $\langle X \rangle$:

$$|uX^*| = |\langle X \rangle : \pi_r(u)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция u реверсивна справа, то определены правые сдвиги $u\bar{x}$ для всех $\bar{x} \in \langle X \rangle$. Тогда равенство (9) следует из определения группы $\pi_r(u)$. Теперь для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \langle X \rangle$

$$u\bar{x} = u\bar{y} \Leftrightarrow u\bar{x}\bar{y}^{-1} = u \Leftrightarrow \bar{x}\bar{y}^{-1} \in \pi_r(u) \Leftrightarrow \pi_r(u)\bar{x} = \pi_r(u)\bar{y}.$$

Следовательно, между множеством правых сдвигов $u\langle X \rangle = uX^*$ функции u и множеством правых смежных классов группы $\langle X \rangle$ по подгруппе $\pi_r(u)$ есть взаимно однозначное соответствие.

Для функции $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ обозначим $Q_r(U) = \{\bar{x} \in \langle X \rangle : U\bar{x} = U\}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, $|uX^*| = n$, то $\pi_r(u)$ – свободная группа ранга $1 + n(k-1)$. Если $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ – периодическая функция такая, что $u = U|_{X^*}$, то $\pi_r(u) = Q_r(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно из общей теории групп [4; теорема 7.2.8], подгруппа индекса n свободной группы ранга k есть свободная группа ранга $1 + n(k-1)$. Отметим, что этот факт можно пояснить и на языке графов [5]. Граф $\Gamma_r(u)$ имеет n вершин и nk ребер, его остовное дерево содержит $n-1$

ребер, поэтому базис независимых циклов графа $\Gamma_r(u)$ содержит $nk - n + 1$ циклов. Эти циклы можно выбрать проходящими через отмеченную точку, тогда они будут системой свободных образующих группы $\pi_r(u)$.

Напомним, что по теореме 8 функция U существует и определена однозначно. Тогда равенство $\pi_r(u) = Q_r(U)$ следует из соотношений (5) и (9).

Мы уже знаем из теоремы 12, что периодическая реверсивная функция чисто периодична слева и справа. Теперь мы докажем этот факт с использованием графов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, то она чисто периодична слева и справа, а также выполняются равенства $\Lambda_r(u) = 0$, $T_r(u) = |uX^*|$. Орграф $\Gamma_r(u)$ является эйлеровым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях утверждения граф $\Gamma_r(u)$ конечен, связан, из каждой его вершины выходит k ребер и в каждую вершину заходит k ребер. Следовательно, граф эйлеров и в нем существует ориентированный (положительный) цикл, проходящий в точности по одному разу через каждое ребро графа вдоль его направления. Отсюда вытекает, что любые две вершины графа соединены положительным путем. В частности, из любой вершины ведет положительный путь в отмеченную вершину u . По утверждению 13 функция u чисто периодична справа (и аналогично слева). Отсюда следуют равенства $\Lambda_r(u) = 0$, $T_r(u) = |uX^*|$.

ТЕОРЕМА 16. *Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, то*

$$\pi_r(u) = \langle Q_r(u) \rangle \quad \text{и} \quad T_r(u) = |\langle X \rangle : \pi_r(u)| = |\langle X \rangle : \langle Q_r(u) \rangle|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду двух предыдущих утверждений достаточно доказать равенство $\pi_r(u) = \langle Q_r(u) \rangle$. Из соотношений (8) и (9) следует, что

$$Q_r(u) = \pi_r(u) \cap X^*,$$

поэтому включение $\langle Q_r(u) \rangle \subset \pi_r(u)$ очевидно. Обратно, пусть $\bar{t} \in \pi_r(u)$. Запишем слово $\bar{t}$ в виде

$$\bar{t} = \bar{x}_1 \bar{x}_2^{-1} \bar{x}_3 \bar{x}_4^{-1} \dots \bar{x}_{n-1} \bar{x}_n^{-1} \bar{x}_{n+1}, \quad \text{где} \quad \bar{x}_i \in X^*,$$

и рассмотрим $\bar{t}$ как путь в графе $\Gamma_r(u)$, начинающийся и заканчивающийся в отмеченной вершине u . Пусть $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ — концы путей $\bar{x}_1, \bar{x}_2^{-1}, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n^{-1}$ соответственно. На рис. 1 они обозначены точками.

Рис. 1

Обозначим через $\bar{y}_i$ положительный путь из u_i в u , если i нечетно, и из u в u_i , если i четно. Ввиду эйлеровости орграфа $\Gamma_r(u)$ такие пути существуют. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{t}_1 &= \bar{x}_1 \bar{y}_1, & \bar{t}_2 &= \bar{y}_2 \bar{x}_2 \bar{y}_1, & \bar{t}_3 &= \bar{y}_2 \bar{x}_3 \bar{y}_3, \\ \bar{t}_4 &= \bar{y}_4 \bar{x}_4 \bar{y}_3, & \dots, & & \bar{t}_n &= \bar{y}_n \bar{x}_n \bar{y}_{n-1}, & \bar{t}_{n+1} &= \bar{y}_n \bar{x}_{n+1}\end{aligned}$$

– положительные пути, начинающиеся и заканчивающиеся в отмеченной точке (см. рис. 1) и, значит, лежащие в $\pi_r(u) \cap X^* = Q_r(u)$. При этом

$$\bar{t} = \bar{t}_1 \bar{t}_2^{-1} \bar{t}_3 \bar{t}_4^{-1} \dots \bar{t}_{n-1} \bar{t}_n^{-1} \bar{t}_{n+1}.$$

Следовательно, $\bar{t} \in \langle Q_r(u) \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, то для любого слова $\bar{x} \in X^*$ функции $u\bar{x}$, $\bar{x}u$ реверсивны и периодичны, а также

$$T_r(u) = T_r(u\bar{x}) = T_r(\bar{x}u), \quad T_l(u) = T_l(u\bar{x}) = T_l(\bar{x}u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функции $u\bar{x}$ и $\bar{x}u$ периодичны, то остается доказать, что они реверсивны. Из определения следует, что граф $\Gamma_r(u\bar{x})$ является подграфом в $\Gamma_r(u)$. По утверждению 15 орграф $\Gamma_r(u)$ эйлеров, и из каждой вершины ведет положительный путь в любую другую вершину. Отсюда следует, что граф $\Gamma_r(u\bar{x})$ совпадает с графом $\Gamma_r(u)$ за исключением того, что отмеченной является другая вершина. Поэтому по утверждению 13 функция $u\bar{x}$ реверсивна справа. В силу теоремы 7 функция $u\bar{x}$ реверсивна также слева. Таким образом, функция $u\bar{x}$ (и аналогично $\bar{x}u$) реверсивна и периодична.

Из (9) следует, что $\pi_r(u\bar{x}) = \bar{x}^{-1} \pi_r(u) \bar{x}$. Поэтому индексы подгрупп $\pi_r(u\bar{x})$ и $\pi_r(u)$ совпадают и $T_r(u) = T_r(u\bar{x})$ по теореме 16. Если $\bar{t} \in \pi_r(u)$, то $u\bar{t} = u$, откуда $\bar{x}u\bar{t} = \bar{x}u$ и $\bar{t} \in \pi_r(\bar{x}u)$. Обратно, если $\bar{t} \in \pi_r(\bar{x}u)$, то $\bar{x}u\bar{t} = \bar{x}u$. Так как u реверсивна слева, то это равенство можно домножить на $\bar{x}^{-1}$ слева. Тогда $u\bar{t} = u$ и $\bar{t} \in \pi_r(u)$. Следовательно, $\pi_r(u) = \pi_r(\bar{x}u)$ и $T_r(u) = T_r(\bar{x}u)$.

ТЕОРЕМА 17. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, то числа $T_r(u)$ и $T_l(u)$ делят мощность множества X^*uX^* всех двусторонних сдвигов функции u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию теоремы 16 все функции из X^*uX^* реверсивны и периодичны. Поэтому с учетом (4) на множестве X^*uX^* определены левое и правое действия группы $\langle X \rangle$. Зададим на множестве X^*uX^* отношение $\sim$, полагая $v \sim w$, если $w = v\bar{x}$ для некоторого $\bar{x} \in \langle X \rangle$. Тогда $\sim$ есть отношение эквивалентности и множество X^*uX^* разбивается на классы эквивалентных элементов. Ввиду (4) классом элемента v является множество $v\langle X \rangle = vX^*$ мощности $|vX^*| = T_r(v)$. По следствию теоремы 16 $T_r(v) = T_r(u)$, поэтому классы равномощны. Следовательно, мощность класса делит мощность множества, которое разбито на классы, т.е. $T_r(u)$ делит $|X^*uX^*|$.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, а числа $T_r(u)$ и $T_l(u)$ взаимно просты, то $|X^*uX^*| = T_l(u)T_r(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|X^*u| = m$ и $|uX^*| = n$. Обозначим через $\bar{x}_1u, \dots, \bar{x}_m u$ все левые и через $u\bar{y}_1, \dots, u\bar{y}_n$ все правые сдвиги функции u . Тогда $\bar{x}_i u \bar{y}_j$, $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$, – все двусторонние сдвиги функции u , откуда

$$|X^*uX^*| \leq |X^*u| \cdot |uX^*|.$$

По утверждению 15

$$|X^*u| = T_l(u) \quad \text{и} \quad |uX^*| = T_r(u),$$

поэтому $|X^*uX^*| \leq T_l(u)T_r(u)$. Теперь требуемое равенство следует из теоремы 17.

§ 5. Примеры

Приведем примеры вычисления периодов функций, а также примеры функций, обладающих некоторыми замечательными свойствами.

ПРИМЕР 1. Покажем, что чисто периодическая справа функция может не быть чисто периодической слева. Пусть $k = 2$, $X = \{x_1, x_2\}$, $M = \{0, 1, 2\}$. Рассмотрим функцию $u: X^* \rightarrow M$, определенную следующим образом:

$$u(\theta) = 0, \quad u(\bar{x}x_1) = 1, \quad u(\bar{x}x_2) = 2, \quad \bar{x} \in X^*.$$

Легко увидеть, что левый и правый сдвиги $\bar{x}u$, $u\bar{x}$ функции u зависят только от того, на какую букву оканчивается слово $\bar{x}$. Отсюда

$$X^*u = \{u, x_1u, x_2u\}, \quad uX^* = \{u, ux_1, ux_2\}.$$

Из определения сдвига получаем, что левые сдвиги функции u суть константы: $x_1u \equiv 1$, $x_2u \equiv 2$. Отсюда следует, что функция u не чисто периодична слева, а оба левых сдвига x_1u , x_2u чисто периодичны слева. Следовательно,

$$|X^*u| = 3, \quad \Lambda_l(u) = 1, \quad T_l(u) = 2.$$

Рассмотрим правые сдвиги $v = ux_1$ и $w = ux_2$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$v(\theta) = 1, \quad w(\theta) = 2, \quad v(\bar{x}) = w(\bar{x}) = u(\bar{x}), \quad \bar{x} \in X^* \setminus \{\theta\}.$$

Так как $v\bar{x}x_1 = ux_1\bar{x}x_1 = ux_1 = v$ для любого слова $\bar{x} \in X^*$, то по определению функция v чисто периодична справа. Так как $x_1v = x_1(ux_1) = (x_1u)x_1 \equiv 1$, то функция v не чисто периодична слева. Те же утверждения верны для функции w . Следовательно,

$$|uX^*| = 3, \quad \Lambda_r(u) = 1, \quad T_r(u) = 2.$$

Функции v и w являются примерам функций, чисто периодических справа, но не слева.

Графы левых и правых сдвигов функции u имеют следующий вид: см. рис. 2. Для удобства ребра, которые должны помечаться буквой x_1 , мы изображаем сплошной стрелкой, а ребра, помечаемые буквой x_2 , – штрихованной стрелкой.

Рис. 2

Полугруппы вектор-периодов функции u следующие:

$$P_l(u) = X^*, \quad P_r(u) = Q_l(u) = Q_r(u) = \theta.$$

Функция u имеет единственную шрейерову систему левых сдвигов

$$T = \{\theta, x_1, x_2\},$$

являющуюся двусторонней, и три шрейеровых системы правых сдвигов

$$T_1 = \{\theta, x_1, x_2\}, \quad T_2 = \{\theta, x_1, x_1x_2\}, \quad T_3 = \{\theta, x_2, x_2x_1\},$$

первая из которых является двусторонней, а вторая и третья нет.

ПРИМЕР 2. Пусть $k = 2$, $M = \{0, 1\}$ и функция u определяется следующим образом: $u(\bar{x})$ есть четность числа вхождений подслова x_1x_2 в слово $\bar{x} \in X^*$. Тогда функция u имеет единственную шрейерову систему правых сдвигов $T = \{\theta, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_1\}$, которая не является двусторонней. Этот пример показывает, что среди шрейеровых систем правых сдвигов функции может не быть двусторонних шрейеровых систем.

ПРИМЕР 3. Покажем, что левый и правый периоды периодической функции могут быть различными. Пусть $k = 2$, $M = \{0, 1\}$ и функция u определяется следующим образом: $u(\bar{x}) = 1$, если слово $\bar{x} \in X^*$ начинается с двух одинаковых букв, $u(\bar{x}) = 0$ в остальных случаях. Легко понять, что левый сдвиг $\bar{x}u$ и правый сдвиг $u\bar{x}$ определяется первыми двумя буквами слова $\bar{x}$. Следовательно, $X^*u = X^{[2]}u$ и $uX^* = uX^{[2]}$. Перебирая все слова из $X^{[2]}$, получим, что

$$x_1x_2u = x_1u, \quad x_2x_1u = x_2u; \quad ux_1^2 = ux_2^2 \equiv 1, \quad ux_1x_2 = ux_2x_1 \equiv 0$$

и

$$X^*u = \{u, x_1u, x_2u, x_1^2u, x_2^2u\}, \quad uX^* = \{u, ux_1, ux_2, ux_1^2, ux_1x_2\}.$$

Пользуясь этими соотношениями, изобразим графы $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$, см. рис. 3.

С помощью утверждения 13 получаем, что функции $x_1u, x_2u, x_1^2u, x_2^2u$ чисто периодичны слева, функции ux_1^2, ux_1x_2 чисто периодичны справа,

$$T_l(u) = 4, \quad T_r(u) = 2.$$

Таким образом, $T_l(u) \neq T_r(u)$. Заметим, что в этом примере $|X^*u| = |uX^*|$.

Рис. 3

Сложнее построить пример реверсивной и периодической функции, у которой левый и правый периоды различны.

ТЕОРЕМА 18. *Существует реверсивная и периодическая функция $u: X^* \rightarrow M$, где M конечно, такая, что $T_l(u) \neq T_r(u)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим периодическую функцию $U: \langle X \rangle \rightarrow M$ такую, что $|X^*U| \neq |UX^*|$. Тогда по теореме 6 функция $u = U|_{X^*}$ реверсивна и периодична и $|X^*u| \neq |uX^*|$, поэтому в силу утверждения 15 $T_l(u) \neq T_r(u)$.

Положим $X = \{x_1, x_2\}$, $M = \{a, b, c\}$ и определим функцию U соотношениями

- (а) $U(\bar{x}x_s^{-1}\bar{y}) = U(\bar{x}x_s\bar{y})$, $U(\bar{x}x_s^2\bar{y}) = U(\bar{x}\bar{y})$;
- (б) $U(\bar{x}x_2) = U(\bar{x})$;
- (в) $U(\bar{x}x_2x_1x_2x_1x_2x_1) = U(\bar{x})$;
- (г) $U[\theta, x_1, x_2x_1, x_1x_2x_1, x_2x_1x_2x_1, x_1x_2x_1x_2x_1] = (a, b, c, c, b, a)$.

Здесь $\bar{x}, \bar{y} \in X^*$, $x_s \in X$. Легко видеть, что соотношениями (а)–(г) функция U определена на всем множестве $\langle X \rangle$. Докажем, что

$$|X^*U| = 3, \quad X^*U = \{U, x_1U, x_2x_1U\}. \quad (10)$$

Так как $U[\theta, x_1, x_2x_1] = (a, b, c)$, то три указанных сдвига различны. Из (а) и (б) следует, что

$$\bar{x}x_s^{-1}\bar{y}U = \bar{x}x_s\bar{y}U, \quad \bar{x}x_s^2\bar{y}U = \bar{x}\bar{y}U, \quad x_2U = U,$$

поэтому все левые сдвиги функции U имеют вид $\bar{x}U$, где $\bar{x} = \dots x_2x_1x_2x_1$. Ввиду (в) $x_2x_1x_2x_1x_2x_1U = U$, так что можно считать, что $l(\bar{x}) < 6$. Таким образом,

$$X^*U \subset \{U, x_1U, x_2x_1U, x_1x_2x_1U, x_2x_1x_2x_1U, x_1x_2x_1x_2x_1U\}.$$

Для доказательства (10) достаточно проверить равенство $x_1x_2x_1U = x_2x_1U$, или

$$U(\bar{x}x_1x_2x_1) = U(\bar{x}x_2x_1), \quad \bar{x} \in \langle X \rangle. \quad (11)$$

Докажем это утверждение индукцией по длине слова $\bar{x}$. Если $\bar{x} = \theta$, то равенство (11) следует из (г). Пусть $l(\bar{x}) > 0$. Ввиду (а) можно считать, что слово $\bar{x}$ не содержит отрицательных степеней букв и квадратов букв, так как иначе все сводится к слову меньшей длины. Если $\bar{x} = \bar{y}x_1$, то, пользуясь предположением индукции в первом и третьем равенствах, получаем

$$U(\bar{x}x_1x_2x_1) = U(\bar{y}x_1^2x_2x_1) = U(\bar{y}x_2x_1) = U(\bar{y}x_1x_2x_1) = U(\bar{x}x_2x_1),$$

что и требовалось доказать. Пусть теперь $\bar{x}$ оканчивается на букву x_2 . Тогда $\bar{x} = \dots x_1x_2x_1x_2$. Достаточно рассмотреть слова длины $l(\bar{x}) < 6$, так как иначе ввиду (в) все сводится к слову длины $l(\bar{x}) - 6$. Таким образом, равенство (11) нужно проверить для $\bar{x} \in \{x_2, x_1x_2, x_2x_1x_2, x_1x_2x_1x_2, x_2x_1x_2x_1x_2\}$, что легко делается с использованием условий (а)–(г). Соотношения (10) доказаны.

Теперь рассмотрим правые сдвиги функции U . Положим $T = \{\theta, x_1\}$. Пользуясь равенством $U\bar{x}[T] = U[\bar{x}, \bar{x}x_1]$ и условиями (а)–(г), непосредственно проверяем, что

$$\begin{aligned} U[T] &= (a, b), & Ux_1[T] &= (b, a), & Ux_2[T] &= (a, c), \\ Ux_2x_1[T] &= (c, a), & Ux_1x_2[T] &= (b, c), & Ux_1x_2x_1[T] &= (c, b). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция U имеет по крайней мере шесть различных правых сдвигов и $|UX^*| \geq 6$. Таким образом, $|X^*U| \neq |UX^*|$.

Более тщательные вычисления показывают, что функция U имеет в точности шесть правых сдвигов. Следовательно,

$$T_l(u) = |X^*u| = 3, \quad T_r(u) = |uX^*| = 6.$$

Можно построить графы $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$ левых и правых сдвигов функции u . Они имеют следующий вид: см. рис 4.

Рис. 4

Полный перебор показывает, что если $T_l(u) = 3$, то значение $T_r(u)$ может быть равно 3 или 6. В последнем случае, помимо приведенного выше примера, существует еще один, с точностью до изоморфизма графов, пример. Для него графы левых и правых сдвигов функции u выглядят следующим образом: см. рис 5.

Рис. 5

§ 6. Наименьший моноид функции

Чисто периодическую последовательность периода t :

$$u = (u(0), \dots, u(t-1), u(0), \dots, u(t-1), \dots)$$

достаточно задать на конечном множестве $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$, так как значениями $u(0), \dots, u(t-1)$ вся последовательность определяется однозначно. В этом параграфе определяется наименьший моноид, на котором достаточно задать периодическую функцию $u: X^* \rightarrow M$ так, чтобы вся функция определялась однозначно по ее значениям на этом моноиде.

Пусть $u: X^* \rightarrow M$ — произвольная функция. На множестве X^* введем отношение эквивалентности:

$$\bar{x}\bar{y} \Leftrightarrow \forall v \in X^* uX^* \quad \bar{x}v = \bar{y}v \quad \text{и} \quad v\bar{x} = v\bar{y}.$$

Легко увидеть, что ρ является конгруэнцией полугруппы X^* . Поэтому X^*/ρ — моноид. Пусть $\pi: X^* \rightarrow X^*/\rho$, $\pi(\bar{x}) = [\bar{x}]_\rho$, — естественный эпиморфизм моноидов. Докажем, что моноид X^*/ρ обладает некоторым свойством универсальности.

Сюръективное отображение $\sigma: X^* \rightarrow H$ будем называть *допустимым для u* , если

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in X^* \quad \sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y}) \Rightarrow u(\bar{x}) = u(\bar{y}). \quad (12)$$

В этом случае существует единственная функция $\tilde{u}: H \rightarrow M$ такая, что $\sigma\tilde{u} = u$, т.е. $\tilde{u}(\sigma(\bar{x})) = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^*$; другими словами, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & M \\ \sigma \downarrow & & \parallel \\ H & \xrightarrow{\tilde{u}} & M. \end{array}$$

А именно, при условии (12) функция u постоянна на множестве $\sigma^{-1}(h)$ для любого $h \in H$ и можно определить

$$\tilde{u}: H \rightarrow M, \quad \tilde{u}(h) = u(\sigma^{-1}(h)).$$

Функцию $\tilde{u}$ будем называть *проекцией функции u на H* .

В дальнейшем будем считать, что H – моноид и σ – эпиморфизм моноидов. Тогда легко проверяется, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in X^*$ справедливо

$$\sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y}) \Rightarrow \bar{x}\bar{y}. \quad (13)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. Пусть $u: X^* \rightarrow M$ – произвольная функция. Эпиморфизм моноидов $\sigma: X^* \rightarrow H$ является допустимым для функции u тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм моноидов $\tau: H \rightarrow X^*/\rho$ такой, что $\sigma\tau = \pi$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\sigma} & H \\ \pi \downarrow & \swarrow \tau & \\ X^*/\rho & & \end{array}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ допустимый для u . Определим $\tau: H \rightarrow X^*/\rho$ следующим образом: если $h \in H$, то положим $\tau(h) = \pi(\bar{x})$, где $\bar{x} \in X^*$ – произвольное слово такое, что $\sigma(\bar{x}) = h$. Это определение корректно, поскольку если $\sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y})$, то $\bar{x}\bar{y}$ ввиду (13) и $\pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y})$. Из того, что σ и π – эпиморфизмы моноидов, следует, что τ – эпиморфизм моноидов. При этом $\sigma\tau(\bar{x}) = \tau(\sigma(\bar{x})) = \pi(\bar{x})$ по определению.

Обратно, пусть $\tau: H \rightarrow X^*/\rho$ – эпиморфизм моноидов такой, что $\sigma\tau = \pi$. Если $\sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y})$, то $\pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y})$, т.е. $\bar{x}\bar{y}$. Отсюда $u\bar{x} = u\bar{y}$, следовательно, $u(\bar{x}) = u(\bar{y})$. Таким образом, σ допустимый для u .

СЛЕДСТВИЕ. X^*/ρ – наименьший моноид, на который возможен допустимый для функции u эпиморфизм моноидов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Моноид X^*/ρ назовем наименьшим моноидом функции u .

Через $\Pi(A)$ будем обозначать полугруппу всех преобразований множества A .

ТЕОРЕМА 20. Наименьший моноид X^*/ρ функции u конечен тогда и только тогда, когда функция u периодична. При этом X^*/ρ гомоморфно вкладывается в моноид $\Pi(\bar{1}, m)^{\text{op}} \times \Pi(\bar{1}, n)$, где $m = |X^*u|$, $n = |uX^*|$. В частности, $|X^*/\rho| \leq m^m n^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть наименьший моноид функции u конечен. Тогда существует лишь конечное число классов отношения ρ . Если $\bar{x}u \neq \bar{y}u$, то $[\bar{x}]_\rho \neq [\bar{y}]_\rho$, поэтому существует лишь конечное число левых и аналогично лишь конечное число правых сдвигов функции u . Следовательно, множества X^*u и uX^* конечны и функция u периодична. Обратно, пусть функция u периодична. Обозначим через $\bar{x}_1u, \dots, \bar{x}_mu$ все левые и через $u\bar{y}_1, \dots, u\bar{y}_n$ все правые сдвиги функции u . С каждым элементом $\bar{x} \in X^*$ свяжем два вектора $(i_1, \dots, i_m)$ и $(j_1, \dots, j_n)$ над множествами $\bar{1}, m$ и $\bar{1}, n$ соответственно, определяемые из равенств

$$(\bar{x}\bar{x}_1u, \dots, \bar{x}\bar{x}_mu) = (\bar{x}_{i_1}u, \dots, \bar{x}_{i_m}u), \quad (u\bar{y}_1\bar{x}, \dots, u\bar{y}_n\bar{x}) = (u\bar{y}_{j_1}, \dots, u\bar{y}_{j_n}).$$

Легко видеть, что два элемента $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из X^* связаны отношением ρ тогда и только тогда, когда им соответствует одна и та же пара векторов. Следовательно, число классов в X^*/ρ не превосходит числа пар векторов, т.е. $|X^*/\rho| \leq m^m n^n$.

Сопоставим каждому классу $[\bar{x}]_\rho$ два элемента из множеств $\Pi(\overline{1, m})$ и $\Pi(\overline{1, n})$ соответственно:

$$[\bar{x}]_\rho \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix} \in \Pi(\overline{1, m}), \quad [\bar{x}]_\rho \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \in \Pi(\overline{1, n}).$$

Легко видеть, что первое сопоставление является антигомоморфизмом, а второе – гомоморфизмом. В результате получаем гомоморфное вложение X^*/ρ в моноид $\Pi(\overline{1, m})^{\text{op}} \times \Pi(\overline{1, n})$.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $u: X^* \rightarrow M$ реверсивна и периодична, то ее наименьший моноид есть конечная группа, гомоморфно вкладывающаяся в группу $S_m^{\text{op}} \times S_n$, где $m = T_l(u)$, $n = T_r(u)$. В частности, $|X^*/\rho| \leq m! n!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду реверсивности функции u векторы $(i_1, \dots, i_m)$ и $(j_1, \dots, j_n)$ в доказательстве теоремы 20 являются перестановками. Поэтому X^*/ρ – конечная группа, и ее вложение в моноид $\Pi(\overline{1, m})^{\text{op}} \times \Pi(\overline{1, n})$ является вложением в группу $S_m^{\text{op}} \times S_n$. Остается заметить, что $T_l(u) = |X^*u|$ и $T_r(u) = |uX^*|$ по утверждению 15.

Изучим наименьший моноид реверсивной и периодической функции более подробно. Для произвольного множества функций $S \subset M^{X^*}$ обозначим

$$\pi_r(S) = \bigcap_{u \in S} \pi_r(u), \quad \pi_l(S) = \bigcap_{u \in S} \pi_l(u).$$

Напомним, что *сердцевиной* подгруппы H группы G называется пересечение $\text{core } H = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ всех подгрупп, сопряженных с H . Группа $\text{core } H$ является наибольшей нормальной подгруппой группы G , лежащей в H .

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. Если $S \subset M^{X^*}$ – произвольное множество реверсивных и периодических функций, $\bar{x} \in \langle X \rangle$, то

$$\begin{aligned} \pi_r(S\bar{x}) &= \bar{x}^{-1}\pi_r(S)\bar{x}, \quad \pi_r(X^*S) = \pi_r(S), \quad \pi_r(SX^*) \subset \pi_l(X^*S), \\ \pi_r(X^*SX^*) &= \pi_l(X^*SX^*) = \text{core } \pi_r(S) = \text{core } \pi_l(S). \end{aligned} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если функция u реверсивна и периодична, то по следствию теоремы 16 все ее левые и правые сдвиги реверсивны и периодичны. Ввиду (9) первые два равенства в (14) очевидны. Проверим включение в (14). Пусть $\bar{t} \in \pi_r(SX^*)$. Тогда для любых $u \in S$ и $\bar{x} \in X^*$ выполняется равенство $u\bar{x}\bar{t} = u\bar{x}$. Это означает, что для любого $\bar{y} \in X^*$ верно равенство $u\bar{x}\bar{t}(\bar{y}) = u\bar{x}(\bar{y})$, или $u(\bar{x}\bar{t}\bar{y}) = u(\bar{x}\bar{y})$, или $\bar{t}\bar{y}u(\bar{x}) = \bar{y}u(\bar{x})$, или $\bar{t}\bar{y}u = \bar{y}u$. Следовательно, $\bar{t} \in \pi_l(X^*S)$.

Ввиду доказанного $\pi_r(X^*SX^*) = \pi_r(SX^*) \subset \pi_l(X^*S) = \pi_l(X^*SX^*)$. В силу симметрии $\pi_r(X^*SX^*) = \pi_l(X^*SX^*)$. Теперь

$$\pi_r(X^*SX^*) = \pi_r(SX^*) = \bigcap_{\bar{x} \in X^*} \bigcap_{u \in S} \pi_r(u\bar{x}) = \bigcap_{\bar{x} \in X^*} \bigcap_{u \in S} \bar{x}^{-1}\pi_r(u)\bar{x} = \text{core } \pi_r(S),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 22. Если $u: X^* \rightarrow M$ – реверсивная и периодическая функция, X^*/ρ – ее наименьший моноид, то

$$X^*/\rho \cong \langle X \rangle / \text{core } \pi_r(u) \cong \langle X \rangle / \text{core } \pi_l(u).$$

При этом $|X^*/\rho|$ делится на $T_l(u)$ и на $T_r(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $Q = \text{core } \pi_r(u)$. В силу утверждения 21 имеем $Q = \text{core } \pi_l(u) = \pi_r(uX^*) = \pi_l(X^*u)$. Зададим отображение

$$\varphi: X^*/\rho \rightarrow \langle X \rangle / Q, \quad \varphi([\bar{x}]_\rho) = Q\bar{x}, \quad \bar{x} \in X^*.$$

Если $[\bar{x}]_\rho = [\bar{y}]_\rho$, то $\bar{x}\rho\bar{y}$, поэтому $u\bar{z}\bar{x} = u\bar{z}\bar{y}$ для любого $\bar{z} \in X^*$, т.е. $\bar{x}\bar{y}^{-1} \in \pi_r(uX^*) = Q$. Следовательно, $Q\bar{x} = Q\bar{y}$ и отображение φ определено корректно. Очевидно, φ – гомоморфизм моноидов. Покажем, что φ – изоморфизм.

Если $\varphi([\bar{x}]_\rho) = \varphi([\bar{y}]_\rho)$, то $Q\bar{x} = Q\bar{y}$, значит, $\bar{x}\bar{y}^{-1} \in Q = \pi_r(uX^*) = \pi_l(X^*u)$. Отсюда следует, что $\bar{x}\rho\bar{y}$, поэтому $[\bar{x}]_\rho = [\bar{y}]_\rho$ и отображение φ инъективно.

Докажем, что φ сюръективно. Достаточно доказать, что для любого $\bar{x} \in \langle X \rangle$ существует $\bar{y} \in X^*$ такое, что $Q\bar{x} = Q\bar{y}$. Пусть m – число, определенное в теореме 12. В слове $\bar{x} \in \langle X \rangle$ заменим все вхождения букв x^{-1} , $x \in X$, на x^{m-1} . Получим слово $\bar{y} \in X^*$ для которого ввиду (7) выполняется свойство

$$\forall \bar{z} \in X^* \quad u\bar{z}\bar{x} = u\bar{z}\bar{y}.$$

Тогда $\bar{x}\bar{y}^{-1} \in \pi_r(uX^*) = Q$, т.е. $Q\bar{x} = Q\bar{y}$, что и требовалось доказать. Таким образом, φ – изоморфизм моноидов и $X^*/\rho \cong \langle X \rangle / Q$. По теореме 16 $T_r(u) = |\langle X \rangle : \pi_r(u)|$. Так как $Q = \text{core } \pi_r(u)$ есть подгруппа в $\pi_r(u)$, мы получаем, что $|X^*/\rho|$ делится на $T_r(u)$. Аналогично $|X^*/\rho|$ делится на $T_l(u)$.

Автор выражает признательность А. А. Клячко за помощь в доказательстве теоремы 16 и указание на связь рассматриваемых вопросов с теорией действий групп на графах, что сыграло существенную роль при написании работы в целом.

Список литературы

- [1] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Наука, М., 1985.
- [2] В. Л. Куракин, “Свободные регистры сдвига. I”, *Труды по дискретной математике*, т. 9, Гелиос АРВ, М., 2006, 77–109.
- [3] V. L. Kurakin, A. S. Kuzmin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev, “Linear recurring sequences over rings and modules”, *J. Math. Sci. (New York)*, **76**:6 (1995), 2793–2915.
- [4] М. Холл, *Теория групп*, ИЛ, М., 1962.
- [5] О. В. Богопольский, *Введение в теорию групп*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2002.

В. Л. Куракин (V. L. Kurakin)
г. Москва
E-mail: kurakin@do.tochka.ru

Поступила в редакцию
19.07.2005