Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Шкредов, О динамических системах с медленной скоростью возвращения, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 11, 143–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:23:51

УДК 517.938

И. Д. Шкредов

О динамических системах с медленной скоростью возвращения

В настоящей работе мы изучаем вопрос о скорости возвращения у динамических систем в метрических пространствах с конечной хаусдорфовой мерой. Для таких систем М. Бошерницан получил верхние оценки скорости однократного, а автор – кратного возвращения. Статья посвящена нахождению нижних оценок скорости кратного возвращения. Говоря точнее, мы строим пример динамической системы (одометра, или преобразования фон Неймана) с медленной скоростью кратного возвращения. В доказательстве используется теорема А. Беренда о множествах без арифметических прогрессий.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Пусть X – некоторое множество с сигма-алгеброй его подмножеств $\mathcal{B}$. Пусть также T – измеримое сохраняющее меру μ отображение X в себя. Ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$. Четверка $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ называется динамической системой с инвариантной мерой. Хорошо известная *теорема Пуанкаре о возвращении* утверждает, что для всякого измеримого множества $E \subseteq X$, $\mu E > 0$, существует натуральное $n > 0$ такое, что $\mu(E \cap T^{-n}E) > 0$.

Предположим, дополнительно, что X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$, а $\mathcal{B}$ – борелевская сигма-алгебра. В этом случае теорема Пуанкаре может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и μ – борелевская мера на X . Пусть T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Тогда для почти всех точек $x \in X$ выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, x) = 0. \quad (1)$$

В работе [1] (см. также [2], [3]) Г. Фюрстенберг обобщил теорему Пуанкаре на случай нескольких степеней отображения T .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть X – пространство с сигма-алгеброй измеримых множеств $\mathcal{B}$ и μ – мера на X . Пусть T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ , и $k \geq 3$. Тогда для любого измеримого множества E с $\mu E > 0$ существует натуральное $n > 0$ такое, что

$$\mu(E \cap T^{-n}E \cap T^{-2n}E \cap \dots \cap T^{-(k-1)n}E) > 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00912), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-136.2003.1) и фонда INTAS (грант № 03-51-5-70).

Если X – метрическое пространство, то теорема 1.2 может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.2'. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и μ – борелевская мера на X . Пусть T – сохраняющее меру μ отображение X в себя и $k \geq 3$. Тогда для почти всех $x \in X$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \max\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \dots, d(T^{(k-1)n} x, x)\} = 0.$$

В работе [4] Г. Фюрстенберг и Я. Кацнельсон перенесли теорему 1.2 на случай нескольких коммутирующих отображений. Мы сформулируем их теорему в случае, когда X является метрическим пространством.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и μ – борелевская мера на X . Пусть $k \geq 2$ и $T_1, T_2, \dots, T_k$ – сохраняющие меру μ коммутирующие отображения X в себя. Тогда для почти всех $x \in X$ выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \max\{d(T_1^n x, x), d(T_2^n x, x), \dots, d(T_k^n x, x)\} = 0.$$

Пусть A – некоторое подмножество натурального ряда. Обозначим через $[N]$ отрезок натурального ряда $\{1, 2, \dots, N\}$. Верхней плотностью множества A называется величина

$$D^*(A) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [N]|}{N},$$

где $|A \cap [N]|$ означает мощность множества $A \cap [N]$.

В [2] было показано, что теорема 1.2 эквивалентна знаменитой теореме Е. Сегера об арифметических прогрессиях.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть A – произвольное подмножество натурального ряда и $D^*(A) > 0$. Тогда для любого натурального $k \geq 3$ множество A содержит арифметическую прогрессию длины k .

Следует отметить, что в случае $k = 3$ теорема 1.4 была доказана ранее К. Ф. Ротом (см. [5]).

Легко показать, что теоремы 1.2 и 1.2' вытекают из теоремы 1.4 (см. [2]). На самом же деле теорема 1.2 (1.2') и теорема 1.4 равносильны. Для доказательства их равносильности Фюрстенберг установил следующий красивый результат, который называется *принципом соответствия Фюрстеберга*.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть A – произвольное подмножество натурального ряда с $D^*(A) > 0$. Тогда существуют динамическая система с инвариантной мерой $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ и измеримое множество E , $\mu E = D^*(A)$, такие, что для всех натуральных $k \geq 3$ и для всех натуральных положительных $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ выполнено

$$D^*(A \cap (A + m_1) \cap \dots \cap (A + m_{k-1})) \geq \mu(E \cap T^{-m_1} E \cap \dots \cap T^{-m_{k-1}} E). \quad (2)$$

Теорема 1.5 указывает на тесную связь между эргодической теорией и комбинаторными задачами об арифметических прогрессиях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. Из теорем 1.2 и 1.5 вытекает теорема 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – натуральное число, $k \geq 3$. Пусть также множество $A \subseteq \mathbb{N}$ не содержит арифметических прогрессий длины k и имеет положительную верхнюю плотность. По теореме 1.5 существуют динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ и измеримое множество E положительной меры такие, что для всех натуральных $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ выполнено неравенство (2). С другой стороны, по теореме 1.2 существует натуральное $n > 0$ такое, что

$$\mu(E \cap T^{-n}E \cap T^{-2n}E \cap \dots \cap T^{-(k-1)n}E) > 0. \quad (3)$$

Положим $m_1 = n$, $m_2 = 2n$, ..., $m_{k-1} = (k-1)n$. Из (2) и (3) вытекает неравенство $D^*(A \cap (A+n) \cap \dots \cap (A+(k-1)n)) > 0$. Это противоречит тому, что A не содержит арифметических прогрессий длины k . Утверждение доказано.

Главной целью настоящей статьи является получение нижних оценок скорости кратного возвращения для метрических пространств с конечной хаусдорфовой мерой. В работе [6] М. Бошерницан доказал, что если в динамической системе $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ пространство X обладает конечной хаусдорфовой мерой, то теорема Пуанкаре 1.1 может быть значительно усилена (ниже мы сформулируем теорему Бошерницана более строго). После этого результата возникает естественный вопрос о получении аналогичных усиленных вариантов теорем 1.2 и 1.3 для пространств с конечной хаусдорфовой мерой. Недавно в работах [7]–[11] такие варианты для теоремы 1.2 и, частично, теоремы 1.3 (случай $k = 2$) были получены. Все эти результаты дают верхние оценки скорости кратного возвращения. В настоящей статье мы получим простые нижние оценки скорости возвращения.

Прежде чем сформулировать теорему Бошерницана и наш основной результат, мы дадим несколько определений.

Рассмотрим меру $H_h(\cdot)$ на X , определенную следующим образом:

$$H_h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_h^\delta(E), \quad (4)$$

где $h(t)$ – неотрицательная ($h(0) = 0$) непрерывная возрастающая функция, а $H_h^\delta(E) = \inf \left\{ \sum h(\delta_j) \right\}$, где $\inf$ берется по не более чем счетным покрытиям E открытыми множествами $\{B_j\}$, $\text{diam}(B_j) = \delta_j < \delta$. Если $h(t) = t^\alpha$, то $H_h(\cdot)$ – обычная мера Хаусдорфа, которую обозначим через $H_\alpha(\cdot)$.

Внешняя мера $H_h(\cdot)$ является сигма-аддитивной на сигма-алгебре множеств, измеримых по Каратеодори. Хорошо известно, что эта сигма-алгебра содержит все борелевские множества.

Будем говорить, что меры μ и H_h согласованы, если любое μ -измеримое множество является H_h -измеримым (в смысле измеримости по Каратеодори).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть $x \in X$. Число

$$C(x) = C^h(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \{n \cdot h(d(T^n x, x))\}$$

называется константой возвращения точки x .

В [6] М. Бошерницан получил первый количественный аналог теоремы 1.1. Похожий результат независимо доказал Н. Г. Мощевитин в [12].

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть X – метрическое пространство с $H_h(X) < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Пусть также меры μ и H_h согласованы. Тогда для почти всех относительно меры μ точек x из X выполнено $C(x) < \infty$.

Результат Бошерницана значительно усиливает теорему Пуанкаре. Чтобы показать это, рассмотрим простейший пример $H_1(X) < \infty$. По теореме Бошерницана для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех точек $x \in X$ выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{n^{1-\varepsilon} \cdot d(T^n x, x)\} = 0,$$

тогда как теорема Пуанкаре дает лишь $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{d(T^n x, x)\} = 0$.

В работе [6] М. Бошерницан получил ряд приложений теоремы 1.8 к различным динамическим системам.

В [13] был доказан результат, несколько усиливающий теорему 1.8.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть X – метрическое пространство с $H_h(X) < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Предположим, что меры μ и H_h согласованы. Тогда $C(x)$ – интегрируемая (по мере μ) функция и для любого μ -измеримого A выполнено

$$\int_A C(x) d\mu \leq H_h(A). \quad (5)$$

Если же $H_h(A) = 0$, то

$$\int_A C(x) d\mu = 0$$

без условия согласованности мер μ и H_h .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Согласно примеру из § 7 работы [6] оценка (5) в теореме 1.9 является неулучшаемой.

Вернемся к теоремам 1.2 и 1.4. Мы хотим обсудить некоторые их количественные варианты.

Пусть N и k – натуральные числа, $k \geq 3$. Положим

$$a_k(N) = \frac{1}{N} \max\{|A| : A \subseteq [N], \\ A \text{ не содержит арифметических прогрессий длины } k\}.$$

Ясно, что теорема 1.4 эквивалентна тому, что $a_k(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Первый количественный результат о скорости стремления к нулю функции $a_k(N)$ в случае, когда $k = 3$, был получен К. Ф. Ротом (см. [5]). В своей работе Рот, используя метод Харди–Литтлвуда, доказал неравенство

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log \log N}.$$

Другими словами, Рот доказал количественный вариант теоремы 1.4 и, следовательно, теоремы 1.2 в случае, когда $k = 3$.

После работ Рота, Семереди и Фюрстенберга появились работы, в которых указанные теоремы были значительно улучшены. Наилучший, на сегодняшний день, результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Ж. Бургену [14]. Он доказал, что

$$a_3(N) \ll \sqrt{\frac{\log \log N}{\log N}}. \quad (6)$$

В работе [7] В. Т. Гауэрс получил количественный результат о скорости стремления к нулю функции $a_k(N)$ для всех $k \geq 4$.

ТЕОРЕМА 1.11. *Для всех $k \geq 4$ справедливо неравенство*

$$a_k(N) \ll \frac{1}{(\log \log N)^{c_k}},$$

где константа c_k зависит только от k .

В работе [15] А. Беренд получил нижнюю оценку величины $a_3(N)$. В [16] Р. Ранкин обобщил результат Беренда на случай всех $k \geq 3$ (см. также [17]).

ТЕОРЕМА 1.12. *Пусть $\varepsilon > 0$ – любое действительное число и $k \geq 3$ – натуральное. Тогда для всех достаточно больших N выполнено*

$$a_k(N) \geq \exp(-(1 + \varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)}),$$

где C_k – некоторая положительная эффективная константа, зависящая только от k .

Количественный вариант теоремы 1.3 в случае $k = 3$ был получен в [8], [9], а затем усилен в [11].

Рассмотрим двумерную решетку $[N]^2$ с базисом $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2} \max\{|A| : A \subseteq [N]^2 \text{ и } A \text{ не содержит троек вида } (k, m), (k + d, m), (k, m + d), d > 0\}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1.13. *Справедливо неравенство $L(N) \ll 1/(\log \log N)^{C'}$, где C' – некоторая эффективная константа.*

Из этой оценки вытекает следующий результат о скорости возвращения в теореме 1.3 в случае $k = 2$ (см. [10], [11]).

Пусть S и R – два коммутирующих отображения пространства X , сохраняющие меру μ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Пусть $x \in X$. Число

$$C_{S,R}(x) = C_{S,R}^h(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \{L^{-1}(n) \cdot \max\{h(d(S^n x, x)), h(d(R^n x, x))\}\},$$

где $L^{-1}(n) = 1/L(n)$, называется константой одновременного (или кратного) возвращения точки x .

ТЕОРЕМА 1.15. Пусть X – метрическое пространство с $H_h(X) < \infty$, а S, R – коммутирующие отображения X в себя, сохраняющие меру μ . Предположим, что меры μ и H_h согласованы. Тогда $C_{S,R}(x)$ – интегрируемая (по мере μ) функция и для любого μ -измеримого A выполнено

$$\int_A C_{S,R}(x) d\mu \leq H_h(A). \quad (8)$$

Если же $H_h(A) = 0$, то

$$\int_A C_{S,R}(x) d\mu = 0$$

без условия согласованности мер μ и H_h .

Итак, в теоремах 1.8, 1.9, 1.15 получены верхние оценки для интегралов от функций $C(x)$ и $C_{S,R}(x)$. Как было отмечено выше (см. замечание 1.10), верхняя оценка (5) для $C(x)$ является неулучшаемой. Этого нельзя сказать про неравенство (8), так как истинный порядок роста $L(n)$ неизвестен. В нашей работе мы получим нижние оценки для функции кратного возвращения в случае, когда на пространстве X действует несколько степеней отображения T . Результат такого рода можно рассматривать как некоторый количественный аналог теоремы 1.5. Так как степени отображения T коммутируют, то мы автоматически получаем нижнюю оценку функции кратного возвращения и в ситуации, когда на X действует несколько коммутирующих отображений.

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Пусть k – фиксированное натуральное число, $k \geq 3$. Пусть для всякого натурального N задано непустое множество $A^{(N)} \subseteq \mathbb{Z}_N$, не содержащее арифметических прогрессий длины k . Обозначим плотность множества $A^{(N)}$ в $\mathbb{Z}_N$ через $\rho(N)$, $\rho(N) = |A^{(N)}|/N$. Тогда $\rho(1) = 1$. Так как $A^{(N)}$ не содержит арифметических прогрессий в $\mathbb{Z}_N$, то $A^{(N)}$ не содержит арифметических прогрессий и в $\mathbb{Z}$. По теореме 1.4 имеем $\rho(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1.16. Пусть $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ – произвольная монотонно возрастающая функция, $X = [0, 1]$, μ – мера Лебега на X и $\{A^{(N)}\}_{N=1}^\infty$ – построенная выше последовательность множеств. Тогда существует динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ такая, что μ и хаусдорфова мера H_1 согласованы, $H_1(X) = 0$ и для почти всех относительно меры μ точек x из X выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\psi(n)}{\rho(n)} \max\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \dots, d(T^{(k-1)n} x, x)\} \right\} \geq 1. \quad (9)$$

Напомним, что через H_1 обозначена хаусдорфова мера с функцией $h(t) = t$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.17. Равенство $H_1(X) = 0$ в теореме 1.16 является очень важным. Без условия $H_1(X) < \infty$ теорема становится тривиальной, поскольку всегда можно подобрать такую метрику d так, чтобы пространство X имело бесконечную хаусдорфову меру $H_1(X)$ и нижний предел в (9) был равен $+\infty$. Заметим также, что равенство $H_1(X) = 0$ можно, безусловно, заменить на более сильное равенство вида $H_{tg(t)} = 0$, где $g(t)$ – некоторая монотонная невозрастающая функция, $g(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0+$.

Метод, развитый для доказательства основной теоремы 1.16, может быть применен к изучению функции обычной (не кратной) возвращаемости $C(x)$.

В §3 мы докажем следующий результат. Пусть κ – произвольное действительное число, $\kappa \in [0, 1]$. Тогда существует динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ такая, что $H_1(X) = 1$ и для почти всех относительно меры μ точек x из X выполнено $C(x) = \kappa$.

Использованные конструкции развивают подход из работы [6] и книги [2].

§ 2. Доказательство теоремы 1.16

Нам понадобится простая лемма, доказанная, фактически, в [18]. Другое доказательство аналогичной леммы может быть найдено в [19]. Поскольку формулировка нужной нам леммы несколько отличается от формулировки леммы из [18], то мы приведем наше собственное доказательство.

ЛЕММА 2.1. Пусть N – натуральное число, A – произвольное непустое подмножество $\mathbb{Z}_N$ и $\varphi \geq 1$ – действительное число. Тогда существуют такие вычеты $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}_N$ и такое разбиение $\mathbb{Z}_N$ на непересекающиеся множества $A_1, A_2, \dots, A_l$ и B , что

- 1) $A_i \subseteq A + a_i$ для всех $i = 1, \dots, l$,
- 2) $|A_i| \geq |A|/\varphi$ для всех $i = 1, \dots, l$,
- 3) $|B| \leq N/\varphi$.

Доказательство леммы представляет собой индукционный процесс. На n -м шаге будут последовательно построены множества $A_1, \dots, A_n$, вычеты $a_1, \dots, a_n$ и вспомогательные множества $B_1, \dots, B_n$. При этом выполняется вложение $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n$.

Пусть $n = 1$. Положим $a_1 = 0$, $A_1 = A$ и $B_1 = \mathbb{Z}_N \setminus A_1$. Если $|B_1| \leq N/\varphi$, то лемма 2.1 доказана. Действительно, пусть $B = B_1$. Легко видеть, что условия 1)–3) выполнены.

Пусть на n -м шаге индукционного процесса множества $A_1, \dots, A_n$ и вычеты $a_1, \dots, a_n$ уже построены. Пусть также $B_n = \mathbb{Z}_N \setminus (\bigsqcup_{i=1}^n A_i)$. Если $|B_n| \leq N/\varphi$, то лемма 2.1 доказана. Действительно, положим $B = B_n$. Тогда условия 1)–3) для множеств $A_1, \dots, A_n, B$ и вычетов $a_1, \dots, a_n$ выполнены.

Пусть $|B_n| > N/\varphi$. Имеем

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}_N} |B_n \cap (A + t)| = |A| |B_n| \geq \frac{N|A|}{\varphi} \quad (10)$$

и существует $t \in \mathbb{Z}_N$ такое, что $|B_n \cap (A + t)| \geq |A|/\varphi$. Положим $a_{n+1} = t$ и $A_{n+1} = B_n \cap (A + a_{n+1})$. Тогда для всех $i = 1, \dots, n$ выполнено $A_{n+1} \cap A_i = \emptyset$. Кроме того, $A_{n+1} \subseteq A + a_{n+1}$.

Так как для любого i выполнено $|A_i| \geq |A|/\varphi > 0$, то наш индукционный процесс закончится менее чем за $[N\varphi/|A|] + 1$ шагов. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.16. Пусть α_m – произвольная невозрастающая последовательность действительных чисел, стремящаяся к нулю, $\alpha_m \in (0, 1)$. Функция $\psi(n)$ определена только при натуральных значениях аргумента n . Продолжим линейным образом $\psi(n)$ на все действительные числа. Получим непрерывную монотонно возрастающую функцию, которую обозначим той же буквой $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\varphi(t) = \sqrt{\psi(t)}$ и $\varphi^*(t) = \max\{1, \varphi(t)\}$. Рассмотрим неубывающую последовательность натуральных чисел

$$N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_m \leq \dots,$$

Рассмотрим разбиение пространства X на множества

$$U_i(\vec{a}) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in X : x_1 = a_1, \dots, x_{m-1} = a_{m-1}, x_m \in A_i^{(m)}\},$$

где $i = 1, \dots, l(m)$, и

$$B(\vec{a}) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in X : x_1 = a_1, \dots, x_{m-1} = a_{m-1}, x_m \in B^{(m)}\},$$

где $\vec{a} \in [N_1] \times \dots \times [N_{m-1}] := F_{m-1}$. Тогда

$$X = \bigsqcup_{\vec{a} \in F_{m-1}} \left(B(\vec{a}) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{l(m)} U_i(\vec{a}) \right) \right).$$

Для любого $\vec{a} \in F_{m-1}$ и любого $i \in 1, 2, \dots, l(m)$ имеем

$$\text{diam } U_i(\vec{a}) \leq \frac{\rho(N_0 \cdots N_m)}{\psi(N_0 \cdots N_m)} < \delta.$$

Аналогично, для любого $\vec{a} \in F_{m-1}$ выполнено

$$\text{diam } B(\vec{a}) \leq \frac{\rho(N_0 \cdots N_m)}{\psi(N_0 \cdots N_m)} < \delta.$$

Из условия 2) леммы 2.1 вытекает, что

$$l(m) \leq \frac{N_m \varphi(N_m)}{|A^{(m)}|} = \frac{\varphi(N_m)}{\rho(N_m)}.$$

Учитывая последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} H_1^\delta(X) &\leq |F_{m-1}| \left(\frac{\varphi(N_m)}{\rho(N_m)} + 1 \right) \frac{\rho(N_0 \cdots N_m)}{\psi(N_0 \cdots N_m)} \\ &\leq 2N_0 \cdots N_{m-1} \frac{\varphi(N_m) \rho(N_0 \cdots N_m)}{\rho(N_m) \psi(N_0 \cdots N_m)} \leq 2N_0 \cdots N_{m-1} \frac{\varphi(N_m)}{\psi(N_m)}. \end{aligned}$$

Имеем $N_m \geq \varphi^{-1}(2\alpha_m^{-1} N_0 \cdots N_{m-1})$. Отсюда $2N_0 \cdots N_{m-1} \leq \alpha_m \varphi(N_m)$. Учитывая последнее неравенство, получаем

$$H_1^\delta(X) \leq \alpha_m \frac{\varphi^2(N_m)}{\psi(N_m)} \leq \alpha_m.$$

Так как $\alpha_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то $H_1(X) = 0$.

Докажем теперь неравенство (9).

Пусть

$$\tilde{B}^{(s)} = \{x \in X : x_s \in B^{(s)}\} \subseteq X \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{s \geq n} \tilde{B}^{(s)}.$$

Имеем $\mu(\tilde{B}^{(s)}) = |B^{(s)}|/N_s \leq 1/\varphi(N_s)$. Так как $\varphi(N_s) \geq N_0 \cdots N_{s-1}$ и $N_s \geq 2$ при $s \geq 1$, то

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(\tilde{B}^{(s)}) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(N_s)} \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{N_0 \cdots N_{s-1}} < \infty. \quad (11)$$

Применяя лемму Бореля–Кантелли, получаем, что $\mu \mathbf{B} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть k – натуральное число, $k \geq 3$, и $\varepsilon > 0$ – любое действительное число. Тогда найдутся динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$, $X = [0, 1]$, μ – мера Лебега, μ и хаусдорфова мера H_1 согласованы, $H_1(X) = 0$, и положительная эффективная константа C_k , зависящая только от k , такая, что для почти всех точек $x \in X$ выполнено

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\rho(n)} \max\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \dots, d(T^{(k-1)n} x, x)\} \right\} \geq 1, \quad (16)$$

где $\rho(n) = \exp(-(1 + \varepsilon)C_k(\log n)^{1/(k-1)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.12 для всякого натурального $k \geq 3$ и любого достаточно большого натурального N существует множество $A_0^{(N)}$ из $[N - 1]$ без прогрессий длины k такое, что $|A_0^{(N)}| \geq N \exp(-(1 + \varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)})$, где C_k – некоторая абсолютная константа, зависящая только от k . Пусть $A_1^{(N)} = A_0^{(N)} \cap [1, N/k)$, $A_2^{(N)} = A_0^{(N)} \cap [N/k, 2N/k)$, $\dots$, $A_k^{(N)} = A_0^{(N)} \cap [N(k-1)/k, N)$. Для произвольного $j \in \{1, \dots, k\}$ множество $A_j^{(N)}$ не содержит арифметических прогрессий длины k по модулю N . Легко видеть, что существует $j \in \{1, \dots, k\}$ такое, что

$$|A_j^{(N)}| \geq \frac{N}{2k} \exp(-(1 + \varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)}).$$

Положим $A^{(N)} = A_j^{(N)}$. Из теоремы 1.16 следует, что существует динамическая система, для которой неравенство (9) выполнено с функцией $\rho(n) = \exp(-C_k(1 + \varepsilon')(\log n)^{1/(k-1)})$, где ε' можно, например, взять равным 2ε . Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Динамические системы $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$, полученные в теореме 1.16 и следствии 2.2, можно назвать системами с медленной скоростью возвращения. Мы имеем в виду, что у этих систем кратная скорость возвращения гораздо медленнее обычной однократной. Действительно, из теорем 1.8, 1.9 вытекает, что для почти всех $x \in X$ выполнено $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{n \cdot d(T^n x, x)\} = 0$. Отсюда видно, что однократная скорость возвращения выше кратной скорости, задаваемой неравенством (16).

§ 3. Об одномерной возвращаемости

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f \geq 1$ – любое действительное число, $X = [0, 1]$ и μ – мера Лебега на X . Тогда существует динамическая система $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ такая, что μ и хаусдорфова мера H_1 согласованы, $H_1(X) = 1$ и для почти всех относительно меры Лебега точек x из X выполнено

$$C_f(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \{n \cdot f \cdot d(T^n x, x)\} = 1. \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Теорема 3.1 была доказана в [6] для случая $f = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пусть $X = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра, μ – мера Лебега, T_α – отображение X в себя, задаваемое формулой

$$T_\alpha x = (x + \alpha) \pmod{1}.$$

Пусть также $d(x, y) = \|x - y\|$, где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого. Существует такое число λ^* ($\lambda^* = 5.68195\dots$), что для всех $f \geq \lambda^*$ найдется отображение T_α , $\alpha = \alpha(f)$, такое, что $C_f(x) = 1$ для *всех* x из $[0, 1]$. Луч $[\lambda^*, +\infty)$ называется *лучом Холла* (см. [20]). Точное значение величины λ^* было найдено Г. А. Фрейманом в [21]. Согласно теореме 3.1 динамическая система с равенством $C_f(x) = 1$ для почти всех точек x из $[0, 1]$ существует для всех чисел $f \geq 1$, а не только для $f \geq \lambda^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Как и в теореме 1.16, неравенство $H_1(X) \leq 1$ в теореме 3.1 является очень важным (см. замечание 1.17). Кроме того, обратное неравенство $H_1(X) \geq 1$ также совершенно необходимо. Если отказаться от этого условия, то теорема 3.1 становится тривиальной. Действительно, пусть $f > 1$ и $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ – динамическая система, для которой $C_1(x) = 1$ (см. замечание 3.2). Положим $\tilde{d}(x, y) = d(x, y)/f$ и рассмотрим новую динамическую систему $(X, \mathcal{B}, \mu, T, \tilde{d})$. Тогда для любого $x \in X$ имеем $C_f(x) = 1$, что и утверждается в теореме 3.1. Заметим, что в построенной динамической системе равенство $H_1(X) = 1$ не выполнено. Действительно, $H_1(X) = 1/f < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть $N_0 = 1$, $N_m = \lceil f2^m \rceil^2$, $m = 1, 2, \dots$, и пусть X – пространство последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$, $0 \leq x_i < N_i$, $i \geq 1$. Отображение из X в $[0, 1]$, задаваемое формулой $x \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i / (N_0 N_1 \cdots N_i)$, позволяет рассматривать пространство X как отрезок $[0, 1]$. Пусть также преобразование $T: X \rightarrow X$ задается формулой $Tx = x + 1$, где сложение определено при доказательстве теоремы 1.16 и $1 = (1, 0, 0, \dots)$. Как отмечалось выше, преобразование T сохраняет меру Лебега μ .

Пусть $p_m = \sqrt{N_m} = \lceil f2^m \rceil$, $m \geq 1$, и пусть

$$A_m^{(j)} = \{x \in \{0, 1, \dots, N_m - 1\} : x \equiv j \pmod{p_m}\}.$$

Ясно, что множества $A_m^{(j)}$ образуют разбиение отрезка $\{0, 1, \dots, N_m - 1\}$. Пусть отображения $\varphi_j: A_m^{(j)} \rightarrow \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ задаются формулой $\varphi_j(x) = (x - j)/p_m$. Положим $\varphi(x) := \varphi_j(x)$, если $x \in A_m^{(j)}$. Тогда функция $\varphi(x)$ определена на всем отрезке $\{0, 1, \dots, N_m - 1\}$.

Рассмотрим функцию

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{r_m(x_m, y_m)}{N_0 \cdots N_{m-1}}, & \text{где } m \text{ максимальное такое, что} \\ & x_1 = y_1, \dots, x_{m-1} = y_{m-1} \text{ и для некоторого } i \in 1, 2, \dots, l(m) \\ & \text{выполнено } x_m, y_m \in A_m^{(i)} \end{cases},$$

где

$$r_m(x_m, y_m) = \begin{cases} \frac{1}{N_m}, & \text{если } x_m = y_m, \\ \frac{|\varphi(x_m) - \varphi(y_m)|}{fp_m} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что всегда $1/N_m \leq r_m(x_m, y_m) \leq 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. $d(x, y)$ – метрика на пространстве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Симметричность функции $d(x, y)$ очевидна. Ясно также, что $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Докажем, что для любых $x, y, z \in X$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, $z = (z_1, z_2, \dots)$, справедливо неравенство

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad (18)$$

Если $d(x, y) = 0$, то (18) выполнено. Пусть $d(x, y) > 0$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $d(x, y) = r_m(x_m, y_m)/(N_0 \cdots N_{m-1})$. Если для некоторого $i \in 1, 2, \dots, m-1$ выполнено $z_i \neq x_i$ или $z_i \neq y_i$, то неравенство (18) справедливо. Поэтому будем считать, что $z_i = x_i = y_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Предположим, что не существует j такого, что x_m, y_m принадлежат некоторому $A_m^{(j)}$. Тогда $d(x, y) = 1/(N_0 \cdots N_{m-1})$. Далее, либо x_m, z_m , либо y_m, z_m не принадлежат одному и тому же множеству $A_m^{(j)}$, следовательно, неравенство (18) опять выполнено.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда x_m и y_m принадлежат некоторому общему множеству $A_m^{(j)}$. Если $z_m \notin A_m^{(j)}$, то неравенство (18) справедливо. Если же $z_m \in A_m^{(j)}$, то

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \frac{|\varphi(x_m) - \varphi(y_m)|}{N_0 \cdots N_{m-1} f p_m} \leq \frac{|\varphi(x_m) - \varphi(z_m)|}{N_0 \cdots N_{m-1} f p_m} + \frac{|\varphi(z_m) - \varphi(y_m)|}{N_0 \cdots N_{m-1} f p_m} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы 3.1. Рассмотрим хаусдорфову меру H_1 на пространстве X . Так как любой элементарный цилиндр является замкнутым и, следовательно, борелевским множеством в метрическом пространстве (X, d) , то меры μ и H_1 согласованы. Докажем, что $H_1(X) = 1$.

Рассматривая покрытие пространства X элементарными цилиндрами

$$C(a_1, \dots, a_m) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in X : x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m\},$$

находим, что $H_1(X) \leq 1$.

Докажем, что $H_1(X) \geq 1$. Предположим, что $H_1(X) = a < 1$. Так как

$$H_1(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_1^\delta(X) = \sup_{\delta > 0} H_1^\delta(X)$$

(см., например, [22]), то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$a - \varepsilon < H_1^\delta(X) \leq a = H_1(X). \quad (19)$$

Пусть $\varepsilon_0 = (1 - a)/2 > 0$. Пользуясь неравенством (19) и определением хаусдорфовой меры, найдем такое покрытие пространства X множествами $\{U_i\}$, $r_i = \text{diam } U_i$, $r_i < \delta = \delta(\varepsilon_0)$, что

$$a - \varepsilon < \sum_i \text{diam } U_i = \sum_i r_i < a + \varepsilon. \quad (20)$$

Заметим, что если $a = 0$, то неравенство в левой части (20) можно опустить.

Если $r_i = 0$, то соответствующее U_i состоит из одной точки:

$$U_i = \{p_i\}.$$

Обозначим через P объединение всех одноточечных множеств U_i . Другими словами, $P = \bigcup_{\{i:r_i=0\}} U_i = \bigcup_i \{p_i\}$. Ясно, что существует $U_i \notin P$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие U_i . Так как множество расстояний между элементами пространства X имеет нуль своей единственной предельной точкой, то для любого U_i существуют точки $x, y \in U_i$ такие, что $r_i = \text{diam } U_i = d(x, y)$. Пусть $d(x, y) = r_m(x_m, y_m)/(N_0 \cdots N_{m-1})$. Предположим, что найдется j , $j = j(i)$, такое, что $x_m, y_m \in A_m^{(j)}$. Пусть

$$C_i = \{z = (z_1, z_2, \dots) \in X : z_1 = x_1, \dots, z_{m-1} = x_{m-1}, z_m \in A_m^{(j)} \cap [x_m, y_m]\}, \quad (21)$$

и пусть

$$C_i = \{z = (z_1, z_2, \dots) \in X : z_1 = x_1, \dots, z_{m-1} = x_{m-1}\}, \quad (22)$$

если такого $A_m^{(j)}$ не существует. Ясно, что в обоих случаях $U_i \subseteq C_i$ и $\text{diam } C_i = \text{diam } U_i$. Поэтому для C_i выполнено неравенство (20), причем цилиндры C_i вместе с множеством P образуют покрытие X .

Отметим, что если C_i задан формулой (22), то C_i – элементарный цилиндр. Пусть

$$C_i(a) = \{z = (z_1, z_2, \dots) \in X : z_1 = x_1, \dots, z_{m-1} = x_{m-1}, z_m = a\}.$$

Для любого a , $0 \leq a < N_m$, множество $C_i(a)$ представляет собой элементарный цилиндр. Если C_i задан формулой (22), то $C_i = \bigsqcup_{a \in A_m^{(j)} \cap [x_m, y_m]} C_i(a)$. Ясно, что $\text{diam } C_i \geq \sum_{a \in A_m^{(j)} \cap [x_m, y_m]} \text{diam } C_i(a)$. Отсюда имеем, что существует не более чем счетное покрытие X точками из P и элементарными цилиндрами C'_i , $r'_i = \text{diam } C'_i$, такое, что

$$\sum_i r'_i \leq \sum_i r_i < a + \varepsilon < 1. \quad (23)$$

Два произвольных элементарных цилиндра либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. Поэтому существует подпокрытие C''_i , $r''_i = \text{diam } C''_i$, покрытия C'_i , являющееся вместе с P разбиением пространства X на элементарные цилиндры и такое, что

$$\sum_i r''_i \leq \sum_i r'_i < 1. \quad (24)$$

Имеем $r''_i = \mu C''_i$ и $\sum_i r''_i = \sum_i \mu C''_i = \mu(X) = 1$. Противоречие с неравенством (24). Значит, $H_1(X) = 1$.

Нам осталось доказать, что для почти всех $x \in X$ справедливо равенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{n \cdot f \cdot d(T^n x, x)\} = 1. \quad (25)$$

Обозначим через $a_m(j)$ максимальный элемент $A_m^{(j)}$. Пусть $B_m = \bigsqcup_{j=1}^{p_m} a_m(j)$. Имеем $|B_m| = p_m = \sqrt{N_m}$. Пусть

$$\tilde{B}_m = \{x \in X : x_m \in B_m\} \subseteq X \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m \geq n} \tilde{B}_m.$$

Тогда $\mu(\tilde{B}_m) = |B_m|/N_m = 1/p_m$. Имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(\tilde{B}_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_m}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty. \quad (26)$$

Применяя лемму Бореля–Кантелли, получаем, что $\mu\mathbf{B} = 0$.

Докажем, что равенство (25) справедливо для всех $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x \notin \mathbf{B}$. Для любого $x \notin \mathbf{B}$ существует $M = M(x)$ такое, что для всех $n \geq M$ выполнено $x_n \notin B_n$. Будем считать M достаточно большим. Существует натуральное m_0 такое, что $N_0 \cdots N_{m_0} \geq M$. Рассмотрим возрастающую последовательность натуральных чисел

$$S = \{p_{m+1}N_0 \cdots N_m\}_{m=m_0}^{+\infty} = \{n_m\}_{m=m_0}^{+\infty}.$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$, где x_{m+1} принадлежит некоторому $A_{m+1}^{(j)}$. Пусть также $n_m \in S$. Тогда $T^{n_m}x = (x_1, \dots, x_m, \tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_{m+2}, \dots)$, где $\tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_{m+2}, \dots$ – некоторые числа, причем $x_{m+1}, \tilde{x}_{m+1}$ принадлежат $A_{m+1}^{(j)}$ и $|\varphi(x_{m+1}) - \varphi(\tilde{x}_{m+1})| = 1$. Отсюда $d(T^{n_m}x, x) = 1/(N_0 \cdots N_m f p_{m+1})$. Далее,

$$n_m f \cdot d(T^{n_m}x, x) = p_{m+1}N_0 \cdots N_m f \frac{1}{N_0 \cdots N_m f p_{m+1}} = 1. \quad (27)$$

Следовательно, для всех $x \notin \mathbf{B}$ выполнено $C_f(x) \leq 1$.

Докажем, что для любого $x \notin \mathbf{B}$ справедливо обратное неравенство $C_f(x) \geq 1$. Пусть n – натуральное число такое, что $n \in [N_0 \cdots N_m, N_0 \cdots N_{m+1}) := J_m$ и $m \geq m_0$. Заметим, что n_m принадлежит J_m . Если $n = tN_0 \cdots N_m$, $1 \leq t < N_{m+1}$, то $T^n x = (x_1, \dots, x_m, \tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_{m+2}, \dots)$, где $\tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_{m+2}, \dots$ – некоторые числа. В случае, когда $\tilde{x}_{m+1} \notin A_{m+1}^{(j)}$, выполнено $d(T^n x, x) = 1/(N_0 \cdots N_m)$ и, следовательно, $nfd(T^n x, x) \geq 1$. Если же $\tilde{x}_{m+1} \in A_{m+1}^{(j)}$, то

$$1 = n_m f d(T^{n_m}x, x) \leq n f d(T^n x, x).$$

Нам осталось рассмотреть ситуацию, когда $n \neq tN_0 \cdots N_m$, $1 \leq t < N_{m+1}$. В этом случае

$$T^n x = (x'_1, \dots, x'_m, x'_{m+1}, x'_{m+2}, \dots),$$

причем существует $i \in 1, 2, \dots, m$ такое, что $x_i \neq x'_i$. Отсюда $d(T^n x, x) \geq 1/(N_0 \cdots N_m)$ и опять $nfd(T^n x, x) \geq 1$.

Итак, для любого $m \geq m_0$ и всех $n \in [N_0 \cdots N_m, N_0 \cdots N_{m+1})$ выполнено $1 \leq nfd(T^n x, x)$. Значит, для любого $x \notin \mathbf{B}$ справедливо неравенство $C_f(x) \geq 1$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] H. Furstenberg, “Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions”, *J. Anal. Math.*, **31** (1977), 204–256.
- [2] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
- [3] H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein, “The ergodic theoretical proof of Szemerédi’s theorem”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **7:3** (1982), 527–552.

- [4] H. Furstenberg, Y. Katznelson, “An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations”, *J. Anal. Math.*, **34** (1978), 275–291.
- [5] K. F. Roth, “On certain sets of integers”, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 104–109.
- [6] M. Boshernitzan, “Quantitative recurrence results”, *Invent. Math.*, **113** (1993), 617–631.
- [7] W. T. Gowers, “A new proof of Szemerédi’s theorem”, *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.
- [8] И. Д. Шкредов, “Об одной задаче Гауэрса”, *Докл. РАН*, **400**:2 (2005), 169–172.
- [9] I. D. Shkredov, *On one problem of Gowers*, [arXiv:math.NT/0405406](https://arxiv.org/abs/math.NT/0405406).
- [10] I. D. Shkredov, *On multiple recurrence*, [arXiv:math.DS/0406413](https://arxiv.org/abs/math.DS/0406413).
- [11] I. D. Shkredov, *On a generalization of Szemerédi’s theorem*, [arXiv:math.DS/0503639](https://arxiv.org/abs/math.DS/0503639).
- [12] Н. Г. Моцевитин, “Об одной теореме Пуанкаре”, *УМН*, **53**:1 (1998), 223–224.
- [13] И. Д. Шкредов, “О возвращаемости в среднем”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 625–632.
- [14] J. Bourgain, “On triples in arithmetic progression”, *Geom. Funct. Anal.*, **9**:5 (1999), 968–984.
- [15] F. A. Behrend, “On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression”, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **32** (1946), 331–332.
- [16] R. A. Rankin, “Sets of integers containing not more than a given number of terms in arithmetic progression”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **65**:4 (1961), 332–344.
- [17] I. Laba, M. T. Lacey, *On sets of integers not containing long arithmetic progressions*, [arXiv:math.CO/0108155](https://arxiv.org/abs/math.CO/0108155).
- [18] C. L. Stewart, R. Tijdeman, “On infinite-difference sets”, *Canad. J. Math.*, **31**:5 (1979), 897–910.
- [19] T. Tao, *Lecture notes 5*, <http://www.math.ucla.edu/~tao/254a.1.03w/notes5.dvi>.
- [20] T. W. Cusick, M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [21] Г. А. Фрейман, *Диофантовы приближения и геометрия чисел (Задача Маркова)*, Калининский гос. ун-т, Калинин, 1975.
- [22] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, Wiley, New York, 1990.

И. Д. Шкредов (I. D. Shkredov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: ishkredov@rambler.ru

Поступила в редакцию

19.07.2005 и 25.05.2006