Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Сандраков, Осреднение вариационных неравенств и уравнений, определенных псевдомонотонным оператором, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 1, 67–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:47:09

УДК 517.956.8

Г. В. Сандраков

Осреднение вариационных неравенств и уравнений, определенных псевдомонотонным оператором

Доказаны утверждения о сходимости последовательностей решений нелинейных уравнений и вариационных неравенств для задач с препятствием. Такие вариационные неравенства и уравнения определяются нелинейным псевдомонотонным оператором второго порядка с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами и последовательностями функций, характеризующими препятствия и граничные условия. Получены двухмасштабные и макромасштабные (осредненные) предельные задачи для таких вариационных неравенств и уравнений. Установлены утверждения о связях между решениями таких предельных задач и приведены условия, достаточные для единственности решений.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

В работе рассматриваются вопросы осреднения краевых задач для нелинейных уравнений и вариационных неравенств с препятствием, характеризующим одностороннее ограничение на решения. Такие уравнения и неравенства определяются нелинейным псевдомонотонным и коэрцитивным оператором, действующим непрерывно из $W_0^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,q}(\Omega)$ и зависящим от малого положительного параметра ε . Здесь и в дальнейшем действительное p фиксировано и удовлетворяет неравенствам $1 < p < \infty$, а $q = p/(p-1)$ такое, что $1/p + 1/q = 1$.

Будут получены осредненные (предельные при $\varepsilon \rightarrow 0$) краевые задачи для вариационных неравенств (и уравнений) и доказаны утверждения о сходимости последовательностей решений рассматриваемых задач к решениям осредненных задач. Приведенные результаты обобщают результаты работ [1], [2], где рассматривались вариационные неравенства, определенные нелинейным строго монотонным коэрцитивным и липшицевым оператором второго порядка с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами, действующим непрерывно из $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $W^{-1,2}(\Omega)$. Здесь используются функциональные пространства, определенные, например, в [3], где можно найти и дальнейшие подробности о вариационных неравенствах с односторонними ограничениями.

Проблема осреднения вариационных неравенств с ограничениями на решения ставилась в [4], и за прошедшее время в этом направлении появились только работы, посвященные в основном задачам минимизации с ограничениями. Дальнейшие подробности об этой проблеме можно найти, например, в [2], где приведены и утверждения о связях между вариационными неравенствами и задачами минимизации с ограничениями.

Рассмотрим следующую задачу с малым положительным параметром ε , формулируемую в виде вариационного неравенства: найти $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ такое, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\right)(\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx + \int_{\Omega} b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon\right)(v - u_\varepsilon) dx \\ & \geq \int_{\Omega} g_\varepsilon(\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx + \int_{\Omega} f_\varepsilon(v - u_\varepsilon) dx \\ & \forall v \in K_\varepsilon = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geq \psi_\varepsilon \text{ п.в. в } \Omega\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где для целого $n \geq 1$ заданы ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, последовательности функций $\{f_\varepsilon\} \subset L^q(\Omega)$ и $\{\psi_\varepsilon\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ и последовательность вектор-функций $\{g_\varepsilon\} \subset L^q(\Omega)^n$, зависящие от малого параметра ε и равномерно ограниченные относительно этого параметра (при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для некоторого ε_0). Последнее условие по определению означает, что выполняются неравенства

$$\|\psi_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_1, \quad \|g_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)^n} \leq C_2, \quad \|f_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq C_3, \quad (1.2)$$

где постоянные C_j не зависят от ε . Предполагается, что для каждого ε выполняется также неравенство $\psi_\varepsilon \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$ (определение этого неравенства см., например, в [5; гл. 2]). Это условие гарантирует непустоту множества K_ε , которое является замкнутым и выпуклым подмножеством в $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Предполагается, что функции

$$a(x, y, \sigma, \xi) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x, y, \sigma) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

из (1.1) являются 1-периодическими по $y \in \mathbb{R}^n$; это означает, что для п.в. $y \in \mathbb{R}^n$ и всех $(x, \sigma, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$ выполняются равенства

$$a(x, y, \sigma, \xi) = a(x, y + z, \sigma, \xi), \quad b(x, y, \sigma) = b(x, y + z, \sigma)$$

и поэтому функции $a(x, y, \sigma, \xi)$ и $b(x, y, \sigma)$ вполне определяются своими ограничениями на ячейку периодичности $Y = [0, 1]^n$. Предполагается также, что эти функции удовлетворяют следующим условиям:

(i) для п.в. $y \in Y = [0, 1]^n$ функции

$$(x, \sigma, \xi) \mapsto a(x, y, \sigma, \xi) \quad \text{и} \quad (x, \sigma) \mapsto b(x, y, \sigma) \quad \text{непрерывны;} \quad (1.3)$$

(ii) для всех $(x, \sigma, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ функции

$$y \mapsto a(x, y, \sigma, \xi) \quad \text{и} \quad y \mapsto b(x, y, \sigma) \quad \text{измеримы;} \quad (1.4)$$

(iii) для п.в. $y \in Y$, всех $x \in \bar{\Omega}$ и $(\sigma, \xi), (s, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 & < (a(x, y, \sigma, \xi) - a(x, y, \sigma, \zeta))(\xi - \zeta) \quad \text{при } \xi \neq \zeta, \\ 0 & \leq (b(x, y, \sigma) - b(x, y, s))(\sigma - s); \end{aligned} \quad (1.5)$$

(iv) найдутся такие функции $h(y), l(y), k(y) \in L^p_{\text{per}}(Y)$ и положительные постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa$, что для п.в. $y \in Y$ и всех $(x, \sigma, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \alpha|\xi|^p - \beta|\sigma|^{p-1} - |h(y)|^p &\leq a(x, y, \sigma, \xi)\xi, \\ |a(x, y, \sigma, \xi)| &\leq \gamma(|l(y)| + |\sigma| + |\xi|)^{p-1}, \\ |b(x, y, \sigma)| &\leq \varkappa(|k(y)| + |\sigma|)^{p-1}; \end{aligned} \quad (1.6)$$

(v) для каждого положительного m найдутся такие функция $l_m(y) \in L^p_{\text{per}}(Y)$ и положительные постоянные γ_m, τ_m , что для п.в. $y \in Y$, всех $\sigma, s \in \mathbb{R}$ с $|\sigma| \leq m, |s| \leq m$ и $|\sigma - s| \leq \sigma_m$ для некоторого малого σ_m и всех $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|a(x, y, \sigma, \xi) - a(x, y, s, \xi)| \leq \gamma_m |\sigma - s|^{\tau_m} (|l_m(y)| + |\xi|)^{p-1}. \quad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем индекс “per” означает 1-периодичность по $y \in \mathbb{R}^n$ и, например, включение $\varphi(y) \in L^p_{\text{per}}(Y)$ означает, что ограничение $\varphi(y)$ на Y является элементом пространства $L^p(Y)$.

В случае, когда функции $a(x, y, \sigma, \xi)$ и $b(x, y, \sigma)$ не зависят от x и параметр ε фиксирован, условия (i)–(iv) являются стандартными условиями, достаточными для существования решения задачи (1.1), а условие (v) с $\tau_m = 1$ и строгая монотонность функции b (которая означает выполнение строгого неравенства в (1.5) при $\sigma \neq s$) гарантируют единственность такого решения в соответствии с результатами работы [6]. В общем случае может быть полезным следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть функция $\varphi(x, y)$ задана на множестве $\Omega \times \mathbb{R}^n$ и является 1-периодической по $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда для каждого ε функция

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (1.8)$$

корректно определена на множестве Ω , если, например, $\varphi(x, y) \in C^0(\bar{\Omega}; C^0_{\text{per}}(Y))$. Однако необходима некоторая точность при определении $\varphi^\varepsilon(x)$ в случае, когда ограничение $\varphi(x, y)$ на Y задано только почти всюду на множестве $\Omega \times Y$. В самом деле, функция $\varphi(x, x/\varepsilon)$ является фактически следом функции $\varphi(x, y)$ на n -плоскости $x = x, y = x/\varepsilon$, которая имеет нулевую меру (Лебега) в $\Omega \times Y$, и необходима некоторая регулярность этой функции для корректного определения такого следа.

Частные случаи такой регулярности известны (см. [7]): функция $\varphi^\varepsilon(x)$ определена и измерима на Ω , если

$$\varphi(x, y) \in L^p_{\text{per}}(Y; C^0(\bar{\Omega})) \quad \text{или} \quad \varphi(x, y) \in L^p(\Omega; C^0_{\text{per}}(Y)).$$

Кроме того, например, для $\varphi \in L^p_{\text{per}}(Y; C^0(\bar{\Omega}))$ выполняются соотношения

$$\|\varphi^\varepsilon(x)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_4 \|\varphi(x, y)\|_{L^p_{\text{per}}(Y; C^0(\bar{\Omega}))}, \quad (1.9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi^\varepsilon(x)\|_{L^p(\Omega)} = \|\varphi(x, y)\|_{L^p(\Omega \times Y)}, \quad (1.10)$$

где постоянная C_4 зависит только от Ω . Аналогичные соотношения выполняются и для $\varphi \in L^p(\Omega; C_{\text{per}}^0(Y))$. Кроме того, для $\varphi \in L^p(\Omega; C_{\text{per}}^0(Y))$ найдется такое измеримое подмножество $\Omega_0 \subseteq \Omega$ полной меры ($\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$), что для всех $x \in \Omega_0$ функция $y \mapsto \varphi(x, y)$ является непрерывной и 1-периодической. Следовательно, эта функция определена для всех $y \in \mathbb{R}^n$ и, в частности, для $y = x/\varepsilon$ при $x \in \Omega_0$. Аналогичное утверждение выполнено для $\varphi \in L_{\text{per}}^p(Y; C^0(\overline{\Omega}))$ (в этом случае удобнее сначала определить $\varphi(\varepsilon y, y)$, а затем использовать 1-периодичность и преобразование $y = x/\varepsilon$), и поэтому найдется такое измеримое подмножество $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ полной меры, что функция $x \mapsto \varphi(x, x/\varepsilon)$ измерима и определена для всех $x \in \Omega_\varepsilon$. Отметим, что функции из этих пространств примечательны тем, что являются каратеодориевскими функциями (определение см., например, в [8; гл. 8]), и именно поэтому равенство (1.8) определяет измеримую функцию (дальнейшие подробности можно найти в [7], [9]). В рассмотренных случаях следует различать (x, y) и (y, x) , но в дальнейшем такое различие не является существенным. Кроме того, известно (см. [10]), что равенство (1.8) определяет измеримую функцию, удовлетворяющую аналогичному (1.9) неравенству и равенству (1.10), если $\varphi(x, y) \in L^p(\Omega; L_{\text{per}}^\infty(Y))$ и выбран подходящий представитель класса эквивалентности $\varphi(x, y)$.

Фиксируем ε и $(\sigma, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Тогда из (1.3), (1.4) и (1.6) следует, что $a(x, y, \sigma, \xi) \in L_{\text{per}}^q(Y; C^0(\overline{\Omega})^n)$ и $b(x, y, \sigma) \in L_{\text{per}}^q(Y; C^0(\overline{\Omega}))$. Таким образом, функции $x \mapsto a(x, x/\varepsilon, \sigma, \xi)$ и $x \mapsto b(x, x/\varepsilon, \sigma)$ измеримы, а неравенства (1.5)–(1.7) выполняются и при $y = x/\varepsilon$ для п.в. $x \in \Omega$. Кроме того, из (1.3) следует, что для п.в. $x \in \Omega$ функции

$$(\sigma, \xi) \mapsto a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \sigma, \xi\right) \quad \text{и} \quad \sigma \mapsto b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \sigma\right) \quad \text{непрерывны.}$$

Поэтому (для фиксированного ε) вектор-функция $a = a(x, x/\varepsilon, \sigma, \xi)$ определяет нелинейный, псевдомонотонный и коэрцитивный оператор в неравенстве (1.1), действующий непрерывно из $W_0^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,q}(\Omega)$, а функция $b = b(x, x/\varepsilon, \sigma)$ определяет нелинейный и монотонный оператор, действующий непрерывно из $L^p(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$, и решение этой задачи существует в соответствии с результатами работы [3]. Известно (см. [6]), что такое решение единственно, если выполнено одно из следующих условий:

(I) для п.в. $y \in Y$, всех $x \in \overline{\Omega}$ и $\sigma, s \in \mathbb{R}$ выполняются неравенство

$$0 < (b(x, y, \sigma) - b(x, y, s))(\sigma - s) \quad \text{при} \quad \sigma \neq s \quad (1.11)$$

и неравенство (1.7) с $\tau_m = 1$ для каждого положительного m ;

(II) для каждого положительного m найдутся такие функция $h_m(y) \in L_{\text{per}}^p(Y)$ и положительная постоянная α_m , что для п.в. $y \in Y$, всех $x \in \overline{\Omega}$, $\sigma, s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$:

при $2 \leq p$ выполняются неравенства (1.7) с $\tau_m = 1/q$, (1.11) и

$$\alpha_m |\xi - \zeta|^p \leq (a(x, y, \sigma, \xi) - a(x, y, \sigma, \zeta))(\xi - \zeta), \quad (1.12)$$

при $1 < p \leq 2$ выполняются неравенства (1.7) с $\tau_m = 1/2$, (1.11) и

$$\alpha_m |\xi - \zeta|^2 (|h_m(y)| + |\zeta| + |\xi|)^{p-2} \leq (a(x, y, \sigma, \xi) - a(x, y, \sigma, \zeta))(\xi - \zeta); \quad (1.13)$$

(III) для п.в. $y \in Y$, всех $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция $a = a(x, y, \xi)$ не зависит от $\sigma \in \mathbb{R}$ (и выполнено первое неравенство из (1.5), что уже предполагается).

В случае (III) первое неравенство из (1.5) принято называть *условием строгой монотонности* для $a = a(x, y, \xi)$. При выполнении этого условия единственность решений задачи (1.1) проверяется непосредственно и хорошо известна (см. [3]). В общем случае это неравенство называется *условием строгой монотонности в главной части*, а неравенства (1.12) и (1.13) (для фиксированного m) называются *условием сильной монотонности в главной части* для $a = a(x, y, \sigma, \xi)$. Это условие не является достаточным для единственности (подробности см., например, в [11]). В соответствии с замечанием 1.1 неравенства (1.11)–(1.13) выполняются и при $y = x/\varepsilon$ для п.в. $x \in \Omega$. Отметим, что условие (III) выполняется без дополнительных предположений на функцию b и, в частности, для $b = 0$.

Таким образом, определено множество решений $\{u_\varepsilon\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ задачи (1.1) при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Основные результаты работы составляют утверждения о предельном поведении подпоследовательностей из этого множества при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будет получена осредненная (предельная) задача и доказаны утверждения о соответствующей сходимости таких подпоследовательностей к решениям осредненной задачи. В случае, когда выполнено одно из условий (I)–(III), решение осредненной задачи также определено однозначно и вся последовательность решений задачи (1.1) будет сходиться к этому решению. В формулировках этих утверждений кроме слабой сходимости в $W^{1,p}(\Omega)$ используется и понятие двухмасштабной сходимости, определенное в работе [12] и изученное в работе [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Равномерно ограниченная последовательность $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^p(\Omega)$ называется *двухмасштабно сходящейся* к $v_0(x, y) \in L^p(\Omega \times Y)$ (обозначение $v_\varepsilon \xrightarrow{2,p} v_0$) при $\varepsilon \rightarrow 0$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x) \varphi^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \quad (1.14)$$

для каждого $\varphi(x, y) \in L^q_{\text{per}}(Y; C^0(\bar{\Omega}))$, где $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, x/\varepsilon)$ (см. (1.8)).

Последовательность $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^p(\Omega)$ называется *сильно двухмасштабно сходящейся* к $v_0(x, y) \in L^p(\Omega \times Y)$ (обозначение $v_\varepsilon \xrightarrow{2,p} v_0$) при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $v_\varepsilon \xrightarrow{2,p} v_0$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon(x)\|_{L^p(\Omega)} = \|v_0(x, y)\|_{L^p(\Omega \times Y)}. \quad (1.15)$$

Для вектор-функций такая сходимость определяется покомпонентно. Каждое равномерно ограниченное подмножество $\{v_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$ имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L^p(\Omega)$ (см., например, [3]) и сходящуюся двухмасштабно (см. [7], [12]). Точнее, найдутся $\hat{v}_0 \in L^p(\Omega)$, $v_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ и подпоследовательность $\{v_{\varepsilon'}\} \subset \{v_\varepsilon\}$ такие, что

$$v_{\varepsilon'} \rightharpoonup \hat{v}_0 \text{ слабо в } L^p(\Omega) \text{ и } v_{\varepsilon'} \xrightarrow{2,p} v_0 \text{ при } \varepsilon' \rightarrow 0. \quad (1.16)$$

В этом случае непосредственно из (1.14) (для $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x)$) следует, что

$$\hat{v}_0 = \int_Y v_0 dy.$$

Далее для краткости соответствующие подпоследовательности $\{v_{\varepsilon'}\} \subset \{v_{\varepsilon}\}$ будут обозначаться просто как $\{v_{\varepsilon}\}$.

Из (1.2)–(1.6) следует, что подмножества $\{u_{\varepsilon}\} \subset L^p(\Omega)$ и $\{\nabla u_{\varepsilon}\} \subset L^p(\Omega)^n$ решений задачи (1.1) и градиентов этих решений равномерно ограничены, и поэтому выполнено следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть $\{u_{\varepsilon}\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ является множеством решений задачи (1.1). Тогда найдутся

$$\begin{aligned} u_0(x) &\in W_0^{1,p}(\Omega), & \psi_0(x) &\in W^{1,p}(\Omega), & f_0(x) &\in L^q(\Omega), \\ g_0(x, y), & a_0(x, y) &\in L^q(\Omega \times Y)^n, & b_0(x, y) &\in L^q(\Omega \times Y), \\ \psi_1(x, y), & u_1(x, y) &\in L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}) \end{aligned}$$

такие, что (возможно, после выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon} &\rightharpoonup u_0, & \psi_{\varepsilon} &\rightharpoonup \psi_0 \text{ слабо в } W^{1,p}(\Omega), & f_{\varepsilon} &\rightharpoonup f_0 \text{ слабо в } L^q(\Omega), \\ g_{\varepsilon} &\xrightarrow{2,q} g_0, & a_{\varepsilon} &\xrightarrow{2,q} a_0, & b_{\varepsilon} &\xrightarrow{2,q} b_0, \\ \nabla \psi_{\varepsilon} &\xrightarrow{2,p} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1, & \nabla u_{\varepsilon} &\xrightarrow{2,p} \nabla u_0 + \nabla_y u_1, \end{aligned}$$

$u_0 \geq \psi_0$ п.в. в Ω и $\psi_0 \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$, где $a_{\varepsilon} = a(x, x/\varepsilon, u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon})$ и $b_{\varepsilon} = b(x, x/\varepsilon, u_{\varepsilon})$.

Доказательства сформулированных здесь утверждений будут приведены в следующем параграфе, где имеются и соответствующие ссылки.

В дальнейшем для простоты предполагается, что f_0, g_0, ψ_0 и ψ_1 определены однозначно (в общем случае следует рассматривать соответствующие предельные точки отдельно). Предполагается также, что

$$g_{\varepsilon} \xrightarrow{2,q} g_0, \quad \nabla \psi_{\varepsilon} \xrightarrow{2,p} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1. \quad (1.17)$$

Это предположение означает, что последовательности $\{g_{\varepsilon}\}$ и $\{\nabla \psi_{\varepsilon}\}$ имеют (однозначно определенные) сильные двухмасштабные пределы. В частности, это условие (на данные задачи (1.1)) выполнено с $\psi_1 = 0$, если $g_{\varepsilon} \rightarrow g_0$ сильно в $L^q(\Omega)^n$ и $\psi_{\varepsilon} \rightarrow \psi_0$ сильно в $W^{1,p}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Кроме того, предполагается, что $\psi_{\varepsilon} - \psi_0 \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$. Это предположение означает, что последовательность $\{\psi_{\varepsilon}\}$ не имеет быстрых осцилляций на $\partial\Omega$, которые могут приводить к погранслоиным явлениям вблизи этой границы. Это условие выполнено, например, если $\psi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. В частности, такие осцилляции на $\partial\Omega$ отсутствуют и $\psi_{\varepsilon} - \psi_0 = 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$, если $\psi_{\varepsilon} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, поскольку $W_0^{1,p}(\Omega)$ является замкнутым и выпуклым подпространством в $W^{1,p}(\Omega)$ в силу определений (подробности см., например, в [3]).

В соответствии с утверждением 1.3 полезно определить множество

$$K_2 = \{(v_0, v_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}) : v_0 \geq \psi_0 \text{ п.в. в } \Omega\},$$

которое содержит двухмасштабные пределы решений задачи (1.1) и не является пустым, поскольку $\psi_0 \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда, используя предположения (1.17) и следуя работе [2], в задаче (1.1) можно перейти к пределу по подпоследовательности из утверждения 1.3 и заключить, что выполняется следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. *Функции u_0 и u_1 , определенные в утверждении 1.3, удовлетворяют следующему вариационному неравенству для $(u_0, u_1) \in K_2$:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y a(x, y, u_0, \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \int_Y b(x, y, u_0) (v_0 - u_0) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y g_0(x, y) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx + \int_{\Omega} f_0(v_0 - u_0) dx \\ & \quad \forall (v_0, v_1) \in K_2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Кроме того, решение $(u_0, u_1) \in K_2$ вариационного неравенства (1.18) определено однозначно, если выполнено одно из условий (I)–(III).

Таким образом, вариационное неравенство (1.18) определяет предельную двухмасштабную задачу для вариационного неравенства (1.1). Однако цель этой работы – получить макромасштабное предельное (осредненное) вариационное неравенство, не зависящее от микромасштабной переменной $y \in Y$, для вариационного неравенства (1.1).

Для этого выберем $v_0 = u_0$ в (1.18) и предположим формально, что $\sigma = u_0$, $\xi = \nabla u_0$ и $U = u_1$ (здесь фактически “замораживается” макромасштабная переменная в (1.18)). Тогда (формально) получаем следующее вариационное неравенство для $U \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_Y a(x, y, \sigma, \xi + \nabla_y U) (\nabla_y V - \nabla_y U) dy & \geq \int_Y g_0(x, y) (\nabla_y V - \nabla_y U) dy \\ & \quad \forall V \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. *Найдется такое подмножество $\Omega_0 \subset \Omega$ полной меры ($\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$), что для фиксированного $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $U \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$ вариационного неравенства (1.19), и это неравенство эквивалентно следующему вариационному уравнению для $U \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} \int_Y a(x, y, \sigma, \xi + \nabla_y U) \nabla_y V dy & = \int_Y g_0(x, y) \nabla_y V dy \\ & \quad \forall V \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Для фиксированного $x \in \Omega_0$ функция $U = U(x, \sigma, \xi)$ является слабо непрерывной как функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ со значениями в $W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$. Кроме того, $U(x, y, v_0(x), \nabla v_0(x)) \in L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$, если $v_0 \in W^{1,p}(\Omega)$.

В силу этого утверждения имеет смысл следующий результат о связи решений вариационного неравенства (1.18) с решениями (формально полученного) вариационного неравенства (1.19).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. *Пусть $(w_0, w_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.18). Тогда $w_1 = U(x, y, w_0(x), \nabla w_0(x))$, где $U(x, y, \sigma, \xi)$ является единственным (для фиксированного $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) решением*

вариационного неравенства (1.19). В частности,

$$u_1 = U(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x))$$

для u_0 и u_1 , определенных в утверждении 1.3. Кроме того,

$$a_0 = a(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x) + \nabla_y U(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x)))$$

и $b_0 = b(x, y, u_0(x))$, где a_0 и b_0 также определены в утверждении 1.3.

Используя это утверждение и выбирая $v_1 = u_1$ в (1.18), получаем следующее осредненное (макромасштабное предельное для задачи (1.1)) вариационное неравенство для $u_0 \in K_0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A(x, u_0, \nabla u_0)(\nabla v_0 - \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} B(x, u_0)(v_0 - u_0) dx \\ & \geq \int_{\Omega} G(\nabla v_0 - \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} f_0(v_0 - u_0) dx \\ & \quad \forall v_0 \in K_0 = \{v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) : v_0 \geq \psi_0 \text{ п.в. в } \Omega\}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} A(x, \sigma, \xi) &= \int_Y a(x, y, \sigma, \xi + \nabla_y U(x, y, \sigma, \xi)) dy, \\ B(x, \sigma) &= \int_Y b(x, y, \sigma) dy, \quad G(x) = \int_Y g_0(x, y) dy. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для решений вариационных неравенств (1.18), (1.19) и (1.21) выполнены следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7. Пусть $(w_0, w_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.18). Тогда $w_0 \in K_0$ является решением вариационного неравенства (1.21). В частности, u_0 , определенное в утверждении 1.3, является решением вариационного неравенства (1.21).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. Пусть $w_0 \in K_0$ является решением вариационного неравенства (1.21). Тогда $(w_0, w_1) = (w_0(x), U(x, y, w_0(x), \nabla w_0(x)))$ является решением вариационного неравенства (1.18).

Кроме того, решение $u_0 \in K_0$ вариационного неравенства (1.21) определено однозначно, если выполнено одно из условий (I)–(III).

Непосредственным следствием приведенных утверждений является следующий результат о сходимости решений задачи (1.1).

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть $\{u_\varepsilon\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ является множеством решений задачи (1.1). Тогда (возможно, после выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } W_0^{1,p}(\Omega), \\ & \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2,p} \nabla u_0 + \nabla_y U(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x)), \\ & b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon\right) \xrightarrow{2,q} b(x, y, u_0(x)), \\ & a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\right) \xrightarrow{2,q} a(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x) + \nabla_y U(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x))), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $u_0 \in K_0$ является решением осредненного вариационного неравенства (1.21) и $U(x, y, \sigma, \xi)$ является единственным (для фиксированного $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) решением вариационного неравенства (1.19).

Кроме того, соотношения (1.23) выполняются без выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$, если выполнено одно из условий (I)–(III).

Вариационное неравенство (1.1) можно рассмотреть и в случае, когда множество K_ε заменено множеством

$$W(\psi_\varepsilon) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v - \psi_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)\}, \quad (1.24)$$

где ψ_ε удовлетворяет всем условиям, сформулированным для (1.1), за исключением предположений, что $\psi_\varepsilon \leq 0$ и $\psi_\varepsilon - \psi_0 \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$.

В этом случае известно (см. [3], [11]), что такое вариационное неравенство эквивалентно следующей неоднородной задаче Дирихле для $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(a \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon \right) \right) + b \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon \right) &= f_\varepsilon - \operatorname{div} g_\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon &= \psi_\varepsilon \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Для фиксированного ε решение задачи (1.25) существует в соответствии с [3]. Кроме того, как и в [6], проверяется, что такое решение единственно, если выполнено одно из условий (I)–(III). Таким образом, непосредственным повторением доказательства теоремы 1.9 проверяется следующий результат о сходимости решений задачи (1.25).

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть $\{u_\varepsilon\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ является множеством решений задачи (1.25). Тогда (возможно, после выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } W^{1,p}(\Omega), \\ \nabla u_\varepsilon &\xrightarrow{2,p} \nabla u_0 + \nabla_y U(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x)), \\ b \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon \right) &\xrightarrow{2,q} b(x, y, u_0(x)), \\ a \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon \right) &\xrightarrow{2,q} a(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x) + \nabla_y U(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x))), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где $U(x, y, \sigma, \xi)$ является единственным (для фиксированного $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) решением вариационного уравнения (1.20) и (в обозначениях из (1.22) и (1.24)) $u_0 \in W(\psi_0)$ является решением следующей неоднородной задачи Дирихле для осредненного уравнения:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (A(x, u_0, \nabla u_0)) + B(x, u_0) &= f_0 - \operatorname{div} G \quad \text{в } \Omega, \\ u_0 &= \psi_0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Кроме того, соотношения (1.26) выполняются без выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$, если выполнено одно из условий (I)–(III).

Утверждение о сходимости решений задачи (1.25) (при $a = a(y, \sigma, \xi)$, $b = 0$, $\psi_\varepsilon = 0$, $g_\varepsilon = 0$ и $f_\varepsilon = f \in L^p(\Omega)$ с $p > n/p$) доказано в [13], где предполагалась сильная монотонность и (глобальная) гёльдеровость (относительно σ и ξ) вектор-функции $a(y, \sigma, \xi)$. Задача (1.25) при $a = a(y, \xi)$, $\psi_\varepsilon = 0$ и $g_\varepsilon = 0$ рассматривалась во многих работах (дальнейшие подробности и библиографию можно найти, например, в [14], [15], [2]). Приведенные в настоящей работе результаты анонсированы в [16]. Отметим также, что предположение $g_\varepsilon \neq 0$ в (1.25) является естественным, поскольку такие нелинейные уравнения принято рассматривать с правой частью из $W^{-1,q}(\Omega)$ (и каждый элемент этого пространства представим в виде $f - \operatorname{div} g$). Более того, хорошо известны условия, при выполнении которых оператор, определяющий эту задачу, является изоморфизмом (для фиксированного ε) из $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,q}(\Omega)$.

§ 2. Доказательства

В дальнейшем изложении C обозначает (возможно, различные) постоянные, не зависящие от положительного параметра ε (при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для соответствующего ε_0). Для заданной 1-периодической функции $w(x, y)$ (возможно, зависящей и от других переменных) используется обозначение $w^\varepsilon = w(x, x/\varepsilon)$ (для ε -периодического продолжения этой функции на Ω , определяемого равенством (1.8)) и равенство

$$\nabla(w^\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\nabla_y w)^\varepsilon + (\nabla_x w)^\varepsilon, \quad (2.1)$$

выполненное при подходящих предположениях о регулярности функции $w(x, y)$ (см. замечание 1.1). Более подробно эта формула дифференцирования быстроосциллирующих функций записывается в виде

$$\nabla\left(w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = (\varepsilon^{-1}\nabla_y w(x, y) + \nabla_x w(x, y)) \quad \text{при } y = \frac{x}{\varepsilon}$$

и проверяется непосредственно, например, для гладких функций $w(x, y)$.

Кроме того, в дальнейшем часто применяются следующие хорошо известные неравенства:

$$v\omega \leq \left(\frac{\delta^p}{p}\right)v^p + \left(\frac{\delta^{-q}}{q}\right)\omega^q, \quad (v + \omega)^p \leq 2^{p-1}(v^p + \omega^p), \quad (2.2)$$

выполненные для неотрицательных v, ω и каждого положительного δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.3. Напомним, что решение задачи (1.1) существует в соответствии с [3] (см. также [6]), и, используя достаточно стандартные методы, проверим, что подмножества $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$ и $\{\nabla u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)^n$ решений задачи (1.1) и градиентов этих решений являются равномерно ограниченными. В силу неравенства Пуанкаре для этого достаточно доказать только равномерную ограниченность подмножества $\{\nabla u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)^n$.

Из предположения $\psi_\varepsilon \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$ следует, что

$$\psi_\varepsilon^+ = \max(\psi_\varepsilon, 0) \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

и $\psi_\varepsilon^+ \geq \psi_\varepsilon$ п.в. в Ω (подробности см., например, в [5]). Также известно, что $\|\psi_\varepsilon^+\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_1$ в силу (1.2). Поэтому в неравенстве из (1.1) можно выбрать тестовую функцию $v = \psi_\varepsilon^+$ и записать это неравенство в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} [b^\varepsilon(u_\varepsilon) - b^\varepsilon(\psi_\varepsilon^+)](u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^+) dx \\ & \leq \int_{\Omega} a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon^+ dx + \int_{\Omega} g_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon - \nabla \psi_\varepsilon^+) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} f_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^+) dx - \int_{\Omega} b^\varepsilon(\psi_\varepsilon^+)(u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^+) dx, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где, например, $a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = a(x, x/\varepsilon, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$ в соответствии с принятыми обозначениями. Второе слагаемое слева в (2.3) является неотрицательным в силу (1.5). Следовательно, используя неравенство Гёльдера, (1.2), (1.6), (2.2) и (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx & \leq \beta \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{p-1} dx + \int_{\Omega} \left| h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p dx \\ & \quad + C_1 \|a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\|_{L^q(\Omega)^n} + C_2 (\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n} + C_1) \\ & \quad + C_3 (\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + C_1) + \|b^\varepsilon(\psi_\varepsilon^+)\|_{L^q(\Omega)} (\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + C_1). \end{aligned}$$

Из оценки (1.9) следует, что

$$\int_{\Omega} \left| h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p dx \leq C_4^p \|h(y)\|_{L_{\text{per}}^p(Y)}^p \leq C$$

в силу предположений. Кроме того, учитывая (1.6) и (2.2), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{p-1} dx & \leq \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p dx \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{1/p} \leq C \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^{p/q}, \\ \|b^\varepsilon(\psi_\varepsilon^+)\|_{L^q(\Omega)}^q & \leq \varkappa^q \int_{\Omega} \left| k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p dx + \varkappa^q \int_{\Omega} |\psi_\varepsilon^+|^p dx \leq C. \end{aligned}$$

Следовательно, вновь используя неравенство Пуанкаре и (1.6), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx & \leq C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n} + C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n}^{p/q} + C \\ & \leq \frac{1}{4} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n}^p + \frac{1}{4} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n}^p + C \end{aligned}$$

в соответствии с (2.2) при подходящем выборе δ . Поэтому выполняется оценка $\|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C$, и, учитывая (1.6) и (2.2), заключаем, что

$$\int_{\Omega} \left| a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\right) \right|^q dx + \int_{\Omega} \left| b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon\right) \right|^q dx \leq C.$$

Таким образом, подмножества $\{u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$ и $\{\nabla u_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)^n$ равномерно ограничены и большая часть доказываемых соотношений утверждения 1.3 следует из (1.16), а предельные соотношения для градиентов доказаны в [7; утверждение 1.14]. Кроме того, неравенство $u_0 \geq \psi_0$ п.в. в Ω следует из неравенства $u_\varepsilon - \psi_\varepsilon \geq 0$ п.в. в Ω и (слабой) замкнутости и выпуклости множества

неотрицательных функций в $W^{1,p}(\Omega)$ (см., например, [3] и [5]). Аналогично проверяется, что $\psi_0 \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$, поскольку множество неотрицательных на $\partial\Omega$ функций также является замкнутым и выпуклым, что завершает доказательство утверждения 1.3.

Известно (см. [5]), что множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L^p(\Omega)$ и $W_0^{1,p}(\Omega)$, а множество $C^1(\overline{\Omega})$ плотно в $W^{1,p}(\Omega)$. Также известно и непосредственно проверяется, что $C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R}$ плотно в $W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$, где $C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R}$ состоит из гладких 1-периодических функций, имеющих нулевое среднее по Y (или, эквивалентно, ограничение на Y таких функций имеет разложение в ряд Фурье с нулевым свободным слагаемым).

Будем обозначать через $C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R})$ множество функций вида $\varphi = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$, где $\varphi_1(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\varphi_2(y) \in C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R}$. Кроме того, через $\sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R})$ обозначим множество конечных линейных комбинаций функций такого вида. Аналогично определяется множество гладких функций $\sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$.

Известно, что последнее множество плотно в $L^p(\Omega \times Y)$. Точнее, множество ограничений на Y функций из $\sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$ плотно в $L^p(\Omega \times Y)$. Действительно, пространство $L^p(\Omega \times Y)$ можно отождествить с пространством $L^p(\Omega; L^p(Y))$ в соответствии с [17; теорема III.11.17]. Каждый элемент из $L^p(\Omega; L^p(Y))$ допускает аппроксимацию простыми функциями вида $\sum_j \chi_j w_j$, где сумма конечна, χ_j являются характеристическими функциями некоторых измеримых непересекающихся подмножеств $\Omega_j \subset \Omega$ и $w_j \in L^p(Y)$ (см., например, [17; следствие III.3.8]). Каждую характеристическую функцию χ_j можно приблизить в $L^p(\Omega)$ функциями из плотного множества $C_0^\infty(\Omega)$ и каждое такое w_j можно приблизить в $L^p(Y)$ функциями из $C_{\text{per}}^\infty(Y)$ (и даже функциями из $C_0^\infty(Y)$), что доказывает требуемую плотность. Аналогично проверяется, что множество $\sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R})$ плотно в $L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$.

ЛЕММА 2.1. Пусть заданы равномерно ограниченные последовательности $\{\rho_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$, $\{\psi_\varepsilon\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ и функции

$$\rho_0 \in L^p(\Omega \times Y), \quad \psi_0 \in W^{1,p}(\Omega), \quad \psi_1 \in L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$$

такие, что

$$\rho_\varepsilon \xrightarrow{2,p} \rho_0, \quad \nabla \psi_\varepsilon \xrightarrow{2,p} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 \quad (2.4)$$

и $\psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi_0$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда найдутся последовательности

$$\{\rho_0^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)), \quad \{\psi_0^i\} \subset C^1(\overline{\Omega}), \quad \{\psi_1^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R}),$$

для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \rho_\varepsilon(x) - \rho_0^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^p(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\psi_\varepsilon(x) - \psi_0^i(x)\|_{L^p(\Omega)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\psi_\varepsilon(x) - \psi_0(x)\|_{L^p(\Omega)} = 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla \psi_\varepsilon(x) - \nabla \psi_0^i(x) - (\nabla_y \psi_1^i)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^p(\Omega)^n} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p = 2$ первое соотношение из (2.5) доказано в [7], где существенно используется гильбертовость пространства $L^2(\Omega)$ (см., например, [2; соотношение (2.7)]). Здесь в случае произвольного p доказательство основывается фактически на равномерной выпуклости пространства $L^p(\Omega)$ (определение см., например, в [18]). Отметим также, что существование соответствующих ρ_0 , ψ_0 и ψ_1 проверяется, как и при доказательстве утверждения 1.3. Кроме того, в силу отмеченной выше плотности найдутся такие последовательности $\{\rho_0^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$, $\{\psi_0^i\} \subset C^1(\bar{\Omega})$ и $\{\psi_1^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R})$, что

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|\rho_0 - \rho_0^i\|_{L^p(\Omega \times Y)} &= 0, & \lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla \psi_0 - \nabla \psi_0^i\|_{L^p(\Omega)^n} &= 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|\psi_0 - \psi_0^i\|_{L^p(\Omega)} &= 0, & \lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 - \nabla \psi_0^i - \nabla_y \psi_1^i\|_{L^p(\Omega \times Y)^n} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть $p \geq 2$ и $v, w \in L^p(\Omega)$, тогда выполняется неравенство

$$\left\| \frac{v+w}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|w\|_{L^p(\Omega)}^p - \left\| \frac{v-w}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

которое называют *первым неравенством Кларксона* (см., например, [18]).

Фиксируем i и выберем такое $\varphi \in \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$, что $\|\varphi\|_{L^q(\Omega \times Y)} = 1$. Используя неравенства Гёльдера и Кларксона, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{\rho_\varepsilon + (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \varphi^\varepsilon dx \right| &\leq \left\| \frac{\rho_\varepsilon + (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^{p/p} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \|\rho_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|(\rho_0^i)^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p - \left\| \frac{\rho_\varepsilon - (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $(\rho_0^i)^\varepsilon = \rho_0^i(x, x/\varepsilon)$ и $\varphi^\varepsilon = \varphi(x, x/\varepsilon)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в этом неравенстве, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \int_Y \frac{\rho_0 + \rho_0^i}{2} \varphi dy dx \right| &\leq \left(\frac{1}{2} \|\rho_0\|_{L^p(\Omega \times Y)}^p + \frac{1}{2} \|\rho_0^i\|_{L^p(\Omega \times Y)}^p - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\rho_\varepsilon - (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где учтены определение 1.2, условие (2.4) и регулярность ρ_0^i и φ (в частности, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} = 1$ в соответствии с (1.10)).

Используя (2.6) и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ в (2.7), получаем

$$\left| \int_{\Omega} \int_Y \rho_0 \varphi dy dx \right| \leq \left(\|\rho_0\|_{L^p(\Omega \times Y)}^p - \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\rho_\varepsilon - (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Супремум по φ от левой части этого неравенства равен $\|\rho_0\|_{L^p(\Omega \times Y)}$, поскольку $L^p(\Omega \times Y)$ сопряжено с $L^q(\Omega \times Y)$ и $\sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$ плотно в $L^q(\Omega \times Y)$. Таким образом, выполняется неравенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \rho_\varepsilon(x) - \rho_0^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq 0,$$

что завершает доказательство первого соотношения из (2.5) при $p \geq 2$.

Пусть $1 < p \leq 2$ и $v, w \in L^p(\Omega)$, тогда выполняется неравенство

$$\left\| \frac{v+w}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^{p/(p-1)} \leq \left(\frac{1}{2} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|w\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/(p-1)} - \left\| \frac{v-w}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^{p/(p-1)},$$

которое принято называть *вторым неравенством Кларксона* (см. [18]).

Фиксируем i и выберем такое $\varphi \in \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$, что $\|\varphi\|_{L^q(\Omega \times Y)} = 1$. Напомяная равенство $q = p/(p-1)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{\rho_\varepsilon + (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \varphi^\varepsilon dx \right| &\leq \left\| \frac{\rho_\varepsilon + (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^{q/q} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \left(\left(\frac{1}{2} \|\rho_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|(\rho_0^i)^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/(p-1)} - \left\| \frac{\rho_\varepsilon - (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^q \right)^{1/q} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $i \rightarrow \infty$, получаем

$$\left| \int_{\Omega} \int_Y \rho_0 \varphi dy dx \right| \leq \left(\|\rho_0\|_{L^p(\Omega \times Y)}^q - \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\rho_\varepsilon - (\rho_0^i)^\varepsilon}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^q \right)^{1/q}.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \rho_\varepsilon(x) - \rho_0^i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^p(\Omega)}^q \leq 0,$$

что завершает доказательство первого соотношения из (2.5).

Третье соотношение из (2.5) проверяется аналогично, поскольку

$$\nabla \psi_\varepsilon \in L^p(\Omega)^n, \quad \nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i \in L^p(\Omega \times Y)^n \cap \sum (C^0(\bar{\Omega})(C_{\text{per}}^\infty(Y)))^n$$

и выполнены предположение (2.4) и соотношения (2.6).

Равенство $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\psi_\varepsilon - \psi_0\|_{L^p(\Omega)} = 0$ следует из теоремы компактности Реллиха–Кондрашова (см., например, [18]). Поэтому соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\psi_\varepsilon - \psi_0^i\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

следует из (2.6) и неравенства треугольника. Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть заданы равномерно ограниченные последовательности $\{v_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$, $\{\rho_\varepsilon\} \subset L^q(\Omega)$ и функции $v_0 \in L^p(\Omega \times Y)$, $\rho_0 \in L^q(\Omega \times Y)$ такие, что

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2,p} v_0, \quad \rho_\varepsilon \xrightarrow{2,q} \rho_0. \quad (2.8)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x) \rho_\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \rho_0(x, y) dy dx. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.1 найдется последовательность $\{\rho_0^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$, удовлетворяющая соотношениям (2.5) и (2.6), где p заменено на q . Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\left| \int_{\Omega} v_\varepsilon \rho_\varepsilon dx - \int_{\Omega} v_\varepsilon (\rho_0^i)^\varepsilon dx \right| \leq C_0 \|\rho_\varepsilon - (\rho_0^i)^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)},$$

где C_0 не зависит от ε и i , поскольку последовательность $\{v_\varepsilon\} \subset L^p(\Omega)$ равномерно ограничена. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon \rho_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \int_Y v_0 \rho_0^i dy dx \right| \leq C_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\rho_\varepsilon - (\rho_0^i)^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)}$$

в соответствии с (1.14). Учитывая (2.5), (2.6) и переходя в этом неравенстве к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем (2.9). Лемма 2.2 доказана.

Для $p = 2$ это утверждение доказано в [7], где не предполагалась (в формулировке, но использовалась в доказательстве) равномерная ограниченность последовательности $\{v_\varepsilon\}$. Значение леммы состоит в том, что можно заменить $\varphi^\varepsilon(x)$ и $\varphi(x, y)$ в определении 1.2 на соответствующие $\rho_\varepsilon(x)$ и $\rho_0(x, y)$, удовлетворяющие (2.8) (см. (1.14) и (2.9)). Этот факт вместе с предположением (1.17) будет использоваться при переходе к пределу (при $\varepsilon \rightarrow 0$) в предпоследнем слагаемом неравенства из (1.1).

Отметим также, что утверждения, более общие, чем приведенное, можно найти в [19]–[22]. Впрочем, не все доказательства из этих статей являются корректными. Так, в доказательствах теорем 3 и 5 из [20] используется утверждение о плотности гладких функций в пространстве $L^q(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$ для каждой борелевской меры μ на Y и каждого q ($1 < q < \infty$). Контрпримеры, имеющие непосредственное отношение к этому утверждению, можно найти в [23]. Аналогичные методы доказательств и утверждение о плотности используются в [19] (где также опущены доказательства лемм 1.2 и 4.4) и в [21] (где соотношение (1.9) приведено без доказательства). Кроме того, результаты, приведенные в [22; теорема 5.1 и замечание 5.3], противоречат утверждениям, доказанным в [15]. В связи с этим в настоящей работе приведено непосредственное доказательство леммы 2.2 (основанное на лемме 2.1), поскольку ссылки на утверждения без доказательств не являются вполне корректными.

ЛЕММА 2.3. *Предположим, что ψ_ε , ψ_0 и ψ_1 удовлетворяют условиям леммы 2.1. Пусть $\psi_\varepsilon^0 = \psi_\varepsilon - \psi_0$ и $u_\varepsilon^0 \in W^{1,p}(\Omega)$ является решением следующей задачи Дирихле для p -лапласиана:*

$$\Delta_p u_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u_\varepsilon^0 = \psi_\varepsilon^0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.10)$$

Тогда $u_\varepsilon^0 \rightarrow 0$ сильно в $W^{1,p}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Кроме того, $u_\varepsilon^0 \leq 0$ п.в. в Ω , если $\psi_\varepsilon^0 \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.1), (2.5), (2.6) и неравенства треугольника следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_\varepsilon^0 - (\nabla_y \psi_1^i)^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n} = \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla(\psi_\varepsilon^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega)^n} = 0, \quad (2.11)$$

поскольку ψ_0 , ψ_0^i не зависят от ε и $\nabla(\varepsilon\psi_0^i)^\varepsilon = (\nabla_y \psi_0^i)^\varepsilon + \varepsilon(\nabla_x \psi_0^i)^\varepsilon$.

Известно (см. [3], [11]), что существует единственное (для фиксированного ε) равномерно ограниченное решение задачи (2.10) и посредством замены $u_\varepsilon^0 = \hat{u}_\varepsilon^0 + \psi_\varepsilon^0$ эта задача сводится к следующему эквивалентному вариационному уравнению для $\hat{u}_\varepsilon^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} a_L^p(\nabla \hat{u}_\varepsilon^0 + \nabla \psi_\varepsilon^0) \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (2.12)$$

где $a_L^p = |\xi|^{p-2}\xi$ для $\xi \in \mathbb{R}^n$. Также известно и непосредственно проверяется, что вектор-функция $a_L^p = a_L^p(\xi)$ удовлетворяет неравенствам (1.5), (1.6) (при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $h = 0$ и $l = 0$) и является в определенном смысле гёльдеровой. Например, при $1 < p \leq 2$ выполняется неравенство $|a_L^p(\xi) - a_L^p(\zeta)| \leq \gamma|\xi - \zeta|^{p-1}$ для $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ и из (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a_L^p(\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})) \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} [a_L^p(\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})) - a_L^p(\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon} + \psi_{\varepsilon}^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon}))] \nabla v \, dx \\ &\leq \gamma \|\nabla(\psi_{\varepsilon}^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n}^{p/q} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)^n}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Выбирая в этом неравенстве тестовую функцию

$$v = \hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon},$$

которая является элементом $W_0^{1,p}(\Omega)$ в силу определений, и учитывая равенство $a_L^p = |\xi|^{p-2}\xi$, имеем

$$\|\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n}^p \leq \gamma \|\nabla(\psi_{\varepsilon}^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n}^{p/q} \|\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n}.$$

Следовательно, используя (2.11), получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n} = 0. \quad (2.14)$$

Аналогично проверяется соотношение (2.14) при $p \geq 2$.

В силу определений $u_{\varepsilon}^0 = \hat{u}_{\varepsilon}^0 + \psi_{\varepsilon}^0$ является решением задачи (2.10). Следовательно, учитывая неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_{\varepsilon}^0\|_{L^p(\Omega)^n} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon} + \psi_{\varepsilon}^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla(\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla(\psi_{\varepsilon}^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)^n}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_{\varepsilon}^0\|_{L^p(\Omega)} &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\psi_{\varepsilon}^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Таким образом, используя (2.5), (2.11), (2.14) и неравенство Пуанкаре (для $\hat{u}_{\varepsilon}^0 + \varepsilon(\psi_1^i)^{\varepsilon}$), заключаем, что $u_{\varepsilon}^0 \rightarrow 0$ сильно в $W^{1,p}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если $\psi_{\varepsilon}^0 \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$, то неравенство $u_{\varepsilon}^0 \leq 0$ п.в. в Ω следует из принципа максимума для задачи (2.10). Действительно, определим $u_{\varepsilon}^{\oplus} = \max(u_{\varepsilon}^0, 0)$. Известно (см. [5]), что $u_{\varepsilon}^{\oplus} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и

$$\begin{aligned} \nabla u_{\varepsilon}^{\oplus} &= \nabla u_{\varepsilon}^0 && \text{п.в. в } \{x \in \Omega : u_{\varepsilon}^0(x) > 0\}, \\ \nabla u_{\varepsilon}^{\oplus} &= 0 && \text{п.в. в } \{x \in \Omega : u_{\varepsilon}^0(x) = 0\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поэтому $(|\nabla u_{\varepsilon}^0|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}^0) \nabla u_{\varepsilon}^{\oplus} = |\nabla u_{\varepsilon}^{\oplus}|^p$ п.в. в Ω и, выбирая в (2.12) тестовую функцию $v = u_{\varepsilon}^{\oplus}$, получаем $\|\nabla u_{\varepsilon}^{\oplus}\|_{L^p(\Omega)^n}^p = 0$. Таким образом, $u_{\varepsilon}^0 \leq 0$ п.в. в Ω в соответствии с (2.15). Лемма 2.3 доказана.

Это утверждение означает, что возможное различие граничных условий ψ_ε и ψ_0 , удовлетворяющих (1.17), не является асимптотически существенным. Этот факт будет использоваться при доказательстве теоремы 1.10 для вариационных уравнений. В случае применения этого факта для вариационных неравенств необходимо контролировать знак вспомогательной функции u_ε^0 . В силу принципа максимума это возможно, если определен знак этой функции на границе. Следующее определение также полезно для дальнейшего.

Определим для каждого ε неотрицательную функцию $e_\varepsilon \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, равную нулю при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ и единице при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$, где $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ обозначает расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$. Для достаточно малых ε ($\leq \varepsilon_0$ для некоторого положительного ε_0) такие функции существуют, $|\varepsilon \nabla e_\varepsilon| \leq C$ п.в. в Ω (с постоянной C , не зависящей от ε) и носитель функции ∇e_ε содержится в приграничной полосе $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ ширины 2ε . Таким образом, выполняются соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_{2\varepsilon})^n} = 0 \quad (2.16)$$

(дальнейшие подробности можно найти, например, в [14], [2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.4 (переход к пределу). Пусть

$$u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_1(x, y) \in L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$$

определены в утверждении 1.3. Тогда найдутся последовательности

$$\{u_0^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)), \quad \{u_1^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R}),$$

для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_0 - u_0^i\|_{L^p(\Omega)} &= 0, & \lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla u_0 - \nabla u_0^i\|_{L^p(\Omega)^n} &= 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla u_0 + \nabla_y u_1 - \nabla u_0^i - \nabla_y u_1^i\|_{L^p(\Omega \times Y)^n} &= 0, \\ \|u_0^i\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq C, & \|\nabla u_0^i + \nabla_y u_1^i\|_{L^p(\Omega \times Y)^n} &\leq C, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где постоянная C не зависит от i , поскольку (сильно) сходящиеся последовательности можно считать ограниченными.

Фиксируем

$$\varphi \in \sum (C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)))^n, \quad \phi \in \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y))$$

и действительные τ , t , удовлетворяющие неравенствам $|\tau| \leq 1$ и $|t| \leq 1$. Используя обозначение (1.8), определим

$$W_\varepsilon^i = \nabla u_0^i + (\nabla_y u_1^i)^\varepsilon + \tau \varphi^\varepsilon, \quad w_\varepsilon^i = u_0^i + t \phi^\varepsilon. \quad (2.18)$$

Тогда в соответствии с (1.10) и (2.17) выполняется неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|W_\varepsilon^i\|_{L^p(\Omega)^n} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_\varepsilon^i\|_{L^p(\Omega)} \leq C. \quad (2.19)$$

Здесь и в дальнейшем постоянные C не зависят от ε , i , τ и t .

Отметим, что носители W_ε^i и w_ε^i принадлежат компактному подмножеству из Ω , которое не зависит от ε . Например, для последнего слагаемого из (2.18) выполнено равенство $\phi = \sum_j \phi_j^1(x) \phi_j^2(y)$, где по определению сумма конечна и $\phi_j^1 \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому носитель $\text{supp } \phi^\varepsilon(x)$ принадлежит компактному множеству $\bigcup_j \text{supp } \phi_j^1(x) \subset \Omega$ (которое не зависит от ε), поскольку $\phi^\varepsilon(x) = \sum_j \phi_j^1(x) \phi_j^2(x/\varepsilon)$.

Кроме того, выполняется неравенство

$$|W_\varepsilon^i| + |w_\varepsilon^i| \leq C_i \quad \text{в } \bar{\Omega}. \quad (2.20)$$

Здесь и далее постоянные C_i зависят только от i . Действительно, например, функция ϕ может рассматриваться как 1-периодическое продолжение (по y) гладкой функции $\phi(x, y)|_Y$, заданной на компактном множестве $\bar{\Omega} \times Y$ и поэтому ограниченной на этом множестве. Таким образом, функция $\phi(x, y)$ является ограниченной на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, ограничена и функция $\phi^\varepsilon(x)$ на $\bar{\Omega}$. Аналогично проверяется, что (при фиксированном i) ограничены и остальные слагаемые из (2.18).

Из неравенств (1.5) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) W_\varepsilon^i \, dx - \int_{\Omega} a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i) (\nabla u_\varepsilon - W_\varepsilon^i) \, dx &\geq 0, \\ \int_{\Omega} b^\varepsilon(u_\varepsilon) u_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} b^\varepsilon(u_\varepsilon) w_\varepsilon^i \, dx - \int_{\Omega} b^\varepsilon(w_\varepsilon^i) (u_\varepsilon - w_\varepsilon^i) \, dx &\geq 0, \end{aligned}$$

где, например, $a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = a(x, x/\varepsilon, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$. Перейти к пределу в первых слагаемых этих неравенств проблематично. Поэтому, суммируя эти неравенства и неравенство из (1.1), исключаем эти слагаемые из рассмотрения и получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a^\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) (\nabla v - W_\varepsilon^i) \, dx + \int_{\Omega} a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i) (W_\varepsilon^i - \nabla u_\varepsilon) \, dx \\ + \int_{\Omega} b^\varepsilon(u_\varepsilon) (v - w_\varepsilon^i) \, dx + \int_{\Omega} b^\varepsilon(w_\varepsilon^i) (w_\varepsilon^i - u_\varepsilon) \, dx \\ \geq \int_{\Omega} g_\varepsilon (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) \, dx + \int_{\Omega} f_\varepsilon (v - u_\varepsilon) \, dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Идея получения предельного двухмасштабного вариационного неравенства (1.18) для u_0 и u_1 заключается в подходящем выборе $v \in K_\varepsilon$ в (2.21) и переходе к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $i \rightarrow \infty$. В случае, когда $p = 2$, $b = 0$ и вектор-функция $a = a(y, \xi)$ является липшицевой по $\xi \in \mathbb{R}^n$, такой предельный переход проще; для вариационных неравенств с препятствием он обоснован в работе [2].

Таким образом, неравенство (2.21) можно рассматривать с точностью до величин ω_ε^i , удовлетворяющих соотношению

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\varepsilon^i = 0, \quad (2.22)$$

поскольку после предельного перехода $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ в (2.21) такие величины не повлияют на окончательный вид предельного неравенства.

Проверим, что $a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i)$ можно заменить в (2.21) на $a^\varepsilon(u_0^i, W_\varepsilon^i)$ с точностью до ω_ε^i , удовлетворяющего (2.22). Для этого определим

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon^i &= \int_{\Omega} [a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i) - a^\varepsilon(u_0^i, W_\varepsilon^i)] (W_\varepsilon^i - \nabla u_\varepsilon) dx \\ &= \int_{\Omega} [a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i) - a^\varepsilon(u_0, W_\varepsilon^i)] (W_\varepsilon^i - \nabla u_\varepsilon) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} [a^\varepsilon(u_0, W_\varepsilon^i) - a^\varepsilon(u_0^i, W_\varepsilon^i)] (W_\varepsilon^i - \nabla u_\varepsilon) dx = I_\varepsilon^i + J_\varepsilon^i.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Учитывая неравенства Гёльдера, $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^n}^p \leq C$ и (2.20), имеем

$$|I_\varepsilon^i|^q \leq C_i \|a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i) - a^\varepsilon(u_0, W_\varepsilon^i)\|_{L^q(\Omega)^n}^q. \quad (2.24)$$

В силу теорем компактности из утверждения 1.3 следует, что последовательность $\{u_\varepsilon\}$ равномерно ограничена и сильно сходится к u_0 в $L^{p+\varrho}(\Omega)$ для некоторого положительного ϱ , удовлетворяющего неравенствам $0 < \varrho < p/(n-p)$ при $p < n$ и $0 < \varrho$ при $p \geq n$ (подробности см., например, в [24; II.2]). Кроме того, выполняется соотношение (возможно, после выделения подпоследовательности при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{п.в. в } \Omega.$$

Таким образом, для каждого положительного ν найдется такое компактное подмножество $\Omega_\nu \subset \Omega$, что

$$\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu) < \nu, \quad \sup_{\Omega_\nu} |u_\varepsilon - u_0| \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу теоремы Егорова (см., например, [25; теорема 4.8.3]).

Для фиксированного ν функции u_ε и u_0 можно считать ограниченными на Ω_ν и воспользоваться неравенством (1.7) при фиксированном m . Тогда, используя также (2.2) и (2.24), получаем

$$|I_\varepsilon^i|^q \leq C_i \sup_{\Omega_\nu} |u_\varepsilon - u_0|^{\tau_m q} + C_i \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |a^\varepsilon(u_0, W_\varepsilon^i)|^q dx + C_i \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i)|^q dx, \quad (2.26)$$

где учтено неравенство (1.9) для интеграла

$$\int_{\Omega_\nu} \left| l_m \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^q dx \leq \int_{\Omega} \left| l_m \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^q dx.$$

Оценим, например, последний интеграл в (2.26). Из (1.6), (2.2) и (2.20) следует, что

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |a^\varepsilon(u_\varepsilon, W_\varepsilon^i)|^q dx &\leq \gamma^q \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} \left(\left| l \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| + |u_\varepsilon| + |W_\varepsilon^i| \right)^p dx \\ &\leq C \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} \left| l \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^p dx + C (\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu))^{\varrho/(1+\varrho)} + C_i (\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu)),\end{aligned}\quad (2.27)$$

поскольку

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_\nu)}^p \leq (\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu))^{\varrho/(1+\varrho)} \|u_\varepsilon\|_{L^{p+\varrho}(\Omega \setminus \Omega_\nu)}^p$$

(см., например, [24; II.2]). Кроме того, из (1.10) заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} \left| l\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p dx = \text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu) \int_Y |l(y)|^p dy. \quad (2.28)$$

Аналогично оценивается предпоследний интеграл в (2.26).

Таким образом, величина $|I_\varepsilon^i|$ является произвольно малой при малых ν и ε в соответствии с (2.24)–(2.28). Следовательно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_\varepsilon^i| = 0$ для каждого i и поэтому $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_\varepsilon^i| = 0$.

Аналогично, учитывая неравенства Гёльдера и (2.19), имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |J_\varepsilon^i|^q \leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|a^\varepsilon(u_0^i, W_\varepsilon^i) - a^\varepsilon(u_0, W_\varepsilon^i)\|_{L^q(\Omega)^n}^q. \quad (2.29)$$

В соответствии с (2.17) можно считать, что

$$u_0^i \rightarrow u_0 \quad \text{п.в. в } \Omega$$

при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, для каждого положительного ν найдется такое компактное подмножество $\Omega_\nu \subset \Omega$, что

$$\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu) < \nu, \quad \sup_{\Omega_\nu} |u_0^i - u_0| \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

при $i \rightarrow \infty$ в силу теоремы Егорова (см., например, [25]).

Поэтому, используя (1.7), (1.10), (2.2), (2.19) и (2.29), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |J_\varepsilon^i|^q &\leq C \sup_{\Omega_\nu} |u_0^i - u_0|^{\tau_m q} + C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |a^\varepsilon(u_0, W_\varepsilon^i)|^q dx \\ &\quad + C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |a^\varepsilon(u_0^i, W_\varepsilon^i)|^q dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Оценим, например, последний интеграл в (2.31). Из (1.6), (1.10), (2.2), (2.28) и теорем компактности следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |a^\varepsilon(u_0^i, W_\varepsilon^i)|^q dx &\leq C(\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu)) + C(\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\nu))^{\varrho/(1+\varrho)} \\ &\quad + C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |W_\varepsilon^i|^p dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Кроме того, из (1.10), (2.2) и (2.18) заключаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} |W_\varepsilon^i|^p dx &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} \int_Y |\nabla u_0^i + \nabla_y u_1^i + \tau \varphi|^p dy dx \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\Omega} \int_Y |\nabla u_0^i + \nabla_y u_1^i - \nabla u_0 - \nabla_y u_1|^p dy dx \\ &\quad + 2^{p-1} \int_{\Omega \setminus \Omega_\nu} \int_Y |\nabla u_0 + \nabla_y u_1 + \tau \varphi|^p dy dx. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Аналогично оценивается предпоследний интеграл в (2.31).

Отметим, что последний интеграл в (2.33) является произвольно малым при малых ν в силу (2.30) и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Таким образом, величина $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |J_\varepsilon^i|$ является произвольно малой при малых ν и больших i в соответствии с (2.17) и (2.29)–(2.33). Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |J_\varepsilon^i| = 0,$$

что доказывает (2.22) для величины ω_ε^i , определенной в (2.23).

Фиксируем $(v_0, v_1) \in K_2$ (см. (1.18)), и пусть ψ_0, ψ_1 определены в утверждении 1.3. Тогда найдутся последовательности $\{\psi_0^i\} \subset C^1(\bar{\Omega})$ и $\{v_1^i\}, \{\psi_1^i\} \subset \sum C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R})$, для которых выполняются соотношения, аналогичные (2.5), (2.6) и (2.17). В частности, имеем равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla_y v_1 - \nabla_y v_1^i\|_{L^p(\Omega \times Y)^n} = 0 \quad (2.34)$$

и найдутся такие положительные постоянные δ_i^v и δ_i^ψ , что

$$|(v_1^i)^\varepsilon| \leq \delta_i^v, \quad |(\psi_1^i)^\varepsilon| \leq \delta_i^\psi \quad \text{в } \bar{\Omega} \quad (2.35)$$

(см. (1.8) и (2.20)). Определим

$$e_\varepsilon^i = \max(\delta_i^v e_\varepsilon, |(v_1^i)^\varepsilon|), \quad E_\varepsilon^i = \max(\delta_i^\psi e_\varepsilon, (\psi_1^i)^\varepsilon).$$

Известно (см. [5]), что $e_\varepsilon^i, E_\varepsilon^i \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, поскольку $e_\varepsilon \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ (см. (2.16)). Кроме того, непосредственно из определений заключаем, что

$$e_\varepsilon^i + (v_1^i)^\varepsilon \geq 0, \quad E_\varepsilon^i \geq (\psi_1^i)^\varepsilon \quad \text{в } \bar{\Omega}. \quad (2.36)$$

Для фиксированного i , учитывая (2.16), также имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_\varepsilon^i\|_{L^p(\Omega)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla E_\varepsilon^i\|_{L^p(\Omega)^n} = 0. \quad (2.37)$$

Действительно, найдется положительное c_i (не зависящее от ε) такое, что расстояние от носителей $\text{supp}((v_1^i)^\varepsilon)$ и $\text{supp}((\psi_1^i)^\varepsilon)$ до границы $\partial\Omega$ является не меньшим чем c_i , но $e_\varepsilon = 1$ при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$. Это означает, что $e_\varepsilon^i = \delta_i^v e_\varepsilon$ и $E_\varepsilon^i = \delta_i^\psi e_\varepsilon$ при достаточно малых ε в силу определений и (2.35). Таким образом, равенства (2.37) следуют из (2.16).

В силу предположений и утверждения 1.3 выполнены все условия леммы 2.3. Поэтому определено u_ε^0 и $(-u_\varepsilon^0) \geq 0$ п.в. в Ω . Следовательно,

$$v_0 + \psi_\varepsilon^0 - u_\varepsilon^0 \geq \psi_\varepsilon - u_\varepsilon^0 \geq \psi_\varepsilon \quad \text{п.в. в } \Omega \quad (2.38)$$

для $\psi_\varepsilon^0 = \psi_\varepsilon - \psi_0$ в соответствии с определением K_2 . Пусть

$$v_\varepsilon^i = v_0 + \varepsilon(v_1^i)^\varepsilon + \varepsilon e_\varepsilon^i + \varepsilon E_\varepsilon^i + \psi_\varepsilon^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^\varepsilon - u_\varepsilon^0. \quad (2.39)$$

Тогда $v_\varepsilon^i \in K_\varepsilon$ для фиксированного i в силу (2.10), (2.36) и (2.38).

Поэтому можно выбрать тестовую функцию $v = v_\varepsilon^i$ в (2.21) и

$$\nabla v_\varepsilon^i = \nabla v_0 + (\nabla_y v_1^i)^\varepsilon + \varepsilon(\nabla_x v_1^i)^\varepsilon + \nabla(\varepsilon e_\varepsilon^i + \varepsilon E_\varepsilon^i + \psi_\varepsilon^0 - \varepsilon(\psi_1^i)^\varepsilon - u_\varepsilon^0) \quad (2.40)$$

в соответствии с (2.1). Из леммы 2.3, (2.11) и (2.37) следует, что только первые два слагаемых из (2.40) (справа) являются существенными в (2.21). Например, учитывая неравенство Гёльдера, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} a^{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon}) \nabla u_{\varepsilon}^0 dx \right| \leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_{\varepsilon}^0\|_{L^p(\Omega)^n} = 0.$$

Аналогично проверяется, что только первые слагаемые из (2.39) (справа) являются существенными в (2.21).

Таким образом, неравенство (2.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a^{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon}) (\nabla v_0 + (\nabla_y v_1^i)^{\varepsilon} - W_{\varepsilon}^i) dx + \int_{\Omega} a^{\varepsilon}(u_0^i, W_{\varepsilon}^i) (W_{\varepsilon}^i - \nabla u_{\varepsilon}) dx \\ & + \int_{\Omega} b^{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) (v_0 - w_{\varepsilon}^i) dx + \int_{\Omega} b^{\varepsilon}(w_{\varepsilon}^i) (w_{\varepsilon}^i - u_{\varepsilon}) dx \\ & \geq \int_{\Omega} g_{\varepsilon}(\nabla v_0 + (\nabla_y v_1^i)^{\varepsilon} - \nabla u_{\varepsilon}) dx + \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(v_0 - u_{\varepsilon}) dx + \tilde{\omega}_{\varepsilon}^i, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где величина $\tilde{\omega}_{\varepsilon}^i$ удовлетворяет (2.22).

Фиксируем i . С учетом (2.18) определим

$$u_0^i = u_0^i(x) + t\phi(x, y), \quad W_0^i = \nabla u_0^i(x) + \nabla_y u_1^i(x, y) + \tau\varphi(x, y)$$

и докажем, что

$$a_0^i(x, y) = a(x, y, u_0^i(x), W_0^i(x, y)) \in L_{\text{per}}^q(Y; C^0(\overline{\Omega})^n). \quad (2.42)$$

Аналогично (2.20) проверяется, что выполняется неравенство

$$|u_0^i| + |W_0^i| \leq C_i \quad \text{в } \overline{\Omega} \times Y. \quad (2.43)$$

Поэтому можно считать, что значения u_0^i и W_0^i принадлежат компактным множествам $B_1 \subset \mathbb{R}$ и $B_2 \subset \mathbb{R}^n$ соответственно. Следовательно, функции из (1.3) являются равномерно непрерывными на $\overline{\Omega} \times B_1 \times B_2$ и $\overline{\Omega} \times B_1$. Таким образом, для п.в. $y \in Y$ функция $x \mapsto a_0^i(x, y)$ является непрерывной на $\overline{\Omega}$ как суперпозиция (равномерно) непрерывных функций, поскольку $u_0^i(x)$ и $W_0^i(x, y)$ (для фиксированного y) непрерывны на $\overline{\Omega}$. Это означает, что функция

$$a_0^i: y \mapsto a(x, y, u_0^i(x), W_0^i(x, y)) \quad (2.44)$$

определена для п.в. $y \in Y$ и принимает значения в $C^0(\overline{\Omega})^n$. Далее следует проверить, что функция (2.44) измерима.

Из (1.3) и (1.4) следует, что для каждого компактного $Y_c \subset Y$ и каждого $\nu > 0$ найдется такое компактное $Y_{\nu} \subset Y_c$, что $\text{mes}(Y_c \setminus Y_{\nu}) < \nu$ и ограничение функции $a(x, y, \sigma, \xi)$ на $\overline{\Omega} \times Y_{\nu} \times B_1 \times B_2$ является непрерывным в силу теоремы Скорца-Драгоны (см., например, [8; 8.1.3]). Поэтому ограничение функции (2.44) на Y_{ν} определяет непрерывную функцию со значениями в $C^0(\overline{\Omega})^n$, что эквивалентно измеримости функции (2.44) (см., например, [25; 8.14.1]). Здесь использован хорошо известный и непосредственно проверяемый факт,

что $C^0(\overline{\Omega} \times Y_\nu)^n$ можно отождествить с $C^0(Y_\nu; C^0(\overline{\Omega})^n)$. Кроме того, учитывая (1.6) и (2.43), имеем

$$\int_Y \left(\max_{x \in \overline{\Omega}} |a(x, y, u_0^i(x), W_0^i(x, y))| \right)^q dy \leq \gamma \int_Y (|l(y)| + C_i)^p dy.$$

Поэтому $a_0^i(x, y) \in L^q(Y; C^0(\overline{\Omega})^n)$ и $a_0^i(x, y)$ является 1-периодической по $y \in \mathbb{R}^n$ в силу предположений, что завершает доказательство (2.42). Аналогично проверяется, что $b_0^i(x, y) = b(x, y, w_0^i(x, y)) \in L_{\text{per}}^q(Y; C^0(\overline{\Omega}))$. Следовательно, $a_0^i(x, y)$ и $b_0^i(x, y)$ можно рассматривать в (2.41) как тестовые функции в определении 1.2 (см. (1.14)).

Таким образом, используя (1.14), (1.16), (1.17) (для g_ε), утверждение 1.3, лемму 2.2 и переходя к пределу (по подпоследовательностям из утверждения 1.3 при $\varepsilon \rightarrow 0$) в неравенстве (2.41), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y a_0(\nabla v_0 + \nabla_y v_1^i - W_0^i) dy dx + \int_{\Omega} \int_Y b_0(v_0 - w_0^i) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_Y a(x, y, u_0^i, W_0^i)(W_0^i - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_Y b(x, y, w_0^i)(w_0^i - u_0) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y g_0(\nabla v_0 + \nabla_y v_1^i - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx + \int_{\Omega} f_0(v_0 - u_0) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\omega}_\varepsilon^i, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где u_0, u_1, a_0, b_0, g_0 и f_0 определены в утверждении 1.3. Отметим также, что

$$\int_{\Omega} \hat{a}_0 \nabla v_0 dx = \int_{\Omega} \int_Y a_0 \nabla v_0 dy dx$$

в обозначениях из (1.16) и, например,

$$\int_{\Omega} f_0 v_0 dx = \int_{\Omega} \int_Y f_0 v_0 dy dx,$$

поскольку $Y = [0, 1]^n$.

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ в неравенстве (2.45), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y a_0(\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - W_0) dy dx + \int_{\Omega} \int_Y a(x, y, u_0, W_0)(\tau\varphi) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_Y b_0(v_0 - w_0) dy dx + \int_{\Omega} \int_Y b(x, y, w_0)(t\phi) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y g_0(\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx + \int_{\Omega} f_0(v_0 - u_0) dx, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где

$$W_0 = \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) + \tau\varphi(x, y), \quad w_0 = u_0(x) + t\phi(x, y)$$

и учтены соотношения (2.17), (2.18), (2.22), (2.34) и теорема Красносельского (см., например, [8; 4.1.2]).

Рассмотрим неравенство (2.46) при $(v_0, v_1) = (u_0, u_1)$, $t = 0$ и $\tau \neq 0$. Тогда

$$\int_{\Omega} \int_Y [a(x, y, u_0, W_0) - a_0(x, y)] \varphi dy dx = 0, \quad (2.47)$$

поскольку знак τ произволен. Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ в (2.47) и вновь используя теорему Красносельского, заключаем, что

$$a_0(x, y) = a(x, y, u_0(x), \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \quad \text{п.в. в } \Omega \times Y, \quad (2.48)$$

поскольку $\varphi \in \sum (C_0^\infty(\Omega)(C_{\text{per}}^\infty(Y)))^n$ произвольно (см. (2.18)).

Аналогично, из (2.46) при $(v_0, v_1) = (u_0, u_1)$, $t \neq 0$ и $\tau = 0$ получаем

$$b_0(x, y) = b(x, y, u_0(x)) \quad \text{п.в. в } \Omega \times Y. \quad (2.49)$$

Учитывая это равенство и (2.48) в неравенстве (2.46) при $\tau = 0$ и $t = 0$, получаем в точности вариационное неравенство (1.18).

Утверждение о единственности решений этого вариационного неравенства при выполнении одного из условий (I)–(III) будет проверено после доказательства утверждения 1.6.

Идея выбора W_ε^i в виде (2.18) использовалась ранее в [7] при выводе двухмасштабной предельной задачи для уравнений со строго монотонным оператором (в случае задачи (1.25) при $a = a(y, \xi)$, $b = 0$, $\psi_\varepsilon = 0$, $g_\varepsilon = 0$ и $f_\varepsilon = f$) и является развитием идей Минти из общей теории монотонных операторов (см., например, [3], [5] и [11]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.5. Как уже отмечалось, можно считать, что $g_0|_Y \in L^q(\Omega; L^q(Y)^n)$. Поэтому найдется такое подмножество $\Omega_0 \subset \Omega$ полной меры ($\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$), что функция $x \mapsto g_0(x, y)$, принимающая значения в $L^q(Y)^n$, определена для всех $x \in \Omega_0$. В этом случае известно (см. [3]), что для фиксированного $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $U \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$ вариационного неравенства (1.19), это неравенство эквивалентно вариационному уравнению (1.20) и следующему вариационному неравенству для $U \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_Y a(x, y, \sigma, \xi + \nabla_y V)(\nabla_y V - \nabla_y U) dy &\geq \int_Y g_0(x, y)(\nabla_y V - \nabla_y U) dy \\ \forall V &\in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Здесь учтены соотношения (1.3)–(1.6) для $a = a(x, y, \sigma, \xi)$.

Фиксируем $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Используя (1.3)–(1.6), (1.20), (2.2) и неравенство Гёльдера, как и при доказательстве утверждения 1.3, имеем

$$\begin{aligned} &\alpha \int_Y |\xi + \nabla_y U|^p dy - \beta \int_Y |\sigma|^{p-1} dy - \int_Y |h(y)|^p dy \\ &\leq \int_Y a(x, y, \sigma, \xi + \nabla_y U)(\xi + \nabla_y U) dy \\ &\leq |\xi| \left(\int_Y |a(x, y, \sigma, \xi + \nabla_y U)|^q dy \right)^{1/q} + \left| \int_Y g_0 \nabla_y U dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma |\xi| \left(\int_Y (|l(y)| + |\sigma| + |\xi + \nabla_y U|)^p dy \right)^{1/q} + \|g_0\|_{L^q(Y)^n} \|\nabla_y U\|_{L^p(Y)^n} \\
&\leq \frac{\alpha}{4} \left(\int_Y (|l(y)|^p + |\sigma|^p + |\xi + \nabla_y U|^p) dy \right) + C |\xi|^p \\
&\quad + \frac{\alpha}{4} \|\xi + \nabla_y U\|_{L^p(Y)^n}^p + C \|g_0\|_{L^q(Y)^n}^q,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

где постоянная C не зависит от $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и учтено неравенство

$$\|\nabla_y U\|_{L^p(Y)^n}^p \leq 2^{p-1} |\xi|^p + 2^{p-1} \|\xi + \nabla_y U\|_{L^p(Y)^n}^p$$

(см. неравенства (2.2)). Поэтому, используя неравенство Пуанкаре и следующее из (2.2) неравенство $|\sigma|^{p-1} \leq (1/p) + (1/q)|\sigma|^p$, получаем

$$\|U\|_{L^p(Y)}^p + \|\nabla_y U\|_{L^p(Y)^n}^p \leq C (\|g_0\|_{L^q(Y)^n}^q + |\sigma|^p + |\xi|^p + 1), \tag{2.52}$$

где постоянная C не зависит от $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Фиксируем $w_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ и докажем, что

$$U_0(x, y) = U(x, y, w_0(x), \nabla w_0(x)) \in L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}). \tag{2.53}$$

Для этого достаточно проверить, что $U_0(x, y)|_Y \in L^p(\Omega; W^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$ в силу единственности решения задачи (2.50) и определений. Из (2.52) следует, что для п.в. $x \in \Omega$ эта функция определена как функция со значениями в $W^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$. Далее следует доказать сильную измеримость такой функции. Для этого (необходимо и) достаточно проверить слабую измеримость в силу теоремы Петтиса (см., например, [17]).

Функции $w_0(x)$, $\nabla w_0(x)$ и $g_0(x)$ (как функция со значениями в $L^q(Y)^n$) измеримы. Поэтому для каждого компактного $\Omega_c \subset \Omega$ и каждого $\nu > 0$ найдется такое компактное $\Omega_\nu \subset \Omega_c$, что $\text{mes}(\Omega_c \setminus \Omega_\nu) < \nu$ и ограничение функций $w_0(x)$, $\nabla w_0(x)$ и $g_0(x)$ на Ω_ν определяет непрерывные функции (см., например, [25; 8.14.1]).

Следовательно, для доказательства измеримости $U_0(x, y)|_Y$ нужно проверить, что ограничение этой функции на Ω_ν определяет слабо непрерывную функцию со значениями в $W^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$. Для этого достаточно фиксировать $x_0 \in \Omega_\nu$ и доказать, что

$$\begin{aligned}
&\nabla_y U_0(x_i, y) \rightharpoonup \nabla_y U_0(x_0, y) \quad \text{слабо в } L^p(Y)^n \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \\
&\text{если } x_i \in \Omega_\nu \quad \text{и } |x_i - x_0| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

В силу (2.52) можно считать, что последовательность $\{\nabla_y U_0(x_i, y)\} \subset L^p(Y)^n$ является равномерно ограниченной, поскольку $w_0(x)$, $\nabla w_0(x)$ и $g_0(x)$ непрерывны на компакте Ω_ν . Поэтому найдется такое $U_0^0 \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$, что (возможно, после выделения подпоследовательности)

$$\nabla_y U_0(x_i, y) \rightharpoonup \nabla_y U_0^0(y) \quad \text{слабо в } L^p(Y)^n \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \tag{2.55}$$

Рассмотрим вариационное неравенство (2.50) при $x = x_i$, $\sigma = w_0(x_i)$, $\xi = \nabla w_0(x_i)$ и фиксированном $V \in C_{\text{per}}^\infty(Y)/\mathbb{R}$. Используя (2.55) и непрерывность

$w_0(x)$, $\nabla w_0(x)$ и $g_0(x)$, в этом неравенстве можно перейти к пределу (по подпоследовательности из (2.55)) и заключить, что

$$\int_Y a(x_0, y, \sigma, \xi + \nabla_y V)(\nabla_y V - \nabla_y U_0^0) dy \geq \int_Y g_0(x_0, y)(\nabla_y V - \nabla_y U_0^0) dy, \quad (2.56)$$

где $\sigma = w_0(x_0)$ и $\xi = \nabla w_0(x_0)$. Действительно, из (1.3) следует, что

$$a(x_i, y, w_0(x_i), \nabla w_0(x_i) + \nabla_y V) \rightarrow a(x_0, y, w_0(x_0), \nabla w_0(x_0) + \nabla_y V) \quad \text{п.в. на } Y$$

и сильно в $L^q(Y)^n$ в силу (1.6) и теоремы Лебега (см., например, [17; следствие 3.6.16]), что доказывает (2.56).

Следовательно, $U_0^0 = U_0(x_0, y)$ и выполнено (2.54) в соответствии с (2.55) и (2.56) (так как решение вариационного неравенства (2.50) единственно и поэтому (2.55) выполнено без выделения подпоследовательности), что завершает доказательство измеримости $U_0(x, y)|_Y$.

Таким образом, (2.53) следует из (2.52) и предположений.

Аналогично проверяется, что для фиксированного $x \in \Omega_0$ функция $U = U(x, \sigma, \xi)$ является слабо непрерывной как функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ со значениями в $W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$ (подробности, достаточные для восстановления деталей доказательства, можно найти в [2]). Утверждение 1.5 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.6. Пусть $(w_0, w_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.18) и $U_0 = U(x, y, w_0(x), \nabla w_0(x))$ в соответствии с (2.53). Выбирая $v_0 = w_0$ и $v_1 = U_0$ в неравенстве из (1.18), получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y g_0(x, y)(\nabla_y U_0 - \nabla_y w_1) dy dx \\ & \leq \int_{\Omega} \int_Y a(x, y, w_0, \nabla w_0 + \nabla_y w_1)(\nabla_y U_0 - \nabla_y w_1) dy dx. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Выбирая $\sigma = w_0(x)$, $\xi = \nabla w_0(x)$ и $V = U_0(x, y) - w_1(x, y)$ для п.в. $x \in \Omega$ в равенстве из (1.20) и интегрируя результат по Ω , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y g_0(x, y)(\nabla_y U_0 - \nabla_y w_1) dy dx \\ & = \int_{\Omega} \int_Y a(x, y, w_0, \nabla w_0 + \nabla_y U_0)(\nabla_y U_0 - \nabla_y w_1) dy dx. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (2.57), заключаем, что

$$0 \leq \int_{\Omega} \int_Y [a(w_0, \nabla w_0 + \nabla_y w_1) - a(w_0, \nabla w_0 + \nabla_y U_0)](\nabla_y U_0 - \nabla_y w_1) dy dx, \quad (2.58)$$

где, например, $a(w_0, \nabla w_0 + \nabla_y w_1) = a(x, y, w_0, \nabla w_0 + \nabla_y w_1)$.

Рассмотрим первое неравенство из (1.5) при $\sigma = w_0(x)$, $\xi = \nabla w_0(x) + \nabla_y w_1(x, y)$ и $\zeta = \nabla w_0(x) + \nabla_y U_0(x, y)$ для п.в. $(x, y) \in \Omega \times Y$ и проинтегрируем результат по $\Omega \times Y$. В этом случае получаем неравенство, обратное к (2.58). Поэтому в (2.58) выполняется равенство.

Таким образом, из (1.5) и (2.58) следует соотношение

$$\nabla_y w_1(x, y) = \nabla_y U(x, y, w_0(x), \nabla w_0(x)) \quad \text{п.в. в } \Omega \times Y, \quad (2.59)$$

что вместе с (2.48) и (2.49) завершает доказательство утверждения 1.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.4 (единственность). Предположим, что $(u_0^1, u_1^1) \in K_2$ и $(u_0^2, u_1^2) \in K_2$ являются решениями вариационного неравенства (1.18).

В случае выполнения условия (III) равенство $(u_0^1, u_1^1) = (u_0^2, u_1^2)$ следует из условия строгой монотонности (1.5) (детали можно найти в [2]).

В случае выполнения условия (I) или (II) для проверки равенства $u_0^1 = u_0^2$ (п.в. в Ω и поэтому в $W^{1,p}(\Omega)$) будет использовано “двухмасштабное” обобщение метода доказательства единственности из работы [6], где рассматривались “обычные” вариационные неравенства (аналогичные (1.1) при фиксированном параметре ε) с двухсторонними ограничениями на решение и имеется подробная библиография на эту тему.

Пусть положительные ϱ и m фиксированы. Следуя [6], определим для $s \in \mathbb{R}$ липшицевы функции $T_\varrho(s)$ и $H_m(s)$ равенствами

$$\begin{aligned} T_\varrho(s) &= s \quad \text{при } |s| \leq \varrho, & T_\varrho(s) &= \varrho(s/|s|) \quad \text{при } |s| \geq \varrho, \\ H_m(s) &= 0 \quad \text{при } |s| \geq m, & H_m(s) &= -s + m \quad \text{при } m - 1 \leq s \leq m, \\ H_m(s) &= 1 \quad \text{при } |s| \leq m - 1, & H_m(s) &= s + m \quad \text{при } -m \leq s \leq -m + 1. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Известно (см. [5]), что функции $T_\varrho(u_0^1 - u_0^2)$, $H_m(u_0^1)$ и $H_m(u_0^2)$ определены как элементы $W^{1,p}(\Omega)$. Кроме того, $0 \leq H_m(u_0^1), H_m(u_0^2) \leq 1$ п.в. в Ω в силу определений и поэтому

$$h_m = H_m(u_0^1)H_m(u_0^2) \in L^\infty(\Omega). \quad (2.61)$$

Обозначим через χ_ϱ характеристическую функцию множества

$$\Omega_\varrho = \{x \in \Omega : 0 < |u_0^1(x) - u_0^2(x)| \leq \varrho\}.$$

Известно (см. [5], [6]) и непосредственно проверяется, что $\chi_\varrho \in L^\infty(\Omega)$,

$$\nabla T_\varrho(u_0^1 - u_0^2) = \chi_\varrho \nabla(u_0^1 - u_0^2) \quad (2.62)$$

и $\text{mes}(\Omega_\varrho) \rightarrow 0$ при $\varrho \rightarrow 0$. Фиксируем действительное τ , удовлетворяющее неравенству $0 < \tau < 1$, и определим

$$\begin{aligned} v_0^1 &= u_0^1 - \tau h_m T_\varrho(u_0^1 - u_0^2), & v_1^1 &= u_1^1 - \tau h_m \chi_\varrho(u_1^1 - u_1^2), \\ v_0^2 &= u_0^2 + \tau h_m T_\varrho(u_0^1 - u_0^2), & v_1^2 &= u_1^2 + \tau h_m \chi_\varrho(u_1^1 - u_1^2). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Отметим, что v_0^1 и v_0^2 принадлежат множеству K_0 , определенному в (1.21). Для проверки этого факта следует рассмотреть отдельно множества

$$\{x \in \Omega : |u_0^1 - u_0^2| \leq \varrho\}, \quad \{x \in \Omega : u_0^1 - u_0^2 > \varrho\}, \quad \{x \in \Omega : u_0^1 - u_0^2 < -\varrho\},$$

воспользоваться определением (2.60) и учесть, что $0 \leq \tau h_m < 1$ п.в. в Ω (см. [6]). Таким образом, из (2.61) и (2.62) заключаем, что $(v_0^1, v_1^1) \in K_2$ и $(v_0^2, v_1^2) \in K_2$.

Рассмотрим вариационное неравенство (1.18) для (u_0^1, u_1^1) и выберем $(v_0, v_1) = (v_0^1, v_1^1)$, аналогично рассмотрим это неравенство для (u_0^2, u_1^2) и выберем $(v_0, v_1) = (v_0^2, v_1^2)$. Суммируя эти неравенства, умноженные на $(\tau \varrho)^{-1}$, получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \varrho^{-1} \int_{\Omega} \int_Y (a^1 - a^2) (\nabla(h_m T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)) + h_m \chi_{\varrho} \nabla_y(u_1^1 - u_1^2)) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_Y (b(x, y, u_0^1) - b(x, y, u_0^2)) (h_m \varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)) dy dx \leq 0, \end{aligned} \quad (2.64)$$

где $a^1 = a(x, y, u_0^1, \nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1)$ и $a^2 = a(x, y, u_0^2, \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2)$.

Основная идея доказательства равенства $u_0^1 = u_0^2$ заключается в переходе к пределу $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0}$ в (2.64), что приводит к следующему неравенству:

$$\int_{\Omega} \int_Y (b(x, y, u_0^1) - b(x, y, u_0^2)) (S(u_0^1 - u_0^2)) dy dx \leq 0, \quad (2.65)$$

где $S(s) = 0$ при $s = 0$ и $S(s) = (s/|s|)$ при $s \neq 0$. Таким образом, $S(s)$ обозначает функцию знака и равенство $u_0^1 = u_0^2$ п.в. в Ω является следствием из (1.11) и (2.65).

В силу определений имеем соотношения

$$\begin{aligned} & |\varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)| \leq 1 \quad \text{п.в. в } \Omega, \\ & \varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2) \rightarrow S(u_0^1 - u_0^2) \quad \text{п.в. в } \Omega \quad \text{при } \varrho \rightarrow 0, \\ & h_m \rightarrow 1 \quad \text{п.в. в } \Omega \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Из этих соотношений и теоремы Лебега следует, что переход в (2.64) к пределу $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0}$ приводит в точности к (2.65), если такой предел от первого интеграла из (2.64) является неотрицательным.

Используя формулу Лейбница и равенство (2.62), неравенство (2.64) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \varrho^{-1} \int_{\Omega_{\varrho}} \int_Y (a^1 - a^2) h_m (\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_Y (a^1 - a^2) (\nabla h_m) (\varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_Y (b(x, y, u_0^1) - b(x, y, u_0^2)) (h_m \varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)) dy dx \leq 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Для оценки второго интеграла из (2.67), учитывая (2.61), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y (a^1 - a^2) (\nabla h_m) (\varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)) dy dx \\ & = \int_{\Omega} \int_Y (a^1 - a^2) (H'_m(u_0^1) H_m(u_0^2) \nabla u_0^1) (\varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_Y (a^1 - a^2) (H_m(u_0^1) H'_m(u_0^2) \nabla u_0^2) (\varrho^{-1} T_{\varrho}(u_0^1 - u_0^2)) dy dx, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0}$ от последних двух интегралов равен нулю в соответствии с теоремой Лебега и (2.66), поскольку

$$H'_m(u_0^1)H_m(u_0^2) \rightarrow 0, \quad H_m(u_0^1)H'_m(u_0^2) \rightarrow 0 \quad \text{п.в. в } \Omega \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

и $|H'_m(u_0^1)H_m(u_0^2)|, |H_m(u_0^1)H'_m(u_0^2)| \leq 1$ п.в. в Ω в силу определений.

Используя для $a^1 - a^2$ представление в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} a^1 - a^2 = & [a(x, y, u_0^1, \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2) - a(x, y, u_0^2, \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2)] \\ & + [a(x, y, u_0^1, \nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1) - a(x, y, u_0^1, \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2)], \end{aligned}$$

запишем первый интеграл из (2.67) также в виде суммы интегралов:

$$\varrho^{-1} \int_{\Omega_\varrho} \int_Y (a^1 - a^2) h_m (\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2) dy dx = I_m^e + J_m^e. \quad (2.69)$$

Пусть выполнено условие (I). Тогда из предположения (1.5) следует, что $J_m^e \geq 0$, а из предположения (1.7) при фиксированном m и $\tau_m = 1$ и определения множества Ω_ϱ получаем неравенство

$$|I_m^e| \leq \varrho^{-1} \int_{\Omega_\varrho} \int_Y \varrho \gamma_m (|l_m(y)| + |\nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2|)^{p-1} |\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2| dy dx \quad (2.70)$$

и $\lim_{\varrho \rightarrow 0} |I_m^e| = 0$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Таким образом, учитывая (2.66)–(2.70) и вычисляя $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0}$ в (2.64), получаем (2.65), что доказывает равенство $u_0^1 = u_0^2$.

Пусть выполнено условие (II) и $p \geq 2$. Тогда, используя представление (2.69) и предположение (1.12), имеем

$$J_m^e \geq \alpha_m \varrho^{-1} \int_{\Omega_\varrho} \int_Y h_m |\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2|^p dy dx = O_m^e, \quad (2.71)$$

где величина O_m^e неотрицательна, поскольку $h_m \geq 0$ п.в. в Ω .

Кроме того, из (2.2) (при $\delta = \alpha_m^{1/p}$) и предположения (1.7) при фиксированном m и $\tau_m = 1/q$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} |I_m^e| & \leq \varrho^{-1} \int_{\Omega_\varrho} \int_Y \varrho^{1/q} \gamma_m h_m (|l_m(y)| + |\nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2|)^{p-1} \\ & \quad \times |\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2| dy dx \\ & \leq \varrho^{-1} \frac{\alpha_m}{p} \int_{\Omega_\varrho} \int_Y h_m |\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2|^p dy dx \\ & \quad + \varrho^{-1} \frac{\alpha_m^{-q/p}}{q} \int_{\Omega_\varrho} \int_Y \varrho \gamma_m^q h_m (|l_m(y)| + |\nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2|)^p dy dx \\ & \leq \frac{1}{p} O_m^e + \frac{\alpha_m^{-q/p}}{q} \int_{\Omega_\varrho} \int_Y \gamma_m^q (|l_m(y)| + |\nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2|)^p dy dx, \end{aligned} \quad (2.72)$$

где предел $\lim_{\varrho \rightarrow 0}$ от последнего интеграла равен нулю в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

В соответствии с (2.66)–(2.69) для доказательства (2.65) остается проверить, что предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0}$ от $I_m^\varrho + J_m^\varrho$ неотрицателен. Если в пределе $I_m^\varrho \geq 0$, то неравенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0} (I_m^\varrho + J_m^\varrho) \geq 0$$

следует из (2.71). В обратном случае (при $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0} I_m^\varrho \leq 0$) из (2.72) имеем в пределе $(1/p)O_m^\varrho \geq -I_m^\varrho$ и поэтому $I_m^\varrho + J_m^\varrho \geq (1 - (1/p))O_m^\varrho \geq 0$.

Следовательно, учитывая (2.66)–(2.69) и вычисляя $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varrho \rightarrow 0}$ в (2.64), получаем (2.65) в силу (2.71) и (2.72). Аналогично доказывается неравенство (2.65), если выполнено условие (II) и $1 < p \leq 2$ (см. [6]).

Таким образом, $u_0^1 = u_0^2$ при выполнении одного из условий (I)–(III) и из утверждения 1.6 следует, что $u_1^1 = U(x, y, u_0^1, \nabla u_0^1) = u_1^2(x, y)$ в соответствии с (2.59). Утверждение 1.4 доказано полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.7. Пусть $(w_0, w_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.18). Тогда $w_0 \in K_0$ в силу (1.21). Выбирая $v_1 = w_1$ в (1.18) и используя утверждение 1.6, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y a(x, y, w_0, \nabla w_0 + \nabla_y U(x, y, w_0, \nabla w_0)) dy (\nabla v_0 - \nabla w_0) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \int_Y b(x, y, w_0) dy (v_0 - w_0) dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y g_0 dy (\nabla v_0 - \nabla w_0) dx + \int_{\Omega} f_0 (v_0 - w_0) dx \quad \forall v_0 \in K_0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Таким образом, $w_0 \in K_0$ является решением вариационного неравенства (1.21) в соответствии с (1.22). Утверждение 1.7 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.8. Пусть $(v_0, v_1) \in K_2$ и $w_0 \in K_0$ является решением вариационного неравенства (1.21) и поэтому выполнено (2.73). Напомним, что решение $U(x, y, \sigma, \xi)$ вариационного неравенства (1.19) единственно (для фиксированного $(x, \sigma, \xi) \in \Omega_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$), и определим

$$w_1 = U(x, y, w_0(x), \nabla w_0(x)).$$

Выберем $\sigma = w_0(x)$, $\xi = \nabla w_0(x)$ и $V = v_1(x, y)$ для п.в. $x \in \Omega$ в неравенстве из (1.19) и проинтегрируем полученное соотношение по Ω . Тогда, добавляя результат к неравенству из (2.73), получим в точности вариационное неравенство (1.18) для $(w_0, w_1) \in K_2$.

Предположим, что $u_0^1 \in K_0$ и $u_0^2 \in K_0$ являются решениями вариационного неравенства (1.21). Тогда

$$\begin{aligned} (u_0^1, u_1^1) &= (u_0^1(x), U(x, y, u_0^1(x), \nabla u_0^1(x))), \\ (u_0^2, u_1^2) &= (u_0^2(x), U(x, y, u_0^2(x), \nabla u_0^2(x))) \end{aligned}$$

являются решениями вариационного неравенства (1.18). Следовательно, в силу утверждения 1.4 $u_0^1 = u_0^2$, если выполнено одно из условий (I)–(III). Утверждение 1.8 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.9. Соотношения (1.23) следуют непосредственно из утверждений 1.3–1.8. Кроме того, если выполнено одно из условий (I)–(III), то соотношения (1.23) выполняются без выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку элементы соответствующих множеств $\{u_\varepsilon\}$, $\{a_\varepsilon\}$, $\{b_\varepsilon\}$ (для фиксированного ε) и предельные функции определены однозначно. Теорема 1.9 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10. Доказательство этой теоремы фактически повторяет доказательство теоремы 1.9, где множество K_2 следует заменить множеством

$$W_2 = \{(v_0, v_1) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}) : v_0 - \psi_0 \in W_0^{1,p}\}$$

и в доказательстве утверждения 1.3 вместо $v = \psi_\varepsilon^+$ можно выбрать просто $v = \psi_\varepsilon$. В таком случае выполнено аналогичное (2.3) неравенство и вывод остальных оценок в этом доказательстве не изменяется.

Соответственно доказательство утверждения 1.4 сохраняется без изменений до соотношений (2.35). Далее, вместо (2.39) следует определить

$$v_\varepsilon^i = v_0 + \varepsilon(v_1^i)^\varepsilon + u_\varepsilon^0,$$

где $v_0 \in W(\psi_0)$ и u_ε^0 определено в лемме 2.3. Тогда $v_\varepsilon^i \in W(\psi_\varepsilon)$ в силу определений и леммы 2.3, а остальные доказательства (утверждений 1.4–1.8 для задачи (1.25)) сохраняются без изменений.

Таким образом, для задачи (1.25) определено двухмасштабное вариационное неравенство (1.18), в котором K_2 заменено на W_2 , и осредненное вариационное неравенство (1.21), в котором K_0 заменено на $W(\psi_0)$. Это вариационное неравенство эквивалентно задаче (1.27) в соответствии с результатами работ [3] и [11], что фактически завершает доказательство теоремы 1.10.

В предположениях теоремы 1.10 непосредственно из соотношений (1.26) имеем следующее предельное соотношение для “энергии”:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_\Omega a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\right) \nabla u_\varepsilon \, dx + \int_\Omega b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon\right) u_\varepsilon \, dx \\ &\rightarrow \int_\Omega \int_Y a(x, y, u_0, \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla u_0 + \nabla_y u_1) \, dy \, dx \\ &\quad + \int_\Omega \int_Y b(x, y, u_0) u_0 \, dy \, dx \end{aligned} \quad (2.74)$$

(при $\varepsilon \rightarrow 0$ по подпоследовательности из (1.26)), где $u_1 = U(x, y, u_0, \nabla u_0)$.

Действительно, умножая уравнение из (1.25) на $u_\varepsilon - \psi_\varepsilon$ и интегрируя результат по Ω (и по частям), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_\Omega a_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon \, dx + \int_\Omega b_\varepsilon \psi_\varepsilon \, dx + \int_\Omega g_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \, dx + \int_\Omega f_\varepsilon (u_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \, dx \\ &\rightarrow \int_\Omega \int_Y a_0 \nabla_y \psi_1 \, dy \, dx + \int_\Omega \int_Y g_0 \nabla_y (u_1 - \psi_1) \, dy \, dx + \int_\Omega \int_Y a_0 \nabla \psi_0 \, dy \, dx \\ &\quad + \int_\Omega \int_Y b_0 \psi_0 \, dy \, dx + \int_\Omega \int_Y g_0 \nabla (u_0 - \psi_0) \, dy \, dx + \int_\Omega \int_Y f_0 (u_0 - \psi_0) \, dy \, dx, \end{aligned} \quad (2.75)$$

где учтены определение 1.2, лемма 2.2 и утверждение 1.3 для задачи (1.25). Из (1.20) и (1.27) также следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y g_0 \nabla_y (u_1 - \psi_1) dy dx &= \int_{\Omega} \int_Y a_0 (\nabla_y u_1 - \nabla_y \psi_1) dy dx, \\ \int_{\Omega} \int_Y g_0 \nabla (u_0 - \psi_0) dy dx + \int_{\Omega} \int_Y f_0 (u_0 - \psi_0) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y a_0 \nabla (u_0 - \psi_0) dy dx + \int_{\Omega} \int_Y b_0 (u_0 - \psi_0) dy dx \end{aligned} \quad (2.76)$$

в обозначениях из утверждения 1.6 для задачи (1.25). Учитывая равенства (2.76) в (2.75), получаем в точности (2.74). Доказательство аналогичного соотношения для задачи (1.1) может быть полезным упражнением.

Проверим для полноты изложения, что вариационное неравенство (1.1), в котором K_ε заменено на $W(\psi_\varepsilon)$, эквивалентно задаче (1.25).

Пусть $u_\varepsilon \in W(\psi_\varepsilon)$ является решением такого вариационного неравенства. Фиксируем $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и действительное $t \neq 0$. Тогда $v = u_\varepsilon + tw \in W(\psi_\varepsilon)$ и, выбирая в (1.1) такую тестовую функцию, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\right) \nabla w dx + \int_{\Omega} b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon\right) w dx \\ = \int_{\Omega} g_\varepsilon \nabla w dx + \int_{\Omega} f_\varepsilon w dx \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{aligned} \quad (2.77)$$

поскольку знак t произволен. Это равенство означает, что уравнение из (1.25) выполнено в $W^{-1,q}(\Omega)$ и в смысле распределений, а включение $u_\varepsilon \in W(\psi_\varepsilon)$ подразумевает выполнение граничных условий из (1.25).

Пусть $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ является решением задачи (1.25) и $v \in W(\psi_\varepsilon)$. Тогда $u_\varepsilon \in W(\psi_\varepsilon)$ и для $w = v - u_\varepsilon$ выполнено равенство из (2.77), что подразумевает выполнение (1.1) для u_ε , где K_ε заменено на $W(\psi_\varepsilon)$.

Аналогично проверяется, что задача (1.27) эквивалентна осредненному вариационному неравенству (1.21), в котором K_0 заменено на $W(\psi_0)$.

В заключение отметим одну неточность с потерей знака в работе [2]. А именно, в формуле (2.20) и в последней строке теоремы 2.4 из [2] нужно заменить f на $(-f)$.

Список литературы

- [1] Г. В. Сандраков, “Осреднение вариационных неравенств для задач с регулярным препятствием”, *Докл. РАН*, **397**:2 (2004), 170–173; англ. пер.: G. V. Sandrakov, “Homogenization of variational inequalities for problems with a regular obstacle”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **70**:1 (2004), 539–542.
- [2] Г. В. Сандраков, “Осреднение вариационных неравенств для задач с препятствием”, *Матем. сб.*, **196**:4 (2005), 79–98; англ. пер.: G. V. Sandrakov, “Homogenization of variational inequalities for obstacle problems”, *Sb. Math.*, **196**:4 (2005), 541–560.
- [3] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

- [4] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1978.
- [5] Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure Appl. Math., **88**, Academic Press, New York–London, 1980.
- [6] A. Mokrane, F. Murat, “The Lewy–Stampacchia inequality for bilateral problems”, *Ricerche Mat.*, **53**:1 (2004), 139–182.
- [7] G. Allaire, “Homogenization and two-scale convergence”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:6 (1992), 1482–1518.
- [8] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Stud. Math. Appl., **1**, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.
- [9] M. Valadier, “Two-scale convergence and Young measures”, *Prepublication du Laboratoire d’analyse convexe*, Universite Montpellier II, Montpellier, 1995.
- [10] А. А. Амосов, “О слабой сходимости одного класса быстроосциллирующих функций”, *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 145–150; англ. пер.: A. A. Amosov, “Weak convergence for a class of rapidly oscillating functions”, *Math. Notes*, **62**:1 (1997), 122–126.
- [11] А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: S. Fučík, A. Kufner, *Nonlinear differential equations*, Stud. Appl. Mech., **2**, Elsevier, Amsterdam–New York, 1980.
- [12] G. Nguetseng, “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization”, *SIAM J. Math. Anal.*, **20**:3 (1989), 608–623.
- [13] N. Fusco, G. MoscarIELLO, “On the homogenization of quasilinear divergence structure operators”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **146**:1 (1986), 1–13.
- [14] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenisation: averaging processes in periodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **36**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [15] P. Chiadò Piat, A. Defranceschi, “Homogenization of monotone operators”, *Nonlinear Anal.*, **14**:9 (1990), 717–732.
- [16] Г. В. Сандраков, “Осреднение нелинейных уравнений и вариационных неравенств с препятствием”, *Докл. РАН*, **407**:1 (2006), 25–28; англ. пер.: G. V. Sandrakov, “Homogenization of nonlinear equations and variational inequalities with obstacles”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **73**:2 (2006), 178–181.
- [17] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; англ. пер.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [18] Х. Гаевский, С. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [19] В. В. Жиков, “О двухмасштабной сходимости”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **23** (2003), 149–187; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On two-scale convergence”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **120**:3 (2004), 1328–1352.
- [20] D. Lukkassen, P. Wall, “Two-scale convergence with respect to measures and homogenization of monotone operators”, *J. Funct. Spaces Appl.*, **3**:2 (2005), 125–161.

- [21] В. В. Жиков, М. Е. Рычаго, С. В. Шульга, “Усреднение монотонных операторов с помощью двухмасштабной сходимости”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **24** (2004), 44–66; англ. пер.: V. V. Zhikov, M. E. Rychago, S. B. Shul’ga, “Homogenization of monotone operators by the method of two-scale convergence”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **127**:5 (2005), 2159–2173.
- [22] J. Casado-Díaz, I. Gayte, “The two-scale convergence method applied to generalized Besicovitch spaces”, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **458**:2028 (2002), 2925–2946.
- [23] V. Chiadò Piat, F. Serra Cassano, “Some remarks about the density of smooth functions in weighted Sobolev spaces”, *J. Convex Anal.*, **1**:2 (1994), 135–142.
- [24] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралъцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: О. А. Ladyzhenskaya, N. N. Ural’tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.
- [25] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt, Rinehart & Winston, New York–Toronto–London, 1965.

Г. В. Сандраков (G. V. Sandrakov)
Киевский национальный университет
им. Т. Г. Шевченко, Украина
E-mail: sandrako@i.com.ua

Поступила в редакцию
28.06.2005 и 14.09.2007