Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Радзиевский, Прямые и обратные теоремы о приближении по корневым функциям регулярной краевой задачи, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 7, 87–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:22:44

УДК 517.927.6+517.518

Г. В. Радзиевский

Прямые и обратные теоремы о приближении по корневым функциям регулярной краевой задачи

На функциях x , заданных на $[0, 1]$, рассмотрена спектральная задача $x^{(n)} + Fx = \lambda x$ при краевых условиях $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Предполагается, что F – линейный ограниченный оператор, действующий из пространства Гёльдера C^γ с $\gamma \in [0, n-1]$ в пространство L_1 , U_j – линейные ограниченные функционалы на C^{k_j} при $k_j \in \{0, \dots, n-1\}$, $\mathfrak{P}_\zeta$ – линейная оболочка корневых функций задачи $x^{(n)} + Fx = \lambda x$, $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, отвечающих ее собственным значениям λ_k с $|\lambda_k| < \zeta^n$, а $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l} := \inf\{\|f - g\|_{W_p^l} : g \in \mathfrak{P}_\zeta\}$. В работе получена оценка сверху $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l}$ через K -функционал $K(\zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}) := \inf\{\|f - x\|_{W_p^l} + \zeta^{-m}\|x\|_{W_p^{l+m}} : x \in W_p^{l+m}, U_j(x) = 0 \text{ при } k_j < l+m\}$ (прямая теорема), а также установлена оценка сверху этого K -функционала через $\mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l}$ при $\xi \leq \zeta$ (обратная теорема).

В ряде случаев приведены двусторонние оценки K -функционала через подходящие модули непрерывности и тогда прямая и обратная теоремы формулируются в терминах модулей непрерывности. Эти результаты в случае спектральной задачи $x^{(n)} = \lambda x$ при периодических краевых условиях совпадают с прямой и обратной теоремами Д. Джексона и С. Н. Бернштейна о приближении функций посредством тригонометрической системы.

Библиография: 41 название.

§ 1. Формулировка основного результата и следствия из него

1.1. Введение. В работе рассмотрена спектральная задача для линейного функционально-дифференциального выражения $x^{(n)} + Fx$ при краевых условиях $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, заданных линейными функционалами U_j на пространстве C^{k_j} , где $k_j \in \{0, \dots, n-1\}$. Основной результат работы – теорема 1.1, содержащая два неравенства. Первое из них – это оценка сверху наименьших уклонений $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l}$ индивидуальной функции f из W_p^l от линейной оболочки собственных и присоединенных (или корневых) функций спектральной задачи, отвечающих ее собственным значениям λ_k с $|\lambda_k| < \zeta^n$. Эта оценка (или прямая теорема) установлена в терминах K -функционала, в определение которого входят краевые условия $U_j(x) = 0$. Второе неравенство в теореме 1.1 – оценка сверху K -функционала через $\mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l}$ (обратная теорема). Оба эти неравенства аналогичны прямой и обратной теоремам в тригонометрической аппроксимации, которые получаются из теоремы 1.1, если положить в ней $F := 0$ и $U_j(x) := x^{(j-1)}(0) - x^{(j-1)}(1)$. Наличие функционального возмущения F у оператора n -кратного дифференцирования и рассмотрение нелокальных краевых

условий существенно расширяют системы функций, для которых справедливы прямая и обратная теоремы, причем рассмотренное в работе функциональное возмущение столь общо, что охватывает не только обыкновенные дифференциальные выражения (т.е. случай $Fx := a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_0x$ с коэффициентами $a_0, \dots, a_{n-2} \in L_1$), но и широкие классы интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных и дифференциально-граничных операторов [1]. Следует отметить, что установленная в работе теорема 1.1 имеет качественно новый характер даже в случаях обыкновенных дифференциальных выражений и простых двуточечных регулярных краевых условий, хотя, конечно, некоторые частные случаи ее, относящиеся в основном к прямой теореме, были установлены ранее рядом авторов, и сравнение с некоторыми из них дано в пп. 1.6 и 1.7.

Работа состоит из четырех параграфов. Далее в пп. 1.2 и 1.3 вводятся необходимые понятия и обозначения, а в п. 1.4 формулируется теорема 1.1. Пункт 1.5 посвящен доказательству следствий из теоремы 1.1. В нем для одного простого случая даны двусторонние оценки K -функционала через подходящий первый модуль гладкости (т.е. модуль непрерывности). Из этих оценок и теоремы 1.1 уже следует ряд утверждений о двусторонних оценках модулей непрерывности через наименьшие уклонения. Случай, рассмотренный в п. 1.5, соответствует присутствию лишь краевых условий нулевого порядка в определении K -функционала, однако и для него приходится использовать различные модули непрерывности, связанные с различными продолжениями функции за пределы основного интервала, которые обусловлены видом краевых условий нулевого порядка. (По сути в п. 1.5 мы воспользовались уже известными оценками K -функционала, поскольку в общем виде задача о нахождении двусторонних оценок K -функционала, участвующего в формулировке теоремы 1.1, через модули гладкости выходит за рамки настоящей работы.) В п. 1.6 определяется оператор, связанный со спектральной задачей, и приводится ряд его свойств. Введение этого оператора позволяет задать проекторы Φ . Рисса на линейную оболочку корневых функций задачи, а оценки их норм вместе с оценками сверху наименьших уклонений дают уже оценки скорости сходимости разложений по корневым функциям спектральной задачи и, в частности, позволяют установить для указанных разложений признак Дини–Липшица. Именно такого рода результаты, в основном, были получены ранее, и на некоторых из них мы кратко остановимся в п. 1.6.

Второй параграф носит вспомогательный характер. В нем получены оценки резольвенты оператора, связанного со спектральной задачей, которые используются в §§ 3 и 4.

В § 3 доказано более сильное утверждение, нежели прямая теорема из § 1. В нем получена оценка сверху величины $\|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l}$, где $S_\zeta(\alpha)f$ – среднее функции f , построенное по голоморфному в круге ядру α и по корневым функциям спектральной задачи, отвечающих ее собственным значениям λ_k с $|\lambda_k| < \zeta^n$. Эта оценка установлена в терминах того же самого K -функционала, что и в теореме 1.1, и ввиду неравенства $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l} \leq \|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l}$, $\zeta > 0$, из нее уже несложно выводится прямая теорема.

Основной результат четвертого параграфа – теорема 4.1, являющаяся аналогом двух неравенств: неравенства Бернштейна об оценке нормы производной тригонометрического многочлена и неравенства Никольского об оценке нормы тригонометрического многочлена в разных метриках. А именно в теореме 4.1 получена оценка $\|g\|_{W_q^{l+m}} \leq c\zeta^{m+1/p-1/q}\|g\|_{W_p^l}$, где g – линейная комбинация корневых функций спектральной задачи, отвечающих ее собственным значениям λ_k с $|\lambda_k| < \zeta^n$, а $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Если это неравенство применить к спектральной задаче $x^{(n)} = \lambda x$ с периодическими краевыми условиями, то из него при $l = 1$, $m = 0$ и $p = q$ получается (с точностью до постоянной) неравенство Бернштейна, а при $l = m = 0$ и $p < q$ – неравенство Никольского. Если положить $p = q$ в теореме 4.1, то из нее в конце §4 выводится обратная теорема из §1. В общем случае теорема 4.1 применима, например, для доказательства вложения функции f из W_p^l в пространство W_q^{l+m} в терминах наименьших уклонений $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l}$. Однако формулировки и доказательства теорем вложения в их полном объеме требуют привлечения целого ряда новых построений и поэтому здесь приводиться не будут.

1.2. Обозначения. Функциональные пространства. Далее, как обычно, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$ и $\mathbb{N}$ – это соответственно множества действительных, целых, целых неотрицательных и целых положительных (натуральных) чисел. Пусть $[[\alpha]]$ – целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$. Через $[X, Y]$ обозначено множество линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , причем все банаховы (и функциональные) пространства рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Нормы векторов и операторов обозначаются через $\|\cdot\|$ и снабжаются индексом, обозначающим соответствующее нормированное пространство.

Все основные функциональные пространства состоят из комплекснозначных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$. Пусть AC , BV , C и L_p (везде, если не оговорено противное, предполагается, что $1 \leq p \leq \infty$) – множества абсолютно непрерывных, ограниченной вариации, непрерывных функций соответственно и пространства Лебега измеримых и суммируемых в p -й степени функций. Норма в L_p для краткости обозначается через $\|\cdot\|_p$. Пусть X – одно из пространств C или L_p . Для $r \in \mathbb{N}$ пространство Соболева $W^r(X)$ состоит из $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $x \in X$, для которых $x^{(r-1)} \in AC$ и $x^{(r)} \in X$, с нормой $\|x\|_{W^r(X)} := \|x\|_X + \|x^{(r)}\|_X$. Кроме того, полагаем $W^0(X) := X$, $C^r := W^r(C)$ и $W_p^r := W^r(L_p)$ для $r \in \mathbb{P}$. Очевидно, что C^r совпадает с пространством r раз непрерывно дифференцируемых функций. Для $r \in \mathbb{N}$ пространства $C, C^1, \dots, C^{r-1}$ вложены в пространство W_p^r и существует постоянная $c(r) > 0$, для которой

$$\|x\|_{C^l} \leq c(r)\|x\|_{W_p^r}, \quad x \in W_p^r, \quad l \in \{0, \dots, r-1\}, \quad p \in [1, \infty]. \quad (1.1)$$

Если $\nu \in (0, 1)$, то через H_0^ν обозначим множество функций x из C , имеющих конечную полунорму

$$|x|_{H_0^\nu} := \sup_{0 \leq t < \tau \leq 1} \frac{|x(\tau) - x(t)|}{(\tau - t)^\nu}.$$

Отсюда вытекает следующее мультипликативное неравенство:

$$|x|_{H_0^\nu} \leq 2\|x\|_C^{1-\nu}\|x'\|_C^\nu, \quad x \in C^1, \quad \nu \in (0, 1). \quad (1.2)$$

Для $\mu \geq 0$ введем пространства Гёльдера C^μ : если $\mu \in \mathbb{P}$, то C^μ совпадает с уже введенным пространством μ раз непрерывно дифференцируемых функций, если же $\mu = r + \nu$, где r целое, а $0 < \nu < 1$, то C^μ – пространство функций $x \in C^r$, для которых $x^{(r)} \in H_0^\nu$, с нормой

$$\|x\|_{C^\mu} := \|x\|_{C^r} + |x^{(r)}|_{H_0^\nu}.$$

Ввиду неравенства (1.2) пространство C^{μ_1} вложено в пространство C^{μ_2} , как только $0 \leq \mu_2 \leq \mu_1$.

1.3. Регулярная спектральная задача. В работе рассматривается спектральная задача

$$x^{(n)} + Fx = \lambda x, \quad U_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

при нелокальных краевых условиях, заданных функционалами

$$U_j(x) := \alpha_j x^{(k_j)}(0) + \beta_j x^{(k_j)}(1) + \int_0^1 x^{(k_j)}(\tau) d\sigma_j(\tau) + \sum_{s=0}^{k_j-1} c_{j,s} x^{(s)}(0). \quad (1.4)$$

В (1.3) предполагается, что оператор F удовлетворяет условию

$$F \in [C^\gamma, L_{p_0}] \quad (1.5)$$

при некоторых $\gamma \in [0, n-1]$ и $p_0 \in [1, \infty]$, функция $x \in W_{p_0}^n$, а спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Условие (1.5) далее не оговаривается, в отличие от более жесткого требования $F \in [C^\gamma, C]$, имеющегося в одном из утверждений теоремы 1.1 и в следствиях 1.1 и 4.1. Величина γ в условии (1.5) никак не влияет на формулировки основных утверждений работы, тогда как величина p_0 явно в них присутствует. Отметим, что p_0 не входит в формулировки следствий 1.2–1.8, и поэтому в них следует считать $p_0 = 1$.

Если оператор F задан выражением

$$Fx := a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_0x \quad (1.6)$$

с коэффициентами $a_0, \dots, a_{n-2} \in L_{p_0}$, то он удовлетворяет (1.5) при $\gamma = n-2$. Однако условию (1.5) подчинены и значительно более общие операторы, в частности интегро-дифференциальные, дифференциально-разностные, дифференциально-граничные и др. (см., например, [1]).

Относительно функционалов U_j считаем, что в их определении (1.4) $k_j \in \{0, \dots, n-1\}$, функции $\sigma_j \in BV$ и σ_j непрерывны в точках 0 и 1, причем в (1.4) и далее суммы, в которых верхний предел суммирования меньше нижнего, полагаем равными нулю. Отметим, что формула (1.4) задает общий вид линейного ограниченного функционала на пространстве C^{k_j} (см., например, [2; гл. IV, § 13]). Кроме того, далее предполагаем, что в (1.4) $|\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0$,

$j = 1, \dots, n$. В этом случае число k_j из (1.4) будем называть *порядком функционала* U_j или *краевого условия* $U_j(x) = 0$, которое определяет этот функционал, а число $\hat{k} := k_1 + \dots + k_n$ – *суммарным порядком краевых условий* $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Норма функционала U_j на C^{k_j} обозначается через $\|U_j\|_{(C^{k_j})^*}$.

Если функционалы

$$U_j(x) := \alpha_j x^{(k_j)}(0) + \beta_j x^{(k_j)}(1) + \sum_{s=0}^{k_j-1} (\alpha_{j,s} x^{(s)}(0) + \beta_{j,s} x^{(s)}(1)), \quad (1.7)$$

$j = 1, \dots, n$, то они определяют обычные двуточечные краевые условия и их всегда можно представить в виде (1.4) с теми же α_j и β_j , что и в (1.7) (см. доказательство предложения 3.2). Далее предполагаем, что в (1.7) $|\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, и тогда k_j – порядки функционалов (1.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$, заданных равенствами (1.4) или (1.7), называется *нормированной*, если она не содержит более двух функционалов одного и того же порядка, а при наличии в $\{U_j\}_{j=1}^n$ двух функционалов U_l и U_s с одинаковыми порядками их коэффициенты α_l , β_l , α_s и β_s из представлений (1.4) или (1.7) удовлетворяют требованию $\alpha_l \beta_s - \alpha_s \beta_l \neq 0$. Краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, называются *нормированными*, если нормирована система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$.

Отметим, что введенное таким образом понятие нормированных краевых условий $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, с $U_j(x)$, заданными формулами (1.7), совпадает с соответствующим понятием из [3; гл. II, § 4, п. 7].

В дальнейшем будем предполагать регулярность краевых условий $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, в задаче (1.3). Чтобы ввести соответствующее понятие, обозначим через $\omega_1, \dots, \omega_n$ корни n -й степени из -1 , занумерованные так, что $\operatorname{Re} \rho \omega_1 \leq \operatorname{Re} \rho \omega_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \rho \omega_n$ при $\rho \neq 0$ и $0 \leq \arg \rho \leq \pi/n$, где $\rho = |\rho| \exp(i \arg \rho)$, а $-\pi < \arg \rho \leq \pi$. Указанная нумерация корней ω_l всегда существует, и эти ω_l приведены, например, в [3; § 4, п. 2] или [4; § 11, п. 1], [5; равенства (35) и (36)]. По коэффициентам α_j и β_j , входящим в (1.4), зададим числа θ_{-1} , θ_0 и θ_1 формулами

$$\theta_s := \det[\theta_{j,l}^{(s)}]_{j,l=1}^n, \quad \text{где} \quad \theta_{j,l}^{(s)} := \begin{cases} \alpha_j \omega_l^{k_j}, & l \leq \left[\left[\frac{n+1}{2} \right] \right] - s, \\ \beta_j \omega_l^{k_j}, & l > \left[\left[\frac{n+1}{2} \right] \right] - s, \end{cases} \quad s = -1, 0, 1, \quad (1.8)$$

причем если одно из подмножеств множества индексов $l \in \{1, \dots, n\}$, выделяемое неравенством $l \leq \left[\left[(n+1)/2 \right] \right] - s$ или $l > \left[\left[(n+1)/2 \right] \right] - s$, пусто, то матрица $[\theta_{j,l}^{(s)}]_{j,l=1}^n$ состоит лишь из элементов $\beta_j \omega_l^{k_j}$ или $\alpha_j \omega_l^{k_j}$ соответственно. Такая ситуация возможна только при $n = 2$, и тогда

$$\begin{aligned} \theta_{-1} &= i^{k_1+k_2} ((-1)^{k_2} - (-1)^{k_1}) \alpha_1 \alpha_2, \\ \theta_0 &= i^{k_1+k_2} ((-1)^{k_2} \alpha_1 \beta_2 - (-1)^{k_1} \alpha_2 \beta_1), \\ \theta_1 &= i^{k_1+k_2} ((-1)^{k_2} - (-1)^{k_1}) \beta_1 \beta_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (см. также [4; замечание 11.6], [5; замечание 5]). Пусть $\theta_0 \neq 0$. Тогда краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, заданные функционалами (1.4) или (1.7), нормированы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее, не уменьшая общности, будем считать, что краевые условия занумерованы в порядке $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n \leq n-1$. Из определения (1.8) числа θ_0 вытекает, что если $\theta_0 \neq 0$, то $|\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0$. Покажем теперь, что система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$ не может содержать более двух функционалов, имеющих одинаковые порядки. Действительно, предположим противное, т.е. $n > 2$ и $k_s = k_{s+1} = k_{s+2}$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$ и $s \leq n-2$. Тогда строки матрицы $[\theta_{j,l}^{(0)}]_{j,l=1}^n$ с номерами $j = s, s+1, s+2$ являются линейными комбинациями двух линейно независимых строк

$$[\omega_1^{k_s}, \dots, \omega_{[(n+1)/2]}^{k_s}, \underbrace{0, \dots, 0}_{[n/2]}, \underbrace{0, \dots, 0}_{[(n+1)/2]}, \omega_{[(n+3)/2]}^{k_s}, \dots, \omega_n^{k_s}]$$

с коэффициентами α_j и β_j . Тем самым в этом случае строки матрицы $[\theta_{j,l}^{(0)}]_{j,l=1}^n$ окажутся линейно зависимыми, а значит, $\theta_0 = 0$. Аналогично показывается, что из линейной независимости строк матрицы $[\theta_{j,l}^{(0)}]_{j,l=1}^n$ и предположения $k_s = k_{s+1}$ при $s \in \mathbb{N}$ и $s \leq n-1$ вытекает соотношение $\alpha_s \beta_{s+1} - \alpha_{s+1} \beta_s \neq 0$. Следовательно, предположение $\theta_0 \neq 0$ влечет нормируемость краевых условий.

Считая выполненными сформулированные предположения относительно функционалов (1.4), дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, заданные функционалами (1.4), называются *регулярными*, если числа θ_0 и θ_1 удовлетворяют требованию: $\theta_0 \theta_1 \neq 0$ при нечетном n и $\theta_0 \neq 0$ при четном n .

Введенное таким образом понятие регулярных краевых условий совпадает с аналогичным понятием, введенным Д. Биркгофом в [6; § 4] (см. также [3; § 4, п. 8] или [7; ч. 2, п. 2.3]) в случае, когда функционалы U_j , задающие краевые условия, имеют вид (1.7). Чтобы пояснить это, заметим, что если n нечетно, то числа θ_0 и θ_1 в (1.8) и в [3], [6], [7] совпадают, а если n четно, то θ_{-1} , θ_0 и θ_1 в (1.8) и в [3], [6], [7] различны. Имея в виду это замечание, отметим отличия данного здесь и в [3], [6], [7] определений: во-первых, как показано в предложении 1.1, из неравенства $\theta_0 \neq 0$ уже следует нормируемость краевых условий, которая предполагалась в [3], [6], [7]; во-вторых, в случае четного n в [3], [6], [7] считалось, что кроме числа θ_0 еще одно число, обозначим его θ , отлично от нуля. Но согласно [4; лемма 11.3] $\theta_0 = -\theta \exp(i^{n+1} 2\pi \hat{k}/n)$, где $\hat{k}$ – суммарный порядок краевых условий (см. также [8]). Следует отметить, что иное определение регулярных краевых условий, заданных функционалами (1.4), имеется в работе [9], где оно дано в терминах характеристического определителя задачи (1.3) (при этом надо учесть лемму 1 из [9]).

1.4. Прямая и обратная теоремы в терминах K -функционалов.

Чтобы сформулировать основной результат работы, введем необходимые обозначения. В дальнейшем X – одно из пространств C или L_p , а имеющиеся далее постоянные, если не оговорено противное, не зависят от X и, как правило, различны в различных утверждениях.

Для $r \in \mathbb{N}$ по функционалам (1.4) определим подпространства

$$W_U^r(X) := \{x \in W^r(X) : U_j(x) = 0 \text{ при } k_j \leq r-1\} \quad (1.10)$$

пространства $W^r(X)$, наделенные нормой пространства $W^r(X)$. Кроме того, полагаем $W_U^0(X) := X$. Для $\delta > 0$, $l \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$ и функций $f \in W^l(X)$ зададим K -функционал

$$K(\delta, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) := \inf_{x \in W_U^{l+m}(X)} (\|f - x\|_{W^l(X)} + \delta \|x\|_{W^{l+m}(X)}). \quad (1.11)$$

Если положить постоянную c_1 равной

$$c_1 := \min\{c(l+m)^{-1}; 1\},$$

где $c(r)$ – из неравенства (1.1), то

$$c_1 \min\{\delta; 1\} \|f\|_{W^l(X)} \leq K(\delta, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) \leq \|f\|_{W^l(X)} \quad (1.12)$$

при $\delta > 0$ и $f \in W^l(X)$. Действительно, согласно (1.1)

$$\|x\|_{W^l(X)} \leq \|x\|_{C^l} \leq c(l+m) \|x\|_{W^{l+m}(X)}$$

для $x \in W_U^{l+m}(X)$, поэтому

$$\begin{aligned} K(\delta, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) &\geq \inf_{x \in W_U^{l+m}(X)} (\|f - x\|_{W^l(X)} + c(l+m)^{-1} \delta \|x\|_{W^l(X)}) \\ &\geq \min\{c(l+m)^{-1} \delta; 1\} \inf_{x \in W_U^{l+m}(X)} (\|f - x\|_{W^l(X)} + \|x\|_{W^l(X)}). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства треугольника следует первая оценка в (1.12). Для получения второй оценки надо лишь положить $x = 0$ в выражении, по которому ищется нижняя грань в (1.11).

Оценки (1.12) показывают, что при любом фиксированном $\delta > 0$ K -функционал (1.12) задает эквивалентную норму на пространстве $W^l(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если $U := \{U_j\}_{j=1}^w$, $w \in \mathbb{N}$, – произвольная система функционалов из $(C^{r-1})^*$ (не обязательно являющаяся некоторой частью функционалов, задающих регулярные краевые условия), то подпространства $W_U^r(X)$ определены корректно, а значит, корректно определен и K -функционал (1.11). В частности, если в определении (1.10) все функционалы $U_j := 0$ (или, что то же самое, система функционалов U пустая), то $W_U^r(X) = W^r(X)$, и тогда в определении (1.11) при $l+m = r$ подпространство $W_U^{l+m}(X)$, естественно, заменяется на пространство $W^{l+m}(X)$. Поскольку $W_U^{l+m}(X) \subseteq W^{l+m}(X)$, то ввиду (1.11)

$$K(\delta, f; W^l(X), W^{l+m}(X)) \leq K(\delta, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) \quad (1.13)$$

для $\delta > 0$, $f \in W^l(X)$ и произвольной системы функционалов U из $(C^{r-1})^*$.

В работе используются также обозначения

$$C_U^r := W_U^r(C), \quad W_{p,U}^r := W_U^r(L_p).$$

И наконец, для $\zeta > 0$ обозначим через $\mathfrak{P}_\zeta$ линейную оболочку всех корневых функций задачи (1.3), отвечающих ее собственным значениям с модулями меньше ζ^n , причем если в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \zeta^n\}$ у задачи (1.3) нет собственных значений, то $\mathfrak{P}_\zeta := \{0\}$. Понятно, что $\mathfrak{P}_\zeta \subset W_{p_0,U}^n$, $\zeta > 0$, и поэтому для каждой функции f из $W^l(X)$, $l \in \{0, \dots, n-1\}$, определены наименьшие уклонения f от подпространства $\mathfrak{P}_\zeta$ в метрике $W^l(X)$, т.е.

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_{W^l(X)} := \inf_{g \in \mathfrak{P}_\zeta} \|f - g\|_{W^l(X)}, \quad \zeta > 0.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1.1. *Найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что оценки*

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_{W^l(X)} \leq cK(\zeta^{-m}, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)), \quad (1.14)$$

$$K(\zeta^{-m}, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) \leq \frac{c}{\zeta^m} \left(\|f\|_{W^l(X)} + \int_1^\zeta \xi^{m-1} \mathcal{E}_\xi(f)_{W^l(X)} d\xi \right), \quad (1.15)$$

$$f \in W_U^l(X), \quad \zeta \geq 1, \quad l \in \mathbb{P}, \quad m \in \mathbb{N},$$

справедливы в следующих случаях:

- 1) $l + m \leq n - 1$, а $X = L_p$ при $p \in [1, \infty]$ или $X = C$;
- 2) $l + m = n$, а $X = L_p$ при $p \in [1, p_0]$.

Кроме того, при $l + m = n$ и $X = C$ оценка (1.14) верна, если условие (1.5) выполнено с $p_0 = \infty$, а оценка (1.15) – если вместо (1.5) справедливо требование $F \in [C^\gamma, C]$.

Оценку (1.14) будем называть *прямой теоремой* или *неравенством Джексона для корневых функций задачи (1.3)*, а оценку (1.15) – *обратной теоремой* или *неравенством Бернштейна для корневых функций задачи (1.3)*. Смысл этих названий тот же, что и в теории функций (см. пояснения в монографии [10] или в работе [11; § 1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Поскольку $C_U^{l+m} \subset W_{\infty,U}^{l+m}$, то

$$K(\delta, f; W_{\infty,U}^l, W_{\infty,U}^{l+m}) \leq K(\delta, f; C^l, C_U^{l+m}), \quad \delta > 0, \quad f \in C^l. \quad (1.16)$$

Значит, из справедливости оценки (1.14) с $X = L_\infty$ вытекает справедливость этой же оценки и с $X = C$. Поэтому прямую теорему в § 3 установим лишь в случае пространства $X = L_p$.

Если в задаче (1.3) оператор $F \in [C^\gamma, L_1]$ (т.е. условие (1.5) выполнено с $p_0 = 1$), то для $l + m \leq n - 1$ оценки (1.14) и (1.15) установлены в теореме 1.1 как с пространствами L_p при $p \in [1, \infty]$, так и с пространством $X = C$. В этом же случае для $l + m = n$ оценки (1.14) и (1.15) получены лишь с пространством $X = L_1$. Более жесткие условия $F \in [C^\gamma, L_{p_0}]$ с $p_0 > 1$ или $F \in [C^\gamma, C]$

нужны для доказательства этих оценок при $l + m = n$ для более широких наборов пространств X , нежели $X = L_1$. Аналогичные пояснения относятся и к подавляющему большинству последующих утверждений нашей работы.

Приведем следствие, вытекающее из теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть функция $\psi \in C$, $\psi(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$ и

$$\int_{\delta}^1 t^{-m-1} \psi(t) dt = O(\delta^{-m} \psi(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0. \quad (1.17)$$

Предположим, что $l \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$ и $l + m \leq n - 1$, а пространство $X = L_p$ с $p \in [1, \infty]$ или $X = C$. Если же $l + m = n$, то пространство $X = L_p$ с $p \in [1, p_0]$. Тогда для функции $f \in W_U^l(X)$ справедливо утверждение

$$\begin{aligned} K(\delta^m, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) &= O(\psi(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0, \\ \iff \mathcal{E}_{\zeta}(f)_{W^l(X)} &= O(\psi(\zeta^{-1})), \quad \zeta \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.18)$$

и, в частности, при $0 \leq \nu < m$

$$\begin{aligned} K(\delta^m, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) &= O(\delta^{\nu}), \quad \delta \rightarrow +0, \\ \iff \mathcal{E}_{\zeta}(f)_{W^l(X)} &= O(\zeta^{-\nu}), \quad \zeta \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} K(\delta^m, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) &= o(\delta^{\nu}), \quad \delta \rightarrow +0, \\ \iff \mathcal{E}_{\zeta}(f)_{W^l(X)} &= o(\zeta^{-\nu}), \quad \zeta \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Если в задаче (1.3) оператор $F \in [C^{\gamma}, C]$, то эти же утверждения верны при $l + m = n$ и $X = C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (1.14) вытекает (без предположения о выполнении условия (1.17)), что из $K(\delta^m, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) = O(\psi(\delta))$ при $\delta \rightarrow +0$ следует соотношение $\mathcal{E}_{\zeta}(f)_{W^l(X)} = O(\psi(\zeta^{-1}))$ при $\zeta \rightarrow +\infty$. Поэтому установим обратное утверждение. Для этого в интеграле, находящемся в правой части оценки (1.15), сделаем замену $\xi = t^{-1}$, а затем положим $\delta = \zeta^{-1}$. В результате получим

$$K(\delta^m, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X)) \leq c \delta^m \left(\|f\|_{W^l(X)} + \int_{\delta}^1 \frac{\mathcal{E}_{1/t}(f)_{W^l(X)}}{t^{m+1}} dt \right), \quad (1.21)$$

$0 < \delta \leq 1$. Из условия (1.17) заключаем, что

$$\int_{1/2}^1 t^{-m-1} \psi(t) dt \leq c_1 \delta^{-m} \psi(\delta)$$

при $0 < \delta \leq 1/2$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$. Тем самым найдется постоянная $c_2 > 0$, для которой $\delta^m \leq c_2 \psi(\delta)$ при $0 < \delta \leq 1$. Подставляя эту оценку и неравенство $\mathcal{E}_{1/t}(f)_{W^l(X)} \leq c_3 \psi(t)$ в правую часть (1.21), а затем учитывая условие (1.17), получаем нужную оценку для K -функционала.

Отметим, что при $\nu = 0$ утверждение (1.19) тривиально, поскольку вытекает из второй оценки в (1.12) и очевидного неравенства $\mathcal{E}_{\zeta}(f)_{W^l(X)} \leq \|f\|_{W^l(X)}$. Однако утверждение (1.20) при $\nu = 0$ содержательно и позволяет, например, из

свойств K -функционала сделать заключение о полноте всех корневых функций задачи (1.3).

Следствие (1.1) показывает, что K -функционал $K(\delta, f; W^l(X), W_U^{l+m}(X))$ адекватно описывает поведение наименьших уклонений $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W^l(X)}$ при $\zeta \rightarrow +\infty$. Другие условия на функцию ψ , нежели требование (1.17), при которых справедливо утверждение (1.18), имеются в работе [12].

1.5. Прямая и обратная теоремы в терминах модулей непрерывности. Замена в неравенствах (1.14) и (1.15) K -функционала на характеристику функции, выражающуюся через ее разности (т.е. модули гладкости) и учитывающую вклад краевых условий, – трудная и далекая от своего полного решения задача. Эта задача сводится в конце концов к задаче о двусторонних оценках K -функционала (1.11) через специальные модули гладкости, что в ряде случаев будет сделано в другой работе. В общем виде сформулированная задача не решена и вполне возможно не имеет положительного решения, тогда K -функционал (1.11) является единственно естественным объектом, адекватно описывающим поведение $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W^l(X)}$ при $\zeta \rightarrow +\infty$ в терминах гладкости функции f из $W^l(X)$.

Тем не менее имеется один важный случай, когда в неравенствах (1.14) и (1.15) замена K -функционала (1.11) при значениях $l = 0$ и $m = 1$ на подходящий первый модуль гладкости дает практически полное описание поведения $\mathcal{E}_\zeta(f)_X$ ($:= \mathcal{E}_\zeta(f)_{W^0(X)}$) на бесконечности. Поскольку $l + m = 1$, то в определении пространства (1.10) с $r = l + m$, а значит, и K -функционала (1.11), входят лишь функционалы U_j нулевого порядка. Если теперь предположим, что у функционалов (1.4) с $k_j = 0$ нет интегральных слагаемых, то получим интересующий нас случай. (В частности, этому случаю удовлетворяют краевые условия, заданные функционалами (1.7).) Перед формулировкой соответствующих результатов заметим, что ввиду предложения 1.1 и определения 1.2 регулярных краевых условий система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$ (или, что то же самое, краевых условий $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$) может содержать два, одно или вообще не содержать функционалов (краевых условий) нулевого порядка. Рассмотрению этих трех случаев и посвящены приведенные далее первые три следствия.

Так как все следствия пп. 1.5 и 1.6 выводятся из теоремы 1.1 при значениях $l = 0$ и $m = 1$, то в них предполагается, что в задаче (1.3) оператор $F \in [C^\gamma, L_1]$ (т.е. условие (1.5) выполнено с $p_0 = 1$), а X , если не оговорено противное, – одно из пространств L_p , $p \in [1, \infty]$, или C .

Далее понадобится также K -функционал

$$K_0(\delta, f; X, W_U^1(X)) := \inf_{x \in W_U^1(X)} (\|f - x\|_X + \delta \|x'\|_X), \quad (1.22)$$

отличающийся от K -функционала (1.11) с $l = 0$ и $m = 1$ тем, что в его определении норма $\|x\|_{W^1(X)}$ заменена на полунорму $\|x'\|_X$ функции $x \in W_U^1(X)$, и связанный с K -функционалом (1.11) соотношениями

$$\begin{aligned} K_0(\delta, f; X, W_U^1(X)) &\leq K(\delta, f; X, W_U^1(X)) \\ &\leq 2K_0(\delta, f; X, W_U^1(X)) + \min\{\delta; 1\} \|f\|_X, \quad \delta > 0, \quad f \in X. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Рассмотрение K -функционала (1.22) обусловлено тем, что именно он допускает двусторонние оценки через подходящие модули непрерывности.

Чтобы сформулировать результат, относящийся к случаю, когда система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$ не содержит функционалов нулевого порядка, требуется модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f; X) := \sup_{0 < h < \delta} \|f(\cdot) - f(\cdot - h)\|_{X[h, 1]}, \quad \delta \in (0, 1], \quad f \in X, \quad (1.24)$$

где $X[h, 1] := L_p[h, 1]$ при $X = L_p$ и $X[h, 1] := C[h, 1]$ при $X = C$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для $\delta \in (0, 1]$ и $f \in X$ справедливы соотношения

$$2^{-1}\omega(\delta, f; X) \leq K_0(\delta, f; X, W^1(X)) \leq 2\omega(\delta, f; X). \quad (1.25)$$

Соотношения (1.25) (с точностью до постоянных) – частный случай теоремы 2.4 из [10; гл. 6], причем постоянная 2^{-1} в первом неравенстве в (1.25) указана в доказательстве этой теоремы. Второе неравенство в (1.25) с постоянной 2 просто выводится из свойств модифицированной функции Стеклова, имеющих в [13].

Через $\mathbf{1}$ обозначим функцию, принимающую на всем отрезке $[0, 1]$ или во всей комплексной плоскости значение 1. Введем наименьшее уклонение

$$E_0(f)_X := \inf_{\beta \in \mathbb{C}} \|f - \beta \mathbf{1}\|_X, \quad f \in X.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Для $\delta \in (0, 1]$ и $f \in X$ справедлива оценка

$$\delta E_0(f)_X \leq 4\omega(\delta, f; X). \quad (1.26)$$

Действительно, элементарно показывается (см., например, доказательство теоремы 4.2 из [10; гл. 6]), что $E_0(f)_X \leq K(1, f; X, W^1(X))$. Отсюда, из второго неравенства в (1.25) и из оценки $\omega(1, f; X) \leq 2\delta^{-1}\omega(\delta, f; X)$ для $\delta \in (0, 1]$ следует (1.26).

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть в задаче (1.3) отсутствуют краевые условия нулевого порядка. Тогда найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что для всех $\zeta \geq 1$ и $f \in X$ справедливы оценки

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_X \leq c\omega(\zeta^{-1}, f; X) + c\zeta^{-1}\|f\|_X, \quad (1.27)$$

$$\omega(\zeta^{-1}, f; X) \leq \frac{c}{\zeta} \left(\|f\|_X + \int_1^\zeta \mathcal{E}_\xi(f)_X d\xi \right). \quad (1.28)$$

Если, кроме того, $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$ для некоторого $\zeta_0 \geq 1$, то при $\zeta \geq \zeta_0$ слагаемое $c\zeta^{-1}\|f\|_X$ в оценке (1.27) можно отбросить, а оценку (1.28) – уточнить следующим образом:

$$\omega(\zeta^{-1}, f; X) \leq \frac{c}{\zeta} \left(E_0(f)_X + \int_{\zeta_0}^\zeta \mathcal{E}_\xi(f)_X d\xi \right). \quad (1.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (1.27) и (1.28) являются прямым следствием теоремы 1.1 с $l = 0$, $m = 1$ и неравенств (1.23) и (1.25). Поясним теперь случай $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$. В силу определения наименьших уклонений $\mathcal{E}_{\zeta}(f)_X$ величина $\mathcal{E}_{\zeta}(f)_X$ при $\zeta \geq \zeta_0$ не изменится при замене в ней функции f на функцию $f - \beta \mathbf{1}$, где $\beta \in \mathbb{C}$. Но $\omega(\delta, f; X) = \omega(\delta, f - \beta \mathbf{1}; X)$ и поэтому из оценки (1.27) получаем неравенство $\mathcal{E}_{\zeta}(f)_X \leq c\omega(\zeta^{-1}, f; X) + c\zeta^{-1}E_0(f)_X$ при $\zeta \geq \zeta_0$. Отсюда и из (1.26) следует, что если $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$, то слагаемое $c\zeta^{-1}\|f\|_X$ в оценке (1.27) можно отбросить. Покажем теперь справедливость утверждения (1.29). Так как $\mathcal{E}_{\xi}(f)_X \leq \|f\|_X$, $\xi > 0$, то из (1.28) имеем

$$\omega(\zeta^{-1}, f; X) \leq c\zeta^{-1} \left(\zeta_0 \|f\|_X + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \mathcal{E}_{\xi}(f)_X d\xi \right), \quad \zeta \geq \zeta_0.$$

Применяя к этой оценке предыдущие рассуждения, выводим (1.29).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Из оценки (1.13) и первых неравенств в (1.23), (1.25) имеем $\omega(\delta, f; X) \leq 2K_0(\delta, f; X, W^1(X)) \leq 2K(\delta, f; X, W_V^1(X))$ для $\delta \in (0, 1]$ и $f \in X$. Отсюда и из утверждения (1.15) заключаем, что оценка (1.28) справедлива без каких-либо дополнительных (по сравнению с п. 1.4) ограничений относительно краевых условий в задаче (1.3). Аналогичное замечание относится и к оценке (1.29).

Рассмотрим теперь случай, когда система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$ содержит лишь один функционал нулевого порядка. Не уменьшая общности, будем считать, что это функционал U_1 и он имеет вид $U_1(x) := x(0) - \alpha x(1)$. Введем модуль непрерывности

$$\tilde{\omega}^{\alpha}(\delta, f; X) := \sup_{0 < h < \delta} \|f_{\alpha}(\cdot) - f_{\alpha}(\cdot - h)\|_X, \quad \delta \in (0, 1], \quad f \in X, \quad (1.30)$$

где $f_{\alpha}(t) := f(t)$ при $0 \leq t \leq 1$ и $f_{\alpha}(t) := \alpha f(1 + t)$ при $-1 \leq t < 0$, причем если $X = C$, то $f \in \tilde{C}^{\alpha} := \{x \in C : x(0) - \alpha x(1) = 0\}$. (Тогда продолжение f_{α} непрерывной функции f непрерывно на $[-1, 1]$, и поэтому формула (1.30) при $X = C$ корректно задает модуль непрерывности.)

Рассмотрим пространство $\tilde{W}^1(X) := \{x \in W^1(X) : x(0) - \alpha x(1) = 0\}$ и покажем справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Для $\delta \in (0, 1]$ и $f \in X$ (если $X = C$, то $f \in \tilde{C}^{\alpha}$) справедливы оценки

$$\min \left\{ (|\alpha| + 1)^{-1}; \frac{1}{2} \right\} \tilde{\omega}^{\alpha}(\delta, f; X) \leq K_0(\delta, f; X, \tilde{W}^1(X)) \leq 2\tilde{\omega}^{\alpha}(\delta, f; X). \quad (1.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\|f_{\alpha}(\cdot - \tau)\|_X \leq \max\{|\alpha|; 1\} \|f\|_X$$

при $\tau \in [0, 1]$, то

$$\tilde{\omega}^{\alpha}(\delta, f; X) \leq \max\{|\alpha| + 1; 2\} \|f\|_X, \quad \delta \in (0, 1]. \quad (1.32)$$

Если же $x \in \dot{W}^\alpha(X)$, то $x_\alpha \in W_p^1[-1, 1]$ при $X = L_p$ и $x_\alpha \in C^1[-1, 1]$ при $X = C$. Значит, $x_\alpha(t) - x_\alpha(t-h) = h \int_0^1 x'_\alpha(t-h\tau) d\tau$ и поэтому

$$\tilde{\omega}(\delta, x; X) \leq \delta \max\{|\alpha|; 1\} \|x'\|_X, \quad \delta \in (0, 1], \quad x \in \dot{W}^\alpha(X).$$

Из этой оценки и неравенства (1.32) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\delta, f; X) &\leq \tilde{\omega}(\delta, f-x; X) + \tilde{\omega}(\delta, x; X) \\ &\leq \max\{|\alpha|+1; 2\} (\|f-x\|_X + \delta \|x'\|_X), \quad \delta \in (0, 1], \end{aligned}$$

для произвольной функции $x \in \dot{W}^\alpha(X)$. Отсюда и из определения (1.22) K -функционала с $W_U^1(X) = \dot{W}^\alpha(X)$ получаем первое неравенство в (1.31).

Для доказательства второго неравенства в (1.31) положим

$$x_\delta(t) := \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t f_\alpha(\tau) d\tau = \int_0^1 f_\alpha(t-\delta\tau) d\tau. \quad (1.33)$$

Функция $x_\delta \in \dot{W}^\alpha(X)$ и поэтому с учетом равенств (1.33)

$$K_0(\delta, f; X, \dot{W}^\alpha(X)) \leq \|f-x_\delta\|_X + \delta \|x'_\delta\|_X \leq 2\tilde{\omega}(\delta, f; X).$$

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $\alpha \leq 0$. Тогда для $\delta \in (0, 1]$ и $f \in X$ (если $X = C$, то $f \in \dot{C}$) справедлива оценка

$$K(\delta, f; X, \dot{W}^\alpha(X)) \leq 6\tilde{\omega}(\delta, f; X). \quad (1.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \dot{W}^\alpha(X)$, а $x_1(t) := \operatorname{Re} x(t)$ и $x_2(t) := \operatorname{Im} x(t)$. Так как $\alpha \leq 0$, то найдутся точки t_1 и t_2 , принадлежащие $[0, 1]$, для которых $x_1(t_1) = x_2(t_2) = 0$. Значит, $x_1(t) = \int_{t_1}^t x'_1(\tau) d\tau$ и $x_2(t) = \int_{t_2}^t x'_2(\tau) d\tau$ и поэтому $\|x_1\|_X \leq \|x'\|_X$ и $\|x_2\|_X \leq \|x'\|_X$. Тем самым $\|x\|_X \leq 2\|x'\|_X$ для любой функции $x \in \dot{W}^\alpha(X)$. Следовательно, $K(\delta, f; X, \dot{W}^\alpha(X)) \leq 3K_0(\delta, f; X, \dot{W}^\alpha(X))$. Из этой оценки и второго неравенства в (1.31) вытекает (1.34).

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть в задаче (1.3) $U_1(x) := x(0) - \alpha x(1)$, а для $U_j(x)$, заданных равенствами (1.4), $k_j \geq 1$ при $j = 2, \dots, n$. Тогда найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что для всех $\zeta \geq 1$ и $f \in X$ (если $X = C$, то $f \in \dot{C}$) справедливы оценки

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_X \leq c\tilde{\omega}(\zeta^{-1}, f; X) + c\zeta^{-1}\|f\|_X, \quad (1.35)$$

$$\tilde{\omega}(\zeta^{-1}, f; X) \leq \frac{c}{\zeta} \left(\|f\|_X + \int_1^\zeta \mathcal{E}_\xi(f)_X d\xi \right). \quad (1.36)$$

Если, кроме того, $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$ для некоторого $\zeta_0 \geq 1$, то при $\zeta \geq \zeta_0$ слагаемое $c\zeta^{-1}\|f\|_X$ в оценке (1.35) можно отбросить, а оценку (1.36) – уточнить следующим образом:

$$\hat{\omega}(\zeta^{-1}, f; X) \leq \frac{c}{\zeta} \left(E_0(f)_X + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \mathcal{E}_{\xi}(f)_X d\xi \right). \quad (1.37)$$

Слагаемое $c\zeta^{-1}\|f\|_X$ в оценке (1.35) при $\zeta \geq 1$ можно отбросить, если $\alpha \leq 0$ в $U_1(x) := x(0) - \alpha x(1)$.

Вывод этого следствия из теоремы 1.1 ничем не отличается от вывода следствия 1.2. При этом вместо оценок (1.25) следует воспользоваться оценками (1.31) или (1.34), а при использовании неравенства (1.26) учесть, что $\omega(\delta, f; X) \leq \hat{\omega}(\delta, f; X)$, а требование $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$ может выполняться лишь при $\alpha = 1$, и тогда $\hat{\omega}(\delta, f; X) = \hat{\omega}(\delta, f - \beta \mathbf{1}; X)$ для всех $\beta \in \mathbb{C}$.

И наконец, рассмотрим случай, когда система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$ содержит два функционала нулевого порядка. Не уменьшая общности, будем считать, что это функционалы U_1 и U_2 и что они имеют вид $U_1(x) := x(0)$, $U_2(x) := x(1)$. Введем модуль непрерывности

$$\hat{\omega}(\delta, f; X) := \sup_{-\delta < h < \delta} \|\hat{f}(\cdot) - \hat{f}(\cdot - h)\|_X, \quad \delta > 0, \quad f \in X, \quad (1.38)$$

где $\hat{f}(t) := f(t)$ при $0 \leq t \leq 1$ и $\hat{f}(t) := 0$ при $t < 0$ и $t > 1$, причем если $X = C$, то $f \in C_0 := \{x \in C : x(0) = x(1) = 0\}$.

Рассмотрим пространство $\widehat{W}_p^1 := \{x \in W_p^1 : x(0) = x(1) = 0\}$.

Частным случаем утверждения 2 работы [14] является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Для $\delta > 0$, $f \in L_p$, $p \in [1, \infty]$, справедливы оценки

$$2^{-1}\hat{\omega}(\delta, f; L_p) \leq K(\delta, f; L_p, \widehat{W}_p^1) \leq 8(e+1)\hat{\omega}(\delta, f; L_p). \quad (1.39)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть в задаче (1.3) $U_1(x) := x(0)$, $U_2(x) := x(1)$, а если $n > 2$, то для $U_j(x)$, заданных равенствами (1.4), $k_j \geq 1$ при $j = 3, \dots, n$. Тогда найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что для всех $\zeta \geq 1$ и $f \in X$ (если $X = C$, то $f \in C_0$) выполнены оценки

$$\mathcal{E}_{\zeta}(f)_X \leq c\hat{\omega}(\zeta^{-1}, f; X), \quad (1.40)$$

$$\hat{\omega}(\zeta^{-1}, f; X) \leq \frac{c}{\zeta} \left(\|f\|_X + \int_1^{\zeta} \mathcal{E}_{\xi}(f)_X d\xi \right). \quad (1.41)$$

При $X = L_p$ утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.1 с $l = 0$, $m = 1$ и оценок (1.39). Случай $X = C$ получается из случая $X = L_{\infty}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Оценка (1.40) для всех $\zeta \geq 1$ и $f \in X$ (если $X = C$, то $f \in C_0$) выполняется всегда, как только у краевых условий нулевого порядка отсутствуют интегральные слагаемые.

Действительно, в этом случае $\widehat{W}_p^1 \subseteq W_{p,U}^1$ и поэтому $K(\delta, f; L_p, W_{p,U}^1) \leq K(\delta, f; L_p, \widehat{W}_p^1) \leq 8(e+1)\hat{\omega}(\delta, f; L_p)$ для $\delta > 0$ и $f \in L_p$. Отсюда и из утверждения (1.14) получаем оценку (1.40) с $X = L_p$. Случай $X = C$ вытекает из случая $X = L_{\infty}$.

Для пространства $X = C$ или $X = L_1$ утверждения следствий 1.2–1.4 допускают следующие уточнения: во-первых, в них можно отказаться от требования отсутствия интегральных слагаемых в краевых условиях нулевого порядка, а во-вторых, заменить в оценках (1.35) и (1.40) модули непрерывности $\tilde{\omega}(\delta, f; X)$ и $\hat{\omega}(\delta, f; X)$ на модуль непрерывности $\omega(\delta, f; X)$. При формулировке соответствующего утверждения потребуется подпространство

$$\tilde{C}_U := \{x \in C : U_j(x) = 0 \text{ при } k_j = 0\} \quad (1.42)$$

пространства C . Отметим, что $\tilde{C}_U$ совпадает с C , $\tilde{C}^\alpha$ и C_0 , если система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$ удовлетворяет условиям следствий 1.2, 1.3 и 1.4 соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Найдется такая постоянная $c > 0$, зависящая лишь от функционалов нулевого порядка, что при $\delta \in (0, 1]$ справедливы оценки*

$$K(\delta, f; C, C_U^1) \leq c(\omega(\delta, f; C) + \delta\|f\|_C), \quad f \in \tilde{C}_U, \quad (1.43)$$

$$K(\delta, f; L_1, W_{1,U}^1) \leq c(\omega(\delta, f; L_1) + \delta\|f\|_1), \quad f \in L_1, \quad (1.44)$$

$$K(\delta, f; L_p, W_{p,U}^1) \leq c \min\{\tilde{\omega}(\delta^{1/p}, f; L_p), \tilde{\omega}(\delta^{1/p}, f^-; L_p)\}, \quad f \in L_p, \quad p \in [1, \infty), \quad (1.45)$$

где $\tilde{\omega}(\delta, f; L_p)$ – модуль непрерывности, заданный формулой (1.30) с $\alpha = 0$ и $X = L_p$, а $f^-(t) := f(1-t)$ при $t \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, регулярны, то согласно определениям 1.1, 1.2 и предложению 1.1 система функционалов $\{U_j\}_{j=1}^n$ (а также любая ее подсистема) удовлетворяет требованиям работ [14] и [15]. Учитывая это замечание, получаем, что оценки (1.43), (1.44) и (1.45) являются частными случаями следствий 3, 4 работы [15] и теоремы из [14] соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Пусть $X = C$ или $X = L_1$. Тогда найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что для всех $\zeta \geq 1$ и $f \in X$ (если $X = C$, то $f \in \tilde{C}_U$) справедливы оценки (1.27) и (1.28). Если, кроме того, $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$ для некоторого $\zeta_0 \geq 1$, то при $\zeta \geq \zeta_0$ слагаемое $c\zeta^{-1}\|f\|_X$ в оценке (1.27) можно отбросить, а оценку (1.28) – уточнить в виде оценки (1.29).*

Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.1 с $l = 0$, $m = 1$, оценок (1.43), (1.44) и замечания 1.3, причем случай $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$ требует тех же пояснений, что и в доказательстве следствия 1.2.

Отметим, что неравенства, установленные в следствиях 1.2–1.5, показывают, что участвующие в них модули непрерывности адекватно описывают поведение наименьших уклонений $\mathcal{E}_\zeta(f)_X$ при $\zeta \rightarrow +\infty$. Например, из следствия 1.5 получается такое утверждение, в котором $X = C$ или $X = L_1$: для $f \in X$ (если $X = C$, то $f \in \tilde{C}_U$) и $\nu \in (0, 1)$ соотношение $\omega(\delta, f; X) = O(\delta^\nu)$ при $\delta \rightarrow +0$ возможно тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_\zeta(f)_X = O(\zeta^{-\nu})$ при $\zeta \rightarrow +\infty$.

В случае пространств L_p , $p \in [1, \infty)$, наличие интегральных слагаемых в краевых условиях нулевого порядка приводит к следующему утверждению, вытекающему из теоремы 1.1, неравенства (1.45) и замечания 1.3.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть $p \in [1, \infty)$. Тогда найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что для всех $\zeta \geq 1$ и $f \in L_p$ справедлива оценка

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_{L_p} \leq c \min\{\omega(\zeta^{-1/p}, f; L_p); \omega(\zeta^{-1/p}, f^-; L_p)\}, \quad (1.46)$$

а также неравенство (1.28) с $X = L_p$.

1.6. О скорости сходимости разложений по корневым функциям.

Доказательство теоремы 1.1 и вывод некоторых следствий из нее опираются на изучение оператора, соответствующего спектральной задаче (1.3). Введем этот оператор и сформулируем ряд его свойств.

По функционально-дифференциальному выражению $x^{(n)} + Fx$ и регулярным краевым условиям $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, определим оператор A , действующий в пространстве L_1 по правилу

$$Ax := x^{(n)} + Fx, \quad x \in W_{1,U}^n. \quad (1.47)$$

При задании области определения $W_{1,U}^n$ оператора A и в других подобных случаях используется следующее общепризнанное соглашение: если $\mathfrak{M}$ – некоторое множество непрерывных на $[0, 1]$ функций, то при рассмотрении $\mathfrak{M}$ в пространстве L_p не делается различия между классом эквивалентности и конкретной функцией из $\mathfrak{M}$, принадлежащей этому классу.

Известно (см. [5; следствие 2] или [16; теорема 2]), что спектр оператора A состоит из изолированных собственных значений, которые можно занумеровать с учетом кратностей так, что

$$\lambda_k = (i2\pi k + O(1))^n, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.48)$$

Множество несовпадающих между собой собственных значений $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ занумеруем как-либо в порядке неубывания модулей и обозначим через $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Считая I тождественным оператором, введем резольвенту $R(\lambda; A) := (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \neq \mu_k$, оператора A . Для $\lambda \neq \mu_k$ резольвента $R(\lambda; A)$ – ограниченный оператор из пространства L_1 в пространство $W_{1,U}^n$. Но $W_{1,U}^n$ компактно вложено в L_1 , и поэтому резольвента оператора A компактна [17; гл. III, § 6, п. 8]. Тем самым в некоторой проколотой окрестности каждого собственного значения μ_k справедливо представление [17; гл. III, § 6, п. 5]

$$R(\lambda; A) = \frac{-N_k}{\lambda - \mu_k} - \sum_{j=1}^{d_k} \frac{D_k^j}{(\lambda - \mu_k)^{j+1}} + U_k(\lambda), \quad (1.49)$$

в котором N_k – проектор Ф. Рисса, D_k – такой нильпотентный оператор, что $D_k^{d_k} \neq 0$ и $D_k^{d_k+1} = 0$, а

$$N_k D_k = D_k N_k = D_k, \quad N_k N_s = \delta_{k,s} N_s, \quad k, s \in \mathbb{N}, \quad (1.50)$$

где $\delta_{k,s}$ – символ Кронекера. Число $d_k \in \mathbb{P}$, и, значит, если $d_k = 0$, то слагаемое $\sum_{j=1}^{d_k} (\lambda - \mu_k)^{-j-1} D_k^j$ в правой части (1.49) отсутствует, и тогда нильпотентный оператор D_k не определяется. Кроме того, N_k , а следовательно, и D_k – конечномерные операторы, U_k – голоморфная в окрестности точки μ_k функция со значениями в $[L_1]$.

Через $\mathfrak{N}_k$ обозначим совокупность корневых функций задачи (1.3), отвечающих ее собственному значению μ_k , с добавленным нулевым вектором из пространства $W_{p_0, U}^n$. Легко показать (см., например, доказательство леммы 1 в [18]), что $N_k L_1 = \mathfrak{N}_k$, а значит, $\mathfrak{N}_k$ – конечномерное подпространство в $W_{p_0, U}^n$. Отсюда и из первых равенств в (1.50) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. *Для всех $k \in \mathbb{N}$ операторы $N_k, D_k, \dots, D_k^{d_k}$ принадлежат $[L_1, W_{p_0, U}^n]$.*

Кроме того, далее потребуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Пусть $p \in [1, p_0]$. Тогда соответствие $\lambda \mapsto R(\lambda; A)$, $\lambda \neq \mu_k$, задает мероморфную в $\mathbb{C}$ функцию со значениями в $[L_p, W_{p, U}^n]$. Точки μ_k являются полюсами этой мероморфной функции, и в некоторой проколотой их окрестности справедливо представление (1.49), в котором U_k – голоморфная в окрестности μ_k функция со значениями в $[L_p, W_{p, U}^n]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $A_p(\lambda)$ действует из пространства $W_{p, U}^n$ в пространство L_p по правилу $A_p(\lambda)x := x^{(n)} + Fx - \lambda x$, $x \in W_{p, U}^n$. Понятно, что $A_p(\lambda)x = (A - \lambda I)x$ для $x \in W_{p, U}^n$, а $A_p(\cdot)$ – целая функция со значениями в $[W_{p, U}^n, L_p]$. Если $\lambda \neq \mu_k$, то уравнение $x^{(n)} + Fx - \lambda x = f$ однозначно разрешимо относительно $x \in W_{p, U}^n$ для любой функции $f \in L_p$. Из равенства $x^{(n)} + Fx - \lambda x = f$ и условий $F \in [C^\gamma, L_{p_0}]$ и $f \in L_p$ следует, что $x \in W_{p, U}^n$. Тем самым при $\lambda \neq \mu_k$ оператор $A_p(\lambda)$ взаимно однозначно отображает $W_{p, U}^n$ на L_p и согласно теореме Банаха $A_p(\lambda)$ ограниченно обратим. Если же x_k – собственная функция, отвечающая собственному значению μ_k оператора A , то $x_k \in W_{p, U}^n$ и $A_p(\mu_k)x_k = 0$. Следовательно, оператор $A_p(\lambda)$ ограниченно обратим тогда и только тогда, когда λ не является собственным значением оператора A , и в этом случае справедливо равенство $A_p(\lambda)^{-1}f = R(\lambda; A)f$ для $f \in L_p$. Отсюда и из отмеченных ранее свойств $A_p(\lambda)$ и резольвенты оператора A вытекает утверждение предложения 1.9.

Для $\zeta > 0$ введем проектор

$$P_\zeta := \sum_{k: |\mu_k| < \zeta^n} N_k, \quad (1.51)$$

причем если в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \zeta^n\}$ нет собственных значений задачи (1.3), то $P_\zeta := 0$. Так как $N_k N_s = 0$ при $k \neq s$, то для любого конечного множества натуральных чисел Λ подпространства $\mathfrak{N}_k$ при $k \in \Lambda$ образуют прямую сумму, которую будем записывать в виде $\dot{\sum}_{k \in \Lambda} \mathfrak{N}_k$. В частности, если $\Lambda_\zeta = \{k \in \mathbb{N} : |\mu_k| < \zeta^n\}$, то $\dot{\sum}_{k \in \Lambda_\zeta} \mathfrak{N}_k = \mathfrak{P}_\zeta$ и поэтому $P_\zeta L_1 = \mathfrak{P}_\zeta$. Отсюда согласно лемме Лебега [10; гл. 2, предложение 4.1]

$$\|f - P_\zeta f\|_X \leq (1 + \|P_\zeta\|_{[X]}) \mathcal{E}_\zeta(f)_X, \quad f \in X, \quad \zeta > 0. \quad (1.52)$$

Функция $P_\zeta f$ есть не что иное, как частная сумма разложения f в ряд Фурье по корневым функциям задачи (1.3), отвечающих ее собственным значениям λ_k с $|\lambda_k| < \zeta^n$. Ввиду неравенства (1.52) для оценки скорости сходимости $P_\zeta f$ к f

надо получить оценки норм проекторов P_ζ , а затем применить оценки $\mathcal{E}_\zeta(f)_X$, установленные в теореме 1.1 и в следствиях 1.2–1.6.

Для формулировки утверждения об оценках $\|P_\zeta\|_{[X]}$ введем необходимые обозначения и понятия.

Для $\varepsilon > 0$ обозначим через Ψ_ε множество тех точек полуоси $\{\zeta \in \mathbb{R} : \zeta \geq 1\}$, расстояние от которых до чисел $|\mu_k|^{1/n}$, где $k \in \mathbb{N}$ (или, что то же самое, до чисел $|\lambda_k|^{1/n}$, где $k \in \mathbb{Z}$), не меньше ε . Из асимптотики (1.48) собственных значений λ_k следует неравенство

$$\liminf_{\zeta \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes}(\Psi_\varepsilon \cap [1, \zeta])}{\zeta} \geq 1 - \frac{2}{\pi} \varepsilon.$$

Поэтому при $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ множество Ψ_ε содержит сколь угодно большие положительные числа, а его нижняя относительная мера близка к единице при малых $\varepsilon > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Множество собственных значений задачи (1.3) называется *отделимым*, если

$$\inf_{k, s \in \mathbb{N}} \frac{|\mu_k - \mu_s|}{|\mu_k|^{1-1/n} + |\mu_s|^{1-1/n}} < \infty. \quad (1.53)$$

Понятно, что в требовании (1.53) числа μ_k и μ_s можно заменить на λ_k и λ_s , однако тогда нижнюю грань следует брать по всем целым k и s , для которых $\lambda_k \neq \lambda_s$.

В п. 3.1 приведены достаточные условия выполнения требования (1.53) в терминах функционалов U_j .

Следующее утверждение доказано в [19; теорема 2.1] в предположении, что в задаче (1.3) оператор $F \in [C^\gamma, L_1]$ (т.е. условие (1.5) выполнено с $p_0 = 1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Для каждого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; F, U) > 0$, для которой при всех $\zeta \in \Psi_\varepsilon$ справедливы оценки

$$\|P_\zeta\|_{[L_p]} \leq c(\varepsilon) \ln(\zeta + 1), \quad p = 1 \quad \text{или} \quad p = \infty, \quad (1.54)$$

$$\|P_\zeta\|_{[L_p]} \leq c(\varepsilon) \left(\sin \frac{\pi}{p} \right)^{-1}, \quad 1 < p < \infty. \quad (1.55)$$

Если, кроме того, множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, то оценки (1.54) и (1.55) верны при всех $\zeta \geq 1$ с постоянной $c(\varepsilon)$, не зависящей от ε .

Подставляя в правую часть неравенства (1.52) оценки сверху $\mathcal{E}_\zeta(f)_X$, установленные в теореме 1.1 и в следствиях 1.2–1.6, с учетом предложения 1.10 получаем различные оценки сверху $\|f - P_\zeta f\|_X$ в терминах K -функционала и модулей непрерывности. Здесь сформулируем лишь два утверждения, вытекающие из следствий 1.5, 1.6 и замечания 1.4. В этих утверждениях, как и в п. 1.5, предполагается, что в задаче (1.3) оператор $F \in [C^\gamma, L_1]$, а пространство $\tilde{C}_U$ задано формулой (1.42).

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Для каждого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; F, U) > 0$, что для всех $\zeta \in \Psi_\varepsilon$ и $f \in \tilde{C}_U$ справедлива оценка

$$\|f - P_\zeta f\|_C \leq c(\varepsilon)(\omega(\zeta^{-1}, f; C) + \zeta^{-1}\|f\|_C) \ln(\zeta + 1). \quad (1.56)$$

Если, кроме того, $\mathbf{1} \in \mathfrak{P}_{\zeta_0}$ для некоторого $\zeta_0 \geq 1$, то слагаемое $\zeta^{-1}\|f\|_C$ в (1.56) можно отбросить при $\zeta \geq \zeta_0$. Если же множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, то оценка (1.56) верна при всех $\zeta \geq 1$ с постоянной $c(\varepsilon)$, не зависящей от ε .

Из этого следствия получаем, что для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ и произвольной функции $f \in \tilde{C}_U$, удовлетворяющей условию Дини–Липшица $\omega(\delta, f; C) \ln \delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$, справедливо соотношение $\|f - P_\zeta f\|_C \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow +\infty$ и $\zeta \in \Psi_\varepsilon$, причем если множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, то $\|f - P_\zeta f\|_C \rightarrow 0$ при всех $\zeta \rightarrow +\infty$.

По-видимому, впервые утверждение, аналогичное следствию 1.7, установлено в работе [20; теорема 3], где рассмотрена задача Штурма–Лиувилля

$$x'' + ax = \lambda x, \quad x'(0) + \alpha x(0) = 0, \quad x'(1) + \beta x(1) = 0 \quad (1.57)$$

с потенциалом $a \in C$. Для нее в предположении $f(0) = 0$ получена оценка (1.56) для всех $\zeta \geq 1$ и без слагаемого $\zeta^{-1}\|f\|_C$. Этот результат вытекает из следствия 1.7, поскольку множество собственных значений задачи (1.57) отделимо (см. пояснения, данные после определения 3.2, и предложение 3.4), а $\zeta^{-1}\|f\|_C \leq 2\omega(\zeta^{-1}, f; C)$ для $\zeta \geq 1$ и $f \in C$ с $f(0) = 0$.

Отметим, что следствие 1.7 содержит следствия 2, 3 и теорему 2 из работы [21], где задача (1.3) рассмотрена в предположениях: n четное, а оператор F и регулярные краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, заданы формулами (1.6) и (1.7). В связи с теоремой 2 из [21] отметим, что наличие в правой части (1.56) слагаемого $\zeta^{-1}\|f\|_C$ существенно и отбросить его нельзя, если $\mathbf{1}$ не является собственной функцией задачи (1.3).

СЛЕДСТВИЕ 1.8. Для каждого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; F, U) > 0$, что для всех $\zeta \in \Psi_\varepsilon$ и $f \in L_p$, $p \in (1, \infty)$, справедлива оценка

$$\|f - P_\zeta f\|_p \leq c(\varepsilon) \left(\sin \frac{\pi}{p} \right)^{-1} \min \{ \omega(\zeta^{-1/p}, f; L_p); \omega(\zeta^{-1/p}, f^-; L_p) \}, \quad (1.58)$$

а при отсутствии интегральных слагаемых у краевых условий нулевого порядка

$$\|f - P_\zeta f\|_p \leq c(\varepsilon) \left(\sin \frac{\pi}{p} \right)^{-1} \hat{\omega}(\zeta^{-1}, f; L_p). \quad (1.59)$$

Если множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, то оценки (1.58) и (1.59) верны при всех $\zeta \geq 1$ с постоянной $c(\varepsilon)$, не зависящей от ε .

Из определений (1.30) и (1.38) модулей непрерывности $\tilde{\omega}(\delta, f; X)$ и $\hat{\omega}(\delta, f; X)$, первого неравенства в (1.39) и оценки (1.45) с $U_1(x) := x(0)$ и $U_2(x) := x(1)$ выводим

$$\begin{aligned} \max\{\tilde{\omega}(\delta, f; L_p); \tilde{\omega}(\delta, f^-; L_p)\} &= \hat{\omega}(\delta, f; L_p) \\ &\leq c \min\{\tilde{\omega}(\delta^{1/p}, f; L_p); \tilde{\omega}(\delta^{1/p}, f^-; L_p)\}, \quad \delta \in (0, 1], \quad f \in L_p, \quad p \in [1, \infty). \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что оценки $\|f - P_\zeta f\|_p$ из следствия 1.8 лучше тех, которые установлены в [16; теорема 5]. В свою очередь, теорема 5 из [16] содержит результат работы [22], где в случае двуточечных регулярных краевых условий получено соотношение $\|f - P_\zeta f\|_p \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in \Psi_\varepsilon$ и $f \in L_p$ с $p \in (1, \infty)$.

1.7. Комментарий. Исследованию сходимости разложений по корневым функциям краевых задач для обыкновенных дифференциальных выражений посвящено большое количество работ, обзор которых имеется в [23]–[25]. Вопрос о порядке такой сходимости на всем отрезке $[0, 1]$ изучен значительно меньше. Как правило, ранее (см. [20], [26], [27]) были получены оценки типа $\|f - P_\zeta f\|_{C^l} \leq c\zeta^{-m}$ в предположении, что $f \in C^{l+m}$, $f^{(l+m)} \in BV$, причем функция f и ее производные до порядка $l+m$ равны нулю в точках 0 и 1. Следует упомянуть также работы [28], [29] и [21], где установлена количественная версия признака Дирихле–Жордана сходимости рядов по корневым функциям.

В настоящей работе рассмотрена задача о нахождении в определенном смысле точных оценок наименьших уклонений $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l}$ в терминах таких характеристик гладкости функции f , как модуль непрерывности или K -функционал, из которых ввиду неравенств

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l} \leq \|f - P_\zeta f\|_{W_p^l} \leq (1 + \|P_\zeta\|_{[W_p^l, U]}) \mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l}$$

следуют уже точные оценки для $\|f - P_\zeta f\|_{W_p^l}$. Кроме упомянутых в связи со следствиями 1.7 и 1.8 работ [16], [20] и [21] оценки $\|f - P_\zeta f\|_p$ и $\mathcal{E}_\zeta(f)_{L_p}$ в терминах модулей непрерывности и K -функционалов имеются в сообщениях автора [30]–[32]. В частности, в [32] показано, что в случае $l = 0$ и при условии $F \in [C^\gamma, X]$ утверждения (1.14) и (1.15) можно вывести из результатов работы [11] о приближении по векторам конечной степени оператора, действующего в банаховом пространстве.

Отметим, что для задачи Штурма–Лиувилля (1.57) оценка $\mathcal{E}_\zeta(f)_C \leq c\zeta^{-m}$ получена в [20; теорема 4] в предположении, что $f \in C^m$ и функция f вместе со своими производными равна нулю в точках 0 и 1. Для $m = 1, 2$ эта оценка непосредственно вытекает из утверждения (1.14). Чтобы вывести ее для $m > 2$, следует предположить определенную гладкость потенциала a в (1.57) и рассмотреть степень $[(m+1)/2]$ оператора A , соответствующего задаче (1.57), а затем применить к $A^{[(m+1)/2]}$ утверждение (1.14). Аналогично при дополнительной гладкости возмущения F в задаче (1.3) из теоремы 1.1 несложно вывести утверждения о справедливости оценок (1.14) и (1.15) и в случае $l+m > n$. Здесь мы не приводим такое следствие теоремы 1.1, поскольку возникающее при этом предположение относительно гладкости F окажется завышенным,

а сам вывод требует доказательства вспомогательного утверждения о том, что s -я степень оператора, соответствующего регулярной краевой задаче, также порождена регулярной задачей. При $s = 2$ (а значит, для всех $s = 2^{2^k}$, $k \in \mathbb{P}$) это утверждение доказано в [33; теорема 1].

§ 2. Оценки резольвенты оператора, соответствующего краевой задаче

Кроме задачи (1.3) далее удобно рассматривать и задачу

$$x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0, \quad U_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

получающуюся из (1.3) заменой в ней спектрального параметра λ на $-\rho^n$. Понятия собственных значений и их кратностей для задачи (2.1) аналогичны соответствующим понятиям для (1.3) (см. [3; § 2, пп. 2, 3] или [5; замечание 1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Все собственные значения задачи (2.1) с учетом их кратностей допускают следующее представление:*

1) в случае нечетного n

$$\rho_{k,v} = i2\pi\omega_v \tilde{\rho}_k, \quad \text{где } \tilde{\rho}_k = k + O(1), \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (2.2)$$

2) в случае четного n

$$\rho_{k,v} = i\pi\omega_v \tilde{\rho}_k, \quad \text{где } \tilde{\rho}_k = k + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

причем в (2.2) и (2.3) $v = 1, \dots, n$.

Предложение 2.1 вытекает из [5; следствие 2] или [16; теорема 2] и равносильно формулам (1.48). При записи представлений (2.2) и (2.3) учитывалось, что если $\rho_{k,v}$ – собственное значение задачи (2.1), то $\rho_{k,v} \exp(i2\pi j/n)$, $j = 1, \dots, n-1$, также являются собственными значениями (2.1).

Вначале построим решение x уравнения

$$x^{(n)} + Fx + \rho^n x = f \quad (2.4)$$

с правой частью $f \in L_1$. При этом под решением уравнения (2.4) понимается функция $x \in W_1^n$, удовлетворяющая (2.4) почти всюду на $[0, 1]$.

Пусть

$$\begin{aligned} w_n &:= 2, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ w_n &:= 1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Прямые $\{\rho \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \rho \omega_j = 0\}$, $j = 1, \dots, n$, разбивают комплексную ρ -плоскость на nw_n непересекающихся открытых углов Ξ_r . При этом здесь и далее в § 2 предполагается, что индекс $r \in \{1, \dots, nw_n\}$. По Ξ_r определим подмножества Λ_r^+ и Λ_r^- множества индексов $\{1, \dots, n\}$ правилами

$$\Lambda_r^+ := \{j : \operatorname{Re} \rho \omega_j > 0, \rho \in \Xi_r\} \quad \text{и} \quad \Lambda_r^- := \{j : \operatorname{Re} \rho \omega_j < 0, \rho \in \Xi_r\},$$

а по ним формулами

$$\begin{aligned} R_{l,r}(\rho)f(t) &:= \frac{1}{n} \sum_{j \in \Lambda_r^+} \int_t^1 \omega_j^{1-l} e^{\rho\omega_j(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{j \in \Lambda_r^-} \int_0^t \omega_j^{1-l} e^{\rho\omega_j(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

зададим преобразования $R_{l,r}(\rho)$, линейные по функции $f \in L_1$. Поскольку ω_j – корни n -й степени из -1 , то (см. [34; формула (44)])

$$(R_{l,r}(\rho)f)^{(m)} = \rho^m R_{l-m,r}(\rho)f, \quad l \in \{2, \dots, n\}, \quad m \in \{1, \dots, l-1\}. \quad (2.7)$$

Для каждого $l \in \{0, \dots, n\}$ и $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ введем преобразования

$$\begin{aligned} (Q_{0,r}(\rho)f)(t) &:= \rho^{1-n} (R_{0,r}(\rho)f)(t), \\ (Q_{l,r}(\rho)f)(t) &:= \rho^{-n} f(t) + \rho^{1-l-n} (R_{l,r}(\rho)f^{(l)})(t), \quad l \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

линейные по функции $f \in W_1^l$.

В [34; лемма 1] показано, что $Q_{l,r}$ – голоморфная в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция со значениями в каждом из пространств $[W_p^l, W_p^{l+n}]$ при $p \in [1, \infty]$, причем $x := x(\rho; t) := (Q_{l,r}(\rho)f)(t)$ – частное решение дифференциального уравнения $x^{(n)} + \rho^n x = f$ при $\rho \neq 0$ и $f \in W_1^l$.

Сделаем одно общее замечание, которым часто будем пользоваться в дальнейшем. Так как пространство W_1^n вложено в пространство C^{n-1} , а значит, и в C^γ , то ввиду условия $F \in [C^\gamma, L_{p_0}]$ оператор $FQ_{l,r}(\rho) \in [W_1^l, L_{p_0}]$ и $FQ_{l,r}$ является голоморфной в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцией со значениями в пространстве $[W_1^l, L_{p_0}]$. Отсюда, в частности, вытекает, что $FQ_{0,r}$ – голоморфная в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция со значениями в каждом из пространств $[L_p]$ при $p \in [1, p_0]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть функция $f \in W_1^l$ при некотором $l \in \{0, \dots, n\}$. Тогда для фиксированного $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ уравнение (2.4) имеет решение x в том и только том случае, когда для произвольного $r \in \{1, \dots, nw_n\}$ найдутся такие функция $g \in L_{p_0}$ и решение y уравнения $y^{(n)} + \rho^n y = 0$, что

$$x = Q_{0,r}(\rho)g + Q_{l,r}(\rho)f + y, \quad (2.9)$$

$$g + FQ_{0,r}(\rho)g + FQ_{l,r}(\rho)f + Fy = 0. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть функция x является решением уравнения (2.4) при $\rho \neq 0$. Обозначим $g := -Fx$. Тогда $g \in L_{p_0}$ и $x^{(n)} + \rho^n x = g + f$. Так как

$$(Q_{0,r}(\rho)g)^{(n)} + \rho^n Q_{0,r}(\rho)g = g, \quad (Q_{l,r}(\rho)f)^{(n)} + \rho^n Q_{l,r}(\rho)f = f, \quad (2.11)$$

то функция $x_0 := Q_{0,r}(\rho)g + Q_{l,r}(\rho)f$ удовлетворяет равенству $x_0^{(n)} + \rho^n x_0 = g + f$. Поэтому $y := x - x_0$ – решение уравнения $y^{(n)} + \rho^n y = 0$. Следовательно, x представимо в виде (2.9). Подставляя (2.9) в (2.4) и пользуясь равенствами (2.11), приходим к (2.10).

Достаточность. Так как решение y однородного уравнения $y^{(n)} + \rho^n y = 0$ бесконечно дифференцируемо, то функция x , представляемая в виде (2.9), принадлежит пространству W_1^n . Учитывая равенства (2.9) и (2.11), имеем

$$x^{(n)} + Fx + \rho^n x = g + FQ_{0,r}(\rho)g + f + FQ_{l,r}(\rho)f + Fy.$$

Отсюда и из (2.10) заключаем, что x – решение уравнения (2.4).

Тем самым предложение 2.2 доказано.

Пусть при некотором $\rho_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ оператор $I + FQ_{0,r}(\rho_0)$ ограниченно обратим в пространстве L_{p_0} . Ввиду голоморфности в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функции $FQ_{0,r}$, принимающей значения в $[L_{p_0}]$, функция $\rho \mapsto (I + FQ_{0,r}(\rho))^{-1}$ определена и голоморфна в некоторой окрестности точки ρ_0 . Поэтому в этой же окрестности определен оператор

$$H_{l,r}(\rho) := Q_{0,r}(\rho)(I + FQ_{0,r}(\rho))^{-1}FQ_{l,r}(\rho) \quad (2.12)$$

и $H_{l,r}$ является голоморфной функцией со значениями в $[W_1^l, W_{p_0}^n]$.

Находя функцию g из равенства (2.10) и подставляя ее в (2.9), на основании предложения 2.2 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть при некоторых $r \in \{1, \dots, nw_n\}$ и $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ оператор $I + FQ_{0,r}(\rho)$ ограниченно обратим в пространстве L_{p_0} и для какого-либо $l \in \{0, \dots, n\}$ функция $f \in W_1^l$. Тогда формула

$$x = Q_{l,r}(\rho)f - H_{l,r}(\rho)f + y - Q_{0,r}(\rho)(I + FQ_{0,r}(\rho))^{-1}Fy$$

задает взаимно однозначное соответствие между решениями y уравнения $y^{(n)} + \rho^n y = 0$ и решениями x уравнения (2.4).

Так как $y - Q_{0,r}(\rho)(I + FQ_{0,r}(\rho))^{-1}Fy$ – решение уравнения $x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0$, то предположение об ограниченной обратимости оператора $I + FQ_{0,r}(\rho)$ является достаточным (но не необходимым, см. пример 2 в [34]) условием того, что число линейно независимых решений уравнения $x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0$ равно n .

Построим теперь решение x уравнения (2.4) для достаточно больших по модулю ρ , принадлежащих ξ -окрестностям углов Ξ_r , т.е. в областях

$$\Xi_r(\eta, \xi) := \{\rho \in (\Xi_r)_\xi : |\rho| > \eta\}, \quad (2.13)$$

где η и ξ неотрицательны, а

$$(\Xi_r)_\xi := \cup\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho - \rho_0| \leq \xi, \rho_0 \in \Xi_r\}.$$

Это построение использует ряд оценок преобразований $Q_{l,r}(\rho)$ и $R_{l,r}(\rho)$, в которых участвует функция φ , заданная формулой

$$\varphi(\rho) := (1 + \min\{|\operatorname{Re} \rho \omega_1|; \dots; |\operatorname{Re} \rho \omega_n|\})^{-1}, \quad \rho \in \mathbb{C}. \quad (2.14)$$

Для φ справедливы оценки

$$(2|\rho|)^{-1} \leq \varphi(\rho) \leq 1, \quad |\rho| \geq 1. \quad (2.15)$$

Согласно лемме 6 из [34] найдется такая постоянная $c := c(n) > 0$, что

$$\|Q_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, W_q^s]} \leq ce^\xi |\rho|^{-n} (1 + |\rho|^{s-l+1} \varphi(\rho)^{1-1/p+1/q}), \quad (2.16)$$

$$\|Q_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, C^\mu]} \leq ce^\xi |\rho|^{-n} (1 + |\rho|^{\mu-l+1} \varphi(\rho)^{1-1/p}), \quad (2.17)$$

$$l \in \{0, \dots, n\}, \quad s \in \{0, \dots, l+n-1\}, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \\ \mu \in [0, l+n-1], \quad \rho \in \Xi_r(1, \xi), \quad \xi \geq 0,$$

причем при $p = q$ оценка (2.16) справедлива и при $s = l + n$.

В (2.16) и (2.17) функция φ несколько иная, чем в работе [34]. Но введенная в [34; равенство (15)] функция $\varphi(\cdot, p)$ допускает оценку $\varphi(\rho, p) \leq \varphi(\rho)^{1/p}$, $\rho \in \mathbb{C}$, $p \in [1, \infty]$. Этим замечанием будем пользоваться и в дальнейшем при ссылках на работу [34]. Кроме того, лемма 6 в [34] установлена в другой эквивалентной норме на пространстве W_p^l .

Ввиду первого неравенства в (2.15) и условия $1 \leq p \leq q \leq \infty$ из оценок (2.16) и (2.17) выводятся два частных случая:

$$\|Q_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, W_q^{l+m}]} \leq 3ce^\xi |\rho|^{m-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p+1/q}, \quad (2.18)$$

$$\|Q_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, C^{l+\mu}]} \leq 3ce^\xi |\rho|^{\mu-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p}, \quad (2.19)$$

$$m \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \mu \in [0, n-1],$$

а значения l , p , q , ξ и ρ те же, что и в (2.16) и (2.17), причем при $p = q$ оценка (2.18) справедлива и при $m = n$.

Приведем еще одну оценку:

$$\|R_{l,r}(\rho)\|_{[L_p, W_q^m]} \leq 4e^\xi |\rho|^m \varphi(\rho)^{1-1/p+1/q}, \quad (2.20)$$

$$l \in \{1, \dots, n\}, \quad m \in \{0, \dots, l-1\}, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad \rho \in \Xi_r(1, \xi), \quad \xi \geq 0.$$

Оценка (2.20) при $m = 0$ с постоянной 2 вместо 4 получена в лемме 4 работы [34]. Из этой оценки, из правила (2.7) дифференцирования функции $R_{l,r}(\rho)f$ и определения нормы в W_q^m вытекает (2.20) для $m \in \{1, \dots, l-1\}$.

Из (2.6) и (2.7) следует, что $R_{l,r}(\rho)f \in C^{l-1}$ при $f \in L_1$ и $l \in \{1, \dots, n\}$, поэтому (2.20) при $q = \infty$ запишется в виде

$$\|R_{l,r}(\rho)\|_{[L_p, C^m]} \leq 4e^\xi |\rho|^m \varphi(\rho)^{1-1/p}, \quad (2.21)$$

где $1 \leq p \leq \infty$, а l , m , ξ и ρ те же, что и в оценке (2.20).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для каждого $\xi \geq 0$ найдутся такие постоянные $c := c(\xi, F) > 0$ и $\eta := \eta(\xi, F) \geq 1$, что оператор $I + FQ_{0,r}(\rho)$, $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$, ограниченно обратим в пространстве L_{p_0} , а функция $H_{l,r}$, заданная формулой (2.12), принимает свои значения в $[W_1^l, W_{p_0}^n]$, голоморфна в области $\Xi_r(\eta, \xi)$ и для нее справедливы оценки

$$\|H_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, W_q^s]} \leq c |\rho|^{s-l-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p+1/q}, \quad (2.22)$$

$$\|H_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, C^\mu]} \leq c |\rho|^{\mu-l-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p}, \quad (2.23)$$

$$l, s \in \mathbb{P}, \quad \mu \in [0, n-1], \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi).$$

При этом в (2.22) предполагается, что выполнено одно из следующих условий:

- 1) $l, s \leq n - 1, \quad p, q \in [1, \infty]$;
- 2) $l \leq n - 1, \quad s = n, \quad p \in [1, \infty], \quad q \in [1, p_0]$;
- 3) $l = n, \quad s \leq n, \quad 1 \leq p \leq q \leq p_0$,

а в (2.23) – либо $l \leq n - 1$ и $p \in [1, \infty]$, либо $l = n$ и $p \in [1, p_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\|F\|_{[C^\gamma, L_\nu]} \leq \|F\|_{[C^\gamma, L_{p_0}]}$ при $\nu \in [1, p_0]$, то, полагая $l = 0$ в оценке (2.19) и учитывая, что $\varphi(\rho) \leq 1$, имеем

$$\|FQ_{0,r}(\rho)\|_{[L_\nu]} \leq 3c\|F\|_{[C^\gamma, L_{p_0}]} e^\xi |\rho|^{\gamma-n+1}$$

при $\nu \in [1, p_0]$ и $\rho \in \Xi_r(1, \xi)$. Следовательно, найдется $\eta := \eta(\xi, F)$, для которого $\|FQ_{0,r}(\rho)\|_{[L_\nu]} \leq 1/2$ при $\nu \in [1, p_0]$ и $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$. Тем самым оператор $I + FQ_{0,r}(\rho)$ обратим в пространстве L_ν и $\|(I + FQ_{0,r}(\rho))^{-1}\|_{[L_\nu]} \leq 2$ при $\nu \in [1, p_0]$ и $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$. Отсюда и из отмеченных при определении (2.12) свойств оператора $H_{l,r}(\rho)$ вытекает указанная в предложении 2.4 голоморфность оператор-функции $H_{l,r}$ и оценка

$$\|H_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, W_q^s]} \leq 2\|F\|_{[C^\gamma, L_{p_0}]} \|Q_{0,r}(\rho)\|_{[L_\nu, W_q^s]} \|Q_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, C^\gamma]},$$

$\nu \in [1, p_0]$, $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$. Оценивая теперь согласно (2.18) и (2.17) сомножители $\|Q_{0,r}(\rho)\|_{[L_\nu, W_q^s]}$ и $\|Q_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, C^\gamma]}$, а также принимая во внимание условие $\gamma < n - 1$, выводим, что

$$\begin{aligned} \|H_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, W_q^s]} &\leq c(F) e^{2\xi} |\rho|^{s-2n+1} \varphi(\rho)^{1-1/\nu+1/q} (1 + |\rho|^{n-l} \varphi(\rho)^{1-1/p}), \\ l &\leq n, \quad s \leq n - 1, \quad p \in [1, \infty], \quad \nu \in [1, p_0], \quad q \in [\nu, \infty], \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

причем при $\nu = q$ ($\leq p_0$) оценка (2.24) верна при $s = n$.

Полностью аналогично устанавливается и такая оценка:

$$\begin{aligned} \|H_{l,r}(\rho)\|_{[W_p^l, C^\mu]} &\leq c(F) e^{2\xi} |\rho|^{\mu-2n+1} \varphi(\rho)^{1-1/\nu} (1 + |\rho|^{n-l} \varphi(\rho)^{1-1/p}), \\ l &\leq n, \quad p \in [1, \infty], \quad \mu \in [0, n - 1], \quad \nu \in [1, p_0], \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \end{aligned} \quad (2.25)$$

причем при выводе (2.25) вместо неравенства (2.18) используется соотношение (2.19).

Выведем из (2.24) и (2.25) утверждения (2.22) и (2.23).

Предположим вначале, что $l \leq n - 1$. Тогда $|\rho|^{n-l} \varphi(\rho)^{1-1/p} \geq |\rho| \varphi(\rho) \geq 1/2$ при $|\rho| \geq 1$ и поэтому

$$1 + |\rho|^{n-l} \varphi(\rho)^{1-1/p} \leq 3|\rho|^{n-l} \varphi(\rho)^{1-1/p}, \quad |\rho| \geq 1. \quad (2.26)$$

Подставляя эту оценку в (2.24) и (2.25) при значении $\nu = 1$ и учитывая, что $\varphi(\rho) \leq 1$ при $\rho \in \mathbb{C}$, получаем (2.22) при $s \leq n - 1$ и (2.23). Если же в (2.24) положить $\nu = q$, то из (2.24) и (2.26) вытекает (2.22) при $l \leq n - 1$ и $s = n$.

Пусть теперь $l = n$. Тогда $1 + |\rho|^{n-l} \varphi(\rho)^{1-1/p} \leq 2$ при $\rho \in \mathbb{C}$. Подставляя эту оценку в (2.24) при $\nu = q$ и в (2.25) при $\nu = p$, получаем (2.22) при $l = n$, $s \leq n$ и (2.23) при $l = n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для каждого $\xi \geq 0$ найдутся такие постоянные $c := c(F) > 0$ и $\eta := \eta(\xi, F) \geq 1$, что для всех $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$ существует фундаментальная система решений $x_{1,r}(\rho; t), \dots, x_{n,r}(\rho; t)$ уравнения $x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0$, обладающая свойствами:

- 1) функция $\rho \mapsto x_{h,r}(\rho; t)$ ($\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$, $t \in [0, 1]$) принимает свои значения в пространстве $W_{p_0}^n$, голоморфна в области $\Xi_r(\eta, \xi)$ и для нее справедливы оценки

$$\|x_{h,r}(\rho; \cdot)\|_{W_q^s} \leq ce^{2\xi} |\rho|^s \varphi(\rho)^{1/q}, \quad (2.27)$$

$$\|x_{h,r}(\rho; \cdot)\|_{C^\mu} \leq ce^{2\xi} |\rho|^\mu, \quad (2.28)$$

$$s \in \{0, \dots, n-1\}, \quad q \in [1, \infty], \quad \mu \in [0, n-1], \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi),$$

причем при $q \in [1, p_0]$ оценка (2.27) верна и при $s = n$.

- 2) общее решение $x := x(\rho; t)$ уравнения (2.4) при параметре $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$ и с правой частью $f \in W_1^l$ при некотором $l \in \{0, \dots, n\}$ задается формулой

$$x(\rho; t) = (Q_{l,r}(\rho)f)(t) - (H_{l,r}(\rho)f)(t) + c_1 x_{1,r}(\rho; t) + \dots + c_n x_{n,r}(\rho; t), \quad (2.29)$$

где $c_1, \dots, c_n$ – произвольные комплексные числа;

- 3) характеристический определитель

$$\Delta_r(\rho) := \det[U_j(x_{h,r}(\rho; \cdot))]_{j,h=1}^n, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi),$$

спектральной задачи (2.1) не тождественно равен нулю и его нули совпадают с собственными значениями $\rho_{k,v}$ задачи (2.1) (см. формулы (2.2) и (2.3)), попавшими в $\Xi_r(\eta, \xi)$; при этом для произвольного $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; \xi; F, U)$, для которой

$$|\Delta_r(\rho)| \geq c(\varepsilon) |\rho|^{\widehat{k}}, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \quad |\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon, \quad (2.30)$$

где $\widehat{k} = k_1 + \dots + k_n$ – суммарный порядок краевых условий $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Утверждение 1) получается из теоремы 2 работы [34], если положить в ней $s = 0$, а представимость общего решения уравнения (2.4) в виде (2.29) является следствием предложения 2.3. Третье утверждение – частный случай теоремы 3 из [5].

Следующая теорема дает представление резольвенты оператора A , заданного равенствами (1.47) и соответствующего краевой задаче (1.3) (или, что то же самое, задаче (2.1)), на функциях $f \in W_{1,U}^l$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\xi \geq 0$, и пусть функция $f \in W_{1,U}^l$ при некотором $l \in \{0, \dots, n\}$. Тогда найдется такое $\eta := \eta(\xi, F) \geq 1$, что для всех $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$ и $\rho \neq \rho_{k,v}$ справедливо представление

$$(R(-\rho^n; A)f)(t) = (Q_{l,r}(\rho)f)(t) - (H_{l,r}(\rho)f)(t) + \sum_{h=1}^n \frac{\Delta_{h,l,r}(\rho; f)}{\Delta_r(\rho)} x_{h,r}(\rho; t), \quad (2.31)$$

где $\Delta_r(\rho)$ – характеристический определитель краевой задачи (2.1), $\Delta_{h,l,r}(\rho; \cdot)$ – линейные и ограниченные функционалы на пространстве W_1^l , голоморфно зависящие от $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$, а $x_{1,r}(\rho; t), \dots, x_{n,r}(\rho; t)$ – фундаментальная система решений уравнения $x^{(n)} + Fx + \rho^n x = 0$, $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$, из предложения 2.5. Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; \xi; F, U) > 0$, что оценка

$$\left| \frac{\Delta_{h,l,r}(\rho; f)}{\Delta_r(\rho)} \right| \leq c(\varepsilon) |\rho|^{1-l-n} \varphi(\rho)^{1-1/p} \|f\|_{W_p^l}, \quad (2.32)$$

$$f \in W_{p,U}^l, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \quad |\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon, \quad l \in \mathbb{P},$$

справедлива в следующих случаях:

- 1) $l \leq n-1$, $p \in [1, \infty]$;
- 2) $l = n$, $p \in [1, p_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (2.28) и ограниченности функционалов U_j на пространстве C^{k_j} имеем

$$|U_j(x_{h,r}(\rho; \cdot))| \leq c \|U_j\|_{(C^{k_j})^*} e^{2\xi} |\rho|^{k_j}, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi). \quad (2.33)$$

Так как общее решение уравнения (2.4) при $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$ и $f \in W_1^l$ имеет вид (2.29), то из определения (1.47) оператора A следует, что для того чтобы функция $x(\rho; \cdot)$ из W_1^n была решением уравнения $Ax + \rho^n x = f$ при $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$ и $f \in W_1^l$, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид (2.29) и удовлетворяла краевым условиям $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Подставляя (2.29) в эти краевые условия, заключаем, что коэффициенты $c_1, \dots, c_n$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{h=1}^n c_h U_j(x_{h,r}(\rho; \cdot)) = -U_j(Q_{l,r}(\rho)f) + U_j(H_{l,r}(\rho)f), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.34)$$

определитель которой совпадает с характеристическим определителем $\Delta_r(\rho)$ краевой задачи (2.1). Значит, если ρ не является собственным значением $\rho_{k,v}$ задачи (2.1), то решение системы (2.34) находится по формулам $c_h = \Delta_{h,l,r}(\rho; f) / \Delta_r(\rho)$, где $\Delta_{h,l,r}(\rho; f)$ – определитель матрицы, получающейся из матрицы $[U_j(x_{h,r}(\rho; \cdot))]_{j,h=1}^n$ заменой в ней столбца с номером h на столбец, элементами которого являются линейные и ограниченные по $f \in W_1^l$ функционалы $-U_j(Q_{l,r}(\rho)f) + U_j(H_{l,r}(\rho)f)$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда и из равенства (2.29) вытекает представление (2.31). А ввиду голоморфности в области $\Xi_r(\eta, \xi)$ функций $Q_{l,r}$ и $H_{l,r}$ со значениями в пространствах $[W_1^l, W_1^{l+n}]$ и $[W_1^l, W_1^n]$ соответственно следует голоморфность по $\rho \in \Xi_r(\rho, \xi)$ функционалов $\Delta_{h,l,r}(\rho; \cdot)$ на пространстве W_1^l . Если же учесть оценки (2.30) и (2.33), то установим неравенство

$$\left| \frac{\Delta_{h,l,r}(\rho; f)}{\Delta_r(\rho)} \right| \leq c_1(\varepsilon) \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\rho|^{k_j}} (|U_j(Q_{l,r}(\rho)f)| + |U_j(H_{l,r}(\rho)f)|), \quad (2.35)$$

справедливое при $\rho \in \Xi_r(\eta, \xi)$ и $|\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon$ с $c_1(\varepsilon) := c_1(\varepsilon; \xi; F, U) > 0$.

Для оценки правой части в (2.35) покажем вначале, что

$$|U_j(Q_{l,r}(\rho)f)| \leq c \|U_j\|_{(C^{k_j})^*} e^\xi |\rho|^{k_j-l-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p} \|f\|_{W_p^l}, \quad (2.36)$$

$$f \in W_{p,U}^l, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \quad \xi \geq 0.$$

При доказательстве оценки (2.36) рассмотрим два случая:

- 1) индекс j удовлетворяет условию $k_j \leq l-1$, а значит, $l \in \{1, \dots, n\}$;
- 2) индекс j удовлетворяет условию $l \leq k_j \leq n-1$, а значит, $l \in \{0, \dots, n-1\}$.

Поскольку функция $f \in W_{p,U}^l$, то $U_j(f) = 0$ при тех j , для которых $k_j \leq l-1$, поэтому из вида (2.8) преобразований $Q_{l,r}(\rho)$ имеем

$$U_j(Q_{l,r}(\rho)f) = \rho^{1-l-n} U_j(R_{l,r}(\rho)f^{(l)}),$$

если $k_j \leq l-1$. Отсюда и из оценки (2.21) получаем неравенство (2.36) для значений j с $k_j \leq l-1$. Если же $l \leq k_j \leq n-1$, то, принимая во внимание оценку (2.19), опять приходим к (2.36). Тем самым неравенство (2.36) справедливо для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ и $l \in \{0, \dots, n\}$.

Из оценки (2.23) и ограниченности функционалов U_j на пространстве C^{k_j} имеем

$$|U_j(H_{l,r}(\rho)f)| \leq c \|U_j\|_{(C^{k_j})^*} |\rho|^{k_j-l-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p} \|f\|_{W_p^l},$$

$$f \in W_p^l, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \quad \xi \geq 0.$$

Подставляя это неравенство и неравенство (2.36) в правую часть (2.35), получаем утверждение (2.32).

Для вывода двух следствий из теоремы 2.1, а также в §3 потребуется простая оценка, вытекающая из неравенств (2.27) и (2.32). Эту оценку сформулируем в виде такого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Для всех $\varepsilon > 0$ и $\xi \geq 0$ найдутся такие постоянные $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; \xi; F, U) > 0$ и $\eta := \eta(\xi, F) \geq 1$, что оценка

$$\left\| \sum_{h=1}^n \frac{\Delta_{h,l,r}(\rho; f)}{\Delta_r(\rho)} x_{h,r}(\rho; \cdot) \right\|_{W_q^s} \leq c(\varepsilon) |\rho|^{s-l-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p+1/q} \|f\|_{W_p^l}, \quad (2.37)$$

$$f \in W_{p,U}^l, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \quad |\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon, \quad l, s \in \mathbb{P},$$

справедлива в следующих случаях:

- если l (или s) не больше $n-1$, то p (соответственно q) принадлежит $[1, \infty]$;
- если l (или s) равно n , то p (соответственно q) принадлежит $[1, p_0]$.

ТЕОРЕМА 2.2. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; F, U) > 0$, что оценка

$$\|R(-\rho^n; A)\|_{[W_{p,U}^l, W_q^{l+m}]} \leq c(\varepsilon) |\rho|^{m-n+1} \varphi(\rho)^{1-1/p+1/q}, \quad (2.38)$$

$$|\rho| \geq 1, \quad |\rho - \rho_{k,v}| \leq \varepsilon, \quad l, m \in \mathbb{P},$$

справедлива в следующих случаях:

- 1) $l+m \leq n-1$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$;
- 2) $l \geq 1$, $l+m = n$, $1 \leq p \leq q \leq p_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду предложения 1.9 оценку (2.38) достаточно установить лишь для больших по модулю ρ . Из представления (2.31), неравенств (2.18), (2.22) и (2.37) следует справедливость оценки (2.38) в каждой из областей $\Xi_r(\eta, \xi)$, $r = 1, \dots, nw_n$, при произвольном $\xi > 0$ и достаточно большом $\eta \geq 1$. Теперь для доказательства теоремы 2.2 остается лишь заметить, что объединение областей $\Xi_1(\eta, \xi), \dots, \Xi_{nw_n}(\eta, \xi)$ совпадает с областью $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| > \eta\}$.

Кроме того, далее потребуются

ТЕОРЕМА 2.3. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; F, U) > 0$, что оценка

$$\begin{aligned} \|R(-\rho^n; A)f - \rho^{-n}f\|_{W_p^l} &\leq c(\varepsilon)|\rho|^{1-m-n}\varphi(\rho)\|f\|_{W_p^{l+m}}, \\ f &\in W_{p,U}^{l+m}, \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad |\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon, \quad l \in \mathbb{P}, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

справедлива в следующих случаях:

- 1) $l + m \leq n - 1$, $p \in [1, \infty]$;
- 2) $l + m = n$, $p \in [1, p_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем определение (2.8) оператора $Q_{l,r}(\rho)$ при индексе l , равном $l + m$, и подставим $Q_{l+m,r}(\rho)$ в правую часть представления (2.31) также при l , равном $l + m$. Затем, оценивая нормы слагаемых в полученном выражении, выводим

$$\begin{aligned} \|R(-\rho^n; A)f - \rho^{-n}f\|_{W_p^l} &\leq |\rho|^{1-l-m-n} \|R_{l+m,r}(\rho)\|_{[L_p, W_p^l]} \|f^{(l+m)}\|_p \\ &+ \|H_{l+m,r}(\rho)\|_{[W_p^{l+m}, W_p^l]} \|f\|_{W_p^{l+m}} + \left\| \sum_{h=1}^n \frac{\Delta_{h,l+m,r}(\rho; f)}{\Delta_r(\rho)} x_{h,r}(\rho; \cdot) \right\|_{W_p^l}, \\ f &\in W_{p,U}^{l+m}, \quad \rho \in \Xi_r(\eta, \xi), \quad \xi > 0, \quad \rho \neq \rho_{k,v}. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть этого неравенства оценки (2.20), (2.22) и (2.37) при соответствующих значениях параметров, получаем утверждение (2.39) в каждой из областей $\Xi_1(\eta, \xi), \dots, \Xi_{nw_n}(\eta, \xi)$, а значит, и в области $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| > \eta\}$. А этого вполне достаточно для доказательства теоремы 2.3.

§ 3. Оценка скорости сходимости методов суммирования корневых функций

Параграф состоит из пяти пунктов. В первом пункте изучено понятие отделимости множества собственных значений задачи (1.3) (см. определение 1.3 в п. 1.6) и, в частности, приведена запись его через собственные значения задачи (2.1). Кроме того, даны достаточные условия отделимости в терминах коэффициентов α_j , β_j и функций σ_j из определения (1.4) функционалов U_j , задающих краевые условия $U_j(x) = 0$. Во втором пункте вводится оператор суммирования корневых функций задачи (1.3), а в п. 3.3 оценены слагаемые, входящие в этот оператор. Соответствующие оценки получены в предположении, что множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, и они вполне

аналогичны оценкам Лебега коэффициентов Фурье через модуль непрерывности. Эти результаты используются в п. 3.4 при доказательстве теоремы о скорости сходимости методов суммирования корневых функций, из которой в п. 3.5 уже просто выводится прямая теорема.

3.1. Об отделимости множества собственных значений. Все оценки резольвенты оператора A установлены в §2 вне кружков радиуса ε с центрами, находящимися в собственных значениях $\rho_{k,v}$ задачи (2.1). Чтобы использовать эти результаты далее, удобно выразить условие (1.53) в терминах чисел $\rho_{k,v}$. Для этого отметим вначале, что так как для каждого собственного значения μ_k задачи (1.3) найдется такое $\rho_{s,w}$, что $\mu_k = -\rho_{s,w}^n$, то условие (1.53) равносильно справедливости неравенства

$$\mathcal{P} := \inf_{\rho_{k,v} \neq \rho_{s,w}} \frac{|\rho_{k,v}^n - \rho_{s,w}^n|}{|\rho_{k,v}|^{n-1} + |\rho_{s,w}|^{n-1}} > 0. \quad (3.1)$$

(При этом не обязательно считать, что $\rho_{k,v}$ занумерованы так же, как и в предложении 2.1; см., например, предложение 3.3, где используется иная нумерация $\rho_{k,v}$.)

Проверка выполнения условия (3.1) основана на следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\rho_{k,v}$ – собственные значения задачи (2.1). Тогда множество собственных значений задачи (1.3) отделимо (или, что то же самое, выполнено неравенство (3.1)) в том и только том случае, когда

$$\inf_{\rho_{k,v} \neq \rho_{s,w}} |\rho_{k,v} - \rho_{s,w}| > 0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая, что $\rho_{k,v} \neq 0$ и $|\rho_{k,v}| \geq |\rho_{s,w}|$, имеем

$$\begin{aligned} |\rho_{k,v}^n - \rho_{s,w}^n| &= |\rho_{k,v} - \rho_{s,w}| |\rho_{k,v}|^{n-1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\rho_{s,w}}{\rho_{k,v}} \right)^j \right| \\ &\leq n |\rho_{k,v} - \rho_{s,w}| (|\rho_{k,v}|^{n-1} + |\rho_{s,w}|^{n-1}), \end{aligned}$$

а значит, $\mathcal{P} \leq n \inf\{|\rho_{k,v} - \rho_{s,w}| : \rho_{k,v} \neq \rho_{s,w}\}$, и поэтому из (3.1) вытекает (3.2).

Покажем теперь, что из выполнения условия (3.2) следует выполнение условия (3.1). Далее будем предполагать, что $\rho_{k,v}$ занумерованы так же, как и в предложении 2.1. Рассмотрим вначале случай нечетного n . Ввиду асимптотической формулы (2.2) условие (3.1) запишется в виде

$$\inf_{\tilde{\rho}_k \neq \tilde{\rho}_s} \frac{|\tilde{\rho}_k^n - \tilde{\rho}_s^n|}{|\tilde{\rho}_k|^{n-1} + |\tilde{\rho}_s|^{n-1}} > 0, \quad (3.3)$$

а (3.2) – в виде

$$\inf_{\tilde{\rho}_k \neq \tilde{\rho}_s} |\tilde{\rho}_k - \tilde{\rho}_s| > 0. \quad (3.4)$$

Тем самым достаточно показать, что из (3.4) следует (3.3).

Так как изменение конечного числа значений $\tilde{\rho}_k$ не влияет на справедливость соотношений (3.3) и (3.4), то согласно формуле $\tilde{\rho}_k = k + O(1)$, $k \in \mathbb{Z}$, далее, не уменьшая общности, будем предполагать, что

$$|\tilde{\rho}_k| \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad |\arg \tilde{\rho}_k| \leq \frac{\pi}{3n}, \quad k \geq 0, \quad |\arg(-\tilde{\rho}_{-k})| \leq \frac{\pi}{3n}, \quad k > 0.$$

Отсюда и из нечетности n имеем

$$\operatorname{Re} \tilde{\rho}_k^n \geq 2^{-1} |\tilde{\rho}_k|^n \geq 2^{-1} |\tilde{\rho}_k|^{n-1}, \quad k \geq 0, \quad \operatorname{Re} \tilde{\rho}_{-k}^n \leq -2^{-1} |\tilde{\rho}_{-k}|^{n-1}, \quad k > 0,$$

а значит,

$$\frac{|\tilde{\rho}_k^n - \tilde{\rho}_{-s}^n|}{|\tilde{\rho}_k|^{n-1} + |\tilde{\rho}_{-s}|^{n-1}} \geq \frac{\operatorname{Re} \tilde{\rho}_k^n - \operatorname{Re} \tilde{\rho}_{-s}^n}{|\tilde{\rho}_k|^{n-1} + |\tilde{\rho}_{-s}|^{n-1}} \geq \frac{1}{2}, \quad k, s > 0.$$

Поэтому для того чтобы показать, что из (3.4) следует (3.3), надо установить, что из (3.4) выводится неравенство

$$\inf_{k, s \in \mathbb{N}: \tilde{\rho}_k \neq \tilde{\rho}_s} \frac{|\tilde{\rho}_k^n - \tilde{\rho}_s^n|}{|\tilde{\rho}_k|^{n-1} + |\tilde{\rho}_s|^{n-1}} > 0. \quad (3.5)$$

Но по предположению $\tilde{\rho}_k \neq 0$ и $|\arg \tilde{\rho}_k| \leq \pi/(3n)$ при $k \in \mathbb{N}$, откуда получаем, что $\operatorname{Re} \tilde{\rho}_k^{n-1-j} \tilde{\rho}_s^j > 0$ для $k, s \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, n-2$, а $\operatorname{Re} \tilde{\rho}_k^{n-1} \geq 2^{-1} |\tilde{\rho}_k|^{n-1}$ для $k \in \mathbb{N}$. Из этих соотношений получаем

$$|\tilde{\rho}_k^n - \tilde{\rho}_s^n| \geq |\tilde{\rho}_k - \tilde{\rho}_s| \left| \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Re} \tilde{\rho}_k^{n-1-j} \tilde{\rho}_s^j \right| \geq 2^{-1} |\tilde{\rho}_k - \tilde{\rho}_s| (|\tilde{\rho}_k|^{n-1} + |\tilde{\rho}_s|^{n-1}), \quad k, s \in \mathbb{N},$$

и поэтому из (3.4) вытекает (3.5), что и завершает рассмотрение случая нечетного n .

Случай четного n получается из асимптотической формулы (2.3) и из доказательства того, что из (3.4) вытекает (3.5).

В дальнейшем понадобится один частный случай определения 3 из работы [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Регулярные краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, заданные функционалами (1.4), называются *(o-0)-регулярными*, если функции σ_j из представлений (1.4) удовлетворяют требованию

$$\int_0^1 e^{i\zeta\tau} d\sigma_j(\tau) = o(1) \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

для всех $j = 1, \dots, n$.

Можно показать, что требование (3.6) обуславливает отсутствие скачков у функций σ_j , т.е. их непрерывность. Однако (см., например, [35; гл. V, § 3]) выполнение двух условий $\sigma_j \in BV$ и $\sigma_j \in C$ не гарантирует (3.6). Но если $\sigma_j \in AC$, то согласно теоремам Лебега и Римана–Лебега требование (3.6) справедливо.

Приведем еще одно простое, но важное в приложениях, достаточное условие, гарантирующее (o-0)-регулярность краевых условий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть функционалы

$$U_j(x) := \alpha_j x^{(k_j)}(0) + \beta_j x^{(k_j)}(1) + V_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

задают регулярные в смысле определения 1.2 краевые условия, причем в (3.7)

$V_j \in (C^{\gamma_j})^*$ при некоторых $\gamma_j \in [0, k_j]$, если $k_j \neq 0$, и $V_j(x) := \int_0^1 x(\tau) \rho_j(\tau) d\tau$ с $\rho_j \in L_1$, если $k_j = 0$. Тогда краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, (o-0)-регулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду ранее сказанного надо показать, что для тех j , для которых $k_j \neq 0$, функционалы V_j представимы в виде

$$V_j(x) = \int_0^1 x^{(k_j)}(\tau) d\sigma_j(\tau) + \sum_{s=0}^{k_j-1} c_{j,s} x^{(s)}(0) \quad (3.8)$$

с функциями σ_j , принадлежащими BV и удовлетворяющими требованию (3.6). По условию $V_j \in (C^{\gamma_j})^*$, $\gamma_j \in [0, k_j]$, а пространство C^{k_j} вложено в пространство C^{γ_j} , поэтому $V_j \in (C^{k_j})^*$. Значит, функционалы V_j представимы в виде (3.8) с $\sigma_j \in BV$. Полагая в (3.8) $x(\tau) = e^{i\zeta\tau}$, получаем

$$\left| \int_0^1 e^{i\zeta\tau} d\sigma_j(\tau) \right| \leq \frac{1}{|\zeta|^{k_j}} |V_j(e^{i\zeta(\cdot)})| + \frac{1}{|\zeta|^{k_j}} \left| \sum_{s=0}^{k_j-1} c_{j,s} \zeta^s \right|, \quad \zeta \neq 0. \quad (3.9)$$

Из определения нормы в пространстве C^μ и мультипликативного неравенства (1.2) заключаем, что $\|e^{i\zeta(\cdot)}\|_{C^\mu} \leq 4|\zeta|^\mu$, $|\zeta| \geq 1$ и $\zeta \in \mathbb{R}$. Тем самым,

$$|V_j(e^{i\zeta(\cdot)})| \leq 4\|V_j\|_{(C^{\gamma_j})^*} |\zeta|^{\gamma_j} \quad \text{при} \quad |\zeta| \geq 1, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Но $\gamma_j < k_j$, поэтому из этого неравенства и оценки (3.9) вытекает (3.6).

Из предложения 3.2 следует, в частности, что двуточечные регулярные краевые условия (т.е. заданные функционалами (1.7)) являются $(o-0)$ -регулярными.

В случае $(o-0)$ -регулярных краевых условий асимптотические формулы (2.2) и (2.3) для собственных значений $\rho_{k,v}$ задачи (2.1) допускают существенное уточнение. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, отметим, что в нем числа θ_{-1} , θ_0 , θ_1 определены равенствами (1.8), $\widehat{k} = k_1 + \dots + k_n$ — суммарный порядок краевых условий $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, заданных функционалами (1.4), а $\ln z := \ln|z| + i \arg z$ для $z \neq 0$. Тогда в случае $(o-0)$ -регулярных краевых условий теорема 1 работы [5] принимает такой вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть в задаче (2.1) краевые условия $(o-0)$ -регулярны в смысле определения 3.1. Тогда все достаточно большие по модулю собственные значения задачи (2.1) с учетом их кратностей можно занумеровать так, что они представимы в виде

1) в случае нечетного n

$$\begin{aligned} \rho_{k,v}^{(1)} &= \omega_v \left(i^n 2\pi \left(k - \frac{\widehat{k}}{n} \right) - \ln \left(-\frac{\theta_1}{\theta_0} \right) + o(1) \right), \\ k &= N + \left[\left[\frac{\widehat{k}}{n} \right] \right], \quad N + \left[\left[\frac{\widehat{k}}{n} \right] \right] + 1, \dots, \\ \rho_{k,v}^{(2)} &= \omega_v \left(-i^n 2\pi k - \ln \left(-\frac{\theta_1}{\theta_0} \right) + o(1) \right), \quad k = N, N+1, \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $v = 1, \dots, n$, а N — некоторое натуральное число;

2) в случае четного n

$$\begin{aligned} \rho_{k,v}^{(1)} &= \omega_v (i^{n-1} 2\pi k + \ln z_1 + o(1)), \\ \rho_{k,v}^{(2)} &= \omega_v (i^{n-1} 2\pi k + \ln z_2 + o(1)), \quad k = N, N+1, \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $v = 1, \dots, n$, N – некоторое натуральное число, а z_1 и z_2 – корни уравнения

$$\theta_0 + z(\theta_{-1} + \theta_1) - z^2 \theta_0 \exp \frac{i^{n-1} 2\pi \widehat{k}}{n} = 0. \quad (3.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. $(o-0)$ -регулярные краевые условия называются *усиленно регулярными*, если n нечетно, а в случае четного n – если

$$(\theta_{-1} + \theta_1)^2 + 4\theta_0^2 \exp \frac{i^{n-1} 2\pi \widehat{k}}{n} \neq 0. \quad (3.13)$$

Из формул (1.9) заключаем, что при $n = 2$ $(o-0)$ -регулярные краевые условия $U_1(x) = 0$, $U_2(x) = 0$ являются усиленно регулярными, если у функционалов (1.4), которые задают эти краевые условия, $k_1 = k_2$ или $k_1 \neq k_2$ и $\alpha_1 \neq \pm \alpha_2$, $\beta_1 \neq \pm \beta_2$.

Требование (3.13) означает, что уравнение (3.12) имеет два различных корня, поэтому из формул (3.10) и (3.11) с учетом предложения 3.1 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть в задаче (1.3) краевые условия усиленно регулярны в смысле определения 3.2. Тогда множество собственных значений задачи (1.3) отделимо и все достаточно большие по модулю собственные значения простые (т.е. им отвечает лишь одна, с точностью до скалярного множителя, собственная функция, у которой нет присоединенных).

Отметим, что требование усиленной регулярности краевых условий является лишь достаточным, хотя и важным условием отделимости множества собственных значений задачи (1.3). Действительно, пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и $m, n \geq 2$. Тогда собственными значениями задачи

$$x^{(n)} = \lambda x, \quad \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} x^{(j-1)} \left(\frac{s}{m} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.14)$$

являются числа $(i2\pi mk)^n$, $k \in \mathbb{Z}$, каждое из которых имеет кратность m . Отсюда следует, что множество собственных значений задачи (3.14) отделимо. Но краевые условия $x^{(j-1)}(0) + (-1)^m x^{(j-1)}(1) = 0$, $j = 1, \dots, n$, в случае нечетного m являются условиями периодического типа и поэтому регулярны [3; гл. II, § 4, п. 8]. Эти же краевые условия будут регулярными и в случае четного m , что доказывается точно так же, как и регулярность краевых условий периодического типа. Тем самым, краевые условия в задаче (3.14) регулярны в смысле определения 1.2. Но легко видеть, что эти краевые условия не являются $(o-0)$ -регулярными в смысле определения 3.1, а значит, они не могут быть усиленно регулярными в смысле определения 3.2. (Что, впрочем, следует также из предложения 3.4, поскольку у задачи (3.14) все собственные значения имеют кратность m .)

В связи с предложением 3.4 возникает вопрос, положительный ответ на который кажется весьма правдоподобным.

ЗАДАЧА. Пусть краевые условия $U_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$, регулярны в смысле определения 1.2 и для любого оператора $F \in [C^\gamma, L_1]$ с $\gamma \in [0, n-1]$ множество собственных значений задачи (1.3) отделимо. Будут ли тогда эти краевые условия усиленно регулярными в смысле определения 3.2?

3.2. Оператор суммирования корневых функций. Все окружности, участвующие в последующих построениях, считаем ориентированными против часовой стрелки. Пусть $\mathcal{T}(\zeta) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \zeta\}$ – окружность радиуса $\zeta > 0$. Через H_1 обозначим класс Харди, т.е. множество голоморфных в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ функций α , для которых $\|\alpha(\xi e^{i(\cdot)})\|_{L_1[0, 2\pi]}$ равномерно ограничена по $\xi \in (0, 1)$. Известно [36; гл. II, § 2], что если $\alpha \in H_1$, то для почти всех $\theta \in [0, 2\pi)$ существует радиальный предел $\alpha(e^{i\theta}) := \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \alpha(\xi e^{i\theta})$ и $\alpha(e^{i(\cdot)}) \in L_1[0, 2\pi]$.

Далее предполагаем, что функция $\alpha \in H_1$, а число $\zeta > 0$. Для каждого индекса $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего условию $|\mu_k| < \zeta^n$, определим оператор

$$N_k(\alpha; \zeta) := \alpha\left(\frac{\mu_k}{\zeta^n}\right) N_k + \sum_{j=1}^{d_k} \frac{1}{j!} \alpha^{(j)}\left(\frac{\mu_k}{\zeta^n}\right) \frac{D_k^j}{\zeta^{jn}}, \quad (3.15)$$

где N_k и D_k – из представления (1.49) резольвенты $R(\lambda; A)$ оператора A в окрестности его собственного значения μ_k .

Обозначим через $\mathcal{T}_k$ какую-либо окружность, содержащую лишь одно собственное значение μ_k , являющееся ее центром. При этом считаем радиус окружности столь малым, что она находится в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \zeta^n\}$. Тогда из формул (1.49) и (3.15) имеем

$$N_k(\alpha; \zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_k} \alpha\left(\frac{\lambda}{\zeta^n}\right) R(\lambda; A) d\lambda. \quad (3.16)$$

Введем теперь оператор

$$S_\zeta(\alpha) := \sum_{k: |\mu_k| < \zeta^n} N_k(\alpha; \zeta), \quad (3.17)$$

причем если в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \zeta^n\}$ нет собственных значений задачи (1.3), то $S_\zeta(\alpha) := 0$. Тем самым $S_\zeta(\alpha)$ определен для всех $\zeta > 0$.

Пусть $\mathbf{1}$ – функция, принимающая значение 1 при $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $S_\zeta(\mathbf{1}) = P_\zeta$, где P_ζ – проектор Ф. Рисса, заданный формулой (1.51).

Если на окружности $\mathcal{T}(\zeta^n)$ нет собственных значений задачи (1.3), то

$$S_\zeta(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta^n)} \alpha\left(\frac{\lambda}{\zeta^n}\right) R(\lambda; A) d\lambda. \quad (3.18)$$

Оператор $S_\zeta(\alpha)$ называется *оператором суммирования с ядром α корневых функций задачи (1.3)*, а $S_\zeta(\alpha)f$ – *средним (или методом суммирования) функции f по ядру α* .

3.3. Аналог оценки Лебега коэффициентов Фурье для проекторов Ф. Рисса. В следующем утверждении устанавливаются оценки норм операторов $N_k, D_k, \dots, D_k^{d_k}$ из представления (1.49).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть множество собственных значений задачи (1.3) отделимо. Тогда найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ с $\mu_k \neq 0$ оценки

$$\|N_k\|_{[W_{1,U}^l, W_q^m]} \leq c|\mu_k|^{(m-l)/n}, \quad \|D_k^j\|_{[W_{1,U}^l, W_q^m]} \leq c|\mu_k|^{j+(m-l-j)/n}, \quad (3.19)$$

$$j \in \{1, \dots, d_k\}, \quad l, m \in \mathbb{P}, \quad l \leq n,$$

справедливы в следующих случаях:

- 1) $m \leq n - 1$, $q = \infty$;
- 2) $m = n$, $q = p_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{T}_k$ – какая-либо окружность, содержащая лишь одно собственное значение μ_k . Введем операторы

$$J_{j,k} := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_k} (\lambda - \mu_k)^j R(\lambda; A) d\lambda. \quad (3.20)$$

Учитывая представление (1.49), получаем равенства $N_k = J_{0,k}$, $D_k^j = J_{j,k}$, $j = 1, \dots, d_k$. Поэтому для доказательства теоремы необходимо установить оценки норм операторов $J_{j,k}$.

Так как задача (2.1) получается из задачи (1.3) заменой в ней спектрального параметра λ на $-\rho^n$, то для каждого собственного значения μ_k задачи (1.3) найдется собственное значение $\rho_{s,1}$ задачи (2.1), для которого $\mu_k = -\rho_{s,1}^n$ ($s := s(k)$) и $s \in \mathbb{Z}$ или $s \in \mathbb{N}$ в зависимости от четности n). Определим числа $\varkappa := \inf\{|\rho_{k,v} - \rho_{s,w}| : \rho_{k,v} \neq \rho_{s,w}\}$ и $\varepsilon := 2^{-1} \min\{\varkappa; 1\}$, причем $\varepsilon \in (0, 1/2]$ ввиду предложения 3.1. Пусть $\mathcal{T}_{s,1}(\varepsilon)$ – окружность радиуса ε с центром в $\rho_{s,1}$. Отметим, что внутри круга, ограниченного $\mathcal{T}_{s,1}(\varepsilon)$, находятся лишь те собственные значения задачи (2.1), которые совпадают с ее центром. Отсюда, делая в интеграле (3.20) замену $\lambda = -\rho^n$ и учитывая равенство $\mu_k = -\rho_{s,1}^n$, получаем

$$(J_{j,k}f)(t) = \frac{(-1)^j n}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_{s,1}(\varepsilon)} \rho^{n-1} (\rho^n - \rho_{s,1}^n)^j (R(-\rho^n; A)f)(t) d\rho, \quad f \in W_1^l. \quad (3.21)$$

Согласно предложению 1.8 $\|N_k\|_{[W_{1,U}^l, W_q^m]}$, $\|D_k^j\|_{[W_{1,U}^l, W_q^m]}$, $j = 1, \dots, d_k$, равномерно ограничены для любого конечного множества индексов k . Поэтому оценки (3.19) достаточно установить при дополнительном предположении $|\mu_k| \geq (\eta + 1)^n$ (а значит, $|\rho_{s,1}| \geq \eta + 1$), где $\eta := \eta(\xi, F)$ – из утверждения теоремы 2.1, а $\xi > \varepsilon$ выбирается из условия $|\operatorname{Re} \omega_v^{-1} \rho_{k,v}| < \xi - \varepsilon$ для всех $v = 1, \dots, n$ и $k \in \mathbb{Z}$, если n нечетно, и $k \in \mathbb{N}$, если n четно. (Существование такого ξ вытекает из асимптотических формул (2.2) и (2.3) для собственных значений $\rho_{k,v}$.) Отсюда и из определения (2.13) области $\Xi_r(\eta, \xi)$ заключаем, что найдется индекс $r \in \{1, \dots, n\omega_n\}$, для которого окружность $\mathcal{T}_{s,1}(\varepsilon)$ принадлежит $\Xi_r(\eta, \xi)$. Положим теперь в теореме 2.1 так выбранные ξ и r и подставим в формулу (3.21) представление (2.31) $(R(-\rho^n; A)f)(t)$, после чего учтем голоморфность в области $\Xi_r(\eta, \xi)$ оператор-функций $Q_{l,r}$ и $H_{l,r}$. В результате придем к равенству

$$(J_{j,k}f)(t) = \frac{(-1)^j n}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_{s,1}(\varepsilon)} \rho^{n-1} (\rho^n - \rho_{s,1}^n)^j \sum_{h=1}^n \frac{\Delta_{h,l,r}(\rho; f)}{\Delta_r(\rho)} x_{h,r}(\rho; t) d\rho, \quad f \in W_1^l. \quad (3.22)$$

Но $2^{-1}|\rho_{s,1}| < |\rho| < 2|\rho_{s,1}|$ при $|\rho - \rho_{s,1}| = \varepsilon$, поэтому

$$|\rho^n - \rho_{s,1}^n| = |\rho - \rho_{s,1}| \left| \sum_{u=0}^{n-1} \rho^{n-1-u} \rho_{s,1}^u \right| \leq \varepsilon 2^n |\rho_{s,1}|^{n-1},$$

а учитывая предложение 2.6 и неравенство $\varphi(\rho) \leq 1$ при $\rho \in \mathbb{C}$, имеем

$$|\rho|^{n-1} \left\| \sum_{h=1}^n \frac{\Delta_{h,l,r}(\rho; f)}{\Delta_r(\rho)} x_{h,r}(\rho; \cdot) \right\|_{W_q^m} \leq c(\varepsilon) |\rho_{s,1}|^{m-l} \|f\|_{W_1^l},$$

$$f \in W_{1,U}^l, \quad \rho \in \mathcal{T}_{s,1}(\varepsilon).$$

Из этих оценок и из равенства (3.22) выводим

$$\|J_{j,k} f\|_{W_q^m} \leq c |\rho_{s,1}|^{m-l+(n-1)j} \|f\|_{W_1^l}, \quad f \in W_{1,U}^l.$$

Так как $\mu_k = -\rho_{s,1}^n$, $N_k = J_{0,k}$ и $D_k^j = J_{j,k}$, то полученное неравенство совпадает с утверждением (3.19).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, операторы $N_k(\alpha; \zeta)$ заданы формулой (3.15), а у голоморфной в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ функции α все производные ограничены. Тогда найдется такая постоянная $c := c(\alpha; F, U) > 0$, что для всех $\zeta > \min\{|\mu_r|^{1/n} : r \in \mathbb{N}, \mu_r \neq 0\}$ и $k \in \mathbb{N}$ $c 0 < |\mu_k| < \zeta^n$ оценка

$$\|N_k(\alpha; \zeta) f\|_{W_q^s} \leq c |\mu_k|^{(s-l)/n} K(|\mu_k|^{-m/n}, f; W_1^l, W_{1,U}^{l+m}), \quad (3.23)$$

$$f \in W_{1,U}^l, \quad l, s \in \mathbb{P}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad l + m \leq n,$$

справедлива в следующих случаях:

- 1) $s \leq n - 1$, $q = \infty$;
- 2) $s = n$, $q = p_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что $d := \sup\{d_k : k \in \mathbb{N}\} < \infty$, где d_k — из представления (1.49) резольвенты $R(\lambda; A)$ (или, что то же самое, из определения (3.15) оператора $N_k(\alpha; \zeta)$). Действительно, кратность каждого собственного значения μ_k не меньше $d_k + 1$, причем множество $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ можно занумеровать с учетом кратностей так, что у полученной после перенумерации последовательности члены λ_k имеют вид $\lambda_k = (i2\pi k + O(1))^n$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. формулу (1.48)). Отсюда и следует равномерная ограниченность кратностей всех μ_k , а значит, и d_k .

Так как $d_k \leq d$ и $D_k^{d_k+1} = 0$, то в (3.15) можно считать все $d_k = d$. По условию $\beta_j := \sup\{|\alpha^{(j)}(\lambda)| : |\lambda| < 1\} < \infty$ при каждом $j \in \mathbb{P}$, поэтому из (3.15) и (3.19) имеем

$$\|N_k(\alpha; \zeta)\|_{[W_{1,U}^l, W_q^m]} \leq c_1 |\mu_k|^{(m-l)/n} \sum_{j=0}^d \beta_j \zeta^{-jn} |\mu_k|^{(n-1)j/n}.$$

Учитывая теперь условие $|\mu_k| < \zeta^n$, получаем, что оценка

$$\|N_k(\alpha; \zeta)\|_{[W_{1,U}^l, W_q^m]} \leq c_2 |\mu_k|^{(m-l)/n}, \quad l, m \in \mathbb{P}, \quad l \leq n, \quad (3.24)$$

справедлива в следующих случаях:

- 1) $m \leq n - 1$, $q = \infty$;
- 2) $m = n$, $q = p_0$.

Выведем отсюда утверждение (3.23). Пусть g – произвольная функция из $W_{1,U}^{l+m}$. Тогда

$$\|N_k(\alpha; \zeta)f\|_{W_q^s} \leq \|N_k(\alpha; \zeta)\|_{[W_{1,U}^l, W_q^s]} \|f - g\|_{W_1^l} + \|N_k(\alpha; \zeta)\|_{[W_{1,U}^{l+m}, W_q^s]} \|g\|_{W_1^{l+m}}.$$

Отсюда и из (3.24) имеем

$$\|N_k(\alpha; \zeta)f\|_{W_q^s} \leq c|\mu_k|^{(s-l)/n} (\|f - g\|_{W_1^l} + |\mu_k|^{-m/n} \|g\|_{W_1^{l+m}}).$$

Переходя в этом неравенстве к нижней грани по $g \in W_{1,U}^{l+m}$, приходим к утверждению (3.23).

Как видно из вывода следствия 3.1, требование ограниченности в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ всех производных функций α можно ослабить. А именно если ввести число $d_\infty := \limsup_{k \rightarrow \infty} d_k$ и предположить, что $\alpha^{(d_\infty)}$ – голоморфная и ограниченная в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ функция, то справедливо утверждение следствия 3.1. Отсюда с учетом предложения 3.4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть в задаче (1.3) краевые условия усиленно регулярны в смысле определения 3.2, а α – голоморфная и ограниченная в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ функция. Тогда справедливо утверждение следствия 3.1.

Если положить в следствии 3.1 функцию $\alpha = \mathbf{1}$, то (см. формулу (3.15)) получим оценку сверху $\|N_k f\|_{W_q^s}$ через соответствующий K -функционал. Для значений $l = s = 0$ эта оценка примет вид $\|N_k f\|_\infty \leq cK(|\mu_k|^{-m/n}, f; L_1, W_{1,U}^m)$, где $f \in L_1$, $\mu_k \neq 0$ и $m \in \{0, \dots, n\}$. Отсюда, из оценки (1.44) и предложения 1.3 выводим

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть множество собственных значений задачи (1.3) отделимо. Тогда найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что оценка

$$\|N_k f\|_\infty \leq c\omega(|\mu_k|^{-1/n}, f; L_1) + c|\mu_k|^{-1/n} \|f\|_1, \quad f \in L_1, \quad (3.25)$$

справедлива при всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $|\mu_k| \geq 1$. Если, кроме того, $N_k \mathbf{1} = 0$, то слагаемое $c|\mu_k|^{-1/n} \|f\|_1$ в оценке (3.25) можно отбросить.

Неравенство (3.25) полностью аналогично хорошо известной оценке Лебега коэффициентов Фурье периодической функции посредством модуля непрерывности (см., например, [35; гл. II, § 4 и примечания к гл. II, § 4]).

3.4. О скорости сходимости средних. Условия на ядро суммирования α , при которых среднее $S_\zeta(\alpha)f$ сходится к функции f , при четном n менее жесткие, чем при нечетном n . Это отличие отражено в следующем утверждении. В нем число w_n задано соотношениями (2.5), т.е. $w_n := 2$, если n нечетно, и $w_n := 1$, если n четно, функция φ определена равенством (2.14), а для $\zeta > 0$ дуга

$$\mathcal{T}_n(\zeta) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \zeta, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{2\pi}{n} \right\} \quad (3.26)$$

ориентирована так же, как и окружность $\mathcal{T}(\zeta)$, на которой она находится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть функция α задана на единичной окружности $\mathcal{T}(1)$, $\alpha(e^{i(\cdot)}) \in L_1[0, 2\pi]$ и

$$c(\alpha) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\alpha(i^n e^{i\theta})|}{|\sin(\theta\omega_n/2)|} d\theta < \infty. \quad (3.27)$$

Тогда для $\zeta > 0$ и $\nu \in [0, 1]$ интеграл

$$\mathcal{J} := \int_{\mathcal{T}_n(\zeta)} \left| \alpha\left(-\frac{\rho^n}{\zeta^n}\right) \right| |\varphi(\rho)^\nu| d\rho \quad (3.28)$$

допускает оценку

$$\mathcal{J} \leq c(\alpha) \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{1-\nu}. \quad (3.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенством

$$\beta(\theta) := \min\{|\operatorname{Re} \omega_j e^{i\theta}| : j = 1, \dots, n\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

зададим функцию β , имеющую период π/n , если n нечетно, и $2\pi/n$, если n четно. Ввиду определения (2.14) функции φ справедливо неравенство $\varphi(\rho) \leq (\zeta\beta(\theta))^{-1}$ для $\rho = \zeta e^{i\theta}$. Делая теперь в интеграле (3.28) замену $\rho = \zeta e^{i\theta}$, приходим к оценке

$$\mathcal{J} \leq \zeta^{1-\nu} \int_a^{a+2\pi/n} \frac{|\alpha(-e^{in\theta})|}{\beta(\theta)^\nu} d\theta, \quad (3.31)$$

где a – произвольное вещественное число. При выводе этой оценки учитывалось, что функция $\alpha(-e^{in(\cdot)})$ имеет период $2\pi/n$, а дуга $\mathcal{T}_n(\zeta)$ видна из начала координат под углом $2\pi/n$.

Пусть n нечетное. Считая в (3.31) $a = \pi/(2n) + \pi/2$, а затем разбивая интеграл на два с пределами интегрирования от $\pi/(2n) + \pi/2$ до $3\pi/(2n) + \pi/2$ и от $3\pi/(2n) + \pi/2$ до $5\pi/(2n) + \pi/2$, после чего в первом интеграле делая замену $\theta = \pi/n + \pi/2 + \tau$, а во втором – $\theta = 2\pi/n + \pi/2 + \tau$, где $-\pi/(2n) \leq \tau \leq \pi/(2n)$, и учитывая (π/n) -периодичность функции β , получаем

$$\mathcal{J} \leq \zeta^{1-\nu} \int_{-\pi/(2n)}^{\pi/(2n)} \frac{|\alpha(i^n e^{in\tau})|}{\beta(\pi/n + \pi/2 + \tau)^\nu} d\tau + \zeta^{1-\nu} \int_{-\pi/(2n)}^{\pi/(2n)} \frac{|\alpha(-i^n e^{in\tau})|}{\beta(\pi/n + \pi/2 + \tau)^\nu} d\tau. \quad (3.32)$$

Поскольку ω_j – корни n -й степени из -1 , то $\omega_j = \exp(-i\pi/n + i2\pi j/n)$, откуда и из определения (3.30) функции β имеем

$$\beta\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + \tau\right) = \min\left\{\left|\sin\left(\tau + \frac{2\pi j}{n}\right)\right| : j = 1, \dots, n\right\} = |\sin \tau|, \quad -\frac{\pi}{2n} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Подставляя полученное равенство в (3.32) и делая замену $\tau = \theta/n$, находим

$$\mathcal{J} \leq \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{1-\nu} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\alpha(i^n e^{i\theta})|}{n^\nu |\sin(\theta/n)|^\nu} d\theta + \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{1-\nu} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\alpha(-i^n e^{i\theta})|}{n^\nu |\sin(\theta/n)|^\nu} d\theta.$$

Из этой оценки, неравенства $n|\sin(\theta/n)| \geq |\sin \theta|$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, и условия (3.27) вытекает утверждение (3.29) в случае нечетного n .

Случай четного n рассматривается проще, поскольку тогда в интеграле из правой части в (3.31) следует положить $a = \pi/2$, сделать замену $\theta = \pi/n + \pi/2 + \tau$, $-\pi/n \leq \tau \leq \pi/n$, и повторить (с учетом равенства $\beta(\pi/n + \pi/2 + \tau) = |\sin \tau|$, $-\pi/n \leq \tau \leq \pi/n$, и неравенства $n|\sin(\theta/n)| \geq |\sin(\theta/2)|$, $n \geq 2$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$) предыдущие рассуждения. При этом разбивать интеграл (3.31) на два слагаемых, конечно, не надо.

Далее часто будет использоваться следующее простое утверждение, непосредственно вытекающее из определения множества Ψ_ε , данного в п. 1.6, и асимптотической формулы (1.48) для собственных значений λ_k задачи (1.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, \pi/2)$ существует возрастающая последовательность $\{\zeta_d\}_{d \in \mathbb{N}}$, принадлежащая множеству Ψ_{ε_0} и представимая в виде*

$$\zeta_d = 2\pi d + O(1), \quad d \in \mathbb{N}, \quad (3.33)$$

причем количество собственных значений λ_k (а значит, и μ_k) задачи (1.3), попавших в каждое кольцо $\{\lambda \in \mathbb{C} : \zeta_d^n < |\lambda| < \zeta_{d+1}^n\}$ равномерно ограничено по $d \in \mathbb{N}$.

Основным утверждением данного параграфа является

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть функция $\alpha \in H_1$, $\alpha(0) = 1$ и α удовлетворяет условию (3.27). Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon) := c(\varepsilon; \alpha; F, U) > 0$, что оценка*

$$\begin{aligned} \|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} &\leq c(\varepsilon)K(\zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}), \\ f &\in W_{p,U}^l, \quad \zeta \in \Psi_\varepsilon, \quad l \in \mathbb{P}, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

справедлива в следующих случаях:

- 1) $l + m \leq n - 1$, $p \in [1, \infty]$;
- 2) $l + m = n$, $p \in [1, p_0]$.

Если множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, а функция α голоморфна в замкнутом круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, $\alpha(0) = 1$ и α удовлетворяет условию (3.27), то предыдущее утверждение справедливо при всех $\zeta > 0$ с постоянной $c(\varepsilon)$, не зависящей от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дуга $\mathcal{T}_n(\zeta)$ задана формулой (3.26). Делая в интеграле (3.18) замену $\lambda = -\rho^n$, приходим к равенству

$$S_\zeta(\alpha) = \frac{n}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_n(\zeta)} \rho^{n-1} \alpha\left(-\frac{\rho^n}{\zeta^n}\right) R(-\rho^n; A) d\rho. \quad (3.35)$$

Согласно определению множества Ψ_ε все точки дуги $\mathcal{T}_n(\zeta)$ при $\zeta \in \Psi_\varepsilon$ отстоят на расстоянии не меньше ε от точек спектра $\rho_{k,v}$ задачи (2.1). Отсюда на основании теоремы 2.2 $\|R(-\rho^n; A)\|_{[W_{p,U}^l, W_p^l]} \leq c(\varepsilon)|\rho|^{1-n}\varphi(\rho)$ при $\rho \in \mathcal{T}_n(\zeta)$. Из этой оценки и равенства (3.35) имеем

$$\|S_\zeta(\alpha)\|_{[W_{p,U}^l, W_p^l]} \leq \frac{nc(\varepsilon)}{2\pi} \int_{\mathcal{T}_n(\zeta)} \left| \alpha\left(-\frac{\rho^n}{\zeta^n}\right) \right| \varphi(\rho) |d\rho|, \quad \zeta \in \Psi_\varepsilon,$$

и ввиду предложения 3.5

$$\|S_\zeta(\alpha)\|_{[W_{p,U}^l, W_p^l]} \leq c_1(\varepsilon), \quad \zeta \in \Psi_\varepsilon. \quad (3.36)$$

Поскольку функция $\alpha \in H_1$ и $\alpha(0) = 1$, то

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta^n)} \frac{1}{\lambda} \alpha\left(\frac{\lambda}{\zeta^n}\right) d\lambda = \frac{n}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_n(\zeta)} \rho^{-1} \alpha\left(-\frac{\rho^n}{\zeta^n}\right) d\rho.$$

Из этих равенств и из (3.35) заключаем, что

$$g - S_\zeta(\alpha)g = -\frac{n}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_n(\zeta)} \rho^{n-1} \alpha\left(-\frac{\rho^n}{\zeta^n}\right) (R(-\rho^n; A)g - \rho^{-n}g) d\rho,$$

откуда на основании теоремы 2.3 и предложения 3.5 получаем

$$\|g - S_\zeta(\alpha)g\|_{W_p^l} \leq c_2(\varepsilon) \zeta^{-m} \|g\|_{W_p^{l+m}}, \quad g \in W_{p,U}^{l+m}, \quad \zeta \in \Psi_\varepsilon. \quad (3.37)$$

Но для функций f из $W_{p,U}^l$ и g из $W_{p,U}^{l+m}$

$$\|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} \leq (1 + \|S_\zeta(\alpha)\|_{[W_{p,U}^l, W_p^l]}) \|f - g\|_{W_p^l} + \|g - S_\zeta(\alpha)g\|_{W_p^l},$$

откуда, учитывая (3.36), (3.37), выводим

$$\|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} \leq c_3(\varepsilon) (\|f - g\|_{W_p^l} + \zeta^{-m} \|g\|_{W_p^{l+m}}), \quad g \in W_{p,U}^{l+m}, \quad \zeta \in \Psi_\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к нижней грани по $g \in W_{p,U}^{l+m}$, приходим к утверждению (3.34).

Покажем теперь, что если множество собственных значений задачи (1.3) отделимо, а функция α голоморфна в замкнутом круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, то утверждение (3.34) справедливо для всех $\zeta > 0$.

При доказательстве этого факта потребуется неравенство

$$\varphi(\rho_1) \leq \varphi(\rho)(1 + |\rho - \rho_1|), \quad \rho, \rho_1 \in \mathbb{C}. \quad (3.38)$$

Действительно, из определения (2.14) функции φ и из неравенства $\varphi(\rho_1) \leq 1$, $\rho_1 \in \mathbb{C}$, имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho)| &= |\varphi(\rho_1)\varphi(\rho)(\varphi(\rho)^{-1} - \varphi(\rho_1)^{-1})| \\ &\leq \varphi(\rho) \left| \min\{|\operatorname{Re} \rho\omega_1|; \dots; |\operatorname{Re} \rho\omega_n|\} - \min\{|\operatorname{Re} \rho_1\omega_1|; \dots; |\operatorname{Re} \rho_1\omega_n|\} \right| \\ &\leq \varphi(\rho) |\rho - \rho_1|, \end{aligned}$$

откуда и следует (3.38).

Пусть $\{\zeta_d\}_{d \in \mathbb{N}}$ — последовательность из Ψ_{ε_0} , существование которой гарантирует предложение 3.6. Введем проекторы

$$M_d := \sum_{k: \zeta_d^n < |\mu_k| < \zeta_{d+1}^n} N_k, \quad d \in \mathbb{N}, \quad (3.39)$$

причем если в кольце $\{\lambda \in \mathbb{C} : \zeta_d^n < |\lambda| < \zeta_{d+1}^n\}$ нет собственных значений задачи (1.3), то $M_d := 0$. Из оценок (3.19) и предложения 3.6 получаем

$$\|M_d\|_{[W_{p,U}^{l+m}, W_p^l]} \leq c \zeta_{d+1}^{-m}, \quad (3.40)$$

$$d \in \mathbb{N}, \quad l, m \in \mathbb{P}, \quad l + m \leq n - 1, \quad p \in [1, \infty].$$

Установим теперь, что

$$\|(I - M_d)R(-\rho^n; A)\|_{[W_{p,U}^l, W_p^l]} \leq c|\rho|^{1-n}\varphi(\rho), \quad (3.41)$$

$$d \in \mathbb{N}, \quad \zeta_d \leq |\rho| < \zeta_{d+1}, \quad l \in \{0, \dots, n-1\}, \quad p \in [1, \infty].$$

Поскольку область значений резольвенты $R(\lambda; A)$ лежит в $W_{p,U}^{n-1}$, то из теоремы 2.2 и оценки (3.40) с $m = 0$ выводим справедливость (3.41) при всех ρ с $|\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon_1$. Здесь $\varepsilon_1 := 3^{-1} \inf\{|\rho_{k,v} - \rho_{s,w}| : \rho_{k,v} \neq \rho_{s,w}\}$, и поэтому круги $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho - \rho_{k,v}| \leq \varepsilon_1\}$ либо совпадают, либо не пересекаются. Тем самым оценку (3.41) достаточно установить в каждом круге $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho - \rho_{k,v}| \leq \varepsilon_1\}$ с центрами в тех точках $\rho_{k,v}$, для которых $\zeta_d < |\rho_{k,v}| < \zeta_{d+1}$. Воспользовавшись определением (3.39) проекторов M_d , представлением (1.49) резольвенты $R(\lambda; A)$ в окрестности собственного значения μ_k , равенствами (1.50) и предложениями 1.8, 1.9, получаем, что $\rho_{k,v}$ с $\zeta_d < |\rho_{k,v}| < \zeta_{d+1}$ являются устраняемыми особыми точками мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $\rho \mapsto (I - M_d)R(-\rho^n; A)$, принимающей свои значения в $[W_p^l]$ с $l \in \{0, \dots, n-1\}$ и $p \in [1, \infty]$. Применяя вначале к функции $\rho \mapsto \rho^{n-1}(I - M_d)R(-\rho^n; A)$ принцип максимума нормы [37; п. 3.13] в круге $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho - \rho_{k,v}| \leq \varepsilon_1\}$, $\zeta_d < |\rho_{k,v}| < \zeta_{d+1}$, с использованием оценки (3.41) на окружности $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho - \rho_{k,v}| = \varepsilon_1\}$, а затем учитывая неравенство (3.38), имеем

$$|\rho|^{n-1}\|(I - M_d)R(-\rho^n; A)\|_{[W_{p,U}^l, W_p^l]} \leq c \max_{\rho_1: |\rho_1 - \rho_{k,v}| = \varepsilon_1} \varphi(\rho_1) \leq c(1 + 2\varepsilon_1)\varphi(\rho)$$

для $|\rho - \rho_{k,v}| \leq \varepsilon_1$, где $\zeta_d < |\rho_{k,v}| < \zeta_{d+1}$. Следовательно, оценка (3.41), возможно с иной положительной постоянной c , верна и во всех кругах $\{\rho \in \mathbb{C} : |\rho - \rho_{k,v}| \leq \varepsilon_1\}$, для которых $\zeta_d < |\rho_{k,v}| < \zeta_{d+1}$. А этого, как было установлено ранее, достаточно для справедливости (3.41) при всех ρ с $\zeta_d \leq |\rho| < \zeta_{d+1}$.

Кроме того, далее потребуется неравенство

$$\|(I - M_d)R(-\rho^n; A)f - \rho^{-n}f\|_{W_p^l} \leq c|\rho|^{1-m-n}\varphi(\rho)\|f\|_{W_p^{l+m}}, \quad (3.42)$$

$$f \in W_{p,U}^{l+m}, \quad d \in \mathbb{N}, \quad \zeta_d \leq |\rho| < \zeta_{d+1},$$

здесь и далее значения l , m и p те же, что и в утверждении теоремы 3.2.

Так как

$$(I - M_d)R(-\rho^n; A)f - \rho^{-n}f = (I - M_d)(R(-\rho^n; A)f - \rho^{-n}f) - \rho^{-n}M_d f,$$

то из теоремы 2.3 и оценки (3.40) заключаем, что для функций $f \in W_{p,U}^{l+m}$ и ρ с $|\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon_1$ справедливо неравенство

$$\|(I - M_d)R(-\rho^n; A)f - \rho^{-n}f\|_{W_p^l} \leq c|\rho|^{1-m-n}\varphi(\rho)\|f\|_{W_p^{l+m}} + c\zeta_{d+1}^{-m}|\rho|^{-n}\|f\|_{W_p^{l+m}}.$$

Но $\zeta_{d+1}^{-m} \leq |\rho|^{-m}$, а $|\rho|^{-1} \leq 2\varphi(\rho)$ при $\zeta_d \leq |\rho| < \zeta_{d+1}$. Отсюда следует (3.42) при дополнительном условии на ρ : $|\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon_1$. Из этого факта, повторяя доказательство оценки (3.41), выводим справедливость (3.42) для всех ρ с $\zeta_d \leq |\rho| < \zeta_{d+1}$.

Из формул (1.50), (3.15)–(3.17) и (3.39) заключаем, что для $\zeta_d \leq \zeta < \zeta_{d+1}$

$$(I - M_d)S_\zeta(\alpha) = \sum_{k: |\mu_k| < \zeta_d^n} N_k(\alpha; \zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta^n)} \alpha \left(\frac{\lambda}{\zeta^n} \right) (I - M_d)R(\lambda; A) d\lambda,$$

а значит,

$$(I - M_d)S_\zeta(\alpha) = \frac{n}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_n(\zeta)} \rho^{n-1} \alpha \left(-\frac{\rho^n}{\zeta^n} \right) (I - M_d)R(-\rho^n; A) d\rho, \quad \zeta_d \leq \zeta < \zeta_{d+1}. \quad (3.43)$$

Теперь, полностью повторяя доказательство оценки (3.34) с использованием равенства (3.43) и оценок (3.41) и (3.42) вместо равенства (3.35) и теорем 2.2 и 2.3 соответственно, получаем

$$\|f - (I - M_d)S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} \leq cK(\zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}), \quad (3.44)$$

$$f \in W_{p,U}^l, \quad d \in \mathbb{N}, \quad \zeta_d \leq \zeta < \zeta_{d+1}.$$

Далее для каждого $\zeta \geq \zeta_1$ выберем такое натуральное число d , что $\zeta_d \leq \zeta < \zeta_{d+1}$. Из определений (3.17) и (3.39) оператора суммирования $S_\zeta(\alpha)$ и проектора M_d имеем

$$\|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} \leq \|f - (I - M_d)S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} + \sum_{k: \zeta_d^n < |\mu_k| < \zeta^n} \|N_k(\alpha; \zeta)f\|_{W_p^l}, \quad (3.45)$$

причем если $\zeta_d = \zeta$ или если $\zeta_d < \zeta$ и в кольцо $\{\lambda \in \mathbb{C} : \zeta_d^n < |\lambda| < \zeta^n\}$ не попало ни одного собственного значения μ_k , то второе слагаемое в правой части (3.45) отсутствует. В этих случаях утверждение (3.34) следует из оценки (3.44). Поэтому далее считаем, что $\zeta_d < \zeta$ и в кольце $\{\lambda \in \mathbb{C} : \zeta_d^n < |\lambda| < \zeta^n\}$ имеются собственные значения μ_k .

Поскольку для $p \in [1, \infty]$

$$K(\delta, f; W_1^l, W_{1,U}^{l+m}) \leq K(\delta, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}), \quad \delta > 0, \quad f \in W_p^l,$$

то из следствия 3.1 при $l = s$ и из неубываемости K -функционала по δ получаем

$$\|N_k(\alpha, \zeta)f\|_{W_p^l} \leq cK(|\mu_k|^{-m/n}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}) \leq cK(\zeta_d^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}), \quad (3.46)$$

$$f \in W_{p,U}^{l+m}, \quad d \in \mathbb{N}, \quad \zeta_d^n < |\mu_k| < \zeta^n.$$

Так как количество слагаемых $\|N_k(\alpha; \zeta)f\|_{W_p^l}$ в правой части (3.45) равномерно ограничено (см. предложение 3.6), то, подставляя неравенства (3.44) и (3.46) в (3.45), приходим к соотношениям

$$\|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} \leq c_1 K(\zeta_d^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m})$$

$$= c_1 K\left(\left(\frac{\zeta}{\zeta_d}\right)^m \zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}\right) \leq c_1 \left(\sup_{d \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{d+1}}{\zeta_d}\right)^m K(\zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}).$$

Но согласно формуле (3.33) $\sup_{d \in \mathbb{N}} \zeta_{d+1}/\zeta_d < \infty$, поэтому из полученных соотношений вытекает утверждение (3.34) для всех $\zeta \geq \zeta_1$ с постоянной $c(\varepsilon)$, не зависящей от ε . Из определений (3.15) и (3.17) операторов $N_k(\alpha; \zeta)$ и $S_\zeta(\alpha)$ и из предложения 1.8 следует существование такой постоянной $c_2 > 0$, что $\|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l} \leq c_2 \|f\|_{W_p^l}$ для $0 < \zeta < \zeta_1$ и $f \in W_p^l$. Отсюда и из первого неравенства в (1.12) получаем оценку (3.34) для $0 < \zeta < \zeta_1$. Тем самым теорема 3.2 полностью доказана.

В последнем утверждении теоремы 3.2 условие голоморфности функции α в замкнутом круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ наложено для того, чтобы все производные α были ограничены в единичном круге. Если же предположить усиленную регулярность краевых условий в задаче (1.3), а в доказательстве последнего утверждения теоремы 3.2 вместо следствия 3.1 воспользоваться следствием 3.2, то требование на ядро α , при котором оценка (3.34) верна при всех $\zeta > 0$, удастся ослабить. А именно справедливо такое утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть в задаче (1.3) краевые условия усиленно регулярны в смысле определения 3.2, а α – голоморфная и ограниченная в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ функция, $\alpha(0) = 1$ и α удовлетворяет условию (3.27). Тогда утверждение (3.34) справедливо при всех $\zeta > 0$ и с постоянной $c(\varepsilon)$, не зависящей от ε .

Отметим, что неравенство $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l} \leq \|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l}$ и утверждение (1.15) теоремы 1.1 показывают, что оценка (3.34) в определенном смысле является точной.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условиям теорем 3.2 и 3.3 удовлетворяет достаточно большой набор ядер суммирования. Например, при $\beta > 0$ и $r \in \mathbb{N}$ ядро

$$\alpha_{\beta,r}(\lambda) := (1 - (-i^n \lambda)^r)^\beta \quad (3.47)$$

соответствует методу суммирования М. Рисса [38; § 6.4.2] и удовлетворяет условиям теорем 3.2 и 3.3 при произвольном r , если n нечетно, и при четном r , если n произвольное (см. требование (3.27)). Следует отметить, что в последнем утверждении теоремы 3.2 ядро α можно положить равным $\alpha_{\beta,r}$ при $\beta \in \mathbb{N}$ (и тех же r , что и ранее), поскольку тогда $\alpha_{\beta,r}$ – целая функция. Другим примером ядра, удовлетворяющего всем условиям теоремы 3.2, является функция $\lambda \mapsto \cos(-i^n \pi \lambda / 2)$, соответствующая методу суммирования Рогозинского [38; § 1.3.2].

По-видимому, впервые метод суммирования М. Рисса рядов по корневым функциям был рассмотрен в работах [39] и [40], где исследована сходимость средних $S_\zeta(\alpha_{\beta,r})f$ к f во внутренних точках отрезка $[0, 1]$. Далее в [27] была получена оценка $\|f - S_\zeta(\alpha_{\beta,r})f\|_{C^l[a;b]} \leq c\zeta^{-m}$ для $f \in C^{l+m}$ и $0 < a < b < 1$. Обзор более поздних результатов по методу суммирования М. Рисса рядов по корневым функциям имеется в [24]. Отличие теорем 3.2 и 3.3 настоящей работы от результатов предшественников заключается в том, что установлена скорость сходимости весьма общих методов суммирования на всем отрезке $[0, 1]$, а сама скорость описана в терминах K -функционала.

3.5. Доказательство оценки (1.14). В п. 1.6 показано, что область значений конечномерного оператора N_k совпадает с $\mathfrak{N}_k$ – линейной оболочкой корневых функций задачи (1.3), поэтому согласно первым равенствам в (1.50) и определению (3.15) оператора $N_k(\alpha; \zeta)$ его область значений лежит в $\mathfrak{N}_k$. Но $\mathfrak{P}_\zeta = \dot{+}_{k: |\mu_k| < \zeta^n} \mathfrak{N}_k$, тогда из определения (3.17) оператора $S_\zeta(\alpha)$ заключаем, что область значений $S_\zeta(\alpha)$ лежит в $\mathfrak{P}_\zeta$. Тем самым

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l} \leq \|f - S_\zeta(\alpha)f\|_{W_p^l}, \quad \zeta > 0, \quad f \in W_p^l, \quad l \in \{0, \dots, n-1\}, \quad p \in [1, \infty]. \quad (3.48)$$

Положим теперь в первом утверждении теоремы 3.2 ядро α равным $\alpha_{1,2}$, где $\alpha_{\beta,r}$ задано формулой (3.47), а ζ считаем равным ζ_d , где $\{\zeta_d\}_{d \in \mathbb{N}}$ – последовательность из предложения 3.6. (Следовательно, ε в первом утверждении теоремы 3.2 следует взять равным ε_0 из предложения 3.6.) Тогда из оценок (3.34) и (3.48) получаем, что для всех функций $f \in W_{p,U}^l$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{\zeta_d}(f)_{W_p^l} \leq c(\varepsilon_0)K(\zeta_d^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}), \quad d \in \mathbb{N}, \quad (3.49)$$

при тех же значениях l, m и p , что и в теореме 3.2 (а значит, и в теореме 1.1 в случае $X = L_p$).

Для каждого $\zeta \geq \zeta_1$ выберем натуральное число d , для которого $\zeta_d \leq \zeta < \zeta_{d+1}$. Поскольку $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l}$ не возрастает, а $K(\zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m})$ не убывает по $\zeta > 0$, то из (3.49) имеем

$$\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l} \leq \mathcal{E}_{\zeta_d}(f)_{W_p^l} \leq c(\varepsilon_0) \left(\sup_{d \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{d+1}}{\zeta_d} \right)^m K(\zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}),$$

откуда и следует оценка (1.14) для всех $\zeta \geq \zeta_1$ с пространством $X = L_p$. Для $1 \leq \zeta < \zeta_1$ эта оценка получается из очевидного неравенства $\mathcal{E}_\zeta(f)_{W_p^l} \leq \|f\|_{W_p^l}$ и первой оценки в соотношениях (1.12). Тем самым утверждение (1.14) установлено в случае пространств $X = L_p$. Но ввиду замечания 1.3 случай $X = C$ вытекает из случая $X = L_\infty$.

§ 4. Доказательство обратной теоремы

4.1. Неравенство Бернштейна–Никольского для корневых функций. Основным результатом настоящего параграфа является

ТЕОРЕМА 4.1. *Найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что оценка*

$$\|g\|_{W_q^{l+m}} \leq c\zeta^{m+1/p-1/q} \|g\|_{W_p^l}, \quad (4.1)$$

$$g \in \mathfrak{P}_\zeta, \quad \zeta \geq 1, \quad l, m \in \mathbb{P},$$

справедлива в следующих случаях:

- 1) $l + m \leq n - 1, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty;$
- 2) $l + m = n, \quad 1 \leq p \leq q \leq p_0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим вначале, что случай $l + m = n$ достаточно рассмотреть при дополнительном ограничении $l \geq 1$. Действительно, если неравенство (4.1) установлено в первом случае, то $\|g\|_{W_p^1} \leq c\zeta \|g\|_p$ для $g \in \mathfrak{P}_\zeta$

и $\zeta \geq 1$. Отсюда и из справедливости (4.1) с $l = 1$ и $m = n - 1$ получаем

$$\|g\|_{W_q^n} \leq c\zeta^{n-1+1/p-1/q} \|g\|_{W_p^1} \leq c^2 \zeta^{n+1/p-1/q} \|g\|_p,$$

т.е. (4.1) верно с $l = 0$ и $m = n$.

Тем самым далее, не уменьшая общности, считаем, что значения l , m , p и q удовлетворяют случаям 1) и 2) из теоремы 2.2.

Пусть $\{\zeta_d\}_{d \in \mathbb{N}}$ – последовательность из предложения 3.6. Ввиду определения множества Ψ_ε (см. п. 1.6) и предложения 3.6 для $\rho \in \mathcal{T}(\zeta_d)$ справедливо неравенство $|\rho - \rho_{k,v}| \geq \varepsilon_0$, поэтому из теоремы 2.2 с $m = 0$ и $p = q = p_0$ получаем оценку $\|R(-\rho^n; A)\|_{[W_{p_0,U}^n, W_{p_0}^n]} \leq c(\varepsilon_0) |\rho|^{-n+1} \varphi(\rho)$, $\rho \in \mathcal{T}(\zeta_d)$, а так как $\varphi(\rho) \leq 1$ при $\rho \in \mathbb{C}$, то

$$\|R(\lambda; A)\|_{[W_{p_0,U}^n, W_{p_0}^n]} \leq c(\varepsilon_0) |\lambda|^{-1+1/n}, \quad \lambda \in \mathcal{T}(\zeta_d^n), \quad d \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Зафиксируем натуральное число r и установим оценку (4.1) при $\zeta = \zeta_r$. Из отмеченных в п. 1.6 свойств проекторов N_k заключаем, что для произвольной функции g из $\mathfrak{P}_{\zeta_r}$ справедливо равенство

$$g = \sum_{k: |\mu_k| < \zeta_r^n} N_k g. \quad (4.3)$$

Так как $g \in W_{p_0}^n$, то (см. предложение 1.9) формула

$$f(\lambda) := R(\lambda; A)g, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq \mu_k, \quad (4.4)$$

задает мероморфную в $\mathbb{C}$ функцию f , принимающую свои значения в $W_{p_0}^n$, причем ее возможные полюсы могут совпадать лишь с собственными значениями μ_k задачи (1.3).

Из (4.2) и (4.4) следует соотношение

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \max_{\lambda: |\lambda| = \zeta_d^n} \|f(\lambda)\|_{W_{p_0}^n} = 0. \quad (4.5)$$

Исходя из представления (1.49) резольвенты $R(\lambda; A)$ в окрестности собственного значения μ_k и равенств (1.50), (4.3), (4.4) заключаем, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta_r^n)} f(\lambda) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta_r^n)} R(\lambda; A)g d\lambda = g$$

и, кроме того, те μ_k , для которых $|\mu_k| > \zeta_r^n$, являются устранимыми особыми точками функции f . Отсюда и из соотношения (4.5) находим: $f(\lambda) = -\lambda^{-1}g + \sum_{j=2}^{\infty} \lambda^{-j} f_j$, где ряд сходится при $|\lambda| \geq \zeta_r^n$ по норме пространства $W_{p_0}^n$. Тем самым с учетом определения (3.26) дуги $\mathcal{T}_n(\zeta)$ получаем

$$g = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}(\zeta_r^n)} \left(1 - \frac{i^{2n} \zeta_r^{2n}}{\lambda^2}\right) f(\lambda) d\lambda = \frac{n}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}_n(\zeta_r)} \rho^{n-1} \left(1 - \left(\frac{i\zeta_r}{\rho}\right)^{2n}\right) f(-\rho^n) d\rho,$$

а значит,

$$\|g\|_{W_q^{l+m}} \leq \frac{n}{2\pi} \int_{\mathcal{T}_n(\zeta_r)} |\rho|^{n-1} \left|1 - \left(\frac{i\zeta_r}{\rho}\right)^{2n}\right| \|f(-\rho^n)\|_{W_q^{l+m}} |d\rho|, \quad (4.6)$$

где $q \in [1, \infty]$, если $l + m \leq n - 1$, и $q \in [1, p_0]$, если $l + m = n$.

Но согласно теореме 2.2 функция f , заданная формулой (4.4), допускает оценку

$$\|f(-\rho^n)\|_{W_q^{l+m}} \leq c(\varepsilon_0)|\rho|^{m-n+1}\varphi(\rho)^{1-1/p+1/q}\|g\|_{W_p^l}, \quad \rho \in \mathcal{T}_n(\zeta_r), \quad (4.7)$$

где значения l , m , p и q те же, что и в теореме 2.2 (а этого, как отмечалось ранее, достаточно для доказательства теоремы 4.1). Подставляя оценку (4.7) в правую часть неравенства (4.6) и учитывая, что функция $\alpha(\lambda) := 1 - i^{2n}/\lambda^2$, $|\lambda| = 1$, удовлетворяет условиям предложения 3.5 при всех $n \in \mathbb{N}$, выводим (4.1) для $\zeta = \zeta_r$.

Покажем, что отсюда уже следует оценка (4.1) для всех $\zeta \geq 1$. Для этого положим $\zeta_0 := \min\{\zeta_1/2; 1\}$. Тогда для произвольного $\zeta \geq \zeta_0$ найдется $r \in \mathbb{P}$, для которого $\zeta_r \leq \zeta < \zeta_{r+1}$, причем $\mathfrak{P}_\zeta \subseteq \mathfrak{P}_{\zeta_{r+1}}$. Поэтому из справедливости (4.1) для $\zeta = \zeta_{r+1}$ получаем, что для всех функций g из $\mathfrak{P}_\zeta$, $\zeta_r \leq \zeta < \zeta_{r+1}$, выполнены неравенства

$$\|g\|_{W_q^{l+m}} \leq c \zeta_{r+1}^{m+1/p-1/q} \|g\|_{W_p^l} \leq c \left(\sup_{r \in \mathbb{P}} \frac{\zeta_{r+1}}{\zeta_r} \right)^{m+1/p-1/q} \zeta^{m+1/p-1/q} \|g\|_{W_p^l}.$$

Но согласно выбору последовательности $\{\zeta_r\}_{r \in \mathbb{P}}$ отношение ζ_{r+1}/ζ_r равномерно ограничено по $r \in \mathbb{P}$. Значит, оценка (4.1) установлена для всех $\zeta \geq \zeta_0$, что и завершает доказательство теорема 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Найдется такая постоянная $c := c(F, U) > 0$, что оценка*

$$\|g\|_{C^{l+m}} \leq c \zeta^m \|g\|_{C^l}, \quad g \in \mathfrak{P}_\zeta, \quad \zeta \geq 1, \quad l, m \in \mathbb{P},$$

справедлива при $l + m \leq n - 1$. Если же в задаче (1.3) оператор $F \in [C^\gamma, C]$, то эта же оценка верна и при $l + m = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечномерные подпространства $\mathfrak{P}_\zeta$ лежат в пространстве C^{n-1} , а если $F \in [C^\gamma, C]$, то и в C^n . Поэтому следствие 4.1 получается из теоремы 4.1 при значениях $p = q = \infty$.

Отметим, что в случае дифференциальных операторов оценки, подобные (4.1), были установлены ранее лишь для корневых функций g , отвечающих собственным значениям с модулями, равными ζ^n . Обзор соответствующих результатов имеется в [24] и [41]. Однако результатов, приведенных в [24] и [41], недостаточно для доказательства обратной теоремы (1.15), поскольку в ней, как и в теореме 4.1, требуется, чтобы оценка (4.1) выполнялась для произвольной линейной комбинации корневых функций, отвечающих собственным значениям с модулями меньше ζ^n . Именно в такой форме оценка (4.1) является аналогом двух неравенств: неравенства Бернштейна и неравенства Никольского (необходимые пояснения имеются в п. 1.1).

4.2. Доказательство обратной теоремы (1.15). Согласно второму неравенству в (1.12) далее, не уменьшая общности, считаем, что в (1.15) $\zeta \geq 2$. Установим вначале оценку (1.15) в случае пространств $X = L_p$. Ввиду невозрастания $\mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l}$ по $\xi > 0$ имеем

$$\int_{2^{r-1}}^{2^r} \xi^{m-1} \mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l} d\xi \geq \frac{1}{m} (2^{mr} - 2^{m(r-1)}) \mathcal{E}_{2^r}(f)_{W_p^l} \geq \frac{1}{m} 2^{mr} \mathcal{E}_{2^r}(f)_{W_p^l},$$

а значит,

$$2^{m(r+1)+1} \mathcal{E}_{2^r}(f)_{W_p^l} \leq 2^{m+1} m \int_{2^{r-1}}^{2^r} \xi^{m-1} \mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l} d\xi, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Так как $\mathfrak{P}_\tau$, $\tau > 0$, – конечномерное подпространство пространства W_p^l , то для произвольной функции f из W_p^l найдется (вообще говоря, не единственная) функция g_τ из $\mathfrak{P}_\tau$, являющаяся наилучшим приближением f посредством элементов из $\mathfrak{P}_\tau$ по норме пространства W_p^l [10; гл. 3, теорема 1.1], т.е.

$$\|f - g_\tau\|_{W_p^l} = \mathcal{E}_\tau(f)_{W_p^l}, \quad g \in \mathfrak{P}_\tau, \quad \tau > 0. \quad (4.9)$$

Но $\|g_\tau\|_{W_p^l} \leq \|f\|_{W_p^l} + \|f - g_\tau\|_{W_p^l}$ и $\mathcal{E}_\tau(f)_{W_p^l} \leq \|f\|_{W_p^l}$. Поэтому из (4.9) получаем, что

$$\|g_\tau\|_{W_p^l} \leq 2\|f\|_{W_p^l}, \quad \tau > 0, \quad (4.10)$$

и

$$\|g_{2^{r+1}} - g_{2^r}\|_{W_p^l} \leq 2\mathcal{E}_{2^r}(f)_{W_p^l}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Применяя к функции $g := g_{2^{r+1}} - g_{2^r}$ из $\mathfrak{P}_{2^{r+1}}$ теорему 4.1 при $\zeta = 2^{r+1}$ и $p = q$, имеем

$$\|g_{2^{r+1}} - g_{2^r}\|_{W_p^{l+m}} \leq c2^{m(r+1)} \|g_{2^{r+1}} - g_{2^r}\|_{W_p^l}$$

при тех же значениях l , m и p , что и в теореме 1.1. Отсюда и из (4.11) выводим оценку

$$\|g_{2^{r+1}} - g_{2^r}\|_{W_p^{l+m}} \leq c2^{m(r+1)+1} \mathcal{E}_{2^r}(f)_{W_p^l}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Аналогично из (4.10) при $\tau = 2$ заключаем, что

$$\|g_2\|_{W_p^{l+m}} \leq c2^{m+1} \|f\|_{W_p^l}. \quad (4.13)$$

Для каждого $\zeta \geq 2$ выберем $s \in \mathbb{N}$, для которого $2^s \leq \zeta < 2^{s+1}$, и запишем функцию $g_{2^{s+1}}$ в виде $g_{2^{s+1}} = g_2 + \sum_{r=1}^s (g_{2^{r+1}} - g_{2^r})$. Для нее согласно (4.12), (4.13) и (4.8) имеем

$$\begin{aligned} \|g_{2^{s+1}}\|_{W_p^{l+m}} &\leq c2^{m+1} \|f\|_{W_p^l} + c2^{m+1} m \int_1^{2^s} \xi^{m-1} \mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l} d\xi \\ &\leq c2^{m+1} m \left(\|f\|_{W_p^l} + \int_1^\zeta \xi^{m-1} \mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l} d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Положим теперь в (4.9) $\tau = 2^{s+1}$ и воспользуемся (4.8) при $r = s$. В результате получим

$$\|f - g_{2^{s+1}}\|_{W_p^l} = \mathcal{E}_{2^{s+1}}(f)_{W_p^l} \leq \mathcal{E}_{2^s}(f)_{W_p^l} \leq \frac{2^m m}{2^{m(s+1)}} \int_1^{2^s} \xi^{m-1} \mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l} d\xi,$$

тогда из предположения $2^s \leq \zeta < 2^{s+1}$ выводим

$$\|f - g_{2^{s+1}}\|_{W_p^l} \leq \frac{2^m m}{\zeta^m} \int_1^\zeta \xi^{m-1} \mathcal{E}_\xi(f)_{W_p^l} d\xi. \quad (4.15)$$

Но функция $g_{2^{s+1}}$ принадлежит $\mathfrak{P}_{2^{s+1}}$, а $\mathfrak{P}_{2^{s+1}}$ лежит в $W_{p,U}^{l+m}$. Тем самым $g_{2^{s+1}} \in W_{p,U}^{l+m}$ и поэтому

$$K\left(\zeta^{-m}, f; W_p^l, W_{p,U}^{l+m}\right) \leq \|f - g_{2^{s+1}}\|_{W_p^l} + \zeta^{-m} \|g_{2^{s+1}}\|_{W_{p,U}^{l+m}}.$$

Подставляя в правую часть этой оценки неравенства (4.14) и (4.15), получаем (1.15) в случае пространства $X = L_p$.

Если в предыдущих рассуждениях пространства W_p^l , W_p^{l+m} и $W_{p,U}^{l+m}$ заменить соответственно на пространства C^l , C^{l+m} и C_U^{l+m} , а вместо теоремы 4.1 воспользоваться следствием 4.1, то выведем оценку (1.15) в случае пространства $X = C$.

Список литературы

- [1] A. M. Krall, "The development of general differential and general differential-boundary systems", *Rocky Mountain J. Math.*, **5**:4 (1975), 493–542.
- [2] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [3] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Физматлит, М., 1969.
- [4] Г. В. Радзиевский, "Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций", *УМН*, **37**:2 (1982), 81–145.
- [5] Г. В. Радзиевский, "Асимптотика собственных значений регулярной краевой задачи", *Укр. матем. журн.*, **48**:4 (1996), 483–519.
- [6] G. D. Birkhoff, "Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**:4 (1908), 373–395.
- [7] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Физматлит, М., 1976.
- [8] S. Salaff, "Regular boundary conditions for ordinary differential operators", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **134**:2 (1968), 355–373.
- [9] А. А. Шкаликов, "О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями", *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, №6, 12–21.
- [10] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [11] Г. В. Радзиевский, "Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени", *Матем. сб.*, **189**:4 (1998), 83–124.
- [12] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, "Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций", *Труды ММО*, **5** (1956), 483–522.
- [13] Бл. Сендов, "Модифицированная функция Стеклова", *Докл. АН Болгарии*, **36**:3 (1983), 315–317.
- [14] Г. В. Радзиевский, "Модули непрерывности, определенные по нулевому продолжению функции, и K -функционалы с ограничениями", *Укр. матем. журн.*, **48**:11 (1996), 1537–1554.
- [15] Е. И. Радзиевская, Г. В. Радзиевский, "Оценка K -функционала высокого порядка через K -функционал меньшего порядка", *Укр. матем. журн.*, **55**:11 (2003), 1530–1540.
- [16] А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский, "Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения", *Дифференц. уравнения*, **27**:3 (1991), 384–396.

- [17] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [18] Г. В. Радзиевский, “О наилучших приближениях и о скорости сходимости разложений по корневым векторам оператора”, *Укр. матем. журн.*, **49**:6 (1997), 754–773.
- [19] Г. В. Радзиевский, “О нормах проекторов Ф. Рисса на подпространства корневых функций краевой задачи для функционально-дифференциального выражения”, *Дифференц. уравнения*, **42**:1 (2006), 48–60.
- [20] D. Jackson, “On the degree of convergence of Sturm–Liouville series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **15**:4 (1914), 439–466.
- [21] F. J. Kaufmann, W. J. Luther, “Degree of convergence of Birkhoff series, direct and inverse theorems”, *J. Math. Anal. Appl.*, **187**:1 (1994), 156–168.
- [22] H. E. Benzinger, “The L^p behavior of eigenfunction expansions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **174** (1972), 333–344.
- [23] A. M. Minkin, “Equiconvergence theorems for differential operators”, *J. Math. Sci. (New York)*, **96**:6 (1999), 3631–3715.
- [24] V. A. Il'in, L. V. Kritskov, “Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators”, *J. Math. Sci. (New York)*, **116**:5 (2003), 3489–3550.
- [25] А. П. Хромов, “Конечномерные возмущения вольтерровых операторов”, *Совр. матем. Фундам. направления*, **10** (2004), 3–163.
- [26] W. E. Milne, “On the degree of convergence of Birkhoff’s series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **19**:2 (1918), 143–156.
- [27] W. H. McEwen, “On the degree of convergence of the derived series of Birkhoff”, *Amer. J. Math.*, **63**:1 (1941), 29–38.
- [28] R. Bojanić, Z. Divis, “An estimate for the rate of convergence of the eigenfunction expansions of functions of bounded variation”, *Appl. Anal.*, **17**:3 (1984), 227–242.
- [29] Z. Divis, “A note on the rate of convergence of Sturm–Liouville expansions”, *J. Approx. Theory*, **50**:3 (1987), 200–207.
- [30] G. Radzievskii, “The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions”, *Some problems of the modern theory of differential equations*, Preprint, Nat. Acad. Sci. Ukr. Inst. Math. 94.29, Kiev, 1994, 14–27.
- [31] Г. В. Радзиевский, “Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности”, *Функц. анализ и его прилож.*, **29**:3 (1995), 87–90.
- [32] Г. В. Радзиевский, “Прямые и обратные теоремы для наименьших уклонений от корневых функций регулярной краевой задачи”, *Докл. РАН*, **400**:2 (2005), 157–161.
- [33] A. Minkin, “Odd and even cases of Birkhoff-regularity”, *Math. Nachr.*, **174** (1995), 219–230.
- [34] Г. В. Радзиевский, “Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения”, *Укр. матем. журн.*, **47**:6 (1995), 811–836.
- [35] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965.
- [36] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, М., Л., 1950.
- [37] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [38] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation*, Pure Appl. Math., **40**, Acad. Press, New York, 1971.
- [39] M. H. Stone, “A comparison of the series of Fourier and Birkhoff”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28**:4 (1926), 695–761.

- [40] M. H. Stone, “Irregular differential systems of order two and the related expansion problems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29**:1 (1927), 23–53.
- [41] A. Minkin, L. Shuster, “Estimates of eigenfunctions for one class of boundary conditions”, *Bull. London Math. Soc.*, **29**:4 (1997), 459–469.

Г. В. Радзиевский (G. V. Radzievskii)
Институт математики
Национальной академии наук Украины, г. Киев

Поступила в редакцию
27.06.2005