Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 1, 55–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 05:24:19

УДК 517.928

А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов

Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки

Рассмотрено специальное решение обыкновенного дифференциального уравнения Абеля первого рода $u'_x + u^3 - tu - x = 0$, которое описывает поведение широкого ряда решений дифференциальных уравнений с частными производными с малым параметром около точек сборки их медленно меняющихся положений равновесия. Доказано существование этого специального решения. Построена и обоснована его асимптотика при $|x| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$.

Библиография: 4 названия.

Введение

В работе исследовано специальное решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$u'_x + u^3 - tu - x = 0. \quad (0.1)$$

Это решение ОДУ (0.1), определенное на всей плоскости (x, t) , связано с решениями широкого ряда уравнений математической физики с малым параметром. В работе [1] показано, что оно является главным членом внутренних асимптотических разложений в одном из вариантов, когда внешние разложения решений имеют особенности типа сборки [2]. В другом варианте [1], [3] главным членом внутренних асимптотических разложений является решение похожего уравнения второго порядка.

Главным содержанием работы является исследование *равномерной* и полной асимптотики данного специального решения ОДУ (0.1) при $|x| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$ (существование решения и его асимптотика при *фиксированном* значении t были получены ранее [1]). Кроме того, доказана гладкость построенного решения и получены равномерные асимптотики всех его производных.

§ 1. Вспомогательные леммы

В этом параграфе все функции для простоты считаются достаточно гладкими.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-00768, 04-02-97503, 06-01-00124) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1446.2003.1).

ЛЕММА 1.1. Пусть функция $y(x)$ есть решение ОДУ

$$y'(x) = g(x, y),$$

а функция $z(x)$, совпадая с $y(x)$ при $x = x_0$ на содержащем эту точку промежутке, удовлетворяет неравенству

$$z'(x) < g(x, z(x)). \quad (1.1)$$

Тогда на правой части этого промежутка (при $x > x_0$) справедливо неравенство

$$z(x) < y(x), \quad (1.2)$$

а на его левой части (при $x < x_0$) – неравенство

$$z(x) > y(x). \quad (1.3)$$

Знаки неравенств (1.2), (1.3) меняются на обратные в случае противоположного знака в неравенстве (1.1).

Доказательство легко провести методом от противного (см. также работу [4; гл. 1])

ЛЕММА 1.2. Пусть на луче $L: x \leq x_1 < \infty$, для некоторого $\beta > 0$ и функции $Q(x) > 1$ функция $v(x)$ удовлетворяет неравенству

$$v'(x) + \beta Q(x)v(x) < 0, \quad (1.4)$$

и пусть при $x \rightarrow -\infty$

$$v(x) = o(\exp(-\beta x)). \quad (1.5)$$

Тогда при $x < x_1$

$$v(x) < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: либо функция $v(x)$ положительна всюду при $x \leq x_1$, либо $v(x_2) = 0$ для некоторого $x_2 \leq x_1$. Во втором случае согласно лемме 1.1 функция $v(x)$ положительна при $x < x_2$. Поэтому в обоих случаях существует точка $x_3 \leq x_1$ такая, что функция $v(x)$ положительна при $x \leq x_3$.

На таком луче были бы справедливы неравенство

$$v'(x) + \beta v(x) < v'(x) + \beta Q(x)v(x) < 0$$

и, стало быть, неравенство

$$(v(x) \exp(\beta x))'_x < 0. \quad (1.6)$$

После интегрирования последнего неравенства на промежутке $[x, x_3]$ в этом случае получалось бы неравенство

$$v(x) \geq v(x_3) \exp(\beta(x_3 - x)),$$

противоречащее условию (1.5). Лемма 1.2 доказана.

ЛЕММА 1.3. Пусть на интервале $I: -\infty < x_1 \leq x < x_2 \leq \infty$, функция $v(x)$ для $\beta > 0$ удовлетворяет неравенству (1.4) с функцией $Q(x) > 1$. Тогда при $x \geq x_1$ справедлива оценка

$$v(x) \leq |v(x_1)| \exp(\beta(x_1 - x)). \quad (1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При отрицательных значениях $v(x)$ неравенство (1.7) выполнено. Пусть $u(x_3) > 0$ для некоторого $x_3 > x_1$. Тогда из неравенства (1.4) следует, что $u(x) > 0$ для всех x при $x_1 \leq x \leq x_3$. Поэтому на отрезке $[x_1, x_3]$ справедливо неравенство (1.6). Интегрируя это неравенство от x_1 до x_3 , приходим к оценке (1.7) для значения $u(x_3)$. Лемма 1.3 доказана.

§ 2. Асимптотика решения $u(x, t)$ при $|x| \rightarrow \infty$ и ограниченных t

Прежде всего определим исследуемое решение уравнения (0.1). С этой целью рассмотрим следующую функцию $H(x, t)$:

- 1) при $t \leq 0$ $H(x, t)$ – единственное решение кубического уравнения

$$H^3 - tH - x = 0; \quad (2.1)$$

- 2) в области

$$t > 0, \quad x < x_c(t) = \frac{2}{\sqrt{27}} t^{3/2}$$

$H(x, t)$ – непрерывное отрицательное решение уравнения (2.1);

- 3) наконец, при

$$t > 0, \quad x \geq x_c(t)$$

$H(x, t)$ – непрерывное положительное решение уравнения (2.1).

В этом параграфе для любого фиксированного значения t строится решение ОДУ (0.1) и изучаются его асимптотические разложения при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Эти асимптотические разложения равномерны относительно t при $|t| \leq T$, где T – любое фиксированное положительное число (равномерность асимптотик нетрудно заметить из приводимых ниже построений и доказательств). Поэтому в дальнейшем для избежания громоздкости зависимость от параметра t в обозначениях довольно часто опускается.

Пусть x_0 – какое-нибудь отрицательное число. Посредством $u_a(x, t)$ обозначим решение ОДУ (0.1) такое, что $u_a(x_0, t) = a < H(x_0, t)$, и покажем, что при некотором a это и есть искомое решение. Через $\mathbb{M}$ обозначим множество таких $a < H(x_0, t)$, что графики функций $u_a(x, t)$ и $H(x, t)$ имеют какую-нибудь общую точку при $x < x_0$. Так как $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t) > 0$, а $\frac{\partial u_a}{\partial x}(x_0, t) = -a^3 + ta + x_0$ мало при a достаточно близких к $H(x_0, t)$, то отсюда и из непрерывной зависимости решения $u_a(x, t)$ от параметра a вытекает, что множество $\mathbb{M}$ непусто (ему принадлежат все $a < H(x_0, t)$, достаточно близкие к $H(x_0, t)$) и открыто.

Кроме того, множество $\mathbb{M}$ ограничено снизу. Действительно, если a – достаточно большое отрицательное число, то

$$\frac{\partial u_a}{\partial x}(x_0, t) = -a^3 + ta + x_0 > \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t) > 0$$

и

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}(x, t) = (-3u_a^2(x, t) + t) \frac{\partial u_a}{\partial x}(x, t) + 1 \quad (2.2)$$

меньше нуля при $x = x_0$.

Покажем, что для такого a неравенство $\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}(x, t) < 0$ справедливо и при всех $x < x_0$. Допустим противное. Пусть точка x_1 – ближайшая слева к точке x_0 , в которой функция $\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}(x, t)$ равна нулю. Тогда на интервале $(x_1, x_0]$ при уменьшении x возрастают производная $\frac{\partial u_a}{\partial x}(x, t)$ и, как следствие, функция $u_a^2(x, t)$. Поэтому в точке x_1 правая часть равенства (2.2) меньше нуля, что противоречит сделанному предположению.

Следовательно, при $x < x_0$ функция $u_a(x, t)$ меньше линейной функции $a + \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, t)(x - x_0)$. И так как функция $H(x, t)$ выпукла вниз, то при $x < x_0$ графики функций $u_a(x, t)$ и $H(x, t)$ не пересекаются.

Искомую функцию $u(x, t)$ построим при $x \leq x_0$ как решение $u_\alpha(x, t)$, где

$$\alpha = \inf(\mathbb{M}),$$

и продолжим его при $x \geq x_0$ как решение ОДУ (0.1).

ТЕОРЕМА 2.1. *При всех t решение $u(x, t)$ есть гладкая монотонно возрастающая функция переменной x такая, что $u(x, t) < H(x, t)$; это есть единственное решение ОДУ (0.1), удовлетворяющее условию*

$$u(x, t) - H(x, t) \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

при $x \rightarrow -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывной зависимости решений ОДУ (0.1) от их значений в точке x_0 вытекает, что решение $u(x, t)$ не может стремиться к $-\infty$ при конечном значении $x \leq x_0$ (в этом легко убедиться, повторив рассуждения, примененные выше при доказательстве ограниченности снизу множества $\mathbb{M}$).

Следовательно, гладкая функция $u(x, t)$ определена для всех значений $x \leq x_0$ и для этих значений x справедливо неравенство $u(x, t) < H(x, t)$. Соотношение (2.3) легко доказывается от противного. Если оно не выполнено, то для достаточно большого отрицательного x_1 справедливы неравенства

$$u(x_1, t) - H(x_1, t) < -\delta < 0, \quad (2.4)$$

$$H^2(x_1, t) > 2t + \frac{2}{\delta}. \quad (2.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) &= -u(x_1, t)^3 + tu(x_1, t) + x_1 + (H^3(x, t) - tH(x_1, t) - x_1) \\ &= -(u(x_1, t) - H(x_1, t))(u^2(x_1, t) + u(x_1, t)H(x_1, t) + H^2(x_1, t) - t) \\ &\geq -(u(x_1, t) - H(x_1, t))\left(\frac{H^2(x_1, t)}{2} - t\right) > 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)(t - 3u^2(x_1, t)) + 1 \\ &< \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)(t - 3H^2(x_1, t)) + 1 < 0. \end{aligned}$$

Теперь снова, почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве ограниченности снизу множества $\mathbb{M}$, из двух последних неравенств получаем, что при $x < x_1$ функция $u(x, t)$ меньше линейной функции $u(x_1, t) + (x - x_1)$ (противоречие с определением $u(x, t) = u_\alpha(x, t)$, где $\alpha = \inf(\mathbb{M})$). Из соотношения (2.3) вытекает, в частности, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u(x, t)}{x^{1/3}} = 1. \quad (2.6)$$

Допустим, что при достаточно больших значениях $-x$ существует отличное от $u(x, t)$ решение ОДУ (0.1) $u_1(x, t)$, которое также удовлетворяет предельному условию (2.6). Тогда функция $r(x, t) = |u(x, t) - u_1(x, t)|$ при $x \rightarrow -\infty$ удовлетворяет соотношению

$$(\ln r(x, t))'_x = t - u_1^2(x, t) - u(x, t)u_1(x, t) - u^2(x, t) = -3x^{2/3} + o(x^{2/3}),$$

влекущему за собой вывод об экспоненциальном росте $r(x, t)$ при $x \rightarrow -\infty$. Это противоречит предельным соотношениям (2.6) для решений $u(x, t)$ и $u_1(x, t)$.

Далее заметим, что точка экстремума любого решения ОДУ (0.1) – та и лишь та, в которой данное решение совпадает с $H(x, t)$, и что такая точка – это точка минимума. Очевидно, что функция $u(x, t)$ монотонна при $x \leq x_0$. Поэтому из монотонности функции $H(x, t)$ при всех x следует, что и при $x > x_0$ имеет место неравенство $u(x, t) < H(x, t)$. Значит, справедливо утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. *Решение $u(x, t)$ является непрерывной функцией обеих переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно доказать непрерывность функции $u(x_0, t)$ по переменной t . Допустим противное – функция $u(x_0, t)$ разрывна в точке t_0 . Это означает существование такой последовательности $t_n \rightarrow t_0$, что

$$|u(x_0, t_n) - u(x_0, t_0)| > \gamma > 0.$$

В случае

$$u(x_0, t_n) - u(x_0, t_0) > \gamma > 0$$

рассмотрим решение $u_b(x, t)$ уравнения (0.1), которое при $x = x_0$ равно $b = u(x_0, t_0) + \gamma/2$. Согласно определению множества $\mathbb{M}$ график функции $u_b(x, t_0)$ пересекается с графиком функции $H(x, t_0)$ при каком-нибудь $x < x_0$. В силу непрерывности $H(x, t)$ и $u_b(x, t)$ их графики пересекаются при $t = t_n$, близком к t_0 в точке, расположенной левее точки x_0 . Это противоречит неравенству $u(x_0, t_n) - u_b(x_0, t_n) > \gamma/2$ и определению множества $\mathbb{M}$.

Пусть теперь $u(x_0, t_n) - u(x_0, t_0) < -\gamma < 0$. Тогда рассмотрим решение $u_c(x, t)$ уравнения (0.1), которое при $x = x_0$ равно $c = u(x_0, t_0) - \gamma/2$. Для этого решения найдется точка $x_1 < x_0$ такая, что при $t = t_0$ в ней выполнены неравенства (2.4), (2.5). Следовательно, в точке x_1 эти неравенства справедливы для $u_c(x, t)$ и при $t = t_n$, близких к t_0 . Из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2.1, следует, что в этом случае решение $u_c(x, t_n) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ не медленнее линейной функции. Итак, при $t = t_n$ мы имеем два решения уравнения (0.1): построенное в теореме 2.1 решение $u(x, t_n)$, для которого справедливо соотношение (2.3), и решение $u_c(x, t_n)$. Хотя $u_c(x_0, t_n) - u(x_0, t_n) > \gamma/2 > 0$, но при достаточно больших отрицательных x справедливо обратное неравенство: $u_c(x, t_n) < u(x, t_n)$. Следовательно, их графики пересекаются, что противоречит единственности решения начальной задачи для уравнения (0.1). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. *Для любого t функция $u(x, t)$ при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow \infty$ разлагается в асимптотический ряд*

$$u(x, t) = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} c_j(t) x^{-j/3} \right), \quad (2.7)$$

где коэффициенты $c_j(t)$ – это многочлены, которые однозначно определяются после формальной подстановки ряда (2.7) в уравнение (0.1). Для любого положительного T асимптотическое разложение (2.7) равномерно при $|t| \leq T$, а именно для любого натурального n существуют постоянные $M_n(T)$ такие, что при $|t| \leq T$, $|x| > 1$ справедливы неравенства

$$\left| u(x, t) - x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{2n} c_j(t) x^{-j/3} \right) \right| \leq M_n(T) |x|^{-2n/3}. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что коэффициенты $c_j(t)$ – это многочлены ($c_2(t) = t/3$, $c_3(t) = c_4(t) = 0, \dots$). Рассмотрим функции

$$Y_n^-(x, t) = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{2n} c_j(t) x^{-j/3} \right) - M_n(T) x^{-2n/3},$$

$$Y_n^+(x, t) = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{2n} c_j(t) x^{-j/3} \right) + M_n(T) x^{-2n/3}.$$

Покажем, что для любого натурального $n > 2$ существуют такие положительные постоянные $M_n(T)$, $B_n(T)$, что в каждой из полуполос

$$L_l = (x, t : x < -B_n(T), |t| \leq T), \quad (2.9)$$

$$L_r = (x, t : x > B_n(T), |t| \leq T) \quad (2.10)$$

функции $Y_n^-(x, t)$ и $Y_n^+(x, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$(Y_n^-(x, t))'_x + (Y_n^-(x, t))^3 - tY_n^-(x, t) - x < 0, \quad (2.11)$$

$$(Y_n^+(x, t))'_x + (Y_n^+(x, t))^3 - tY_n^+(x, t) - x > 0. \quad (2.12)$$

Обозначим

$$Z_n(x, t) = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{2n} c_j(t) x^{-j/3} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & (Y_n^-(x, t))'_x + (Y_n^-(x, t))^3 - tY_n^-(x, t) - x \\ &= (Z_n(x, t))'_x + \frac{2n}{3} M_n(T) x^{-(2n+3)/3} + Z_n^3(x, t) \\ &\quad - 3Z_n^2(x, t) M_n(T) x^{-2n/3} + 3Z_n(x, t) M_n^2(T) x^{-4n/3} \\ &\quad - M_n^3(T) x^{-2n} - tZ_n(x, t) + tM_n(T) x^{-2n/3} - x. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Так как при формальной подстановке ряда (2.7) в ОДУ (0.1) коэффициенты при всех степенях x обращаются в нуль, то при подстановке $Z_n(x, t)$ в это уравнение обратятся в нуль коэффициенты при тех степенях x , показатели которых больше, чем $(2 - 2n)/3$. Следовательно,

$$(Z_n(x, t))'_x + Z_n^3(x, t) - tZ_n(x, t) - x = x^{(2-2n)/3} K_n(t, x^{-1/3}),$$

где $K_n(t, x^{-1/3})$ – это многочлен относительно обоих аргументов.

Ясно, что правая часть равенства (2.13) есть сумма

$$x^{(2-2n)/3} \sum_{j=0}^{m_n} S_j(t) x^{-j/3},$$

главный член которой $S_0(t) = -3M_n(T) + K_n(t, 0)$ отрицателен при $|t| < T$ и при достаточно большом значении $M_n(T)$. Следовательно, для достаточно больших значений $B_n(T)$ в полуполосах (2.9) и (2.10) действительно справедливо неравенство (2.11). Аналогичным образом доказывается справедливость в этих полуполосах и неравенства (2.12).

Из неравенств (2.11) и (2.12) следует, что для достаточно больших значений $B_n(T)$ разности

$$R_-(x, t) = Y_n^-(x, t) - u(x, t), \quad R_+(x, t) = u(x, t) - Y_n^+(x, t)$$

в полуполосах (2.9), (2.10) удовлетворяют неравенствам

$$R_{\mp}(x, t)'_x + Q_{\mp}(x, t) R_{\mp}(x, t) < 0 \quad (2.14)$$

с коэффициентами

$$Q_{\mp}(x, t) = u^2(x, t) + u(x, t)Y_n^{\mp}(x, t) + (Y_n^{\mp}(x, t))^2 - t > \frac{(Y_n^{\mp}(x, t))^2}{2} - t > 1. \quad (2.15)$$

Согласно лемме 1.2 из последних неравенств и соотношения (2.3) вытекает, что в полуполосе (2.9) оценки (2.8) имеют место. Аналогичным образом согласно лемме 1.3 из неравенств (2.14), (2.15) вытекает, что в полуполосе (2.10) справедливы оценки (2.8). Действительно, из леммы 1.3 следует, что если функции $R_{\pm}(x, t)$ положительны, то они при этом экспоненциально малы при $x \rightarrow \infty$. С учетом непрерывности $u(x, t)$ отсюда следует, что оценки (2.8) для достаточно больших значений постоянных $M_n(T)$ будут справедливы и при всех $|x| > 1$, $|t| \leq T$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. *Функция $u(x, t)$ бесконечно дифференцируема для всех x и t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в теореме 2.2 непрерывность функции $u(x, t)$ доказана, то непосредственно из уравнения (0.1) вытекает непрерывность производной $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, а последовательное дифференцирование обеих частей этого уравнения приводит к заключению о существовании и непрерывности всех производных $\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial x^m}$.

Для доказательства существования производной $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ рассмотрим функцию

$$w(x, t, h) = \frac{u(x, t + h) - u(x, t)}{h}.$$

Из уравнения (0.1) следует, что

$$\frac{\partial w(x, t, h)}{\partial x} = w(x, t, h)(t - u^2(x, t + h) - u(x, t + h)u(x, t) - u^2(x, t)) + u(x, t + h). \quad (2.16)$$

Если обозначить

$$g(x, t, h) = \int_0^x (u^2(\xi, t + h) + u(\xi, t + h)u(\xi, t) + u^2(\xi, t) - t) d\xi$$

и учесть, что в силу справедливости соотношения (2.3) $w(x, t, h) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, то из соотношения (2.16) следует формула

$$w(x, t, h) = \exp(-g(x, t, h)) \int_{-\infty}^x \exp(g(\xi, t, h)) u(\xi, t + h) d\xi. \quad (2.17)$$

Равномерная сходимость последнего из выписанных интегралов обеспечена неравенством (2.8). И так как $u(x, t)$ – непрерывная функция, обладающая асимптотикой (2.7), то из формулы (2.17) следует существование функции

$$w(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} w(x, t, h) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \exp(-g(x, t)) \int_{-\infty}^x \exp(g(\xi, t)) u(\xi, t) d\xi, \quad (2.18)$$

где $g(x, t) = \int_0^x (3u^2(\xi, t) - t) d\xi$. Из этой формулы вытекает непрерывность $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ на всей плоскости (x, t) . Дифференцируя обе части уравнения (0.1) по t , получаем уравнение

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = (t - 3u^2(x, t))w(x, t) + u(x, t). \quad (2.19)$$

Из этого уравнения вытекают существование и непрерывность всех производных

$$\frac{\partial^m w}{\partial x^m}(x, t) = \frac{\partial^{m+1} u}{\partial t \partial x^m}(x, t).$$

Применяя к уравнению (2.19) тот же прием, что и к уравнению (0.1), получаем существование и непрерывность

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t).$$

Далее, из уравнения для $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ следуют существование и непрерывность всех производных $\frac{\partial^{m+2} u}{\partial t^2 \partial x^m}(x, t)$. Существование и непрерывность всех остальных производных получаются по индукции. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.5. *Асимптотическое разложение допускает почленное дифференцирование любого порядка по переменным x и t . Для любого положительного T и произвольных натуральных чисел k, m, n существуют такие постоянные $M_{k,m,n}(T)$, что при $|t| \leq T, |x| > 1$ справедливы неравенства*

$$\left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k \partial t^m} \left(u(x, t) - x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{2n} c_j(t) x^{-j/3} \right) \right) \right| \leq M_{k,m,n}(T) |x|^{-k-2n/3}. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для функции $u(x, t)$ справедливо асимптотическое разложение (2.7), то из уравнения (0.1) вытекает, что производная $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ также разлагается в асимптотический ряд по степеням x при $|x| \rightarrow \infty$. И поскольку степенные асимптотические ряды можно почленно интегрировать, то отсюда следует, что ряд (2.7) можно почленно дифференцировать по x . Далее, так же показывается, что возможно почленное дифференцирование ряда (2.7) по x любое число раз.

Докажем справедливость утверждения теоремы для функции $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$. Из соотношения (2.18) следует ее представление в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= w(x, t) \\ &= \exp(-g(x, t)) \left(\int_{-\infty}^{2x} \exp(g(\xi, t)) u(\xi, t) d\xi + \int_{2x}^x \exp(g(\xi, t)) u(\xi, t) d\xi \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где функция $g(x, t)$ при $x \rightarrow -\infty$ имеет асимптотику

$$g(x, t) = \frac{9}{5}x^{5/3} + tx + g_2(t)x^{2/3} + g_1(t)x^{1/3} + g_0(t) + d \ln x + \sum_{j=0}^{\infty} g_{-j}(t)x^{-2j/3}.$$

Данное представление (2.21) и оценки (2.8) позволяют легко сделать вывод о том, что при $x \rightarrow -\infty$ модуль функции $w(x, t)$ растет не быстрее некоторой степени $|x|$.

С другой стороны, если считать решение $u(x, t)$ известным, то соотношение (2.19) можно рассматривать как линейное ОДУ на функцию $w(x, t)$. После подстановки в ОДУ (2.19) вместо $u(x, t)$ его асимптотических разложений (2.7), нетрудно убедиться в том, что данное ОДУ при $x \rightarrow \pm\infty$ обладает единственными формальными решениями вида

$$w_f(x, t) = \frac{1}{3x^{1/3}} + \sum_{j=2}^{\infty} w_j(t)x^{-j/3},$$

где $w_j(t)$ суть вполне конкретные полиномы. Рассмотрим функции

$$W_n^{\pm}(x, t) = \frac{1}{3x^{1/3}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{w_j(t)}{x^{j/3}} + M_{0,1,n}(T)x^{-2n/3},$$

зависящие от достаточно больших постоянных $M_{0,1,n}(T)$. Применим к этим функциям и к функции $w(x, t)$ рассуждения, аналогичные тем, которые ранее использовались при доказательстве теоремы 2.2 по отношению к функциям $Y_n^{\pm}(x, t)$ и $u(x, t)$. Тем самым, асимптотическое разложение доказано для производной $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$. Так как асимптотические ряды можно почленно интегрировать, то утверждение теоремы справедливо для первой производной.

Окончание доказательства получается по индукции с учетом линейных ОДУ для функций $\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k \partial t^m} u(x, t)$ (аналогов линейного ОДУ (2.19) для производной $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$). Теорема доказана.

§ 3. Асимптотика решения при $t \rightarrow -\infty$

Введем переменные

$$s = x|t|^{-3/2}, \quad v = u|t|^{-1/2}. \quad (3.1)$$

В этих переменных при $t \neq 0$ ОДУ (0.1) примет вид

$$|t|^{-5/2} v_s = s - v - v^3. \quad (3.2)$$

В дальнейшем под $v(s, t)$ будем понимать именно то решение данного ОДУ, которое с функцией $u(x, t)$ связано заменами (3.1).

Согласно теореме 2.1 при $t < 0$ функция $v(s, t)$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (v(s, t) - f(s)) = 0, \quad (3.3)$$

где $f(s)$ – корень кубического уравнения

$$f^3 + f - s = 0, \quad (3.4)$$

который при всех достаточно больших значениях $|s|$ разлагается в сходящийся ряд

$$f(s) = s^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} f_j s^{-j/3} \right). \quad (3.5)$$

Сначала будет построено и обосновано равномерное по аргументу s полное асимптотическое разложение при $t \rightarrow -\infty$ функции $v(s, t)$.

Формальное асимптотическое решение задачи (3.2), (3.3) легко находится в виде ряда

$$v_-(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} |t|^{-5k/2} v_k(s), \quad (3.6)$$

главный член которого

$$v_0(s) = f(s) \quad (3.7)$$

есть единственный корень кубического уравнения (3.4), а остальные выражаются через него из рекуррентной последовательности уравнений, возникающей после подстановки ряда (3.6) в ОДУ (3.2) и приравнивания в результате членов при одинаковых степенях $|t|$:

$$\begin{aligned} v_1(s)(3f^2(s) + 1) &= -v'_0(s), \\ v_k(s)(3f^2(s) + 1) &= -v'_{k-1}(s) - \sum_{i_1+i_2+i_3=k, 0 \leq i_j < k} v_{i_1}(s)v_{i_2}(s)v_{i_3}(s), \quad k > 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.1. *Функции $v_k(s)$, определяемые соотношениями (3.7), (3.8), при всех достаточно больших значениях $|s|$ представляются сходящимися рядами*

$$v_k(s) = s^{(1-5k)/3} \sum_{j=0}^{\infty} c_{jk} s^{-j/3}. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $v_0(s)$ данный ряд есть ряд (3.5), а для остальных функций $v_k(s)$ справедливость разложений (3.9) легко обосновывается с помощью использования рекуррентных уравнений (3.8) и математической индукции.

ЛЕММА 3.2. Для всех функций $v_k(s)$ существуют такие положительные постоянные C_k , что при $s \in \mathbb{R}$ имеют место оценки

$$|v_k(s)| \leq C_k(1+s^2)^{(1-5k)/6}. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из справедливости разложения (3.9) при больших $|s|$ и из гладкости обеих частей неравенства (3.10).

Введем в рассмотрение функции

$$V_n^-(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k(s)}{|t|^{5k/2}} - \frac{K_n}{|t|^{5n/2}}(1+s^2)^{(1-5n)/6},$$

$$V_n^+(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k(s)}{|t|^{5k/2}} + \frac{K_n}{|t|^{5n/2}}(1+s^2)^{(1-5n)/6}.$$

ЛЕММА 3.3. Функции $V_n^-(s, t)$ и $V_n^+(s, t)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (V_n^-(s, t) - f(s)) = \lim_{s \rightarrow -\infty} (V_n^+(s, t) - f(s)) = 0. \quad (3.11)$$

Пусть $T > 0$. При $n \in \mathbb{N}$ для достаточно больших значений постоянных s_n, T_n, K_n в полуплоскости $t < -T_n$ и в областях

$$|s| \geq s_n, \quad t < -T \quad (3.12)$$

справедливы неравенства

$$|t|^{-5/2}(V_n^-(s, t))'_s + (V_n^-(s, t))^3 + V_n^-(s, t) - s \leq 0, \quad (3.13)$$

$$|t|^{-5/2}(V_n^+(s, t))'_s + (V_n^+(s, t))^3 + V_n^+(s, t) - s \geq 0. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (3.13), (3.14) доказываются вполне аналогично тому, как в теореме 2.2 были доказаны неравенства (2.11), (2.12).

Если обозначить

$$B_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k(s)}{|t|^{5k/2}},$$

то

$$\begin{aligned} & |t|^{-5/2}(V_n^-(s, t))'_s + (V_n^-(s, t))^3 + V_n^-(s, t) - s \\ &= |t|^{-5/2}(B_n(s, t))'_s + (B_n(s, t))^3 + B_n(s, t) - s \\ &\quad - \frac{K_n}{|t|^{5(n+1)/2}} \frac{(1-5n)}{6} 2s(1+s^2)^{(1-5n)/6-1} \\ &\quad - 3(B_n(s, t))^2 \frac{K_n}{|t|^{5n/2}}(1+s^2)^{(1-5n)/6} + 3B_n(s, t) \frac{K_n^2}{|t|^{5n}}(1+s^2)^{(1-5n)/3} \\ &\quad - \frac{K_n^3}{|t|^{15n/2}}(1+s^2)^{(1-5n)/2} - \frac{K_n}{|t|^{5n/2}}(1+s^2)^{(1-5n)/6}. \end{aligned}$$

В силу рекуррентной последовательности соотношений (3.8) и оценок (3.10) функций $v_k(s)$ левая часть доказываемого неравенства (3.13) равна

$$\begin{aligned} & -\frac{K_n}{|t|^{5n/2}}(1+3f^2(s))(1+s^2)^{(1-5n)/6} + \sum_{j=n}^{3n-3} \frac{y_j(s)}{|t|^{5j/2}} + K_n \sum_{j=n+1}^{3n-2} \frac{y_{j,1}(s)}{|t|^{5j/2}} \\ & + K_n^2 \sum_{j=2n}^{3n-1} \frac{y_{j,2}(s)}{|t|^{5j/2}} - \frac{K_n^3}{|t|^{15n/2}}(1+s^2)^{(1-5n)/2}, \end{aligned}$$

где

$$|y_j(s)| + |y_{j,1}(s)| + |y_{j,2}(s)| \leq M_j(1+s^2)^{(1-5j)/6+1/3}.$$

Выбирая сначала большое K_n , а затем достаточно большие T_n (при рассмотрении полуплоскости $t < -T_n$) и s_n (при рассмотрении областей (3.12)), получаем неравенство (3.13).

Доказательство неравенств (3.14) от приведенного доказательства неравенств (3.13) практически ничем не отличается.

Предельные же соотношения (3.11) являются очевидным следствием разложимости при $s \ll -1$ функций $v_k(s)$ в ряды (3.5), (3.9). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $T > 0$ – достаточно большое число. При $t \leq -T$ для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая постоянная C_n , что справедливо неравенство

$$\left| v(s, t) - \sum_{k=0}^{n-1} |t|^{-5k/2} v_k(s) \right| \leq C_n |t|^{-5n/2} (1+s^2)^{(1-5n)/6}. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида уравнения (3.2) и из неравенства (3.14) следует, что для достаточно больших значений постоянных s_n, T_n, K_n в полуплоскостях $t < -T_n$ и в областях (3.12) разность $R(s, t) = v(s, t) - V_n^+(s, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|t|^{-5/2} R'_s(s, t) + R(s, t) Q(s, t) < 0,$$

где

$$Q(s, t) = (V_n^+(s, t))^2 + V_n^+(s, t) v(s, t) + v^2(s, t) + 1 > 1.$$

Кроме того, соотношения (3.3) и (3.11) означают, что выполнено условие

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} R(s, t) = 0.$$

Поэтому использование леммы 1.2 позволяет сделать вывод о том, что при достаточно больших значениях T_n и s_n в полуплоскостях $t < -T_n$ и в левых частях областей (3.12), определяемых неравенствами $s \leq -s_n$, имеют место неравенства $v(s, t) \leq V_n^+(s, t)$. Точно так же показывается, что при этом справедливыми можно сделать и неравенства $v(s, t) \geq V_n^-(s, t)$.

Согласно теореме 2.2 на компактах

$$|s| \leq s_n, \quad -T_n \leq t \leq -T \quad (3.16)$$

модуль функции $v(s, t)$ ограничен некоторыми постоянными G_n . И так как на компактах (3.16) функции $B_n(s, t)$ и $|t|^{5n/2}(1+s^2)^{(1-5n)/6}$ гладкие, то утверждение о справедливости на этих компактах неравенств (3.15) тривиально.

Утверждение теоремы осталось доказать лишь для областей (3.12), определяемых неравенствами $s > s_n$ и $-T_n < t < T$. Это легко сделать, учитывая результаты лемм 1.3, 3.3 и ограниченность функций $v(s, t)$ и $V_n^\pm(s, t)$ при $s = s_n$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $T > 0$ – достаточно большое число. При $t \leq -T$ для любых натуральных k, m, n найдутся такие постоянные $C_{k,m,n}$, что имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k \partial t^m} \left(u(x, t) - |t|^{1/2} \sum_{j=0}^{n-1} |t|^{-5j/2} v_j(s) \right) \right| \leq C_{k,m,n} |t|^{(1-3k-2m-5n)/2} (1+s^2)^{(1-3k-4m-5n)/6}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = m = 0$ частным случаем доказываемой теоремы является теорема 3.1.

Докажем справедливость доказываемой теоремы при $k = 0$ и произвольных m, n . Для этого заметим, что при $m \geq 1$ производные

$$q_m(x, t) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x, t)$$

являются решениями рекуррентной последовательности линейных ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_m}{\partial x}(x, t) &= (t - 3u^2(x, t))q_m(x, t) + mq_{m-1}(x, t) \\ &- \sum_{i_1+i_2+i_3=m, 0 \leq i_j < m} q_{i_1}(x, t)q_{i_2}(x, t)q_{i_3}(x, t), \quad m > 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

коэффициенты и правые части которых зависят только от параметра t и функций $q_j(x, t)$ с индексами $j < m$.

После замен

$$x = s|t|^{3/2}, \quad q_m(x, t) = |t|^{1/2-m} \rho_m(s, t), \quad u(x, t) = |t|^{1/2} \rho_0(s, t)$$

уравнения (3.17) примут вид рекуррентной последовательности сингулярно возмущенных ОДУ

$$\begin{aligned} |t|^{-5/2} \frac{\partial \rho_m}{\partial s}(s, t) &= -(1 + 3\rho_0^2(s, t))\rho_m(s, t) + m\rho_{m-1}(s, t) \\ &- \sum_{i_1+i_2+i_3=m, 0 \leq i_j < m} \rho_{i_1}(s, t)\rho_{i_2}(s, t)\rho_{i_3}(s, t), \quad m > 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

решения которых согласно утверждению теоремы 2.5 удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \rho_m(s, t) = 0. \quad (3.19)$$

Равномерная по переменной s асимптотика функции $\rho_0(s, t) = v(s, t)$ при $t \rightarrow -\infty$ описана в теореме 3.1 – она имеет вид степенного ряда

$$\rho_0(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{0,n}(s) |t|^{-5n/2}. \quad (3.20)$$

Из асимптотического разложения (3.20) по индукции находятся единственные формальные решения линейных ОДУ (3.18) вида

$$\rho_m^-(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{m,n}(s) |t|^{-5n/2}. \quad (3.21)$$

Их коэффициенты задаются формулами

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(s, t) = & \frac{1}{1 + 3f^2(s)} \left(-(\rho_{m,n-1}(s))'_s + m\rho_{m-1,n}(s) \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{0 \leq i_j < m \\ i_1 + i_2 + i_3 = m}} \sum_{\substack{0 \leq n_j \leq n \\ n_1 + n_2 + n_3 = n}} \rho_{i_1,n_1}(s) \rho_{i_2,n_2}(s) \rho_{i_3,n_3}(s) \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из свойств коэффициентов $\rho_{0,n}(s) = v_n(s)$, описанных в леммах 3.1 и 3.2, и последовательности формул (3.22) следует, что все функции $\rho_{m,n}(s)$ бесконечно дифференцируемы для любого s и при достаточно больших значениях $|s|$ представляются сходящимися рядами

$$\rho_{m,n}(s) = s^{(1-2m-5n)/3} \left(a_{m,n}^0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m,n}^j s^{-j/3} \right). \quad (3.23)$$

Стало быть, для них справедливы оценки

$$\left| \frac{d^k}{ds^k} \rho_{m,n}(s) \right| = O((1 + s^2)^{(1-3k-4m-5n)/6}), \quad (3.24)$$

гарантирующие, в частности, формальное удовлетворение рядом (3.21) предельному соотношению (3.19).

Из свойств (3.22)–(3.24) коэффициентов $\rho_{m,n}(s)$ формального решения задачи (3.18), (3.19) вытекает справедливость утверждения теоремы для $k = 0$. Для проверки этого утверждения достаточно провести те же рассуждения, которые были использованы при доказательстве теоремы 3.1. Справедливость теоремы 3.2 для произвольных индексов k доказывается вполне аналогично доказательству теоремы 2.5.

Список литературы

- [1] А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, “О двух специальных функциях, связанных с особенностями типа сборки”, *Докл. РАН*, **387**:2 (2002), 156–158.
- [2] В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Наука, М., 1980.
- [3] А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, “Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 27–46.
- [4] С. А. Чаплыгин, *Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.

А. М. Ильин (А. М. Il'in)

Челябинский государственный университет

E-mail: iam@csu.ru, ilam@list.ru

Б. И. Сулейманов (B. I. Suleimanov)

Институт математики с ВЦ РАН, г. Уфа

E-mail: bis@imat.rb.ru, bisul@mail.ru