Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Протасов, Точки совместной непрерывности полугруппы ультрафильтров абелевой группы, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 2, 131–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:43:07

УДК 512.536

И. В. Протасов

Точки совместной непрерывности полугруппы ультрафильтров абелевой группы

Чех-стоунова компактификация βG дискретной абелевой группы G отождествляется с множеством всех ультрафильтров на группе G . Операция сложения на группе G естественно продолжается до полугрупповой операции на βG . Пара ультрафильтров (p, q) на группе G является точкой совместной непрерывности полугруппы βG тогда и только тогда, когда семейство подмножеств $\{P + Q : P \in p, Q \in q\}$ – база ультрафильтра. Основной результат статьи: *если G – счетная группа с конечным числом элементов порядка 2, и (p, q) – точка совместной непрерывности полугруппы βG , то по крайней мере один из ультрафильтров p, q главный*. При дополнительных к ZFC теоретико-множественных предположениях построены примеры, показывающие существенность ограничений на группу G .

Библиография: 5 названий.

Пусть G – абелева группа, βG – чех-стоунова компактификация группы G как дискретного пространства. Элементами пространства βG являются ультрафильтры на группе G , группа G отождествляется с подмножеством всех главных ультрафильтров из βG . Ультрафильтры из подмножества $\beta G \setminus G$ называются *свободными*. Конструкция, возникшая в комбинаторике чисел, позволяет продолжить операцию сложения на группе G до полугрупповой операции на βG . Операция сложения ультрафильтров оказывается непрерывной по второму аргументу при фиксированном первом аргументе, а также непрерывной по первому аргументу, если фиксированный второй аргумент является главным ультрафильтром. Пару ультрафильтров (p, q) назовем *точкой совместной непрерывности* полугруппы βG , если операция сложения ультрафильтров как отображение $\beta G \times \beta G \rightarrow \beta G$ непрерывна в точке (p, q) . Поскольку любой главный ультрафильтр является изолированной точкой пространства βG , то (p, q) – точка совместной непрерывности, если по крайней мере один из ультрафильтров p, q главный. Такие точки совместной непрерывности будем называть *тривиальными*. Естественно, для свободных ультрафильтров p, q точка совместной непрерывности (p, q) называется *нетривиальной*. Цель статьи – исследовать вопрос о существовании нетривиальных точек совместной непрерывности полугруппы βG .

К поиску таких точек приводит следующая задача. Пусть p, q – ультрафильтры на группе G . Семейство подмножеств $\{P + Q : P \in p, Q \in q\}$ – база некоторого однозначно определенного фильтра φ на группе G . Подмножество $A \subseteq G$ является элементом фильтра φ тогда и только тогда, когда существуют такие подмножества $P \in p, Q \in q$, что $P + Q \subseteq A$. Существуют ли такие свободные ультрафильтры $p, q \in \beta G$, что фильтр φ является ультрафильтром? Простые рассуждения, приведенные ниже в § 1, показывают, что φ – ультрафильтр тогда и только тогда, когда (p, q) – точка совместной непрерывности полугруппы βG .

Кратко о содержании статьи. Все рассматриваемые группы предполагаются абелевыми. В §1 изложена конструкция продолжения на βG операции сложения элементов группы G и приведены некоторые простые факты о точках совместной непрерывности. В частности, показано, что (p, q) – точка совместной непрерывности полугруппы βG для любых ультрафильтров p, q из βG тогда и только тогда, когда группа G конечна.

В §2 доказано, что для счетной группы G все точки совместной непрерывности полугруппы βG тривиальны, если для любого свободного ультрафильтра $p \in \beta G$ уравнение $p + x = 2p + y$ неразрешимо в βG . Через $2p$ обозначается ультрафильтр с базой $\{2P : P \in p\}$, где $2P = \{2a : a \in P\}$.

Техника разбиений, развитая в §3, позволила установить неразрешимость в βG уравнения $p + x = 2p + y$ для любого свободного ультрафильтра $p \in \beta G$ при условии, что подмножество всех элементов порядка 2 группы G конечно. Доказано также, что для любой группы G уравнение $x + x = 2x$ имеет в полугруппе βG лишь тривиальные решения – главные ультрафильтры. Иначе говоря, $p + p \neq 2p$ для любого свободного ультрафильтра p на любой группе G .

Основные результаты статьи содержатся в §4. Если G – счетная группа с конечным подмножеством элементов порядка 2, то все точки совместной непрерывности полугруппы βG тривиальны. Примеры, построенные при дополнительных к асимптотике ZFC теоретико-множественных предположениях (существование измеримых по Уламу кардиналов, аксиома Мартина), показывают, что отбросить ограничение счетности группы G или конечности подмножества элементов порядка 2, вообще говоря, нельзя. Отметим, что не известно ни одного “наивного” (т.е. построенного без дополнительных к ZFC теоретико-множественных предположений) примера нетривиальной точки совместной непрерывности полугруппы βG и существование таких примеров представляются автору весьма маловероятным. Точнее, весьма правдоподобна гипотеза о существовании таких моделей системы аксиом ZFC , в которых все точки совместной непрерывности полугруппы βG тривиальны для любой (или, по крайней мере, счетной) группы G . Без дополнительных предположений доказана тривиальность точек совместной непрерывности полугруппы βG вида (p, p) для любой группы G .

§1. Конструкция продолжения и простейшие свойства точек совместной непрерывности

Пусть X – дискретное пространство, βX – чех-стоунова компактификация пространства X . Элементами пространства βX являются ультрафильтры на множестве X , а базу топологии образуют подмножества $\bar{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$, где A пробегает все подмножества из X . При естественном отождествлении элементов из X с главными ультрафильтрами подмножество X плотно в βX . Отметим также, что пространство βX экстремально несвязно, т.е. замыкание любого открытого подмножества из βX открыто.

Следующее свойство пространства βX является характеристичным: любое отображение f пространства X в компактное хаусдорфово пространство K продолжается до непрерывного отображения $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$. Если в качестве K взять пространство βX , то для ультрафильтра $q \in \beta X$ базу ультрафильтра $\bar{f}(q)$ обра-

зуют подмножества

$$\bigcup \{F_x : x \in Q, F_x \in f(x)\},$$

где Q пробегает элементы ультрафильтра q , а F_x — элементы ультрафильтра $f(x)$.

Предположим теперь, что G — группа с дискретной топологией, и изложим конструкцию продолжения на βG операции сложения элементов группы G . Такая конструкция возникла и интенсивно используется в комбинаторике чисел (см., например, обзор [1]).

Для каждого элемента $a \in G$ определим отображение $R_a : G \rightarrow G$ правилом $R_a(x) = x + a$ для всех $x \in G$. Так как $G \subseteq \beta G$, то отображение R_a продолжается до непрерывного отображения $\bar{R}_a : \beta G \rightarrow \beta G$. Ясно, что для каждого ультрафильтра $p \in \beta G$ $\bar{R}_a(p)$ — ультрафильтр с базой $\{P + a : P \in p\}$. Таким образом, мы определили сумму $p + a = \bar{R}_a(p)$ ультрафильтра $p \in \beta G$ и элемента $a \in G$. Далее, для каждого ультрафильтра $p \in \beta G$ рассмотрим отображение $L_p : G \rightarrow \beta G$, заданное правилом $L_p(x) = p + x$ для всех $x \in G$. Продолжим отображение L_p до непрерывного отображения $\bar{L}_p : \beta G \rightarrow \beta G$. Если $q \in \beta G$, то ультрафильтр $\bar{L}_p(q)$ называется суммой ультрафильтров p и q и обозначается $p + q$. Необходимые нам свойства непрерывности операции сложения ультрафильтров отмечены во введении.

Приведем следующее конструктивное описание ультрафильтра $p + q$. Возьмем произвольное подмножество $Q \in q$, и для каждого элемента $a \in Q$ выберем подмножество $P_a \in p$. Подмножество $\bigcup \{P_a + a : a \in Q\}$ является элементом ультрафильтра $p + q$, и каждый элемент ультрафильтра $p + q$ содержит подмножество такого вида.

1.1. ЛЕММА. *Для ультрафильтров $p, q \in \beta G$ (p, q) — точка совместной непрерывности полугруппы βG тогда и только тогда, когда для любого подмножества $R \in p + q$ найдутся такие подмножества $P \in p$, $Q \in q$, что $P + Q \subseteq R$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (p, q) — точка совместной непрерывности, $R \in p + q$. Для окрестности $\bar{R}$ ультрафильтра $p + q$ выберем, пользуясь непрерывностью операции сложения в точке (p, q) , такие подмножества $P \in p$, $Q \in q$, что $\bar{P} + \bar{Q} \subseteq \bar{R}$. Очевидно, что $P + Q \subseteq R$.

Пусть R — произвольное подмножество из $p + q$. Выберем такие подмножества $P \in p$, $Q \in q$, что $P + Q \subseteq R$. Из определения операции сложения ультрафильтров следует, что $\bar{P} + \bar{Q} \subseteq \bar{R}$. Значит, (p, q) — точка совместной непрерывности.

1.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $p, q \in \beta G$, φ — фильтр на группе G с базой $\{P + Q : P \in p, Q \in q\}$. Так как $\varphi \subseteq p + q$, то по лемме 1.1 φ — ультрафильтр тогда и только тогда, когда (p, q) — точка совместной непрерывности полугруппы βG .

1.3. ЛЕММА. *Если (p, q) — точка совместной непрерывности полугруппы βG , то $p + q = q + p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $q + p$ — ультрафильтр, достаточно показать, что $R \in q + p$ для любого подмножества $R \in p + q$. По лемме 1.1 подмножество R содержит подмножество $P + Q$ для некоторых подмножеств $P \in p$, $Q \in q$. Так как $Q + P \in q + p$ и $P + Q = Q + P$, то $R \in q + p$.

1.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Хорошо известно (см., например, [2]), что полугруппа βG некоммутативна для любой бесконечной группы G . Следовательно, по лемме 1.3 (p, q) – точка совместной непрерывности полугруппы βG для любых ультрафильтров $p, q \in \beta G$ в том и только том случае, когда группа G конечна.

§ 2. Редукция к уравнениям

2.1. ЛЕММА ФРОЛИКА [3, лемма 8.2]. Пусть X – регулярное экстремально несвязное пространство, A, B – счетные подмножества из X , и $\bar{A}, \bar{B}$ – их замыкания в пространстве X . Если $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$, то $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

2.2. ЛЕММА. Пусть G – счетная группа, $p, q, r, s \in \beta G$. Если $p + r = q + s$, то $p = q + t$, либо $q = p + h$ для некоторых ультрафильтров $t, h \in \beta G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\beta G = \bar{G}$, то по условию леммы $(p + \bar{G}) \cap (q + \bar{G}) \neq \emptyset$. Из компактности пространства βG и непрерывности операции сложения ультрафильтров по второму аргументу следует, что $p + \bar{G}, q + \bar{G}$ – замыкания в βG подмножеств $p + G, q + G$. По лемме 2.1 $(p + \bar{G}) \cap (q + G) \neq \emptyset$, либо $(p + G) \cap (q + \bar{G}) \neq \emptyset$. Ввиду симметрии ограничимся первым случаем и выберем такие элементы $c \in \beta G, a \in G$, что $p + c = q + a$. Тогда $q = p + (c - a)$, где $c - a$ – ультрафильтр с базой $\{C - a : C \in c\}$. Положим $h = c - a$.

2.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что условие счетности группы G в лемме 2.2 существенно.

2.4. ЛЕММА. Если G – счетная группа и полугруппа βG имеет нетривиальную точку совместной непрерывности, то существует такой ультрафильтр $p \in \beta G \setminus G$, что уравнение $p + x = 2p + y$ разрешимо в полугруппе βG .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (p, q) – нетривиальная точка совместной непрерывности полугруппы βG . По лемме 1.3 $p + q = q + p$. Ввиду леммы 2.2 можно считать, что $q = p + h$ для некоторого ультрафильтра $h \in \beta G$. Положим $r = p + q$ и покажем, что $r = 2p + h$. Фиксируем произвольное подмножество $R \in r$. Пользуясь леммой 1.1, выберем такие подмножества $P \in p, Q \in q$, что $P + Q \subseteq R$. Так как $q = p + h$ и $Q \in q$, то по непрерывности сложения по второму аргументу найдется такое подмножество $H \in h$, что $p + \bar{H} \subseteq \bar{Q}$. Возьмем произвольный элемент $a \in H$. Поскольку $p + a \in \bar{Q}$ и a – главный ультрафильтр, то найдется такое подмножество $P_a \in p, P_a \subseteq P$, что $\bar{P}_a + a \subseteq \bar{Q}$. Так как $P_a + a \subseteq Q$ и $P_a \subseteq P$, то $P_a + P_a + a \subseteq R$. Заметим, что $2P_a + a \subseteq P_a + P_a + a$, следовательно, $2P_a + a \subseteq R$ для любого элемента $a \in H$. Поскольку $\bigcup \{2P_a + a : a \in H\}$ – элемент ультрафильтра $2p + h$, то $R \in 2p + h$. Ввиду произвола выбора подмножества $R \in r$ имеем $r = 2p + h$.

2.5. ЛЕММА. Пусть G, H – произвольные группы, $p \in \beta G, \bar{f}: \beta G \rightarrow \beta H$ – чех-стоуново продолжение гомоморфизма $f: G \rightarrow H$. Если уравнение $p + x = 2p + y$ разрешимо в полугруппе βG , то уравнение $\bar{f}(p) + x = 2\bar{f}(p) + y$ разрешимо в полугруппе βH .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из того, что $\bar{f}$ – гомоморфизм соответствующих полугрупп, и соотношения $\bar{f}(2p) = 2\bar{f}(p)$.

2.6. ЛЕММА. Если (p, p) – точка совместной непрерывности полугруппы βG , то $p + p = 2p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.1 семейство подмножеств $\{P + P : P \in p\}$ – база ультрафильтра $p + p$. Поскольку $P + P \in 2p$ для любого подмножества $P \in p$, то $p + p = 2p$.

§ 3. О разрешимости уравнения

$p + x = 2p + y$ в полугруппе ультрафильтров

3.1. ЛЕММА. Пусть $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел, $p \in \beta\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$. Уравнение $p + x = 2p + y$ неразрешимо в полугруппе $\beta\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: $p + q = 2p + h$ для некоторых ультрафильтров $q, h \in \beta\mathbb{Z}$. Применяя лемму 2.5 к автоморфизму $f: G \rightarrow G$, заданному правилом $f(x) = -x$, можно считать, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ является элементом ультрафильтра p .

Для натуральных чисел a, b , $a < b$, обозначим через $[a, b)$ полуинтервал числовой прямой $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. Положим

$$B_0 = [3, 4), \quad B_1 = [4, 5), \quad B_2 = [5, 6), \quad B_3 = [6, 8), \quad B_4 = [8, 10), \quad B_5 = [10, 12),$$

$$A_i = \bigcup \{4^n B_i \cap \mathbb{N} : n < \omega\}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Легко проверяются следующие включения:

$$2A_0 \subseteq A_3, \quad 2A_1 \subseteq A_4, \quad 2A_2 \subseteq A_5, \quad 2A_3 \subseteq A_0, \quad 2A_4 \subseteq A_1, \quad 2A_5 \subseteq A_2.$$

Поскольку p – свободный ультрафильтр, $\mathbb{N} \in p$ и $\mathbb{N} = \{1, 2\} \cup A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, то найдется такой индекс i , что $A_i \in p$. Пусть для определенности $i = 3$. В остальных случаях рассуждения аналогичны.

Возьмем произвольное целое число b . Ясно, что $a + b \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$ для всех достаточно больших чисел $a \in A_3$. Так как $A_3 \in p$, и p – свободный ультрафильтр, то $A_2 \cup A_3 \cup A_4 \in p + b$. Значит, $p + G \subseteq A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Из непрерывности сложения по второму аргументу следует, что $p + \overline{G} \subseteq \overline{A_2 \cup A_3 \cup A_4}$. Следовательно, $p + q \in \overline{A_2 \cup A_3 \cup A_4}$, т.е. $A_2 \cup A_3 \cup A_4 \in p + q$.

С другой стороны, $2a + b \in A_0 \cup A_5 \cup A_1$ для всех достаточно больших чисел $a \in A_3$. Повторяя рассуждения из предыдущего абзаца, заключаем, что $A_0 \cup A_5 \cup A_1 \in 2p + h$.

Поскольку $(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_0 \cup A_5 \cup A_1) = \emptyset$, получаем противоречие с выбором ультрафильтров p, q, h .

3.2. ЛЕММА ДЕ БРЕЙНА–ЭРДЕША [3, лемма 3.1]. Пусть X – произвольное множество, и отображение $f: X \rightarrow X$ не имеет неподвижных точек. Существует такое разбиение $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, что $f(X_i) \cap X_i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3$.

3.3. ЛЕММА. Пусть α – предельный ординал, и группа G представлена в виде объединения $\bigcup\{G_\gamma : \gamma < \alpha\}$ возрастающей цепочки своих подгрупп G_γ . Предположим также, что $p \in \beta G \setminus G$, и для всех $\gamma < \alpha$ выполняются следующие условия:

- 1) факторгруппа $G_{\gamma+1}/G_\gamma$ не имеет элементов порядка 2;
- 2) $G_\gamma \notin p$.

Уравнение $p + x = 2p + y$ неразрешимо в полугруппе βG .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: $p + q = 2p + h$ для некоторых ультрафильтров $q, h \in \beta G$. Положим $X^\gamma = G_{\gamma+1}/G_\gamma$, и рассмотрим отображение $f_\gamma: X^\gamma \rightarrow X^\gamma$, заданное правилом $f_\gamma(x) = 2x$. Из условия 1 и леммы 3.2 вытекает существование такого разбиения множества $X^\gamma \setminus \{0\} = X_1^\gamma \cup X_2^\gamma \cup X_3^\gamma$, что $f_\gamma(X_i^\gamma) \cap X_i^\gamma = \emptyset, i = 1, 2, 3$. Обозначим через A_i^γ полный прообраз подмножества X_i^γ при естественном гомоморфизме $G_{\gamma+1} \rightarrow G_{\gamma+1}/G_\gamma$. Тогда подмножества $A_1^\gamma, A_2^\gamma, A_3^\gamma$ попарно не пересекаются и выполняются следующие соотношения:

$$G_{\gamma+1} \setminus G_\gamma = A_1^\gamma \cup A_2^\gamma \cup A_3^\gamma, \quad A_i^\gamma + G_\gamma = A_i^\gamma, \quad 2A_i^\gamma \cap A_i^\gamma = \emptyset, \quad i = 1, 2, 3.$$

Положим $A_i = \bigcup\{A_i^\gamma : \gamma < \alpha\}, i = 1, 2, 3$. Ясно, что подмножества A_1, A_2, A_3 попарно не пересекаются и выполняются следующие соотношения:

$$G = G_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3, \quad 2A_i \cap A_i = \emptyset \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как $G_0 \notin p$, то $A_i \in p$ для некоторого индекса i .

Покажем, что $A_i \in p + q$. Фиксируем произвольный элемент $a \in G$ и выберем такой индекс γ , что $a \in G_\gamma$. Поскольку $G_\gamma \notin p$, то $A_i \setminus G_\gamma \in p$. Из равенств $A_i \setminus G_\gamma = \bigcup\{A_i^\beta : \beta > \gamma\}, A_i^\beta + G_\beta = A_i^\beta, G_\gamma \subset G_\beta$ для всех $\beta > \gamma$, вытекает, что $(A_i \setminus G_\gamma) - a = A_i \setminus G_\gamma$. Следовательно, $A_i \setminus G_\gamma \in p + a$ и $A_i \in p + a$. В силу произвола выбора элемента $a \in G$ и соотношения $p + q \in p + \overline{G}$, заключаем, что $A_i \in p + q$.

Из условий 1), 2) следует, что $G_\gamma \notin 2p$ для всех $\gamma < \alpha$. Так как $2A_i \in 2p$ и $2A_i \cap A_i = \emptyset$, то найдется такой индекс $j \neq i$, что $A_j \in 2p$. Рассуждения из предыдущего абзаца показывают, что $A_j \in 2p + h$.

Для фиксации противоречия с выбором ультрафильтров q, h укажем на то, что $A_i \cap A_j = \emptyset$.

3.4. ЛЕММА. Пусть m – простое число, C_{m^∞} – квазициклическая m -группа, $p \in \beta C_{m^\infty} \setminus C_{m^\infty}$. Уравнение $p + x = 2p + y$ неразрешимо в полугруппе βC_{m^∞} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m \neq 2$ непосредственно применяем лемму 3.3. Поэтому предположим, что $p + q = 2p + h$ для некоторых ультрафильтров $q, h \in \beta C_{2^\infty}$. Разобьем группу C_{2^∞} на два подмножества A_0, A_1 , где A_0 – совокупность всех элементов порядка $2^n, n$ – четное число, $A_1 = G \setminus A_0, G = C_{2^\infty}$. Выберем такой индекс i , что $A_i \in p$. Фиксируем произвольный элемент $a \in G$. Так как подмножество $(A_i - a) \setminus A_i$ конечно, а p – свободный ультрафильтр, то $A_i - a \in p$ и $A_i \in p + a$. В силу произвольного выбора элемента a получаем $A_i \in p + q$. С другой стороны, по определению разбиения $G \setminus A_i \in 2p$, и аналогичные рассуждения приводят к тому, что $G \setminus A_i \in 2p + h$. Наступило противоречие с выбором ультрафильтров q, h .

3.5. ЛЕММА. Пусть $G = C_{2^\infty} \oplus C_{3^\infty} \oplus C_{5^\infty} \oplus \dots$, $\oplus$ – знак прямой суммы, $p \in \beta G \setminus G$. Уравнение $p + x = 2p + y$ неразрешимо в полугруппе βG .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

$$G_0 = C_{2^\infty}, \quad G_1 = C_{2^\infty} \oplus C_{3^\infty}, \quad G_2 = C_{2^\infty} \oplus C_{3^\infty} \oplus C_{5^\infty}, \quad \dots$$

Тогда $G = \bigcup \{G_n : n < \omega\}$. Если $G_n \notin p$ для всех $n < \omega$, то применяем лемму 3.3. Поэтому можно считать, что $G_m \in p$ для некоторого $m < \omega$. Рассмотрим проектирование f группы G на прямое слагаемое G_m . Так как $\bar{f}(p)$ – свободный ультрафильтр на G_m , то по лемме 2.5 вопрос сводится к неразрешимости уравнения $\bar{f}(p) + x = 2\bar{f}(p) + y$ в полугруппе βG_m . В свою очередь, группа G_m является прямой суммой конечного числа квазициклических слагаемых. Из конечности числа слагаемых следует, что проекция ультрафильтра $\bar{f}(p)$ по крайней мере на одно из этих слагаемых является свободным ультрафильтром. Повторное применение леммы 2.5 и леммы 3.4 завершает доказательство.

3.6. ЛЕММА. Пусть $\mathbb{Q}$ – группа рациональных чисел, $p \in \beta \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$. Уравнение $p + x = 2p + y$ неразрешимо в полугруппе $\beta \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное и рассмотрим группу $\mathbb{Z}$ как подгруппу группы $\mathbb{Q}$. Если f – факторный гомоморфизм группы $\mathbb{Q}$ на группу $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, то по лемме 2.5 уравнение $\bar{f}(p) + x = 2\bar{f}(p) + y$ разрешимо в полугруппе $\beta(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Так как $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq C_{2^\infty} \oplus C_{3^\infty} \oplus C_{5^\infty} \oplus \dots$, то по лемме 3.6 $\bar{f}(p)$ – главный ультрафильтр. Представляя группу $\mathbb{Q}$ в виде объединения $\bigcup \{a_n + \mathbb{Z} : n < \omega\}$ смежных классов по подгруппе $\mathbb{Z}$, получаем, что $a_m + \mathbb{Z} \in p$ для некоторого $m < \omega$.

Уравнение $p + x = 2p + y$ запишем в виде

$$(p - a_m) + x = 2(p - a_m) + (a_m + y).$$

Из нашего предположения о разрешимости в $\beta \mathbb{Q}$ уравнения $p + x = 2p + y$ следует разрешимость уравнения $p_1 + x = 2p_1 + y$, где $p_1 = p - a_m$. Заметим, что $\mathbb{Z} \in p_1$, и p_1 – свободный ультрафильтр. Выберем такие ультрафильтры $q, h \in \beta \mathbb{Q}$, что $p_1 + q = 2p_1 + h$. Применяя автоморфизм f группы $\mathbb{Q}$, заданный формулой $f(x) = -x$, можно считать, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ является элементом ультрафильтра p_1 .

Рассмотрим подмножества A_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, множества $\mathbb{N}$, определенные в ходе доказательства леммы 3.1. Положим $C_i = \bigcup \{A_i + a_n : n < \omega\}$. Одно из подмножеств A_i , скажем для определенности A_2 , является элементом ультрафильтра p_1 .

Возьмем произвольный элемент $b \in \mathbb{Q}$. Представляя его в виде $b = c + a_n$, $c \in \mathbb{Z}$, замечаем, что $a + b \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$ для всех достаточно больших чисел $a \in A_2$. Поэтому $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \in p_1 + b$ и, в силу произвола выбора $b \in \mathbb{Q}$, $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \in p_1 + q$.

С другой стороны, $2a + b \in C_4 \cup C_5 \cup C_0$ для всех достаточно больших чисел $a \in A_2$. Следовательно, $C_4 \cup C_5 \cup C_0 \in 2p_1 + h$. Наступило противоречие с тем, что $(C_1 \cup C_2 \cup C_3) \cap (C_4 \cup C_5 \cup C_0) = \emptyset$.

3.7. ТЕОРЕМА. Пусть G – группа с конечным подмножеством элементов порядка 2, $p \in \beta G \setminus G$. Уравнение $p + x = 2p + y$ неразрешимо в полугруппе βG .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если указанное уравнение разрешимо в полугруппе βG , то по лемме 2.5 оно также разрешимо и в полугруппе βD , где D – делимая оболочка группы G . Поскольку число элементов порядка 2 группы D также конечно, можно считать группу G делимой. Используя структурную теорему о делимых группах, представим группу G в виде объединения $\bigcup\{G_\gamma : \gamma < \alpha\}$ возрастающей трансфинитной цепочки подгрупп G_γ , где G_0 – прямая сумма конечного числа квазициклических 2-подгрупп группы G , $G_{\gamma+1} = G_\gamma \oplus A_\gamma$, где A_γ – квазициклическая группа либо группа рациональных чисел, и $G_\gamma = \bigcup\{G_\beta : \beta < \gamma\}$ для предельных ординалов γ .

Предположим вначале, что $G_\gamma \notin p$ для всех $\gamma < \alpha$, при этом автоматически α оказывается предельным ординалом. В этом случае доказательство завершается ссылкой на лемму 3.3.

В альтернативном случае выберем наименьший ординал β , для которого $G_\beta \in p$. Проектируем группу G на подгруппу G_β , которая является естественным прямым слагаемым группы G . Если β – предельный ординал и $\beta > 0$, то ввиду леммы 2.5 мы оказываемся в ситуации, рассмотренной в предыдущем абзаце. Иначе, имеется две возможности.

1) $\beta = 0$. Так как p – свободный ультрафильтр, $G_0 \in p$ и G_0 – прямая сумма конечного числа квазициклических 2-подгрупп, то проекция ультрафильтра p по крайней мере на одно слагаемое группы G_0 оказывается свободным ультрафильтром. Применяем леммы 2.5 и 3.4.

2) $\beta = \gamma + 1$ для некоторого ординала γ . Тогда $G_\beta = G_\gamma \oplus A_\gamma$. Из леммы 2.5 и лемм 3.4, 3.6 вытекает, что проекция ультрафильтра p на слагаемое A_γ является главным ультрафильтром. Поэтому $a + G_\gamma \in p$ для некоторого элемента $a \in A_\gamma$. Положим $p_1 = p - a$ и заметим, что $\gamma < \beta$ и $G_\gamma \in p_1$. Разрешимость исходного уравнения равносильна разрешимости в полугруппе βG уравнения $p_1 + x = 2p_1 + y$. Поскольку строго убывающая цепочка ординалов конечна, доказательство теоремы завершено.

3.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Условие конечности числа элементов порядка 2 в формулировке доказанной теоремы существенно. Действительно, пусть G – бесконечная группа экспоненты 2. Возьмем произвольный ультрафильтр $p \in \beta G \setminus G$. Так как $2p = 0$, то уравнение $p + x = 2p + y$ имеет в полугруппе βG очевидное решение $x = q, y = p + q$, где q – произвольный ультрафильтр из βG .

3.9. ТЕОРЕМА. Если G – произвольная группа, $p \in \beta G$ и $p + p = 2p$, то p – главный ультрафильтр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H подгруппу всех 2-элементов группы G , f – факторный гомоморфизм группы G на G/H . Так как $\overline{f}(p) + \overline{f}(p) = 2\overline{f}(p)$, и группа G/H не имеет элементов порядка 2, то по теореме 3.7 $\overline{f}(p)$ – главный ультрафильтр. Следовательно, $H + a \in p$ для некоторого элемента $a \in G$. Заменяя ультрафильтр p на $p - a$ и учитывая очевидное равенство $(p - a) + (p - a) = 2(p - a)$, можно считать, что $H \in p$. Рассмотрим два случая.

1) Для любого подмножества $P \in p$ порядки элементов из P не ограничены в совокупности. Разобьем подгруппу H на два подмножества A_0, A_1 , где A_0 – совокупность всех элементов порядка 2^n , n – четное число, $A_1 = H \setminus A_0$. Так как $H \in p$,

то $A_i \in p$ для некоторого $i = 0, 1$. По определению разбиения $H \setminus A_i \in 2p$. Возьмем произвольный элемент $b \in H$ и выберем такое подмножество $P \in p$, $P \subseteq A_i$, что порядки всех элементов из P больше порядка элемента b . Тогда $P + b \subseteq A_i$ и, значит, $A_i \in p + p$. Так как $(H \setminus A_i) \cap A_i = \emptyset$, то $p + p \neq 2p$ и этот случай исключается.

2) Существует такое подмножество $P \in p$, $P \subseteq H$, что порядки всех элементов из P ограничены в совокупности. Выберем натуральное число n так, что $2^n a = 0$ для всех элементов $a \in P$. Из равенства $p + p = 2p$ вытекает, что $p + \dots + p = 2^n p$, где число слагаемых в левой части равно 2^n . Так как $2^n P = \{0\}$, то $2^n p$ — главный ультрафильтр. Поскольку свободные ультрафильтры образуют подполугруппу полугруппы βG , то слагаемое p из левой части является главным ультрафильтром, и теорема доказана.

§ 4. Точки совместной непрерывности

4.1. ТЕОРЕМА. Если G — счетная группа с конечным числом элементов порядка 2, то любая точка совместной непрерывности полугруппы βG тривиальна.

Доказательство непосредственно следует из леммы 2.4 и теоремы 3.7.

4.2. ТЕОРЕМА. Для любой группы G все точки совместной непрерывности полугруппы βG вида (p, p) и $(p, -p)$ тривиальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точек вида (p, p) утверждение вытекает из леммы 2.6 и теоремы 3.9. Пусть $(p, -p)$ — точка совместной непрерывности полугруппы βG . Так как $-p = \{-P : P \in p\}$, то по лемме 1.1 любое подмножество группы G , являющееся элементом ультрафильтра $p + (-p)$ содержит 0. Значит, ультрафильтр $p + (-p)$ главный. Поскольку свободные ультрафильтры образуют подполугруппу полугруппы βG , то p — главный ультрафильтр.

4.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Используя утверждение теоремы 4.2, относящееся к точкам (p, p) , и теорему Рисса–Сускевича для полугруппы ультрафильтров [4], можно доказать тривиальность точек совместной непрерывности (p, q) , где p — ультрафильтр из минимального идеала полугруппы βG .

4.4. ПРИМЕР. Предположим, что мощность группы G измерима по Уламу. Укажем нетривиальную точку совместной непрерывности полугруппы βG . По одному из эквивалентных определений измеримости по Уламу на группе G существует свободный счетно полный ультрафильтр p . Фиксируем произвольный свободный ультрафильтр q на группе G , элементом которого является некоторое счетное подмножество из G . Возьмем произвольное подмножество $R \in p + q$, и выберем такие счетное подмножество $Q \in q$ и подмножества $P_a \in p$, $a \in Q$, что $\bigcup \{P_a + a : a \in Q\} \subseteq R$. Положим $P = \bigcap \{P_a : a \in Q\}$. Из счетной полноты ультрафильтра p следует, что $P \in p$. Поскольку $P + Q \subseteq R$, по лемме 1.1 (p, q) — точка совместной непрерывности полугруппы βG .

4.5. ВОПРОС. Пусть G — группа без элементов порядка 2 и мощность группы G неизмерима по Уламу. Верно ли, что все точки совместной непрерывности полугруппы βG тривиальны?

4.6. ПРИМЕР. Используя аксиому Мартина, Е. Г. Зеленюк в работе [5] построил на счетной группе G экспоненты 2 такой фильтр φ с базой из подгрупп, что подмножество $\{h \in \beta G : \varphi \subseteq h\}$ состоит из главного ультрафильтра 0 и таких свободных ультрафильтров – идемпотентов p, q , что $p + q = q + p = q$. Проведенный автором анализ этой конструкции показал, что (p, q) – точка совместной непрерывности полугруппы βG .

4.7. ВОПРОС. Совместно ли с аксиоматикой ZFC утверждение о том, что для счетной группы G экспоненты 2 все точки совместной непрерывности полугруппы βG тривиальны?

Положительный ответ на этот вопрос можно получить, если доказать следующую гипотезу. Если существует нетривиальная точка совместной непрерывности полугруппы βG , то в пространстве $\beta\omega \setminus \omega$ имеется P -точка. Как известно, в некоторых моделях системы аксиом ZFC пространство $\beta\omega \setminus \omega$ не имеет P -точек. Некоторое основание для формулировки гипотезы дает тот факт, что существование фильтра φ , описанного в примере 4.6, влечет наличие P -точки в пространстве $\beta\omega \setminus \omega$.

Список литературы

1. *Hindman N.* Ultrafilters and combinatorial number theory // Lect. Notes Math. V. 751, 1979. P. 49–184.
2. *Baker J. W., Milnes P.* The ideal structure of the Stone–Čech compactification of group // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1977. V. 82. P. 401–409.
3. *Comfort W. W.* Ultrafilters: some old and some new results // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 417–454.
4. *Ruppert W.* Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory // Lect. Notes Math. V. 1079, 1984. P. 1–260.
5. *Зеленюк Е. Г.* Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров // Докл. АН Украины. 1995. № 6 (в печати).

Киевский университет им. Т. Шевченко

Поступила в редакцию
24.11.1994