Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 129–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:23:02

УДК 517.518.3+517.965

В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков

Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой

Для каждого натурального n на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ определяются масштабирующие функции, масками которых являются полиномы Уолша порядка $2^n - 1$. Для решений соответствующих масштабирующих уравнений изучаются условия Стрэнга–Фикса, свойство разбиения единицы, а также линейная независимость, стабильность и ортогональность целочисленных сдвигов. Найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы решения этих уравнений генерировали кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Тем самым охарактеризованы все диадические финитные вейвлеты на $\mathbb{R}_+$ и изложен алгоритм их построения. Представлен метод оценки гладкости масштабирующих функций, приводящий при малых значениях n к точным оценкам. Кроме того, установлено, когда финитные масштабирующие функции на $\mathbb{R}_+$ являются двоично-целыми. Доказано, что масштабирующая функция либо является двоично-целой, либо ее гладкость конечна и может быть эффективно оценена сверху.

Библиография: 13 названий.

Введение

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – положительная полупрямая, $\{w_j\}$ – система функций Уолша на $\mathbb{R}_+$, $\oplus$ и $\ominus$ – диадические операции на $\mathbb{R}_+$, $\hat{f}$ – преобразование Уолша–Фурье функции f (см. § 1, а также [1], [2]). Как обычно, через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$ обозначаются соответственно множества натуральных и целых неотрицательных чисел.

Основные сведения об ортогональных вейвлетах и масштабирующих функциях на вещественной прямой $\mathbb{R}$ изложены в [3]. В настоящей работе для произвольного натурального n изучаются решения φ масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (0.1)$$

генерирующие кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, и сопутствующие им решения. В общем случае коэффициентами c_k уравнения (0.1) могут быть произвольные комплексные числа. Решение φ уравнения (0.1) называется *финитным*, если φ имеет компактный носитель на $\mathbb{R}_+$. Если масштабирующее уравнение (0.1) имеет ненулевое финитное решение $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то это решение

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00066) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-304.2003.1). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00386).

© В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, 2006

единственно с точностью до умножения на константу, причем $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. Кроме того, как доказано в § 2, если функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ имеет компактный носитель, удовлетворяет уравнению (0.1) и условию $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k = 2, \quad \text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1}] \quad \text{и} \quad \widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega), \quad (0.2)$$

где

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega) \quad (0.3)$$

– полином Уолша, называемый *маской* масштабирующего уравнения (0.1) (или маской его решения φ). При этом имеют место (см. § 2 и § 3) следующие свойства:

- 1) $\widehat{\varphi}(r) = 0$ при всех $r \in \mathbb{N}$ (модифицированное условие Стрэнга–Фикса);
- 2) $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ (свойство разбиения единицы);
- 3) если система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортогональна в $L^2(\mathbb{R}_+)$, то

$$|m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in [0, 1/2]. \quad (0.4)$$

Диадические интервалы ранга n – это числовые промежутки вида

$$I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции Уолша $w_j(x)$ при $0 \leq j \leq 2^n - 1$ принимают постоянные значения, равные 1 или -1 , на каждом из интервалов $I_k^{(n)}$, причем $w_j(x) = 1$ при $x \in I_0^{(n)}$. Пусть

$$b_l = m(\omega) \quad \text{для } \omega \in I_l^{(n)}, \quad 0 \leq l \leq 2^n - 1,$$

где m – маска масштабирующего уравнения (0.1). Из (0.2) и (0.4) следуют равенства

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \leq l \leq 2^{n-1} - 1. \quad (0.5)$$

Коэффициенты масштабирующего уравнения (0.1) связаны со значениями b_l маски (0.3) на диадических интервалах прямым и обратным дискретными преобразованиями Уолша:

$$c_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{2^n-1} b_l w_l(k2^{-n}), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1, \quad (0.6)$$

$$b_l = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(l2^{-n}), \quad 0 \leq l \leq 2^n - 1. \quad (0.7)$$

Для реализации этих преобразований существуют быстрые алгоритмы, подобные классическим алгоритмам быстрого преобразования Фурье (см., например, [2; гл. 9]). Таким образом, выбор значений маски (0.3) на диадических интервалах ранга n одновременно определяет коэффициенты уравнения (0.1), которому удовлетворяет соответствующая функция φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Кратномасштабным анализом (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$ называется последовательность замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R}_+)$, $j \in \mathbb{Z}$, такая, что выполнены условия:*

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;
- (ii) объединение $\bigcup V_j$ плотно в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;
- (iii) $f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;
- (iv) $f(\cdot) \in V_0 \Rightarrow f(\cdot \oplus k) \in V_0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$;
- (v) существует функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в V_0 .

Функция φ из условия (v) называется *диадической масштабирующей функцией* в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x \ominus k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Будем говорить, что *функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$* , если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, семейство подпространств

$$V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{span}\{\varphi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (0.8)$$

является КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Если функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, то она является диадической масштабирующей функцией в $L^2(\mathbb{R}_+)$. По каждой диадической масштабирующей функции φ стандартным образом (см. [4]–[6]) определяется *диадический вейвлет ψ на $\mathbb{R}_+$* такой, что функции

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x \ominus k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

ПРИМЕР 1. Если $n = 1$ и $c_0 = c_1 = 1$, то решением уравнения (0.1) является функция Хаара: $\varphi = \chi_{[0,1)}$ (χ_E – характеристическая функция множества E). В этом случае

$$m(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } \omega \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{для } \omega \in [1/2, 1), \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [0, 1/2), \\ -1 & \text{для } x \in [1/2, 1), \\ 0 & \text{для } x \in \mathbb{R}_+ \setminus [0, 1). \end{cases}$$

Соответствующая система вейвлетов $\{\psi_{jk}\}$ является классическим базисом Хаара.

ПРИМЕР 2. Масштабирующая функция Лэнга [4] получается, если при $n = 2$ положить

$$m(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } \omega \in [0, 1/4), \\ a & \text{для } \omega \in [1/4, 1/2), \\ 0 & \text{для } \omega \in [1/2, 3/4), \\ b & \text{для } \omega \in [3/4, 1), \end{cases}$$

где $0 < |a| < 1$, $|b| = \sqrt{1 - |a|^2}$. В этом случае функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^3 c_k \varphi(2x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$c_0 = \frac{1+a+b}{2}, \quad c_1 = \frac{1+a-b}{2}, \quad c_2 = \frac{1-a-b}{2}, \quad c_3 = \frac{1-a+b}{2}.$$

Эта функция генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, обладает фрактальным свойством:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1+a-b}{2} + b\varphi(2x) & \text{для } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1-a+b}{2} - b\varphi(2x-2) & \text{для } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

и представима лакунарным рядом Уолша:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \chi_{[0,1)}\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 + a \sum_{j=0}^{\infty} b^j w_{2^{j+1}-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (0.9)$$

Кроме того, при $|b| < 1/2$ соответствующая система вейвлетов $\{\psi_{jk}\}$ является безусловным базисом во всех пространствах $L^q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q < \infty$ (см. [5]).

Пусть $\ominus_p$ обозначает операцию вычитания по модулю p на $\mathbb{R}_+$. В работе [6] для любых целых $p, n \geq 2$ определены коэффициенты c_k , $0 \leq k \leq p^n - 1$, такие, что решение φ масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{p^n-1} c_k \varphi(px \ominus_p k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (0.10)$$

обладает свойствами:

- 1) φ является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша;
- 2) система $\{\varphi(\cdot \ominus_p k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$;
- 3) $\text{supp } \varphi \subset [0, p^{n-1}]$;
- 4) φ генерирует кратномасштабный p -анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Для вычисления коэффициентов уравнения (0.10) сначала выбираются $p^n - p$ (вообще говоря, комплексных) параметров, удовлетворяющих некоторому “условию ортогональности”, а затем после добавления к этим параметрам $p - 1$ нулей применяется быстрое преобразование Виленкина–Крестенсона. В работе [7] аналогичные масштабирующие функции и соответствующие вейвлеты построены на локально компактной абелевой группе G_p , состоящей из последовательностей вида $x = (x_j) = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$, где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$; групповая операция на G_p определяется как покоординатное сложение по модулю p , а топология вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G_p : x_j = 0, j \leq l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

В случае $p = 2$ подгруппа U_0 изоморфна канторовой диадической группе, т.е. топологическому прямому произведению счетного множества циклических групп второго порядка, рассматриваемых с дискретной топологией. Основы гармонического анализа на группе G_2 (т.е. на аддитивной группе диадического поля $\mathbb{F}$) изложены в монографии [2], а диадические вейвлеты на этой группе изучались в работах [4], [5].

Приведенные ниже результаты относятся в основном к следующим четырем задачам.

1. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы решения функциональных уравнений вида (0.1) генерировали кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

2. Выяснить, при каких условиях система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$, где φ удовлетворяет уравнению (0.1), линейно независима, стабильна или ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

3. Оценить гладкость решений уравнений вида (0.1).

4. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы решения масштабирующих уравнений вида (0.1) являлись бесконечно гладкими или двоично-целыми функциями.

Отмечается ряд существенных отличий полученных нами результатов от соответствующих теорем, относящихся к вейвлет-анализу на прямой $\mathbb{R}$ (см., например, замечание 2). Основные результаты настоящей работы имеют естественные аналоги для вейвлетов и масштабирующих функций на группе G_p , а также для решений уравнений вида (0.10) на полупрямой $\mathbb{R}_+$.

Сформулируем некоторые определения, используемые в дальнейшем. Семейство $\{[0, 2^{-j}) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля диадической топологии на $\mathbb{R}_+$ (см., например, [2; § 1.3]). Множество E на $\mathbb{R}_+$, компактное относительно диадической топологии, называется W -компактным. Легко видеть, что объединение конечного числа диадических интервалов W -компактно. Предположим, что множество E является W -компактным. Множество E назовем *конгруэнтным* $[0, 1)$ по модулю $\mathbb{Z}_+$, если мера Лебега множества E равна 1 и для каждого $x \in [0, 1)$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $x \oplus k \in E$. Будем говорить, что полином Уолша m удовлетворяет *модифицированному условию Коэна*, если существует W -компактное множество $E \subset \mathbb{R}_+$, конгруэнтное $[0, 1)$ по модулю $\mathbb{Z}_+$, содержащее окрестность нуля и такое, что

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m(2^{-j}\omega)| > 0. \quad (0.11)$$

Для произвольного множества $M \subset [0, 1)$ положим

$$TM := \frac{1}{2}M \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M\right), \quad (0.12)$$

где $\alpha + \beta M := \{\alpha + \beta x \mid x \in M\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть m – маска масштабирующего уравнения (0.1). Множество $M \subset [0, 1)$ называется *блокированным* (для маски m), если оно представимо в виде объединения диадических интервалов ранга $n - 1$, не содержит

интервала $[0, 2^{-n+1})$ и обладает свойством

$$TM \subset M \cup \text{Null } m,$$

где $\text{Null } m$ – множество всех нулей маски m на интервале $[0, 1)$.

Если φ – финитное L^2 -решение уравнения (0.1) такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то из ортонормированности в $L^2(\mathbb{R}_+)$ системы $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ следуют равенства

$$m(0) = 1, \quad |m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in [0, 1/2). \quad (0.13)$$

Обратно, как доказано в § 4, если маска m финитного L^2 -решения φ уравнения (0.1) удовлетворяет условиям (0.13), а также любому из следующих двух эквивалентных условий:

- 1) m не имеет блокированных множеств;
- 2) m удовлетворяет модифицированному условию Коэна,

то φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (и, следовательно, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$).

Определяя для данной маски m по формуле (0.7) значения b_l , $0 \leq l \leq 2^n - 1$, можем записать равенства (0.13) в виде (0.5). Отметим, что поскольку $m(\omega) \equiv 1$ на $I_0^{(n)}$, для проверки условия (0.11) достаточно найти номер j_0 такой, что $E/2^{j_0} \subset I_0^{(n)}$, а затем убедиться, что полином m не обращается в нуль на множествах $E/2, \dots, E/2^{j_0-1}$. Если $m(\omega) \neq 0$ на $[0, 1/2)$, то условие (0.11) выполнено для $E = [0, 1)$ (см. примеры 1, 2, 5). В следующем примере определено однопараметрическое семейство двоично-целых диадических масштабирующих функций.

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 3$ и

$$m(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [0, 1/4) \cup [3/8, 1/2), \\ b, & \text{если } \omega \in [1/4, 3/8), \\ 0, & \text{если } \omega \in [1/2, 3/4) \cup [7/8, 1), \\ \beta, & \text{если } \omega \in [3/4, 7/8), \end{cases} \quad (0.14)$$

где $0 \leq |b| < 1$, $|\beta| = \sqrt{1 - |b|^2}$. Тогда из (0.2) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \chi_{[0, 1/2)}(\omega) + b\chi_{[1/2, 3/4)}(\omega) + \chi_{[3/4, 1)}(\omega) + \beta\chi_{[3/2, 7/4)}(\omega).$$

Выполняя обратное преобразование Уолша–Фурье, получаем масштабирующую функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\chi_{[0, 4)}(x) \left[1 + w_1\left(\frac{x}{4}\right) + bw_2\left(\frac{x}{4}\right) + w_3\left(\frac{x}{4}\right) + \beta w_6\left(\frac{x}{4}\right) \right], \quad (0.15)$$

для маски которой условие (0.11) выполнено при $E = [0, 1/2) \cup [3/4, 1) \cup [3/2, 7/4)$. Функция (0.15) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^7 c_k \varphi(2x \ominus k)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{3+b+\beta}{4}, & c_1 &= \frac{3+b-\beta}{4}, & c_2 &= c_6 = \frac{1-b-\beta}{4}, \\ c_3 &= c_7 = \frac{1-b+\beta}{4}, & c_4 &= \frac{-1+b+\beta}{4}, & c_5 &= \frac{-1+b-\beta}{4}. \end{aligned}$$

Эти выражения для коэффициентов следуют из (0.6) и (0.14). Для $b = 0$ функция (0.15) рассматривалась в [6; пример 4].

В §5 получены разложения масштабирующих функций в лакунарные ряды Уолша и представлен метод оценки гладкости этих функций, приводящий при малых значениях n к точным оценкам. Аналоги этих результатов для локально компактной абелевой группы G_p содержатся в недавней работе [7]. В §6 установлено, когда финитные масштабирующие функции на $\mathbb{R}_+$ являются двоично-целыми, а в заключительном §7 доказано, что масштабирующая функция либо является двоично-целой, либо ее гладкость конечна и может быть эффективно оценена сверху.

§ 1. Предварительные сведения

Система функций Уолша $\{w_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ на $\mathbb{R}_+$ определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_n(x) = \prod_{j=0}^k (w_1(2^j x))^{\nu_j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где ν_j берутся из двоичного разложения

$$n = \sum_{j=0}^k \nu_j 2^j, \quad \nu_j \in \{0, 1\}, \quad \nu_k = 1, \quad k = k(n),$$

а $w_1(x)$ – функция, заданная на $[0, 1)$ формулой

$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ -1, & \text{если } x \in [1/2, 1), \end{cases}$$

и продолженная на $\mathbb{R}_+$ так, что $w_1(x+1) = w_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$.

Полиномами Уолша называются конечные линейные комбинации функций Уолша. Всякий полином Уолша порядка n может быть записан в виде

$$w(x) = \sum_{j=0}^n c_j w_j(x),$$

где c_j – комплексные коэффициенты. О свойствах полиномов Уолша и их роли в диадическом гармоническом анализе см., например, в [1], [2].

Целая и дробная части числа $x \in \mathbb{R}_+$ обозначаются через $[x]$ и $\{x\}$ соответственно.

Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого $j \in \mathbb{N}$ числа $x_j, x_{-j} \in \{0, 1\}$ определим равенствами

$$x_j = [2^j x] \pmod{2}, \quad x_{-j} = [2^{1-j} x] \pmod{2}. \quad (1.1)$$

Эти числа являются цифрами двоичного разложения

$$x = \sum_{j < 0} x_j 2^{-j-1} + \sum_{j > 0} x_j 2^{-j}$$

(в случае двоично-рационального x получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых).

Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ положим

$$x \oplus y = \sum_{j < 0} |x_j - y_j| 2^{-j-1} + \sum_{j > 0} |x_j - y_j| 2^{-j},$$

где x_j, y_j вычисляются по формулам (1.1). По определению полагают $x \ominus y = x \oplus y$ (так как $x \oplus x = 0$). Операция $\oplus$ используется, например, при идентификации с $\mathbb{R}_+$ группы G_2 , при изучении диадических классов Харди и при построении некоторых алгоритмов для анализа сигналов и цифровой обработки информации (см. [1], [2]). Отметим, что при указанной идентификации мере Хаара на G_2 соответствует мера Лебега на $\mathbb{R}_+$, а характеристам группы G_2 соответствуют обобщенные функции Уолша.

Функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ называется W -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$, если

$$\sup_{0 \leq h < 1/2^n} |f(x \oplus h) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Функция f называется W -непрерывной, если она W -непрерывна в каждой точке из $\mathbb{R}_+$. Всякая функция, непрерывная в обычном смысле на $\mathbb{R}_+$, является W -непрерывной. Полиномы Уолша являются W -непрерывными функциями (см., например, [2; § 1.3]).

Для $x, \omega \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\chi(x, \omega) = (-1)^{\sigma(x, \omega)}, \quad \text{где } \sigma(x, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \omega_{-j} + x_{-j} \omega_j$$

и x_j, ω_j находятся по формулам (1.1). Отметим, что при любом натуральном n

$$\chi(x, 2^{-n} l) = \chi(2^{-n} x, l) = w_l(2^{-n} x) \quad \text{для всех } x \in [0, 2^n), \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Преобразование Уолша–Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \chi(x, \omega) dx.$$

Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и

$$J_a f(\omega) = \int_0^a f(x) \chi(x, \omega) dx, \quad a > 0,$$

то $\widehat{f}$ определяется как предел $J_a f$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ при $a \rightarrow \infty$.

Свойства преобразования Уолша–Фурье аналогичны соответствующим свойствам классического преобразования Фурье (см., например, [1; гл. 6] или [2; гл. 9]). Некоторые из них приведены в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место следующие свойства:*

- (а) *если $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то $\widehat{f}$ является W -непрерывной функцией и $\widehat{f}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$;*
- (б) *пусть f и $\widehat{f}$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+)$ и f является W -непрерывной функцией, тогда в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ имеет место формула обращения*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(\omega) \chi(x, \omega) d\omega;$$

- (с) *если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Пусть $\mathcal{E}_n$ – пространство функций, заданных на $\mathbb{R}_+$ и постоянных на диадических интервалах ранга n . Функции из $\mathcal{E}_n$ называют *двоично-целыми функциями порядка n* . Если $f \in \mathcal{E}_n$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(2^{-n}k) \chi_{I_k^{(n)}}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Всякий полином Уолша порядка $2^n - 1$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_n$. Множество $\mathcal{E}$ двоично-целых функций на $\mathbb{R}_+$ определяется как объединение всех пространств $\mathcal{E}_n$. Масштабирующие функции в примерах 1 и 3 принадлежат множеству $\mathcal{E}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеют место следующие свойства:*

- (а) *пусть f и $\widehat{f}$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+)$ и f является W -непрерывной функцией; если $\text{supp } \widehat{f} \subset [0, 2^n]$, то $f \in \mathcal{E}_n$;*
- (б) *если $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{E}_n$, то $\text{supp } \widehat{f} \subset [0, 2^n]$;*
- (с) *если $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\text{supp } f \subset [0, 2^n]$, то $\widehat{f} \in \mathcal{E}_n$; аналогично, если $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\text{supp } g \subset [0, 2^n]$, то обратное преобразование Уолша–Фурье функции g принадлежит $\mathcal{E}_n$;*
- (д) *пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и f является W -непрерывной функцией; если $\widehat{f} \in \mathcal{E}_n$, то $\text{supp } f \subset [0, 2^n]$.*

Эти свойства доказаны в [1; § 6.2]. Нам потребуются также следующие два предложения, доказанные в [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Для ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_+} |\widehat{\varphi}(\omega \oplus l)|^2 = 1 \quad \text{для почти всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (1.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\{V_j\}$ – семейство подпространств, определенных по функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ с помощью формулы (0.8). Если система

$$\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$$

является ортонормированным базисом подпространства V_0 , то $\bigcap V_j = \{0\}$.

Аналоги предложений 3 и 4, применяемые при построении вейвлетов в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, хорошо известны (см. [3; §§ 5.1, 5.3]).

§ 2. Единственность решения, условие Стрэнга–Фикса и свойство разбиения единицы

Предположим, что функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет уравнению (0.1). Применив преобразование Уолша–Фурье, получим

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.1)$$

где

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega) \quad (2.2)$$

– маска масштабирующего уравнения (0.1).

ТЕОРЕМА 1. Если уравнение (0.1) имеет финитное решение $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k = 2 \quad \text{и} \quad \text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1}]. \quad (2.3)$$

Это решение единственно, дается формулой

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega) \quad (2.4)$$

и обладает следующими свойствами:

- 1) $\widehat{\varphi}(r) = 0$ при всех $r \in \mathbb{N}$ (модифицированное условие Стрэнга–Фикса);
- 2) $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ (свойство разбиения единицы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – финитное решение уравнения (0.1), принадлежащее пространству $L^2(\mathbb{R}_+)$ и такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Подставляя $\omega = 0$ в (2.1), получаем $m(0) = 1$, следовательно, $\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k = 2$. Далее, пусть j – наибольшее целое число такое, что функция φ на отрезке $[j-1, j]$ не обращается в нуль на множестве положительной меры. Предположим, что $j \geq 2^{n-1} + 1$. Возьмем произвольное двоично-иррациональное $x \in [j-1, j]$. Если

$$[2x] = l \pmod{2^n},$$

где $l \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, то $2x \geq 2^n + l$ и для любого $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$

$$2x \ominus k \geq 2x - l \geq 2^n,$$

а так как $\{2x\} > 0$, то $2x \ominus k > 2^n$. Отсюда и из (0.1) следует, что $j \geq 2^n + 1$. Действительно, иначе $\varphi(2x \ominus k) = 0$ для почти всех $x \in [j - 1, j]$ при любом k , а значит, в силу (0.1) и $\varphi(x) = 0$ почти всюду на $[j - 1, j]$, что противоречит выбору j . Далее, так как $x \geq j - 1$ и $2x$ нецелое, то для любого $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$

$$2x \ominus k \geq 2x - (2^n - 1) > (2j - 2) - (2^n - 1) \geq j$$

(использовано неравенство $j \geq 2^n + 1$). Отсюда, как и выше, получаем, что $\varphi(x) = 0$ почти всюду на $[j - 1, j]$. Итак, $j \leq 2^{n-1}$ и поэтому $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1}]$. Таким образом, соотношения (2.3) доказаны.

Покажем, что для преобразования Уолша–Фурье функции $\widehat{\varphi}$ справедливо равенство (2.4). Поскольку φ финитна и принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$, то она принадлежит и $L^1(\mathbb{R}_+)$. Отсюда и из (2.3) по предложению 2, (с) следует, что $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}_{n-1}$. Пользуясь условием $\widehat{\varphi}(0) = 1$, получаем, что $\widehat{\varphi}(\omega) = 1$ для всех $\omega \in [0, 2^{1-n}]$. С другой стороны, $m(\omega) = 1$ при $\omega \in [0, 2^{1-n}]$. Значит, при любом $\omega \in [0, 2^r)$ (r натуральное) имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(2^{-r-n}\omega) \prod_{k=1}^{r+n} m(2^{-k}\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} m(2^{-k}\omega),$$

что доказывает (2.4) и единственность φ .

Заметим, что при любом $r \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\varphi}(r) = \widehat{\varphi}(r) \prod_{s=0}^{j-1} m(2^s r) = \widehat{\varphi}(2^j r) \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$ (так как $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $m(2^s r) = 1$ в силу равенства $m(0) = 1$ и периодичности m). Отсюда следует, что $\widehat{\varphi}(r) = 0$. Применяя теперь формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x \oplus k) = \sum_{r=0}^{\infty} \widehat{\varphi}(r) w_r(x)$$

(равенство понимается почти всюду по мере Лебега) и пользуясь равенством $\widehat{\varphi}(r) = \delta_{0r}$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x \oplus k) = \widehat{\varphi}(0) w_0(x) = 1.$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. Линейная независимость и стабильность в $L^q(\mathbb{R}_+)$

Функция $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq q \leq \infty$, называется q -стабильной, если существуют положительные константы A_q, B_q такие, что

$$A_q \|a\|_{\ell^q} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k f(\cdot \ominus k) \right\|_{L^q(\mathbb{R}_+)} \leq B_q \|a\|_{\ell^q} \quad (3.1)$$

для каждой последовательности $a = \{a_k\} \in \ell^q$. В частности, функция $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ является 2-стабильной тогда и только тогда, когда система $\{f(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ является системой Рисса в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (о базисах и системах Рисса можно прочитать, например, в [8]). Будем говорить, что функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ имеет *периодический ноль* в точке $x \in \mathbb{R}_+$, если $f(x \oplus k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольной функции $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq q \leq \infty$, с компактным носителем следующие свойства эквивалентны:

- 1) функция f является q -стабильной;
- 2) система $\{f(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ линейно независима;
- 3) преобразование Уолша–Фурье функции f не имеет периодических нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как f имеет компактный носитель и принадлежит $L^q(\mathbb{R}_+)$, где $q \geq 1$, то f принадлежит и $L^1(\mathbb{R}_+)$. Пусть $\text{supp } f \subset [0, 2^{n-1}]$ для некоторого натурального n . Тогда $\hat{f} \in \mathcal{E}_{n-1}$ (см. предложение 2, (с)). Заметим, что линейная независимость системы $\{f(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ равносильна линейной независимости конечного числа функций $f(\cdot \ominus k)$, $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$, так как у всех остальных функций рассматриваемой системы носители не пересекаются с отрезком $[0, 2^{n-1}]$. Если существуют $a_0, \dots, a_{2^{n-1}-1}$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k f(\cdot \ominus k) = 0 \quad \text{и} \quad |a_0| + \dots + |a_{2^{n-1}-1}| > 0, \quad (3.2)$$

то для последовательности $(a_0, \dots, a_{2^{n-1}-1}, 0, 0, \dots)$ нарушается нижняя оценка в (3.1). Обратно, если функция f не является q -стабильной, то функция

$$F(a) = \left\| \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k f(\cdot \ominus k) \right\|_{L^q(\mathbb{R}_+)}$$

принимает сколь угодно малые значения на единичной сфере

$$S = \left\{ a = (a_0, \dots, a_{2^{n-1}-1}) \mid \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} |a_k| = 1 \right\}.$$

В самом деле, правая часть (3.1) для финитных функций выполнена всегда: если $\text{supp } f \subset [0, 2^{n-1}]$, то можно положить $B_q = 2^{(n-1)(1-1/q)} \|f\|_{\ell_q}$, это следует из неравенства Гёльдера для метрики ℓ_q . Из компактности единичного шара конечномерного пространства и линейности F следует существование точки $a \in S$, для которой $F(a) = 0$, т.е. следует линейная зависимость целочисленных

сдвигов. Итак, $1) \Leftrightarrow 2)$. Далее, если для некоторого $a = (a_0, \dots, a_{2^{n-1}-1})$ выполнены условия (3.2), то, применяя преобразование Уолша–Фурье, получаем

$$\widehat{f}(\omega) \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k w_k(\omega) = 0 \quad \text{для почти всех } \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Полином Уолша $w(\omega) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k w_k(\omega)$ не обращается в нуль тождественно, поэтому найдется диадический интервал I ранга $n-1$, для которого $w(I+r) \neq 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$. В силу периодичности w такой интервал I может быть выбран на $[0, 1)$. Поскольку $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{n-1}$, отсюда получаем, что (3.2) выполнено тогда и только тогда, когда на $[0, 1)$ существует диадический интервал I ранга $n-1$ такой, что $\widehat{f}(I+r) = 0$ для всех $r \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, $2) \Leftrightarrow 3)$. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если функция f имеет компактный носитель и является q -стабильной, то она p -стабильна для всех $p \in [1, q]$.

Действительно, финитная и q -стабильная функция f принадлежит всем пространствам $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве теоремы 2 было установлено, что если функция $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq q \leq \infty$, имеет компактный носитель и система целочисленных сдвигов этой функции линейно зависима, то на интервале $[0, 1)$ существует диадический интервал I , все точки которого являются периодическими нулями преобразования Уолша–Фурье $\widehat{f}$. Более того, если $\text{supp } f \subset [0, 2^{n-1}]$, то интервал I имеет ранг $n-1$ и любой периодический нуль $\omega_0 \in [0, 1)$ для $\widehat{f}$ расположен в таком интервале I .

Итак, q -стабильность функции f при любом $1 \leq q \leq \infty$ эквивалентна линейной независимости целочисленных сдвигов функции $\widehat{f}$, а также отсутствию периодических нулей у преобразования Уолша–Фурье $\widehat{f}$. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить, что функция стабильна, не уточняя, о каком q идет речь.

Выясним теперь, при каких условиях на масштабирующее уравнение (0.1) его решение стабильно. Для этого нам потребуется введенное в определении 2 понятие блокированного множества, а также заданный по формуле (0.12) оператор T . Если диадический интервал $I_k^{(j)} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ лежит на $[0, 1)$, то будем иногда записывать $I_k^{(j)} = I_{d_1 \dots d_j}$, где $0.d_1 \dots d_j = 2^{-j}k$. Если M – блокированное множество для маски m , то для любого диадического интервала $I_{d_1 \dots d_{n-1}} \subset M$ каждый из интервалов $I_{0d_1 \dots d_j}$ и $I_{1d_1 \dots d_j}$ расположен либо в M , либо в $\text{Null } m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть φ – финитное решение масштабирующего уравнения (0.1) такое, что $\varphi \in L^q(\mathbb{R}_+)$ для некоторого $1 \leq q \leq \infty$ и $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Функция φ нестабильна тогда и только тогда, когда маска m этой функции имеет блокированное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 имеем $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1}]$ и, следовательно, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}_{n-1}$. Если φ нестабильна, то множество всех периодических нулей функции $\widehat{\varphi}$ на $[0, 1)$ является блокированным множеством для m . Действительно,

пусть

$$M_0 = \{\omega \in [0, 1) \mid \widehat{\varphi}(\omega + k) = 0 \text{ для всех } k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Согласно замечанию 1 множество M_0 является объединением диадических интервалов ранга $n-1$. Поскольку $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то M_0 не содержит $[0, 2^{-n+1})$. Кроме того, если $\omega \in M_0$, то по формуле (2.1)

$$m\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k}{2}\right) = 0 \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+$$

и, следовательно, числа $\omega/2$, $\omega/2 + 1/2$ принадлежат либо M_0 , либо $\text{Null } m$.

Обратно, если маска m имеет блокированное множество M , то каждое $\omega \in M$ обладает свойством: $\widehat{\varphi}(\omega + k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, значит, $\widehat{\varphi}$ имеет периодические нули и (по теореме 2) функция φ нестабильна. В самом деле, предположим, что существует $\omega \in M$ такое, что $\widehat{\varphi}(\omega + k) \neq 0$ для некоторого k . Возьмем тогда настолько большое j , что $2^{-j}(\omega + k) < 2^{1-n}$, и для каждого $r \in \{0, 1, \dots, j\}$ обозначим через x_r дробную часть числа $2^{-r}(\omega + k)$. Очевидно, $x_0 = \omega$ и $x_j = 2^{-j}(\omega + k)$. Имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega + k) = \widehat{\varphi}(2^{-j}(\omega + k)) \prod_{r=1}^j m(2^{-r}(\omega + k)) = \widehat{\varphi}(x_j) \prod_{r=1}^j m(x_r). \quad (3.3)$$

Легко видеть, что если $x_r \in M$, то $x_{r+1} \in TM$ и, следовательно, x_{r+1} принадлежит либо $\text{Null } m$, либо M . Заметим также, что $x_r \notin \text{Null } m$ (иначе из (3.3) следовало бы равенство $\widehat{\varphi}(\omega + k) = 0$). Таким образом, если $x_r \in M$, то $x_{r+1} \in M$, а так как $x_0 = \omega \in M$, то $x_r \in M$ для всех $1 \leq r \leq j$. Однако это невозможно, поскольку $x_j \notin M$. В самом деле, $x_j = 2^{-j}(\omega + k) < 2^{1-n}$, но M не содержит точек интервала $[0, 2^{1-n})$. Противоречие завершает доказательство предложения 5.

Вопрос о стабильности финитного решения масштабирующего уравнения по предложению 5 сводится к проверке некоторого комбинаторного утверждения, которое, по крайней мере теоретически, может быть установлено простым перебором. На практике, однако, при больших n этот перебор может занимать значительное время для выполнения порядка $2^{2^{n-1}}$ операций. Поэтому часто удобно применять необходимые или достаточные условия стабильности. Сформулируем несколько таких условий. Будем называть число ω *симметричным нулем* маски m , если $m(\omega) = m(\omega + 1/2) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если маска m имеет симметричный нуль, то решение φ масштабирующего уравнения (0.1) нестабильно.

Действительно, если $\omega = 0.d_1d_2\dots d_n\dots$ – симметричный нуль, то диадический интервал $I_{d_2\dots d_n}$ является блокированным множеством.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $m(1/2 - 1/2^n) = 0$, то решение φ масштабирующего уравнения (0.1) нестабильно.

Действительно, если $m(1/2 - 1/2^n) = 0$, то интервал $[1 - 2^{1-n}, 1)$ является блокированным множеством.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если маска m не имеет симметричных нулей, не обращается в нуль в точке $\omega = 1/2 - 1/2^n$ и отлична от нуля на интервале $[0, 1/4)$, то решение φ масштабирующего уравнения (0.1) стабильно.

Доказательство этого следствия предоставим читателю.

Другое полезное следствие теорем 1 и 2 дает необходимые условия существования стабильного L^2 -решения.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если L^2 -решение масштабирующего уравнения (0.1) стабильно, то

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} c_{2k} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} c_{2k+1} = 1. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m(1/2) \neq 0$. Пользуясь условием Стрэнга-Фикса (теорема 1), для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$0 = \widehat{\varphi}(2k+1) = m\left(k + \frac{1}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(k + \frac{1}{2}\right) = m\left(\frac{1}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

и, значит, $\widehat{\varphi}(k + 1/2) = 0$. Таким образом, число $1/2$ является периодическим нулем функции $\widehat{\varphi}$, что противоречит стабильности (теорема 2). Поэтому $m(1/2) = 0$ и верны равенства (3.4). Следствие 5 доказано.

Как по коэффициентам масштабирующего уравнения (или по маске) определить, принадлежит ли его решение пространству L^q ? Известно, что как в классическом случае (для масштабирующих функций на прямой $\mathbb{R}$), так и в нашем (на полупрямой $\mathbb{R}_+$) вопрос о принадлежности решения масштабирующего уравнения тому или иному функциональному пространству не всегда решается эффективно. Например, до сих пор не найден приемлемый с точки зрения практики критерий или алгоритм, который позволял бы по коэффициентам уравнения понять, является ли масштабирующая функция непрерывной. Та же ситуация с пространством $L^1(\mathbb{R})$ (см., например, [9], [10]). В пространстве $L^2(\mathbb{R})$ критерий существует, он формулируется в терминах спектрального радиуса некоторой матрицы, построенной по коэффициентам масштабирующего уравнения (см. [11]). К счастью, если маска удовлетворяет условию (0.4), то вопрос о принадлежности φ классу $L^2(\mathbb{R}_+)$ решается просто. А именно, верно следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если маска m масштабирующего уравнения (0.1) удовлетворяет условиям

$$m(0) = 1, \quad |m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in [0, 1/2),$$

то уравнение имеет решение $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и верно неравенство

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq |\widehat{\varphi}(0)|. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$ равенством (2.4). Докажем, что она принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$. Тогда ее обратное преобразование Уолша–Фурье φ также будет принадлежать $L^2(\mathbb{R}_+)$ и будет, очевидно, решением уравнения (0.1). Имеем

$$|\widehat{\varphi}(\omega)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} |m(2^{-k}\omega)|^2.$$

Так как $|m(\omega)| \leq 1$ при всех ω , то для любого j имеем

$$|\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \leq \prod_{k=1}^j |m(2^{-k}\omega)|^2, \quad \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2^j} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \leq \int_0^{2^j} \prod_{k=1}^j |m(2^{-k}\omega)|^2 d\omega = 2^j \int_0^1 \prod_{k=0}^j |m(2^k\omega)|^2 d\omega. \quad (3.6)$$

Функция $|m(\omega)|^2$ имеет период 1 и кусочно постоянна с шагом 2^{-n} , следовательно, она является полиномом Уолша порядка $2^n - 1$:

$$|m(\omega)|^2 = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k w_k(\omega).$$

Из условий на маску следует, что $a_{2k} = \delta_{0k}/2$. Таким образом,

$$|m(\omega)|^2 = \frac{1}{2} + \sum_{s=0}^{2^{n-1}-1} a_{2s+1} w_{2s+1}(\omega).$$

Тогда

$$\prod_{k=0}^{j-1} |m(2^k\omega)|^2 = \sum_{s_0+2s_1+\dots+2^{j-1}s_{j-1}=r} a_{s_0} \cdots a_{s_{j-1}} w_r(\omega),$$

где для каждого i либо $s_i = 0$, либо s_i – нечетное число. Следовательно, если $r = 0$, то $s_0 = \dots = s_{j-1} = 0$. Поэтому

$$\prod_{k=0}^{j-1} |m(2^k\omega)|^2 = 2^{-j} + \sum_{r \geq 1} b_r w_r(\omega).$$

Поскольку

$$\int_0^1 w_r(\omega) d\omega = 0$$

для всех $r \geq 1$, то

$$\int_0^1 \prod_{k=0}^{j-1} |m(2^k\omega)|^2 d\omega = 2^{-j}$$

и из (3.6) имеем

$$\int_0^{2^j} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \leq 1.$$

Отсюда при $j \rightarrow +\infty$ получаем (3.5). Предложение 6 доказано.

§ 4. Построение диадических вейвлетов в $L^2(\mathbb{R}_+)$

Напомним, что функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, семейство подпространств

$$V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{span}\{\varphi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

является КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Если финитное решение φ уравнения (0.1) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, то функция

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \bar{c}_{k \oplus 1} \varphi(2x \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

является диадическим вейвлетом в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Действительно, полагая

$$m_1(\omega) = -w_1(\omega) \overline{m(\omega \oplus 1/2)},$$

видим, что $\widehat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega/2)$ и матрица

$$\begin{pmatrix} m(\omega) & m(\omega \oplus 1/2) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega \oplus 1/2) \end{pmatrix}$$

унитарна (ср. с [3; теорема 5.1.1] и [5; § 3]).

Выясним, когда финитные решения масштабирующего уравнения (0.1) генерируют КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Начнем с условий, при которых целые сдвиги финитного решения уравнения (0.1) образуют ортонормированный базис своей линейной оболочки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ – финитное решение масштабирующего уравнения (0.1) такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда маска m не имеет блокированных множеств и удовлетворяет условию

$$|m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in [0, 1/2]. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F(\omega) := \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} |\widehat{\varphi}(\omega \oplus l)|^2. \quad (4.3)$$

Поскольку φ имеет компактный носитель, из предложений 2 и 3 следует, что ортонормированность в $L^2(\mathbb{R}_+)$ системы $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ равносильна условию $F(\omega) \equiv 1$.

1. *Необходимость.* Отсутствие блокированных множеств следует из того, что φ стабильна. Далее, группируя в (4.3) слагаемые с четными и нечетными индексами, имеем

$$F(\omega) = |m(\omega/2)|^2 F(\omega/2) + |m(\omega/2 \oplus 1/2)|^2 F(\omega/2 \oplus 1/2). \quad (4.4)$$

Применяя тождество $F(\omega) \equiv 1$, получаем (4.2).

2. *Достаточность.* По предложению 5 функция φ стабильна. В силу условий Стрэнга–Фикса (теорема 1) имеем $F(0) = 1$. Положим $\delta = \inf\{F(\omega) \mid \omega \in [0, 1]\}$. Так как

$$\int_0^1 F(\omega) d\omega = 1$$

(следует из предложения 6), то либо F тождественно равна 1, либо $\delta < 1$. Функция F имеет период 1 и постоянна на диадических интервалах ранга $n - 1$. Поэтому либо $\delta > 0$, либо F обращается в нуль на одном из таких интервалов. Последнее невозможно, так как иначе функция $\widehat{\varphi}$ имела бы периодический нуль и, значит, φ была бы нестабильна. Итак, $\delta > 0$. Положим $M_\delta = \{F(\omega) = \delta \mid \omega \in [0, 1]\}$. Из (4.2) и (4.4) следует, что для любого $\omega \in M_\delta$ числа $\omega/2$ и $\omega/2 + 1/2$ принадлежат либо M_δ , либо $\text{Null } m$. Следовательно, M_δ – блокированное множество, что противоречит условию. Таким образом, $F(\omega) \equiv 1$. Предложение 7 доказано.

Следующее предложение представляет собой аналог известной теоремы Коэна (см. [3; теорема 6.3.1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть полином Уолша

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega) \quad (4.5)$$

удовлетворяет условиям

$$m(0) = 1, \quad |m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in [0, 1/2), \quad (4.6)$$

а функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ определена с помощью формулы

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega). \quad (4.7)$$

Система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда полином m удовлетворяет модифицированному условию Коэна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что принадлежность функции φ классу $L^2(\mathbb{R}_+)$ следует из предложения 6. Согласно (4.7) имеем равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega/2)m(\omega/2),$$

эквивалентное (0.1). Значит, данная функция φ удовлетворяет масштабирующему уравнению (0.1), маской которого является полином (4.5). Для каждого ω все множители произведения (4.7), начиная с некоторого номера, равны 1 (так как маска m равна 1 на $I_0^{(n)}$ и $2^{-j}\omega \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$). Отсюда следует, что $\widehat{\varphi}$ является W -непрерывной функцией (отметим, что в силу предложения 1, (а) W -непрерывность функции $\widehat{\varphi}$ следует также из теоремы 1). Пользуясь предложением 3, получаем, что ортонормированность системы $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ равносильна условию

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_+} |\widehat{\varphi}(\omega \oplus l)|^2 \equiv 1. \quad (4.8)$$

Пусть условие (4.8) выполнено. Тогда для любого $\omega \in [0, 1)$ существует номер l_ω такой, что

$$\sum_{l=0}^{l_\omega} |\widehat{\varphi}(\omega \oplus l)|^2 > \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\widehat{\varphi}$ является W -непрерывной функцией, для каждого $\omega \in [0, 1)$ найдется диадический интервал I_ω такой, что

$$\sum_{l=0}^{l_\omega} |\widehat{\varphi}(t \oplus l)|^2 \geq \frac{1}{4}$$

для всех $t \in I_\omega$. В силу W -компактности интервала $[0, 1)$ из покрытия $\{I_\omega \mid \omega \in [0, 1)\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{I_{\omega_1}, \dots, I_{\omega_L}\}$. Положим $l_0 = \max\{l_{\omega_1}, \dots, l_{\omega_L}\}$. Тогда неравенство

$$\sum_{l=0}^{l_0} |\widehat{\varphi}(\omega \oplus l)|^2 \geq \frac{1}{4} \quad (4.9)$$

выполняется для всех $\omega \in [0, 1)$.

Пусть $c_0 = 1/(2\sqrt{l_0 + 1})$. Согласно (4.9) для каждого $\omega \in [0, 1)$ найдется номер $l \in \{0, 1, \dots, l_0\}$ такой, что $|\widehat{\varphi}(\omega \oplus l)| \geq c_0$. Поскольку $\widehat{\varphi}(0) = 1$ и функция $\widehat{\varphi}$ является W -непрерывной, множество

$$S_0 := \{\omega \in [0, 1) \mid |\widehat{\varphi}(\omega)| \geq c_0\}$$

содержит окрестность нуля. Положим

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{\omega \in [0, 1) \setminus S_0 \mid |\widehat{\varphi}(\omega \oplus 1)| \geq c_0\}, \\ S_2 &:= \{\omega \in [0, 1) \setminus (S_0 \cup S_1) \mid |\widehat{\varphi}(\omega \oplus 2)| \geq c_0\}, \\ &\dots\dots\dots \\ S_{l_0} &:= \left\{ \omega \in [0, 1) \setminus \bigcup_{l=0}^{l_0-1} S_l \mid |\widehat{\varphi}(\omega \oplus l_0)| \geq c_0 \right\}. \end{aligned}$$

Множество $E = \bigcup_{l=0}^{l_0} (S_l \oplus l)$ содержит окрестность нуля, является W -компактным и конгруэнтным $[0, 1)$ по модулю $\mathbb{Z}_+$. Пользуясь тем, что полином $m(\omega)$ равен 1 в окрестности нуля, выберем j_0 так, что

$$m(2^{-j}\omega) = 1 \quad \text{для всех } j > j_0, \quad \omega \in E. \quad (4.10)$$

В силу (4.7)

$$|\widehat{\varphi}(\omega)| = \prod_{j=1}^{j_0} |m(2^{-j}\omega)| \cdot |\widehat{\varphi}(2^{-j_0}\omega)|, \quad (4.11)$$

где $|\widehat{\varphi}(\omega)| \geq c_0$ для $\omega \in E$. Поскольку $|m(\omega)| \leq 1$ при любом ω , из (4.10) и (4.11) следует, что

$$|m(2^{-j}\omega)| \geq \prod_{l=1}^{j_0} |m(2^{-l}\omega)| \geq c_0 > 0 \quad \text{для всех } 1 \leq j \leq j_0, \quad \omega \in E. \quad (4.12)$$

Из (4.10) и (4.12) получаем, что

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m(2^{-j}\omega)| > 0.$$

Обратно, предположим, что полином $m(\omega)$ удовлетворяет (4.6) и модифицированному условию Коэна. Тогда в силу леммы 1 работы [6] система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Предложение 8 доказано.

Необходимые и достаточные условия, при которых финитные решения масштабирующего уравнения (0.1) генерируют КМА, содержатся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть маска m финитного L^2 -решения φ уравнения (0.1) удовлетворяет условиям (4.6) и $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

- (а) функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$;
- (б) маска m не имеет блокированных множеств;
- (с) маска m удовлетворяет модифицированному условию Коэна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (а) $\Rightarrow$ (б) и (а) $\Rightarrow$ (с) следуют из предложений 7 и 8. Для доказательства обратных импликаций предположим, что для маски m выполнено любое из условий (б) или (с). Из предложений 7 и 8 тогда следует, что система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована. Определим $\{V_j\}$ по формуле (4.1). Согласно предложению 4 имеем $\bigcap V_j = \{0\}$. Вложение $V_0 \subset V_1$ следует из того, что φ удовлетворяет уравнению (0.1). Учитывая (4.1), отсюда имеем $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Осталось доказать, что

$$\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R}_+)$$

или, эквивалентно,

$$\left(\bigcup V_j\right)^\perp = \{0\}. \quad (4.13)$$

Пусть $f \in \left(\bigcup V_j\right)^\perp$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем двоично-целую функцию $u \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\|f - u\| < \varepsilon$ (здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначается норма пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$). Тогда при любом $j \in \mathbb{Z}_+$ для ортогональной проекции $P_j f$ функции f на V_j имеем

$$\|P_j f\|^2 = (P_j f, P_j f) = (f, P_j f) = 0$$

и, следовательно,

$$\|P_j u\| = \|P_j(f - u)\| \leq \|f - u\| < \varepsilon. \quad (4.14)$$

Далее, возьмем натуральное j настолько большим, что $\text{supp } \widehat{u} \subset [0, 2^j)$ и $2^{-j}\omega \in [0, 2^{-n+1})$ для всех $\omega \in \text{supp } \widehat{u}$, а затем положим $g(\omega) = \widehat{u}(\omega)\widehat{\varphi}(2^{-j}\omega)$ (такое j существует в силу предложения 2, (б)). Система $\{2^{-j/2}\chi(2^{-j}k, \cdot)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированным базисом в $L^2[0, 2^j]$, поэтому мы имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |c_k(g)|^2 = 2^{-j} \int_0^{2^j} |g(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.15)$$

где

$$c_k(g) = 2^{-j} \int_0^{2^j} g(\omega) \chi(2^{-j}k, \omega) d\omega.$$

Замечая, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(2^j x \ominus k) \chi(x, \omega) dx = 2^{-j} \widehat{\varphi}(2^{-j}\omega) \chi(2^{-j}k, \omega),$$

по формуле Планшереля получаем

$$2^{-j/2}(u, \varphi_{jk}) = 2^{-j} \int_0^{2^j} g(\omega) \chi(2^{-j}k, \omega) d\omega.$$

Поэтому ввиду (4.15)

$$\|P_j u\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |(u, \varphi_{jk})|^2 = \int_0^{2^j} |\widehat{u}(\omega) \widehat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2 d\omega. \quad (4.16)$$

Так как $m(\omega) = 1$ на $I_0^{(n)}$ и так как $2^{-j}\omega \in [0, 2^{-n+1})$ для $\omega \in \text{supp } \widehat{u}$, из формулы

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega)$$

следует, что $\widehat{\varphi}(2^{-j}\omega) = 1$ для всех $\omega \in \text{supp } \widehat{u}$. Учитывая, что $\text{supp } \widehat{u} \subset [0, 2^j)$, из (4.14) и (4.16) по предложению 1 получаем

$$\varepsilon > \|P_j u\| = \|\widehat{u}\| = \|u\|.$$

Значит,

$$\|f\| < \varepsilon + \|u\| < 2\varepsilon$$

и поэтому верно (4.13). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При построении классических вейвлетов на прямой $\mathbb{R}$ условия на маску (4.6) выглядят точно так же, а условие на отсутствие блокирующих множеств формулируется по-другому. Так как в классическом случае маска является тригонометрическим полиномом степени n , она не может иметь более n нулей на периоде. Условие состоит в том, что никакие из этих n нулей не должны образовывать так называемого нетривиального цикла [3; теорема 6.3.3]. Более существенная разница с классическим случаем состоит в том, что тригонометрические полиномы, удовлетворяющие условиям (4.6), ищутся из специального диофантова уравнения, имеющего для каждого n конечное множество решений наименьшей степени (эти решения соответствуют вейвлетам Добеши [3; § 6.4]). В диадическом случае, как следует из теоремы 3, построение вейвлетов происходит по-другому и, в некотором смысле, проще. Сначала выбирается произвольная функция $m(\omega)$ на $[0, 1/2)$, постоянная на диадических интервалах ранга n и такая, что $m(0) = 1$, а затем эта функция продолжается на $\mathbb{R}_+$ с помощью равенств

$$|m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{и} \quad m(\omega + 1) = m(\omega).$$

Если у получившейся маски m нет заблокированных множеств (это проверяется конечным перебором), то она порождает КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и соответствующую систему вейвлетов. Согласно предложению 7 и теореме 3 по указанному алгоритму могут быть построены все вейвлеты, порождаемые финитными масштабирующими функциями. Таким образом, при построении диадических вейвлетов мы имеем свободу в выборе произвольной кусочно постоянной функции с шагом 2^{-n} на интервале $[0, 1/2)$ с единственным ограничением на отсутствие заблокированных множеств.

§ 5. Разложения в ряды Уолша и оценки модулей гладкости

Пусть финитное решение φ уравнения (0.1) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяет условию $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Тогда согласно теореме 1 и предложению 7

$$m(0) = 1, \quad |m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in [0, 1/2) \quad (5.1)$$

и

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega), \quad (5.2)$$

где m – маска масштабирующего уравнения (0.1). Кроме того, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1}]$. Условия (5.1) равносильны равенствам

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 = 1, \quad l \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}, \quad (5.3)$$

где b_l – значение маски m на диадическом интервале $I_l^{(n)}$. Если

$$l = i_1 2^0 + i_2 2^1 + \dots + i_n 2^{n-1}, \quad i_j \in \{0, 1\},$$

то положим $c(i_1, i_2, \dots, i_n) = b_l$.

Для любого натурального l определим коэффициент $a_l[m]$ по двоичному разложению

$$l = \sum_{j=0}^k \mu_j 2^j, \quad \mu_j \in \{0, 1\}, \quad \mu_k = 1, \quad k = k(l), \quad (5.4)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} a_l[m] &= c(\mu_0, 0, 0, \dots, 0, 0), & \text{если } k(l) = 0, \\ a_l[m] &= c(\mu_1, 0, 0, \dots, 0, 0) c(\mu_0, \mu_1, 0, \dots, 0, 0), & \text{если } k(l) = 1, \\ &\dots\dots\dots \\ a_l[m] &= c(\mu_k, 0, 0, \dots, 0, 0) c(\mu_{k-1}, \mu_k, 0, \dots, 0, 0) \dots c(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}), \end{aligned}$$

если $k = k(l) \geq n-1$. Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются “сдвигом” индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из двоичного разложения числа l .

Обозначим через $\mathbb{N}_0(n)$ множество всех натуральных чисел $l \geq 2^{n-1}$, у которых в двоичном разложении (5.4) имеется набор $(\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+n-1})$, совпадающий с набором $(0, 0, \dots, 0, 1)$. Заметим, что $a_l[m] = 0$ для всех $l \in \mathbb{N}_0(n)$, так как согласно (5.3)

$$c(0, 0, \dots, 0, 1) = b_{2^{n-1}} = 0.$$

Положим $\mathbb{N}(n) = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0(n)$. Имеем, в частности,

$$\mathbb{N}(2) = \{2^{j+1} - 1 \mid j \in \mathbb{Z}_+\} = \{1, 3, 7, 15, 31, \dots\},$$

$$\mathbb{N}(3) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 26, 27, 29, 30, 31, 42, \dots\}.$$

Из (5.1) и (5.2) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = X_{1-n}(\omega) + \sum_{l \in \mathbb{N}(n)} a_l[m] X_{1-n} \left(\omega \ominus \frac{l}{2^{n-1}} \right), \quad (5.5)$$

где $X_{1-n} = \chi_{[0, 1/2^{n-1}]}$. Выполнив обратное преобразование Уолша–Фурье и пользуясь тождеством

$$\int_{\mathbb{R}_+} X_{1-n} \left(\omega \ominus \frac{l}{2^{n-1}} \right) \chi(x, \omega) d\omega = \frac{1}{2^{n-1}} \chi_{[0, 1]} \left(\frac{x}{2^{n-1}} \right) w_l \left(\frac{x}{2^{n-1}} \right),$$

из формулы (5.5) выводим равенство

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi_{[0, 1]} \left(\frac{x}{2^{n-1}} \right) \left(1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(n)} a_l[m] w_l \left(\frac{x}{2^{n-1}} \right) \right), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (5.6)$$

Отсюда при $n = 2$ получается разложение Лэнга (0.9).

ПРИМЕР 4. Для $n = 3$ положим

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, & b_1 &= a, & b_2 &= b, & b_3 &= c, \\ b_4 &= 0, & b_5 &= \alpha, & b_6 &= \beta, & b_7 &= \gamma, \end{aligned}$$

где $|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1$. С помощью формулы (5.6) находим функцию φ , имеющую разложение в ряд Уолша

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{4} \chi_{[0, 1]}(y) \left(1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(3)} a_l[m] w_l(y) \right) \\ &= \frac{1}{4} \chi_{[0, 1]}(y) (1 + a w_1(y) + a b w_2(y) + a c w_3(y) + a b \alpha w_5(y) \\ &\quad + a c \beta w_6(y) + a c \gamma w_7(y) + a b^2 \alpha w_{10}(y) + a b c \alpha w_{11}(y) + \dots), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $y = x/4$. Если $a = 0$ или $c = 0$, то система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ линейно зависима. Если же a и c ненулевые, то функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Действительно, условие (0.11) в случае $abc \neq 0$ выполнено для $E = [0, 1)$, а в случае $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ оно имеет место для $E = [0, 1/2) \cup [3/4, 1) \cup [3/2, 7/4)$. При этом в случае $a = 1, 0 \leq |b| < 1, c = 1$ функция φ двоично-целая (пример 3).

Некоторые графические иллюстрации, относящиеся к примерам 2 и 4, имеются в [5] и [6].

ПРИМЕР 5. Выберем комплексные числа $b_0, b_1, \dots, b_{2^{n-1}-1}$ такими, что

$$b_0 = 1, \quad 0 < |b_l| \leq 1, \quad 1 \leq l \leq 2^{n-1} - 1,$$

а затем определим $b_{2^{n-1}}, b_{2^{n-1}+1}, \dots, b_{2^n-1}$ по формуле

$$|b_{l+2^{n-1}}| = \sqrt{1 - |b_l|^2}, \quad 0 \leq l \leq 2^{n-1} - 1.$$

Применив дискретное преобразование Уолша (0.6), найдем коэффициенты маски

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega),$$

принимавшей на интервалах $I_l^{(n)}$, $0 \leq l \leq 2^n - 1$, значения b_l . Так как b_l для $0 \leq l \leq 2^{n-1} - 1$ выбраны ненулевыми, то $|m(\omega)| > 0$ для $\omega \in [0, 1/2)$. Следовательно, маска m удовлетворяет модифицированному условию Коэна. Соответствующая масштабирующая функция φ может быть задана разложением (5.6), коэффициенты которого однозначно определяются по параметрам b_l .

На прямой $\mathbb{R}$ аналогами диадических вейвлетов, получаемых по масштабирующим функциям из примера 5, являются ортогональные вейвлеты Добеши (см. [3; § 6.4]). В следующем примере для каждого $n \geq 3$ указывается двоично-целая масштабирующая функция, являющаяся решением уравнения (0.1).

ПРИМЕР 6. Для произвольного $n \geq 3$ положим

$$m(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [0, 1/2 - 1/2^{n-1}) \cup [1/2 - 1/2^n, 1/2), \\ b, & \text{если } \omega \in [1/2 - 1/2^{n-1}, 1/2 - 1/2^n), \\ 0, & \text{если } \omega \in [1/2, 1/2 - 1/2^n) \cup [1 - 1/2^n, 1), \\ \beta, & \text{если } \omega \in [1 - 1/2^{n-1}, 1 - 1/2^n), \end{cases}$$

где $0 \leq |b| < 1$, $|\beta| = \sqrt{1 - |b|^2}$. Тогда из (5.2) получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\omega) &= \chi_{[0, 1-1/2^{n-2})}(\omega) + b\chi_{[1-1/2^{n-2}, 1-1/2^{n-1})}(\omega) \\ &\quad + \chi_{[1-1/2^{n-1}, 1)}(\omega) + \beta\chi_{[2-1/2^{n-2}, 2-1/2^{n-1})}(\omega) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} \chi_{[0, 1)}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \left(1 + \sum_{l=1}^{2^{n-1}-3} w_l\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \right. \\ &\quad \left. + bw_{2^{n-1}-2}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) + w_{2^{n-1}-1}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) + \beta w_{2^n-2}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right). \end{aligned}$$

Для этой функции φ условие (0.11) выполнено при

$$E = \left[0, 1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) \cup \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1\right) \cup \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

(если $b \neq 0$, то (0.11) верно также для $E = [0, 1)$). Отметим, что в случае $n = 3$ мы вновь приходим к масштабирующей функции из примера 3.

Для каждого $\delta > 0$ *диадический модуль непрерывности* функции φ определяется (ср. [2; § 1.2]) равенством

$$\omega(\varphi, \delta) := \sup\{|\varphi(x \oplus y) - \varphi(x)| \mid x, y \in [0, 2^{n-1}), 0 \leq y < \delta\}.$$

Согласно [2; § 5.1] если для некоторого $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$\omega(\varphi, 2^{-j}) \leq C 2^{-\alpha j},$$

то существует константа $C(\varphi, \alpha)$ такая, что

$$\omega(\varphi, \delta) \leq C(\varphi, \alpha) \delta^\alpha. \quad (5.8)$$

Покажем, как для данной масштабирующей функции φ оценивать скорость убывания последовательности $\{\omega(\varphi, 2^{-j})\}$.

Положим $N = 2^{n-1}$, $w_l^-(k/N) = \lim_{x \rightarrow k-0} w_l(x/N)$ и $\varphi^-(k) = \lim_{x \rightarrow k-0} \varphi(x)$. Из формулы (5.6) и равенств

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_l\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{k=1}^N w_l^-\left(\frac{k}{N}\right) = 0, \quad l \in \mathbb{N}(n),$$

следует, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(k) = \sum_{k=1}^N \varphi^-(k) = 1. \quad (5.9)$$

Зададим $(N \times N)$ -матрицы T_0 и T_1 формулами

$$(T_0)_{ij} = c_{2(i-1) \oplus (j-1)} \quad \text{и} \quad (T_1)_{ij} = c_{(2i-1) \oplus (j-1)}, \quad (5.10)$$

где $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. В частности, для $n = 2$

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix},$$

а для $n = 3$

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_6 & c_7 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_5 & c_4 & c_7 & c_6 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Для вектор-функции $v(x) := (\varphi(x), \varphi(x+1), \dots, \varphi(x+N-1))^t$ имеет место равенство

$$v(x) = \begin{cases} T_0 v(2x), & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ T_1 v(2x-1), & \text{если } x \in [1/2, 1). \end{cases} \quad (5.11)$$

Пусть $e_1 = (1, 1, \dots, 1)$ – N -мерный вектор, все компоненты которого равны 1. Согласно (3.4) имеем

$$e_1 T_0 = e_1 T_1 = e_1. \quad (5.12)$$

Обозначим через E_1 подпространство в $\mathbb{C}^N$, ортогональное вектору e_1 :

$$E_1 := \{u = (u_1, \dots, u_N)^t \mid u_1 + \dots + u_N = 0\}.$$

Напомним, что спектральная норма произвольной комплексной $(N \times N)$ -матрицы T определяется равенством

$$\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \mid u \in \mathbb{C}^N, u \neq 0 \right\},$$

где $\|u\|$ – евклидова норма вектора u . Положим

$$\|T|_{E_1}\| := \sup \left\{ \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \mid u \in E_1, u \neq 0 \right\}.$$

Аналогично предложению 4.1 из [7] (ср. с [3; § 7.2]) с использованием (5.9), (5.11) и (5.12) доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть финитное решение φ уравнения (0.1) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, и пусть элементы $(N \times N)$ -матриц T_0, T_1 имеют вид (5.10), где $N = 2^{n-1}$. Предположим, что для всех $m \in \mathbb{N}$

$$\max \{ \|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \mid d_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq m \} \leq Cq^m, \quad (5.13)$$

где $0 < q < 1$ и $C > 0$. Тогда функция φ является W -непрерывной и для любого целого $j \geq n-1$ справедливо неравенство

$$\omega(\varphi, 2^{-j}) \leq Cq^j. \quad (5.14)$$

Если функция φ удовлетворяет условиям предложения 9, то ряд Уолша–Фурье (5.6) сходится равномерно на $[0, 2^{n-1}]$. Действительно, из (5.14) следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j\omega(\varphi, 2^{-j}) = 0,$$

и можно применить известный [1; теорема 2.3.5] признак равномерной сходимости.

Легко видеть, что при $n = 2$ подпространство E_1 одномерно:

$$E_1 = \{\lambda e_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}, \quad \text{где } e_2 = (1, -1)^t,$$

а при $n = 3$ базис пространства E_1 образуют векторы

$$e_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводится, например, что:

- 1) если φ – из примера 2 и $0 \leq |b| < 1$, то

$$\omega(\varphi, 2^{-j}) \leq C|b|^j, \quad (5.15)$$

в частности при $b = 0$ функция φ двоично-целая;

- 2) если φ – из примера 4 и $a = 1$, $0 \leq |\gamma| < 1$, то

$$\omega(\varphi, 2^{-j}) \leq C|\gamma|^j, \quad (5.16)$$

в частности при $\gamma = 0$ функция φ двоично-целая.

С помощью разложений (0.9) и (5.7) проверяется, что оценки (5.15) и (5.16) точны по порядку (ср. с примерами 4.3 и 4.4 в [7]). Отметим также, что в условиях примера 3 левая часть неравенства (5.13) равна нулю (и это будет выполняться для любого двоично-целого финитного L^2 -решения φ уравнения (0.1)).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для данного решения φ масштабирующего уравнения (0.1) обозначим через α_φ точную верхнюю грань тех значений $\alpha > 0$, для которых выполняется неравенство (5.8). Справедлива формула

$$\alpha_\varphi = -\log_2 \hat{\rho}, \quad (5.17)$$

где $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1)$ – совместный спектральный радиус линейных операторов $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1$, заданных на $\mathbb{C}^N$ матрицами T_0 , T_1 и ограниченных на подпространство $V = \text{span}\{v(x) - v(y) \mid x, y \in [0, 1]\}$ (здесь v – вектор-функция из (5.11)). Доказательство полностью аналогично классическому случаю (см. [10], [11]), и мы его здесь не приводим. В частности, функция φ является W -непрерывной тогда и только тогда, когда $\hat{\rho} < 1$. Формула (5.17) позволяет точно находить показатель Гёльдера, однако ее практическое использование осложнено необходимостью вычисления совместного спектрального радиуса. Эта задача эффективно решается только при малых размерностях операторов. В приведенных выше примерах мы фактически вычислили $\hat{\rho}$ при некоторых малых значениях n .

Итак, для любого масштабирующего уравнения возможно, по крайней мере теоретически, вычислить показатель гладкости решения, а значит, и вычислить показатель гладкости соответствующих вейвлетов. Возникает вопрос, насколько велика может быть гладкость для данного n . Общеизвестно, что для классических финитных вейвлетов на прямой гладкость не может быть бесконечна,

она всегда ограничена длиной носителя масштабирующей функции. Точный аналог этого утверждения для диадических вейвлетов не верен хотя бы потому, что диадические масштабирующие функции могут быть двоично-целыми финитными функциями (примеры 1 и 6). Однако оказывается, что для диадических масштабирующих функций имеет место альтернатива: либо функция двоично-целая, либо у нее конечная гладкость. Причем гладкость ограничена не длиной носителя, а наименьшим ненулевым значением модуля маски. Точную формулировку и доказательство этого свойства оставим до § 7, пока же охарактеризуем все двоично-целые масштабирующие функции и вейвлеты.

§ 6. Двоично-целые решения масштабирующих уравнений

В следующем предложении приведены условия на расположение нулей маски масштабирующего уравнения (0.1), при которых его решение φ является двоично-целой функцией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть φ – финитное L^2 -решение масштабирующего уравнения (0.1) и m – его маска. Предположим, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Функция φ не является двоично-целой тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность $\{d_k\}_{k=1}^N$, $N \leq 2^{n-1}$, $d_k \in \{0, 1\}$, такая, что

- (a) $d_1 = \dots = d_{n-1} = 0$, $d_n = 1$;
- (b) существует целое j , $n-1 \leq j \leq N-1$, такое, что $d_{j-s} = d_{N-s}$ для $s = 0, \dots, n-2$ и $d_{j-n+2} \dots d_{N-n+1} = 0$;
- (c) $m(0.d_{k+1} \dots d_{k+n}) \neq 0$ для $k = 0, \dots, N-n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{d_k\}_{k=1}^N$ – последовательность, удовлетворяющая условиям (a)–(c), и пусть

$$\beta = 0.d_1 \dots d_{j-n+1}(d_{j-n+2} \dots d_{N-n+1})$$

– двоично-рациональное число с периодом $(d_{j-n+2} \dots d_{N-n+1})$. Поскольку $m \in \mathcal{E}_n$ и $m(0) = 1$, то для любого $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(2^r \beta) &= \prod_{k=1}^{\infty} m(2^{r-k} \beta) = \prod_{k=1}^{\infty} m(d_1 \dots d_{r-k} . d_{r-k+1} \dots d_{r-k+n} \dots) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} m(0.d_{r-k+1} \dots d_{r-k+n}) \neq 0 \end{aligned}$$

(полагаем $d_i = 0$ для $i \leq 0$, пользуемся периодичностью m и тем, что каждый кусок длины n двоичной записи числа β совпадает с некоторым куском длины n последовательности $\{d_k\}_{k=1}^N$). Значит, носитель преобразования Уолша–Фурье $\widehat{\varphi}$ не компактен и, следовательно, по предложению 2, (b) функция φ не двоично-целая.

Обратно, пусть финитное L^2 -решение φ уравнения (0.1) не является двоично-целой функцией. Тогда $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и по предложению 2, (c) носитель $\text{supp } \widehat{\varphi}$

не компактен. Возьмем число $\omega > 2^{2^{n-1}}$ такое, что $\widehat{\varphi}(\omega) \neq 0$. Двоичное разложение этого числа имеет вид

$$\omega = \sum_{j=0}^l \omega_{-j-1} 2^j + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j 2^{-j}, \quad \omega_j \in \{0, 1\}, \quad \omega_{-l-1} = 1, \quad l > 2^{n-1}.$$

Из формулы (0.5) видно, что $m(2^{-s}\omega) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Отсюда, как и выше (пользуясь тем, что $m \in \mathcal{O}_n$), получаем, что в точках

$$\gamma_l = 0.0 \dots 0 \omega_{-l-1}, \quad \gamma_{l-1} = 0.0 \dots \omega_{-l} \omega_{-l-1}, \quad \dots, \quad \gamma_0 = 0. \omega_{-n} \dots \omega_{-2} \omega_{-1}$$

маска m не обращается в нуль. В двоичной записи каждого двоично-рационального числа γ_s ($s = 0, \dots, l$) имеется ровно n значащих цифр. Поскольку $l > 2^{n-1}$, среди чисел $\gamma_0, \dots, \gamma_l$ найдутся два, у которых совпадают первые $n-1$ цифр. Пусть r – наименьшее число такое, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ у чисел γ_r и γ_{r-k} совпадают первые $n-1$ цифр. Тогда последовательность $0, \dots, 0, \omega_{-l-1}, \dots, \omega_{-r}$ искомая и предложение 10 доказано.

С помощью предложения 10 проверка, будет ли решение масштабирующего уравнения (0.1) двоично-целым, сводится к перебору всех последовательностей нулей и единиц длины $2^{n-1} - n + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если финитное L^2 -решение φ масштабирующего уравнения (0.1) двоично-целое, то

$$\text{supp } \widehat{\varphi} \subset [0, 2^{2^{n-1}}].$$

СЛЕДСТВИЕ 7. Если маска m масштабирующего уравнения (0.1) равна нулю на интервале $[2^{-r}, 2^{-r+1})$ при некотором $r \in \mathbb{N}$, то решение φ этого уравнения является двоично-целой функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как на интервалах $[k, k + 2^{-n})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, маска m равна 1, то $1 \leq r \leq n$. Тогда $m(\omega) = 0$ для любого числа ω , двоичная запись которого начинается цифрами $0.0 \dots 01$ (перед единицей стоит r нулей). Из этого сразу же следует, что для данной маски не существует последовательности $\{d_k\}_{k=1}^N$, удовлетворяющей условиям (а)–(с) предложения 10.

В частности, если маска равна нулю на интервале $[1/2, 1)$, то решение φ уравнения (0.1) двоично-целое. Отметим также, что если

$$m(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } \omega \in [0, 2^{-r}), \\ 0 & \text{для } \omega \in [2^{-r}, 2^{-r+1}), \end{cases}$$

где $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$, то независимо от значений, принимаемых маской m на остальных диадических интервалах, имеем $\varphi(x) = 2^{1-r} \chi_{[0, 2^{r-1})}(x)$.

§ 7. Альтернатива для гладких масштабирующих функций

Итак, для любого масштабирующего уравнения можно конечным перебором определить, будет ли его решение двоично-целым. Оказывается, что если решение φ уравнения (0.1) не является двоично-целым, то его гладкость конечна.

Более того, показатель Гёльдера α_φ оценивается сверху с помощью наименьшего ненулевого значения модуля маски, причем данная оценка не улучшаема.

Поскольку модуль маски $|m(\omega)|$ является кусочно постоянной функцией с шагом 2^{-n} , то он может принимать не более 2^n различных значений. Одно из этих значений равно нулю, поскольку из-за модифицированного условия Стрэнга–Фикса (теорема 1) маска обязана обращаться в нуль на периоде. Пусть a_m – наименьшее положительное значение модуля маски m , т.е.

$$a_m = \min\{|m(\omega)| \mid \omega \in \mathbb{R}_+, m(\omega) \neq 0\}.$$

Поскольку маска имеет период 1 и постоянна на двоичных интервалах ранга n , то значение a_m совпадает с минимальным положительным числом из множества $\{|m(2^{-n}k)|, k = 0, \dots, 2^{n-1}\}$.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой функции φ , являющейся финитным L^2 -решением уравнения (0.1) и удовлетворяющей условию $\widehat{\varphi}(0) = 1$, имеет место следующая альтернатива:*

- 1) φ двоично-целая;
- 2) $a_m < 1$ и $\alpha_\varphi \leq -\log_2 a_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ не является двоично-целой функцией. Тогда в силу предложения 2, (с) носитель функции $\widehat{\varphi}$ не компактен. Это значит, что существуют сколь угодно большие ω , для которых $\widehat{\varphi}(\omega) \neq 0$. Определив натуральное число k из неравенств $2^k \leq \omega < 2^{k+1}$ и воспользовавшись тем, что $m(2^{-j}\omega) = 1$ для всех $j \geq n + k + 1$, получаем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega) = \prod_{j=1}^{n+k} m(2^{-j}\omega). \quad (7.1)$$

Так как $\widehat{\varphi}(\omega) \neq 0$, то для каждого $j = 1, \dots, n + k$ значение $|m(2^{-j}\omega)|$ не равно нулю, а значит, не меньше чем a_m . Подставив неравенство $|m(2^{-j}\omega)| \geq a_m$ в (7.1), получаем

$$|\widehat{\varphi}(\omega)| \geq (a_m)^{n+k}. \quad (7.2)$$

Если теперь предположить, что $a_m \geq 1$, то в силу (7.2) существуют сколь угодно большие ω , для которых $|\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \geq 1$. Но тогда, поскольку функция $|\widehat{\varphi}(\omega)|^2$ постоянна на двоичных интервалах ранга $n-1$, она не суммируема на полупрямой $\mathbb{R}_+$, а значит, $\widehat{\varphi} \notin L^2(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, $\varphi \notin L^2(\mathbb{R}_+)$, что противоречит условию.

Итак, $a_m < 1$. Подставляя в (7.2) неравенство $k \leq \log_2 \omega$, имеем $|\widehat{\varphi}(\omega)| \geq (a_m)^n / \omega^{-\log_2 a_m}$. В то же время, согласно [2; гл. 9, упражнение 9.12] для любого $\omega > 0$ выполнено неравенство $|\widehat{\varphi}(\omega)| \leq (1/2)\omega(\varphi, 2/\omega)$. Следовательно, существует константа $C > 0$ такая, что $|\widehat{\varphi}(\omega)| \leq C/\omega^{\alpha_\varphi}$ для всех $\omega \geq 1$. Поэтому $\alpha_\varphi \leq -\log_2 a_m$. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Существуют бесконечно гладкие в $\mathbb{R}_+$ функции, не являющиеся двоично-целыми. Однако, как следует из теоремы 4, для масштабирующих функций это невозможно. Оценка $\alpha_\varphi \leq -\log_2 a_m$ не улучшаема для

масштабирующих функций. Например, для функции Лэнга (пример 2) она достигается. В отличие от масштабирующих функций на прямой $\mathbb{R}$, где для каждого n существует лишь одна масштабирующая функция максимальной гладкости (а именно, кардинальный B -сплайн порядка $n - 1$; см., например, [12], [13]), гладкость решений уравнения (0.1) при данном n не ограничена. Однако она ограничена для не двоично-целых функций при данном значении a_m . Достигается эта оценка для данных n и a_m на множестве финитных масштабирующих диадических функций.

Таким образом, при построении диадических вейвлетов мы можем для данной маски m за конечное время проверить, будут ли вейвлеты двоично-целые, и если нет, то получить границу сверху для гладкости. Другое полезное следствие теоремы 4 касается случая, когда модуль маски может принимать только два значения: 0 и 1. Сюда, в частности, относится случай, когда маска является характеристической функцией множества, полученного объединением некоторого семейства диадических интервалов ранга n .

СЛЕДСТВИЕ 8. *Если модуль маски масштабирующего уравнения (0.1) принимает только значения 0 и 1, то любое L^2 -решение этого уравнения является двоично-целым.*

Предложение 10 предоставляет алгоритм проверки масштабирующей функции на принадлежность к классу двоично-целых функций. Для масок, чей модуль принимает только два значения, этот алгоритм согласно следствию 8 дает критерий разрешимости масштабирующего уравнения в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

В заключение, применяя теорему 3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 9. *Если функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, а модуль маски соответствующего масштабирующего уравнения принимает только значения 0 и 1, то эта функция и порожденные ею диадические вейвлеты двоично-целые.*

Список литературы

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [2] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [3] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 2001.
- [4] W. C. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Sci.*, **21** (1998), 307–314.
- [5] W. C. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24** (1998), 533–544.
- [6] Yu. A. Farkov, “Orthogonal p -wavelets on $\mathbb{R}_+$ ”, *Wavelets and splines*, St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005, 4–26.
- [7] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220.
- [8] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.

- [9] D. Colella, C. Heil, “Characterization of scaling functions. I. Continuous solutions”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15** (1994), 496–518.
- [10] В. Ю. Протасов, “Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:5 (1997), 99–136.
- [11] W. Lawton, S. L. Lee, Z. Shen, “An algorithm for matrix extension and wavelet construction”, *Math. Comp.*, **65**:214 (1996), 723–737.
- [12] I. Daubechies, J. Lagarias, “Two-scale difference equations. I. Global regularity of solutions”, *SIAM. J. Math. Anal.*, **22** (1991), 1388–1410.
- [13] I. Daubechies, J. Lagarias, “Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals”, *SIAM. J. Math. Anal.*, **23** (1992), 1031–1079.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vladimir_protasov@yahoo.com

Поступила в редакцию

08.08.2005

Ю. А. Фарков (Yu. A. Farkov)

Московская государственная
геологоразведочная академия
E-mail: farkov@list.ru