Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Акишев, Приближение функциональных классов
в пространствах со смешанной нормой, *Матем. сб.*,
2006, том 197, номер 8, 17–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:36:56

УДК 517.51

Г. А. Акишев

Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой

В работе получены оценки порядка приближения классов Бесова в пространствах Лоренца с анизотропной нормой.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $L_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\dots \left[\int_0^{2\pi} (f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m))^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{q_2}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{q_m-1}} dt_m \right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1], [2]).

Пусть $\dot{L}_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ – множество всех функций $f \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

$a_{\bar{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе. Положим

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

где $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$.

Числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m} \in l_{\bar{p}}$, если

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{ \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[\dots \left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\bar{n}}|^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

По аналогии с [3] рассмотрим класс Бесова

$$B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}} = \{f \in \dot{L}_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m) : \|f\|_{B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}} = \|f\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* + \|\{2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \}_{l_{\bar{\tau}}} \leq 1\},$$

где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $1 \leq p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть дан вектор $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$. Положим $\bar{\gamma} = \bar{r}/r_1$, $r_j > 0$ и

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \bigcup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \left\{ t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\},$$

$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{p}, \bar{\theta}}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$, $S_n^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$ – частичная сумма ряда Фурье функции f .

Как отмечено в [4], одна из сложностей в теории приближения функций многих переменных связана с выбором гармоник приближающих полиномов. Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К. И. Бабенко [3].

Впоследствии приближение различных классов гладких функций этим методом исследовали С. А. Теляковский [5], Б. С. Митягин [6], Я. С. Бугров [7], Н. С. Никольская [8], Э. М. Галеев [9], В. Н. Темляков [10], Динь Зунг [11], Н. Н. Пустовойтов [12], Э. С. Белинский [13], Б. С. Кашин и В. Н. Темляков [14], А. С. Романюк [15], [16].

В частности, для классов Бесова $B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}$ в пространствах Лебега с изотропной нормой А. С. Романюк [15] получил следующий результат.

ТЕОРЕМА (А. С. Романюк). Пусть $1 \leq p < q < +\infty$, $1 \leq \tau < +\infty$, $1/p - 1/q < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_q \asymp 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \cdot n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\tau})_+}.$$

Этот результат для обобщенных классов Бесова установлен в [17]. Вышеперечисленные исследования относятся к приближению функций в пространствах Лебега с изотропной нормой. Обзор по этой теме дан в [4].

Основной целью настоящей статьи является оценка порядка величины

$$E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} = \sup_{f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}} E_n^{\bar{\gamma}}(f)_{\bar{q}, \bar{\theta}}.$$

Положим

$$Y^m(\bar{\gamma}, n) = \left\{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \sum_{j=1}^m s_j \gamma_j \geq n \right\},$$

$$Y_1^m(\bar{\gamma}, n) = \left\{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \sum_{j=1}^l s_j \gamma_j \geq n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j, \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j < n \right\},$$

$$\begin{aligned}
 Y_2^m(\bar{\gamma}, n) &= \left\{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : s_1, \dots, s_l \geq 0, \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j \geq n \right\}, \\
 Y_3^{m-l}(\bar{\gamma}, n) &= \left\{ \bar{s}_{m-l} = (s_{l+1}, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^{m-l} : \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j < n \right\}, \\
 Y_4^l(\bar{\gamma}, n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j) &= \left\{ \bar{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}_+^l : \sum_{j=1}^l s_j \gamma_j \geq n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j \right\}, \\
 Y_5^{m-l}(\bar{\gamma}, n) &= \left\{ \bar{s}_{m-l} = (s_{l+1}, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^{m-l} : \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j \geq n \right\}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что $Y^m(\bar{\gamma}, n) = Y_1^m(\bar{\gamma}, n) \cup Y_2^m(\bar{\gamma}, n)$.

Через $C(p, q, y, \dots)$ обозначим положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров и, вообще говоря, различные в разных формулах.

Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \leq B(y) \leq C_2 \cdot A(y)$.

ЛЕММА А (см. [18], [19]). Пусть даны положительные числа $0 < \theta < +\infty$, $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$.

а) Если

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq C \cdot b_n,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k \right)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{\theta}.$$

б) Если

$$\sum_{k=n}^{\infty} b_k \leq C \cdot b_n,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{\theta}.$$

ЛЕММА Б (см. [20]). Пусть $1 \leq p_j, \theta_j < \infty, j = 1, \dots, m$. Для любого тригонометрического полинома

$$T_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \leq \bar{n}} a_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$$

имеет место неравенство

$$\max_{\bar{x} \in I^m} |T_{\bar{n}}(\bar{x})| \leq C \cdot \prod_{j=1}^m n_j^{\frac{1}{p_j}} \cdot \|T_{\bar{n}}\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*.$$

Эта лемма доказывается с использованием неравенства Гёльдера (см. [1; с. 161]) и оценки нормы в пространстве Лоренца одномерного ядра Дирихле (см. [21]).

Теперь докажем некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть дано целое неотрицательное число $l < \nu \leq m$ и $\bar{\gamma} = (\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_m)$, $1 = \gamma_{l+1} = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$ и $\alpha \in (0, +\infty)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = l+1, \dots, m$, $\bar{\theta} = (\theta_{l+1}, \dots, \theta_m)$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\{2^{-\alpha\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}\}_{\bar{s} \in Y^{m-l}(\bar{\gamma}, n)}\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq C(\alpha, \theta, \gamma) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\theta_j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму докажем методом математической индукции по размерности m . Для краткости записи введем обозначение: $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = 2^{-\alpha\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}$, если $\bar{s} \in Y^{m-l}(n, \bar{\gamma})$, и $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = 0$, если $\bar{s} \notin Y^{m-l}(n, \bar{\gamma})$. При $m = l+1$ утверждение очевидно.

Пусть $m = l+2$. Из определений множества $Y^{m-l}(n, \bar{\gamma})$ и чисел $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})$ получим:

$$\begin{aligned} \|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}_{\bar{s} \in Y^{m-l}(n, \bar{\gamma})}\|_{l_{\bar{\theta}}} &= \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n}{\gamma_{l+2}}} \left[\sum_{s_{l+1} < \frac{n - \gamma_{l+2}s_{l+2}}{\gamma_{l+1}}} |b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})|^{\theta_{l+1}} \right]^{\frac{\theta_{l+2}}{\theta_{l+1}}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s_{l+2} \geq \frac{n}{\gamma_{l+2}}} \left[\sum_{s_{l+1}=0}^{\infty} |b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})|^{\theta_{l+1}} \right]^{\frac{\theta_{l+2}}{\theta_{l+1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_{l+2}}} \\ &= \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n}{\gamma_{l+2}}} \left[\sum_{s_{l+1} \geq \frac{n - \gamma_{l+2}s_{l+2}}{\gamma_{l+1}}} 2^{-\alpha(s_{l+1}\gamma_{l+1} + s_{l+2}\gamma_{l+2})\theta_{l+1}} \right]^{\frac{\theta_{l+2}}{\theta_{l+1}}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s_{l+2} \geq \frac{n}{\gamma_{l+2}}} \left[\sum_{s_{l+1}=0}^{\infty} 2^{-\alpha(s_{l+1}\gamma_{l+1} + s_{l+2}\gamma_{l+2})\theta_{l+1}} \right]^{\frac{\theta_{l+2}}{\theta_{l+1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_{l+2}}} \\ &\leq C(\gamma, \theta) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n}{\gamma_{l+2}}} 1 + 1 \right\}^{\frac{1}{\theta_{l+2}}} \leq C(\gamma, \theta) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\frac{1}{\theta_{l+2}}}. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что утверждение леммы верно для $m-1$, т.е.

$$\|\{\tilde{b}_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}_{\bar{s} \in Y^{m-1-l}(n, \bar{\gamma})}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-1-l})} \leq C \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\theta_j}}, \quad (1)$$

где $\tilde{b}_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = 2^{-\alpha \sum_{j=l+1}^{m-1} s_j \gamma_j}$, если $\bar{s} \in Y^{m-l-1}(n, \bar{\gamma})$, и $\tilde{b}_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = 0$, если $\bar{s} \notin Y^{m-l-1}(n, \bar{\gamma})$.

Докажем, что утверждение леммы верно для m . Для краткости записи положим $\bar{s}(m-l-1) = (s_{l+1}, \dots, s_{m-1})$. Тогда по определению нормы $l_{\bar{\theta}}$ будем

ИМЕТЬ:

$$\begin{aligned}
 \|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-l})} &= \left\{ \sum_{s_m=0}^{\infty} \|\{b_{\bar{s}(m-l-1), s_m}(n, \bar{\gamma})\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-l-1})}^{\theta_m} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\
 &= \left\{ \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} \|\{b_{\bar{s}(m-l-1), s_m}(n, \bar{\gamma})\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-l-1})}^{\theta_m} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{s_m > \frac{n}{\gamma_m}} \|\{b_{\bar{s}(m-l-1), s_m}(n, \bar{\gamma})\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-l-1})}^{\theta_m} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Если $s_m \leq n/\gamma_m$, то по определению $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = 0$ при $\sum_{j=l+1}^{m-1} \gamma_j s_j < n - \gamma_m s_m$ и $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}$ при $\sum_{j=l+1}^{m-1} \gamma_j s_j > n - \gamma_m s_m$. Поэтому в силу предположения (1) получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} \|\{b_{\bar{s}(m-l-1), s_m}(n, \bar{\gamma})\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-l-1})}^{\theta_m} &\leq C \cdot 2^{-n\alpha\theta_m} \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} (n - s_m \gamma_m)^{\theta_m \sum_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\theta_j}} \\
 &\leq C \cdot 2^{-n\alpha\theta_m} \cdot n^{1 + \sum_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\theta_j} \theta_m}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Если $s_m > n/\gamma_m$, то $\sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j > n \ \forall (s_{l+1}, \dots, s_{m-1}) \in \mathbb{Z}_+^{m-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{s_m > \frac{n}{\gamma_m}} \|\{b_{\bar{s}(m-l-1), s_m}(n, \bar{\gamma})\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-l-1})}^{\theta_m} \\
 = C(\gamma, \theta) \sum_{s_m > \frac{n}{\gamma_m}} 2^{-s_m \alpha \gamma_m \theta_m} \leq C(\gamma, \theta) \cdot 2^{-n\alpha\theta_m}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Из неравенств (2)–(4) следует, что

$$\|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^{m-l})} \leq C(\gamma, \theta) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\theta_j}}.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что лемма 1 в случае $l = 0$, $\theta_1 = \dots = \theta_m$ ранее была доказана В. Н. Темляковым [10].

В дальнейшем будем пользоваться обозначением: $\chi_{\kappa(n)}(\bar{s})$ – характеристическая функция множества $\kappa(n) = \{\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n\}$.

ЛЕММА 2. Пусть $l < m$ – неотрицательное целое число, $\bar{\tau} = (\tau_{l+1}, \dots, \tau_m)$, $1 \leq \tau_j < +\infty$, $j = l+1, \dots, m$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\|\{\chi_{\kappa(n)}(\bar{s})\}_{\bar{s} \in \kappa(n)}\|_{l_{\bar{\tau}}} \asymp C(\tau) \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму докажем методом математической индукции по размерности m .

Пусть $m = l + 2$. Из определения множества $\mathcal{K}(n)$ получим

$$\begin{aligned} I_n &= \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n}{\gamma_{l+2}}} \left[\sum_{s_{l+1} = \frac{1}{\gamma_{l+1}}(n - \gamma_{l+2}s_{l+2})} 1 \right]^{\frac{\tau_{l+2}}{\tau_{l+1}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+2}}} \\ &= \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n}{\gamma_{l+2}}} 1 \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+2}}} \leq C(\tau, \gamma) \cdot n^{\frac{1}{\tau_{l+2}}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь пусть $m = l + 3$. Тогда

$$\begin{aligned} I_n &= \left\{ \sum_{s_{l+3} < \frac{n}{\gamma_{l+3}}} \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n - \gamma_{l+3}s_{l+3}}{\gamma_{l+2}}} \left[\sum_{s_{l+1} = \frac{n - \gamma_{l+2}s_{l+2} - \gamma_{l+3}s_{l+3}}{\gamma_{l+1}}} 1 \right]^{\frac{\tau_{l+2}}{\tau_{l+1}}} \right\}^{\frac{\tau_{l+3}}{\tau_{l+2}}} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{s_{l+3} < \frac{n}{\gamma_{l+3}}} \left[\sum_{s_{l+2} = \frac{n - \gamma_{l+3}s_{l+3}}{\gamma_{l+2}}} 1 \right]^{\frac{\tau_{l+3}}{\tau_{l+2}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+3}}} \\ &\leq C(\tau, \gamma) \left\{ \sum_{s_{l+3} < \frac{n}{\gamma_{l+3}}} (n - s_{l+3}\gamma_{l+3})^{\frac{\tau_{l+3}}{\tau_{l+2}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+3}}} \leq C(\tau, \gamma) \cdot n^{\frac{1}{\tau_{l+2}} + \frac{1}{\tau_{l+3}}}. \end{aligned}$$

Пусть $m > l + 3$. Предположим, что утверждение леммы верно для $s = m - 1$, т.е.

$$I_n \leq C(\tau, \gamma) \cdot n^{\sum_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\tau_j}}.$$

В силу предположения и неравенства

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \leq C(\alpha) \cdot n^{\alpha+1}, \quad \alpha + 1 > 0, \quad (6)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} I_n &= \left\{ \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} \left[\sum_{s_{m-1} \leq \frac{n - s_m \gamma_m}{\gamma_{m-1}}} \dots \left[\sum_{s_{l+1} = n - \sum_{j=l+2}^m s_j \gamma_j} 1 \right]^{\frac{\tau_{l+2}}{\tau_{l+1}}} \dots \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_m}} \\ &\leq C(\tau, \gamma) \left\{ \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} (n - s_m \gamma_m)^{\tau_m \cdot \sum_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\tau_j}} \right\}^{\frac{1}{\tau_m}} \leq C(\tau, \gamma) \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}}. \end{aligned}$$

Оценка снизу при $m = l + 2$ следует из (5). Если $m = l + 3$, то

$$I_n \geq C(\tau, \gamma) \left\{ \sum_{s_{l+3} < \frac{n}{2\gamma_{l+3}}} (n - s_{l+3}\gamma_{l+3})^{\frac{\tau_{l+3}}{\tau_{l+2}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+3}}} \geq C(\tau, \gamma) \cdot n^{\frac{1}{\tau_{l+2}} + \frac{1}{\tau_{l+3}}}.$$

Далее для $m > l + 3$ методом индукции нетрудно убедиться в справедливости оценки снизу в утверждении леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\bar{\gamma} = (\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_{l+1}, \dots, \tau_m)$, $1 \leq \tau_j < +\infty$, $j = l+1, \dots, m$, $\gamma_{l+1} = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$, l – неотрицательное целое, $l < \nu \leq m$, $\alpha > 0$. Тогда имеет место неравенство

$$I_n^{(l)} = \left\| \{2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}\}_{\bar{s} \in \mathcal{K}(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \geq C(\tau, \gamma) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = l+2$. Тогда

$$\begin{aligned} I_n^{(l)} &= \left\{ \sum_{s_2 < \frac{n}{\gamma_2}} \left[\sum_{s_1 = \frac{n - \gamma_2 s_2}{\gamma_1}} 2^{-\alpha \tau_1 \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \right]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right\}^{\frac{1}{\tau_2}} \\ &= \left\{ \sum_{s_2 < \frac{n}{\gamma_2}} \left[2^{-\alpha \gamma_1 \frac{n - \gamma_2 s_2}{\gamma_1}} \cdot 2^{-\alpha \cdot s_2 \gamma_2} \right]^{\tau_2} \right\}^{\frac{1}{\tau_2}} \geq C(\gamma, \tau) \cdot 2^{-\alpha \cdot n} \cdot n^{\frac{1}{\tau_2}}. \end{aligned}$$

Пусть $m > l+3$. Предположим, что утверждение леммы верно для $s = m-1$, т.е.

$$I_n^l \geq C(\tau, \gamma) \cdot 2^{-\alpha \cdot n} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\tau_j}}.$$

В силу предположения будем иметь

$$\begin{aligned} I_n^{(l)} &= \left\{ \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} \left[\sum_{s_{m-1} \leq \frac{n - s_m \gamma_m}{\gamma_{m-1}}} \dots \left[\sum_{s_{l+1} \leq n - \sum_{j=l+2}^m s_j \gamma_j} 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \right]^{\frac{\tau_{l+2}}{\tau_{l+1}}} \dots \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_m}} \\ &\geq C(\tau, \gamma) \left\{ \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} 2^{-\alpha \cdot s_m \gamma_m} \cdot 2^{-\alpha \cdot (n - s_m \gamma_m) \cdot \tau_m} (n - s_m \gamma_m)^{\tau_m \cdot \sum_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\tau_j}} \right\}^{\frac{1}{\tau_m}} \\ &\geq C(\tau, \gamma) \cdot 2^{-\alpha \cdot n} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 2. Оценка порядка приближения классов Бесова тригонометрическими полиномами

Теперь докажем основные утверждения.

Положим

$$G_e(\bar{n}) = \{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{N}^m : s_j \leq n_j, j \in e, s_j > n_j, j \notin e \},$$

где $e \subset \{1, \dots, m\}$;

$$U_{\bar{n}}(f, \bar{x}) = \sum_{e \subset \{1, \dots, m\}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}).$$

Пусть

$$\bar{f}(\bar{t}) = \sup_{|E_m| \geq t_m} \frac{1}{|E_m|} \int_{E_m} \dots \sup_{|E_1| \geq t_1} \frac{1}{|E_1|} \int_{E_1} |f(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \dots dx_m,$$

где $|E_j|$ – мера Лебега множества $E_j \in [0, 2\pi)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p_j, \theta_j < +\infty, j = 1, \dots, m$. Тогда для любой функции $f \in L_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{t}) \leq C(p, m) & \left\{ \prod_{j=1}^m t_j^{-\frac{1}{p_j}} \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right. \\ & \left. + \sum_{e \subset \{1, \dots, m\}} \prod_{j \notin e} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\} \end{aligned}$$

для $t_j \in (2^{-n_j-1}, 2^{-n_j}]$, $n_j = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_j \subset [0, 2\pi]$ – измеримые по Лебегу множества. Тогда по свойству интеграла имеем

$$\begin{aligned} & \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \dots dx_m \\ & \leq \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(\bar{x}) - U_{\bar{n}}(f, \bar{x})| dx_1 \dots dx_m + \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |U_{\bar{n}}(f, \bar{x})| d\bar{x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя интегральное неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(\bar{x}) - U_{\bar{n}}(f, \bar{x})| d\bar{x} \leq \prod_{j=1}^m |E_j|^{\frac{1}{p'_j}} \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*, \quad (8)$$

где $p'_j = p_j/(p_j - 1)$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть $e = \{1, \dots, i\} \subset \{1, \dots, m\}$. Тогда, применяя по переменным $x_1, \dots, x_i$ неравенство разных метрик для полиномов по тригонометрической системе (см. лемму Б), а по остальным переменным – неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_m} \dots \int_{E_1} \left| \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \right| d\bar{x} \leq \int_{E_m} \dots \int_{E_1} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})| d\bar{x} \\ & = \int_{E_m} \dots \int_{E_1} \sum_{s_1=1}^{n_1} \dots \sum_{s_i=1}^{n_i} \sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \dots \sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})| d\bar{x} \\ & \leq C \cdot \sum_{s_1=1}^{n_1} \dots \sum_{s_i=1}^{n_i} \sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \dots \sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} \prod_{j=1}^i 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \cdot \prod_{j=1}^i |E_j| \cdot \prod_{j=i+1}^m |E_j|^{\frac{1}{p'_j}} \\ & = C \cdot \prod_{j \in e} |E_j| \cdot \prod_{j \notin e} |E_j|^{\frac{1}{p'_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Для остальных множеств $e \subset \{1, \dots, m\}$ неравенство (9) доказывается аналогично.

В определении функции $\bar{f}$ меры $|E_j| \geq t_j$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому из неравенств (7)–(9) получим

$$\prod_{j=1}^m \frac{1}{|E_j|} \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(\bar{x}) - U_{\bar{n}}(f, \bar{x})| d\bar{x} \leq C \cdot \left\{ \prod_{j=1}^m t_j^{-\frac{1}{p_j}} \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* + \sum_{e \subset \{1, \dots, m\}} \prod_{j \notin e} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}.$$

Отсюда по определению точной верхней грани множества получим утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1 \leq \theta_j < +\infty$. Если $f \in \dot{L}_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ и величина

$$\sigma(f) \equiv \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m \theta_m (\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})} \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1 \theta_1 (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, то функция $f \in \dot{L}_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \leq C(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\theta}) \cdot \sigma(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Блозински [1; с. 161] доказал соотношение

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \asymp \|\bar{f}\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*, \quad 1 \leq q_j < +\infty, \quad 1 \leq \theta_j < +\infty, \quad j = 1, \dots, m.$$

Пользуясь этим соотношением, имеем

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \leq C \|\bar{f}\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* = C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \int_{2^{-n_m-1}}^{2^{-n_m}} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{2^{-n_1-1}}^{2^{-n_1}} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} \times (\bar{f}(t_1, \dots, t_m))^{\theta_1} dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \quad (10)$$

Далее, применяя теорему 1 и учитывая соотношение

$$\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} t^{\beta-1} dt \asymp 2^{-n\beta}, \quad (11)$$

из (10) получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* &\leq C \left[\left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m (\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})} \right. \right. \\ &\times \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} (\|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\ &+ \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \int_{2^{-n_m-1}}^{2^{-n_m}} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{2^{-n_1-1}}^{2^{-n_1}} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} \right. \right. \\ &\times \left(\sum_{e \subset \{1, \dots, m\}} \prod_{j \notin e} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right)^{\theta_1} \left. \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \left. \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Из неравенств (12) и (13) следует, что

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^* &\leq C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m}\right)} \right. \\
 &\quad \times \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} (\|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\theta_m \theta_{m-1}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\
 &\quad + \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m}\right)} \left[\sum_{n_{m-1}=0}^{\infty} 2^{n_{m-1} \theta_{m-1} \left(\frac{1}{p_{m-1}} - \frac{1}{q_{m-1}}\right)} \dots \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right] \right\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Так как

$$f(\bar{x}) - U_{\bar{n}}(f, \bar{x}) = \sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=n_1+1}^{\infty} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}),$$

то по свойству нормы и лемме A

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m}\right)} \right. \\
 &\quad \times \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} (\|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\
 &\leq \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m}\right)} \right. \\
 &\quad \times \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} (\|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Из неравенств (14) и (15) следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < q_j < \tau_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Если $f \in L_{\bar{q},\bar{\theta}}^*(I^m)$ и

$$f(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} b_{\bar{s}} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle},$$

то имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^* &\geq C(q, \theta, \tau, m) \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m \theta_m \left(\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{q_m}\right)} \right. \\
 &\quad \times \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1}\right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau},\bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_{2^\nu, \dots, 2^\nu}(f, \bar{x})$ – прямоугольная частичная сумма ряда Фурье функции $f \in L_{\bar{q},\bar{\theta}}^*(I^m)$. Известно [2], что

$$\|S_{2^\nu, \dots, 2^\nu}(f)\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^* \leq C(q, \theta) \|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^* \quad (16)$$

и (см. [1; с. 161])

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \geq \sup_{\substack{g \in L_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \\ \|g\|_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \leq 1}} \int_{I^m} |f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})| d\bar{x}, \quad (17)$$

где $\bar{q}' = (q'_1, \dots, q'_m)$, $\bar{\theta}' = (\theta'_1, \dots, \theta'_m)$, $1/q_j + 1/q'_j = 1$, $1/\theta_j + 1/\theta'_j = 1$, $1 < q_j, \theta_j < +\infty$ $j = 1, \dots, m$. В силу соотношений (16) и (17) имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* &\geq \sup_{\substack{g \in L_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \\ \|g\|_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \leq 1}} \int_{I^m} |S_{2^\nu, \dots, 2^\nu}(f, \bar{x}) \cdot g(\bar{x})| d\bar{x} \\ &\geq \sup_{\substack{g \in L_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \\ \|g\|_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \leq 1}} \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \cdot g(\bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Положим

$$\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j} = \left\{ \sum_{s_j=1}^{\nu-1} 2^{s_j \theta_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \left[\cdots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu-1} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1}\right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \cdots \right]^{\frac{\theta_j}{\theta_{j-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_j}}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_\nu(\bar{x}) = \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} b_{\bar{s}, \nu} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle},$$

где

$$\begin{aligned} b_{\bar{s}, \nu} &= \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta_1}} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1} - \theta_j} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^m 2^{s_j \theta_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right)} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j} \right)^{-1} \cdot \prod_{j=2}^m 2^{s_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j}\right) (\theta_1 - \theta_j)} \cdot |b_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1 - 1} \cdot \text{sign}(b_{\bar{s}}(f)). \end{aligned}$$

Учитывая соотношение

$$\left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \asymp \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)}, \quad 1 < p_j, \theta_j < +\infty,$$

нетрудно убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$\begin{aligned} (\|\delta_{\bar{s}}(g_\nu)\|_{\bar{\tau}', \bar{\theta}'}^*)^{\theta'_1} &= \left(|b_{s, \nu}| \cdot \left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{\tau}', \bar{\theta}'}^* \right)^{\theta'_1} \\ &\leq C(\tau, \theta, m) \prod_{j=2}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right) \theta_j \theta'_1} \cdot 2^{s_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1}\right) (\theta_1 + \theta'_1)} \cdot (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \\ &\quad \times \left(\prod_{j=1}^m (\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1} - \theta_j} \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta_1}} \right)^{\theta'_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, пользуясь неравенством (19), получаем

$$\begin{aligned}
 J(g_\nu) &\equiv \left\{ \sum_{s_m=1}^{\nu-1} 2^{s_m \theta'_m \left(\frac{1}{\tau'_m} - \frac{1}{q'_m} \right)} \right. \\
 &\quad \times \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu-1} 2^{s_1 \theta'_1 \left(\frac{1}{\tau'_1} - \frac{1}{q'_1} \right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}', \bar{\theta}'}^*)^{\theta'_1} \dots \right]^{\frac{\theta'_2}{\theta'_1}} \dots \right]^{\frac{\theta'_m}{\theta'_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta'_m}} \\
 &\leq C(q, \theta, \tau, m) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \\
 &\quad \times \left\{ \sum_{s_m=1}^{\nu-1} 2^{s_m \theta'_m \left(\frac{1}{\tau'_m} - \frac{1}{q'_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu-1} 2^{s_1 \theta'_1 \left(\frac{1}{\tau'_1} - \frac{1}{q'_1} \right)} \prod_{j=2}^m 2^{s_j \theta_j \theta'_1 \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \right. \right. \right. \\
 &\quad \times 2^{s_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1} \right) (\theta_1 + \theta'_1)} \cdot (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \\
 &\quad \times \left. \left(\prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1} - \theta_j} \right)^{\theta'_1} \dots \right]^{\frac{\theta'_2}{\theta'_1}} \dots \left. \right]^{\frac{\theta'_m}{\theta'_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta'_m}}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Теперь, учитывая равенства

$$\frac{1}{\tau'_j} - \frac{1}{q'_j} = \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\tau_j}, \quad \left(\frac{1}{\tau'_j} - \frac{1}{q'_j} \right) \theta'_j + \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right) \theta_j \cdot \theta'_j = \theta_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)$$

и определение чисел $\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j}$, неравенство (20) продолжим так:

$$\begin{aligned}
 J(g_\nu) &\leq C(q, \theta, \tau, m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \\
 &\quad \times \left\{ \sum_{s_m=1}^{\nu-1} 2^{s_m \theta_m \left(\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu-1} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1} \right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right. \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1} - \theta_j} \right)^{\theta'_1} \dots \right]^{\frac{\theta'_2}{\theta'_1}} \dots \left. \right]^{\frac{\theta'_m}{\theta'_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta'_m}} \\
 &= C(q, \theta, \tau, m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \\
 &\quad \times \left\{ \sum_{s_m=1}^{\nu-1} 2^{s_m \theta_m \left(\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \right. \\
 &\quad \times \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu-1} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1} \right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta'_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta'_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta'_m}} \\
 &\leq C(q, \theta, \tau, m). \tag{21}
 \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы $q_j < \tau_j$, то $q'_j > \tau'_j$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому в силу теоремы 2 и неравенства (21) получим

$$\|g_\nu\|_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \leq C \cdot J(g_\nu) \leq C(q, \theta, \tau, m).$$

Следовательно, функция $\varphi_\nu = \frac{g_\nu}{C(q, \theta, \tau, d)} \in L_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^*(I^m)$ и $\|\varphi_\nu\|_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \leq 1$.

Далее, в силу ортогональности при фиксированных $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) g_\nu(\bar{x}) d\bar{x} &= \sum_{l_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{l_1=1}^{\nu-1} b_{\bar{s}}(f) b_{\bar{l}, \nu} \int_{I^m} \left| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right|^2 d\bar{x} \\ &= (2\pi)^m \cdot b_{\bar{s}}(f) b_{\bar{s}, \nu} \cdot \prod_{j=1}^m 2^{s_j-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из определения чисел $b_{\bar{s}, \nu}$ следует, что

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m 2^{s_j} b_{\bar{s}}(f) b_{\bar{s}, \nu} &= \prod_{j=1}^m 2^{s_j} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1}-\theta_j} \cdot \prod_{j=1}^m 2^{s_j \theta_j \left(1 - \frac{1}{q_j} \right)} \\ &\quad \times \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j} \right)^{-1} \cdot \prod_{j=2}^m 2^{s_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j} \right) (\theta_1 - \theta_j)} \cdot |b_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1} \\ &= \prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1}-\theta_j} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^m 2^{s_j \theta_j \left(1 - \frac{1}{q_j} \right)} \cdot \prod_{j=2}^m 2^{-s_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j} \right) \theta_j} \cdot 2^{-s_1 \left(1 - \frac{1}{\tau_1} \right) \theta_1} \\ &\quad \times \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(1 - \frac{1}{\tau_j} \right)} \cdot |b_{\bar{s}}(f)| \right)^{\theta_1} \\ &\geq C(\tau, \theta) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1}-\theta_j} \cdot \prod_{j=1}^m 2^{s_j \theta_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь, учитывая (22) и (23), получим

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{g \in L_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \\ \|g\|_{\bar{q}', \bar{\theta}'}^* \leq 1}} \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \cdot g(\bar{x}) d\bar{x} \\ &\geq \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \cdot \varphi_\nu(\bar{x}) d\bar{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= C(q, \theta, \tau, m) \cdot \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \cdot g(\bar{x}) d\bar{x} \\
 &\geq \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \cdot g_{\nu}(\bar{x}) d\bar{x} \\
 &\geq C(\tau, \theta) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta}{\theta'_m} m} \prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_{\nu}(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1}-\theta_j} \\
 &\quad \times \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \cdots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \theta_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^*)^{\theta_1} \\
 &= C(\tau, \theta) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Из неравенств (18) и (24) следует, что

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \geq C(q, \theta, \tau, m) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\tau}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq p_j < q_j < +\infty$ и $r_j > 1/p_j - 1/q_j$, $j = 1, \dots, m$.

1) Если $1 \leq \theta_j < \tau_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, то

$$E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C(\theta, q, m, r) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j) \right\}_{\bar{s} \in Y(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}}}.$$

2) Если $\tau_j \leq \theta_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, то

$$E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C(\theta, \tau, m, r) \cdot \sup_{\bar{s} \in Y(\bar{\gamma}, n)} \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j) \right\}.$$

3) Если $\tau_j \leq \theta_j$, $j = 1, \dots, l \leq \nu$, $\theta_j < \tau_j$, $j = l+1, \dots, m$, то

$$\begin{aligned}
 E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} &\leq C(\theta, r, m, \tau) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j) \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_5^{m-l}(n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}} \\
 &\quad + \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j) \cdot \sup \prod_{j=1}^l 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j) \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_3^{m-l}(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}},
 \end{aligned}$$

где $\bar{\varepsilon}_{m-l} = (\varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $\beta_j = \tau_j / \theta_j$, $1/\beta_j + 1/\beta'_j = 1$, $j = l+1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}$. Так как

$$\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)) = 0, \quad \bar{s} \notin Y^m(\bar{\gamma}, n), \quad \text{и} \quad \delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)) = \delta_{\bar{s}}(f), \quad \bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n),$$

то в силу теоремы 2 получим

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \leq C(\theta, m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \mu_j(s_j) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \quad (25)$$

Для доказательства первого пункта достаточно применить неравенства Гёльдера к правой части неравенства (25) с показателями $\beta_j = \tau_j/\theta_j$, $1/\beta_j + 1/\beta'_j = 1$, $j = 1, \dots, m$.

Второй пункт следует из неравенства Иенсена (см. [22; лемма 3.3.3]).

Докажем третий пункт. По определению множеств $Y_1^m(\bar{\gamma}, n)$, $Y_2^m(\bar{\gamma}, n)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \mu_j(s_j) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ & \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \mu_j(s_j) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in Y_1^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} + \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \mu_j(s_j) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in Y_2^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ & = J_1(n) + J_2(n). \end{aligned} \quad (26)$$

Так как по условию теоремы $\tau_j \leq \theta_j$ и

$$\sup_{s_j \in \mathbb{Z}_+} \mu_j(s_j) 2^{-s_j r_j} < +\infty, \quad j = 1, \dots, l,$$

то в силу неравенства Иенсена (см. [22; лемма 3.3.3]) имеет место соотношение

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^l \mu_j(s_j) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}_l \in \mathbb{Z}_+^l} \right\|_{l_{\bar{\theta}_l}} \leq C(r, \theta, m) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^l 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}_l \in \mathbb{Z}_+^l} \right\|_{l_{\bar{\tau}_l}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_2(n) & \leq C(r, \theta, m) \\ & \times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m \mu_j(s_j) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^l 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}_l \in \mathbb{Z}_+^l} \right\|_{l_{\bar{\tau}_l}} \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_5^{m-l}(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}_{m-l}}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как $\theta_j < \tau_j$, $j = l+1, \dots, m$, то, применяя неравенство Гёльдера с показателем $\beta_j = \tau_j/\theta_j$, $1/\beta_j + 1/\beta'_j = 1$, $j = l+1, \dots, m$, из (27) получаем

$$\begin{aligned} J_2(n) & \leq C(r, \theta, m) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \\ & \times \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j) \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_5^{m-l}(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\bar{\varepsilon}_{m-l} = (\varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $j = l+1, \dots, m$.

Оценим $J_1(n)$. В силу условия $\tau_j \leq \theta_j$, $j = 1, \dots, l$, и неравенства Йенсена будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \prod_{j=1}^l \mu_j(s_j) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}_l \in Y_4^l(\bar{\gamma}, n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)} \right\|_{l_{\bar{\theta}_l}} \\ & \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^l 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}_l \in \mathbb{Z}_+^l} \right\|_{l_{\tau_l}} \sup_{\bar{s}_l \in Y_4^l(\bar{\gamma}, n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)} \mu_j(s_j) 2^{s_j r_j}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_1(n) &= \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m \mu_j(s_j) \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left\| \left\{ \prod_{j=1}^l \mu_j(s_j) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}_l \in Y_4^l(\bar{\gamma}, n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)} \right\|_{l_{\bar{\theta}_l}} \right\|_{\bar{s}_{m-l} \in Y_3^{m-l}(\bar{\gamma}, n)} \Big\|_{l_{\bar{\theta}_l}} \\ &\leq \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m \mu_j(s_j) \left(\sup_{\bar{s}_l \in Y_4^l(\bar{\gamma}, n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)} \prod_{j=1}^l \mu_j(s_j) 2^{s_j r_j} \right) \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left\| \left\{ \prod_{j=1}^l 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s}_l \in \mathbb{Z}_+^l} \right\|_{l_{\tau_l}} \right\|_{\bar{s}_{m-l} \in Y_3^{m-l}(\bar{\gamma}, n)} \Big\|_{l_{\bar{\theta}_{m-l}}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера с показателем $\beta_j = \tau_j/\theta_j > 1$, $j = l+1, \dots, d$, из (29) получаем

$$\begin{aligned} J_1(n) &\leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ &\quad \times \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m \mu_j(s_j) 2^{-s_j r_j} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \sup_{\bar{s}_l \in Y_4^l(\bar{\gamma}, n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)} \prod_{j=1}^l \mu_j(s_j) 2^{-s_j r_j} \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_3^{m-l}(n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\bar{\varepsilon}_{m-l} = (\varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $1/\beta_j + 1/\beta'_j = 1$, $j = l+1, \dots, m$.

Теперь из неравенств (25), (26), (28), (30) следует утверждение третьего пункта теоремы 4. Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\gamma_j = (r_j + 1/q_j - 1/p_j)(r_1 + 1/q_1 - 1/p_1)^{-1}$, $1 \leq \theta_j, \tau_j < +\infty$, $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1/p_j - 1/q_j < r_j$, $j = 1, \dots, m$, $0 < r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 = \dots = r_\nu + 1/q_\nu - 1/p_\nu < r_{\nu+1} + 1/q_{\nu+1} - 1/p_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m + 1/q_m - 1/p_m$.

Тогда справедливы соотношения

$$E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} \asymp \begin{cases} 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=2}^m (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}, & \theta_j < \tau_j, \quad j = 1, \dots, m, \\ 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})}, & \tau_j \leq \theta_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

и для $\tau_j \leq \theta_j < +\infty, j = 1, \dots, l < \nu, \theta_j < \tau_j < +\infty, j = l + 1, \dots, m,$

$$\begin{aligned} & C(p, q, m, r, \theta) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})} \\ & \leq E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C_1(p, q, \theta, r) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=l+1}^m (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_j < \tau_j, j = 1, \dots, m$. Тогда в силу п. 1) теоремы 4 имеем

$$\begin{aligned} E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} & \leq C(\theta, m, q) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}}} \\ & = C(\theta, m, q) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}) \sum_{j=1}^m s_j \cdot \gamma_j} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}}}, \quad (31) \end{aligned}$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $\beta'_j = \beta_j / (\beta_j - 1)$, $\beta_j = \tau_j / \theta_j, j = 1, \dots, m$.

Полагая в лемме 1 $\gamma_j = (r_j + 1/q_j - 1/p_j)/(r_1 + 1/q_1 - 1/p_1), j = 1, \dots, m, l = 0, \alpha = r_1 + 1/q_1 - 1/p_1$ и учитывая, что $1/\varepsilon_j = 1/\theta_j - 1/\tau_j, j = 1, \dots, m$, из (31) будем иметь

$$\begin{aligned} E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} & \leq C(\theta, m, q, p) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\varepsilon_j}} \\ & = C(\theta, m, q, p) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=2}^m (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})} \end{aligned} \quad (32)$$

для любой функции $f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}, \theta_j < \tau_j, j = 1, \dots, m$.

Рассмотрим случай $\tau_j \leq \theta_j, j = 1, \dots, m$. В силу второго пункта теоремы 4 и условия $r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} & \leq C(\theta, r, m, q) \cdot \sup_{\substack{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m \\ \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n}} 2^{-\sum_{j=1}^m s_j (r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \\ & \leq C(\theta, r, m, q) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})}. \end{aligned} \quad (33)$$

Оценка сверху во втором пункте доказана.

Теперь рассмотрим случай $\tau_j \leq \theta_j$, $j = 1, \dots, l$, и $\theta_j < \tau_j$, $j = l+1, \dots, m$. Согласно третьему пункту теоремы 4 получим

$$\begin{aligned} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* &\leq C(q, \theta, m, r, \tau) \cdot \left\{ \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_5(n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}} \right. \\ &\quad + \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \sup_{\bar{s}_l \in Y_4(n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)} \prod_{j=1}^l 2^{-s_j \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_3(n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}} \left. \right\} \\ &= C(q, \theta, m, r, \tau) \cdot (J_1(n) + J_2(n)), \end{aligned} \quad (34)$$

где $\bar{\varepsilon}_{m-l} = (\varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $\beta'_j = \beta_j / (\beta_j - 1)$, $\beta_j = \tau_j / \theta_j$, $j = l+1, \dots, m$.

Оценим $J_1(n)$. Так как

$$Y_5^{m-l}(\bar{\gamma}, n) = \left\{ \bar{s}_{m-l} = (s_{l+1}, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^{m-l} : \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j \geq n \right\},$$

то, пользуясь леммой 1 при $\gamma_j = (r_j + 1/q_j - 1/p_j) / (r_1 + 1/q_1 - 1/p_1)$, $j = 1, \dots, m$, $l = 0$, $\alpha = r_1 + 1/q_1 - 1/p_1$, получим

$$\begin{aligned} J_1(n) &\leq C(q, \theta, m, r, \tau) \cdot 2^{-nr_1} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\varepsilon_j}} \\ &= C(q, \theta, m, r, \tau) \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}\right)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Теперь оценим $J_2(n)$. Так как по условию теоремы $r_j + 1/q_j - 1/p_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, то, учитывая определение множества $Y_4(n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)$, будем иметь

$$\sup_{\bar{s}_l \in Y_4(n - \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j)} \prod_{j=1}^l 2^{-s_j \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \leq 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot 2^{\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_2(n) &\leq 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \\ &\quad \times \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \cdot 2^{\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) \sum_{j=l+1}^m s_j \gamma_j} \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_3^{m-l}(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}} \\ &= 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \left\{ \sum_{0 \leq s_m < \frac{n}{\gamma_m}} \left[\dots \left[\left[\sum_{0 \leq s_{\nu+1} < \frac{1}{\gamma_{\nu+1}} \left(n - \sum_{j=\nu+2}^m s_j \gamma_j\right) \left[\dots \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[\sum_{0 \leq s_{l+2} < n - \sum_{j=l+3}^m s_j \gamma_j} \left(n - \sum_{j=l+2}^m s_j \gamma_j\right)^{\frac{\varepsilon_{l+2}}{\varepsilon_{l+1}}} \right]^{\frac{\varepsilon_{l+3}}{\varepsilon_{l+2}}} \dots \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \dots \right]^{\frac{\varepsilon_{\nu}}{\varepsilon_{\nu-1}}} \right]^{\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{\varepsilon_{\nu}}} \right]^{\frac{\varepsilon_{\nu+2}}{\varepsilon_{\nu+1}}} \dots \right]^{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\varepsilon_m}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Далее, учитывая неравенство (6), из (36) получаем

$$\begin{aligned} J_2(n) &\leq C(\theta, r, q) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=l+1}^m \frac{1}{\varepsilon_j}} \\ &= C(\theta, r, m, q, \tau) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=l+1}^m (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}. \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь из неравенств (34), (35) и (37) следует, что

$$E_n^{\bar{\gamma}}(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C(q, \theta, m, r) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=l+1}^m (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}$$

для любой функции $f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}$. Этим оценки сверху доказаны.

Докажем оценку снизу. Пусть $\theta_j < \tau_j$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j}} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j + 1 - \frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Положим $\varkappa(n) = \{\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n\}$ и χ_A – характеристическая функция множества A . Так как f_0 непрерывна, то $f_0 \in \dot{L}_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m)$. В силу известного соотношения

$$\left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \asymp \prod_{j=1}^m 2^{s_j(1 - \frac{1}{p_j})}, \quad 1 < p_j < +\infty, \quad (38)$$

и леммы 2 при $l = 0$ имеем

$$\begin{aligned} J_4(n) &= \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \\ &= n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \cdot \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j + 1 - \frac{1}{p_j})} \left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \\ &\leq C(p, \theta) \cdot n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j}} \|\{\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)}\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq C(\tau, q, p, m, r). \end{aligned}$$

Следовательно, $C_0 \cdot f_0 \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}$.

Далее, так как $S_n^{\bar{\gamma}}(f_0, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} \in I^m$, то

$$\|f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* = \|f_0\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*. \quad (39)$$

Теперь выберем числа λ_j так, чтобы $q_j < \lambda_j$, $j = 1, \dots, m$. Тогда по теореме 3, учитывая соотношение (38) и пользуясь леммой 3, при $l = 0$ из (39) получаем

$$\begin{aligned} \|f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* &\geq C(q, \theta, m) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{\bar{\lambda}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ &\geq C(q, \theta, m) \cdot n^{-\sum_{j=2}^m \frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\ &\geq C(r, \theta, q, p, \tau) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=2}^m (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}. \end{aligned} \quad (40)$$

Этим оценка снизу в случае $\theta_j < \tau_j$, $j = 1, \dots, m$, доказана.

Пусть $\tau_j < \theta_j$, $j = 1, \dots, m$, и $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ такой, что $\langle \tilde{s}, \bar{\gamma} \rangle = n$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\bar{x}) = 2^{-\sum_{j=1}^m \tilde{s}_j (r_j + 1 - \frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Тогда $f_1 \in \mathring{L}_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ и в силу соотношения (38) имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f_1)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{r}}} = \prod_{j=1}^m 2^{\tilde{s}_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f_1)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \\ & = \prod_{j=1}^m 2^{\tilde{s}_j r_j} \cdot 2^{-\sum_{j=1}^m \tilde{s}_j (r_j + 1 - \frac{1}{p_j})} \left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \leq C(p, q, \theta, r). \end{aligned}$$

Следовательно, $C_1 \cdot f_1 \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{r}}^{\bar{r}}$. Из определений частичной суммы и функции f_1 , соотношения (38) следует, что

$$\begin{aligned} \|f_1 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_1)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* &= \|f_1\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* = 2^{-\sum_{j=1}^m \tilde{s}_j (r_j + 1 - \frac{1}{p_j})} \left\| \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \\ &\geq C(q, \theta) \cdot \prod_{j=1}^m 2^{\tilde{s}_j (1 - \frac{1}{q_j})} \cdot 2^{-\sum_{j=1}^m \tilde{s}_j (r_j + 1 - \frac{1}{p_j})} \\ &= C(q, \theta) \cdot 2^{-\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) \sum_{j=1}^m \tilde{s}_j \gamma_j} \\ &= C(q, \theta) \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Таким образом, в случае $\tau_j < \theta_j$, $j = 1, \dots, m$, оценка снизу доказана.

Теперь рассмотрим случай $\tau_j \leq \theta_j$, $j = 1, \dots, l$, и $\theta_j < \tau_j$, $j = l+1, \dots, m$. Рассмотрим множество векторов $\bar{s}_0 = (s_1^0, \dots, s_l^0, s_{l+1}, \dots, s_m) \in \mathcal{K}(n)$, у которых координаты s_j^0 , $j = 1, \dots, l$, фиксированы. Положим

$$\mathcal{K}\left(n - \sum_{j=1}^l s_j^0 \gamma_j\right) = \{\bar{s}_{m-l} = (s_{l+1}, \dots, s_m) : \langle \bar{s}_{m-l}, \bar{\gamma}_{m-l} \rangle\},$$

где $\bar{s}_{m-l} = (s_{l+1}, \dots, s_m)$, $\bar{\gamma}_{m-l} = (\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_m)$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f_2(\bar{x}) &= n^{-\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}} \sum_{\bar{s}_{m-l} \in \mathcal{K}\left(n - \sum_{j=1}^l s_j^0 \gamma_j\right)} \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j \left(r_j + 1 - \frac{1}{p_j}\right)} \sum_{\bar{k}_{m-l} \in \rho(\bar{s}_{m-l})} e^{i\langle \bar{x}_{m-l}, \bar{k}_{m-l} \rangle} \\ &\quad \times 2^{-\sum_{j=1}^l s_j^0 \left(r_j + 1 - \frac{1}{p_j}\right)} \sum_{\bar{k}_l \in \rho(\bar{s}_l^0)} e^{i\langle \bar{k}_l, \bar{x}_l \rangle}. \end{aligned}$$

Эта функция непрерывна. Следовательно, $f_2 \in \dot{L}_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m)$. Пользуясь соотношением (38) и леммой 2, получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f_2)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\tau} \\
&= n^{-\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}} 2^{-\sum_{j=1}^l s_j^0 (1 - \frac{1}{p_j})} \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j (1 - \frac{1}{p_j})} \right. \right. \\
&\quad \times \left\| \sum_{\bar{k}_{m-l} \in \rho(\bar{s}_{m-l})} e^{i\langle \bar{x}_{m-l}, \bar{k}_{m-l} \rangle} \cdot \sum_{\bar{k}_l \in \rho(\bar{s}_l^0)} e^{i\langle \bar{k}_l, \bar{x}_l \rangle} \right\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \left. \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in \mathcal{K}(n - \sum_{j=1}^l s_j^0 \gamma_j)} \right\|_{l_{\tau_{m-l}}} \\
&\leq C(p, \theta) \cdot n^{-\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \chi_{\mathcal{K}(n - \sum_{j=1}^l s_j^0 \gamma_j)}(\bar{s}_{m-l}) \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in \mathcal{K}(n - \sum_{j=1}^l \tilde{s}_j \gamma_j)} \right\|_{l_{\tau_{m-l}}} \\
&\leq C(p, q, \theta, m, \tau) \cdot n^{-\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}} = C(p, q, \theta, m, \tau).
\end{aligned}$$

Следовательно, $C_2 \cdot f_2 \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^r$. Так как $\langle \bar{s}_0, \bar{\gamma} \rangle = n$, то $S_n^{\bar{\gamma}}(f_2, \bar{x}) = 0$. Поэтому, выбирая числа $\lambda_j \in (q_j, \infty)$, $j = 1, \dots, m$, и пользуясь теоремой 3, леммой 3, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \|f_2 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_2)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* = \|f_2\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \\
&\geq C(p, q, \theta, m, r) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j (\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\tau_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f_2)\|_{\bar{\lambda}, \bar{\theta}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \\
&= C(p, q, \theta, m, r) \cdot n^{-\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}} 2^{\sum_{j=1}^l s_j^0 (r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \\
&\quad \times \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^m 2^{-s_j (r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in \mathcal{K}(n - \sum_{j=1}^l s_j^0 \gamma_j)} \right\|_{l_{\bar{\theta}_{m-l}}} \\
&\geq C(p, q, \theta, m, r) \cdot n^{-\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\tau_j}} 2^{-\sum_{j=1}^l s_j^0 (r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \\
&\quad \times n^{\sum_{j=l+2}^m \frac{1}{\theta_j}} 2^{-\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right) \cdot (n - \sum_{j=1}^l s_j^0 \gamma_j)} \\
&= C(p, q, \theta, m, \tau) \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}\right)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f_2 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_2)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \geq C(p, q, \theta, m, r) \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}\right)} \quad (42)$$

для $\tau_j \leq \theta_j$, $j = 1, \dots, l$, и $\theta_j < \tau_j$, $j = l+1, \dots, m$. Так как оператор частичной суммы $S_n^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x})$ ограничен в пространстве $L_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ [2], то

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}^* \leq C(q, m, \theta) \cdot E_n^{\bar{\gamma}}(f)_{\bar{q}, \bar{\theta}}.$$

Поэтому из неравенств (40)–(42) следуют оценки снизу в теореме 5. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = 1, \dots, m$, $r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $1/p_1 - 1/q_1 = \dots = 1/p_\nu - 1/q_\nu$ теорема 4 ранее была доказана в [23], [24].

Список литературы

- [1] A. P. Blozinski, "Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263** (1981), 149–167.
- [2] Е. Д. Нурсултанов, "О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:1 (2000), 95–122.
- [3] К. И. Бабенко, "О приближений одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами", *Докл. АН СССР*, **132**:5 (1960), 982–985.
- [4] В. М. Тихомиров, "Теория приближений", *Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления*, **14**, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [5] С. А. Теляковский, "Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами", *Матем. сб.*, **63**(105):3 (1964), 426–444.
- [6] Б. С. Митягин, "Приближение функций в пространствах L^p и C на торе", *Матем. сб.*, **58**(100):4 (1962), 397–414.
- [7] Я. С. Бугров, "Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной", *Матем. сб.*, **64**(106):3 (1964), 410–418.
- [8] Н. С. Никольская, "Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p ", *Сиб. матем. заметки*, **15**:2 (1974), 395–412.
- [9] Э. М. Галеев, "Линейные поперечники классов Гельдера–Никольского периодических функций многих переменных", *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 189–199.
- [10] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН, **178**, Наука, М., 1986.
- [11] Динь Зунг, "Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами", *Матем. сб.*, **131**(173):2 (1986), 251–271.
- [12] Н. Н. Пустовойтов Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности, *Anal. Math.*, **20**:1 (1994), 35–48.
- [13] Э. С. Белинский, "Приближение периодических функций "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники", *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, Изд-во ЯрГУ, Ярославль, 1984, 10–24.
- [14] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, "Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных", *Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа*, Изд-во АФЦ, М., 1999, 69–99.
- [15] А. С. Романюк, "Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q ", *Укр. матем. журн.*, **43**:10 (1991), 1398–1408.
- [16] А. С. Романюк, "Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных", *Укр. матем. журн.*, **49**:9 (1997), 1250–1261.
- [17] М. Сихов, "Приближение функций многих переменных с заданной мажорантой в пространстве Бесова", *Матем. журн.*, **2**:4 (2002), 95–100;
[http://www.math.kz/Mj%202002\(4\)/Sikhov.ps](http://www.math.kz/Mj%202002(4)/Sikhov.ps).
- [18] Н. Johansson, *Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces*, Report № 6, University of Umea, Umea, Sweden, 1975.
- [19] М. К. Потапов, "Об одной теореме вложения", *Математика. Сб. пер.*, **14**:1 (1972), 123–146.

- [20] Г. А. Акишев, “Неравенства разных метрик для полиномов в пространстве Лоренца со смешанной нормой”, *Материалы международной конференции “Первые Ержановские чтения”*, Изд-во Павлодар. ун-та, Павлодар, 2004, 211–215.
- [21] Л. А. Шерстнева, *О вложении некоторых классов измеримых функций из пространств Лоренца*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1986.
- [22] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, Физматлит, М., 1977.
- [23] Г. Акишев, “О порядках приближения классов Бесова тригонометрическими полиномами”, *Вестн. КарГУ. Сер. матем.*, 2004, № 3, 9–16.
- [24] Г. Акишев, “О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой”, *Международная научно-практическая конференция “Теория функций, функционального анализа и их приложения”*, посвященная 80-летию чл.-корр. АН КазССР Т. И. Аманова, Изд-во Национального ядерного центра Республики Казахстан, Семипалатинск, 2003, 21–24.

Г. А. Акишев (G. A. Akishev)

Карагандинский государственный университет

им. Е. А. Букетова, Казахстан

E-mail: smagul@ok.kz

Поступила в редакцию

09.08.2005