Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Орлов, Триангулированные категории особенностей и эквивалентности между моделями Ландау–Гинзбурга, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 12, 117–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:25:49

УДК 512.73

Д. О. Орлов

Триангулированные категории особенностей и эквивалентности между моделями Ландау–Гинзбурга

В статье доказывается существование некоторого типа эквивалентностей между триангулированными категориями особенностей для многообразий разных размерностей. Этот класс эквивалентностей обобщает так называемую периодичность Кноррера. В качестве следствия получается эквивалентность между категориями D-бран типа В в моделях Ландау–Гинзбурга разных размерностей.

Библиография: 22 названия.

Введение

Ограниченная категория когерентных пучков $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ – это триангулированная категория, которую естественно сопоставить алгебраическому многообразию X . В данной категории имеется триангулированная подкатегория $\mathfrak{P}\mathrm{erf}(X)$, состоящая из совершенных комплексов. Понятие совершенного комплекса было введено в [1]. По определению совершенным называется комплекс пучков $\mathcal{O}_X$ -модулей, который локально квазиизоморфен ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного типа (см. [2]).

В случае, когда многообразие X гладкое, всякий когерентный пучок обладает резольвентой из локально свободных пучков конечного типа и, следовательно, подкатегория совершенных комплексов совпадает с $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Для особых многообразий данное свойство не выполняется, и мы можем определить триангулированную категорию особенностей $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ по полной триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{P}\mathrm{erf}(X)$ [3]. Категория $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ отражает свойства особенностей X и “не зависит от всего X ”. В частности, она инвариантна относительно локализации в топологии Зариского (см. [3] и предложение 1.3 ниже).

Интерес к категориям данного типа связан не только с изучением особенностей, но во многом вызван гипотезой о гомологической зеркальной симметрии (ГГЗС) [4].

Эта гипотеза относится к многообразиям Калаби–Яу, оснащенным симплектической формой. В ней утверждается, что если два многообразия Калаби–Яу X и Y зеркально симметричны друг другу, то категория D-бран типа В на X эквивалентна категории D-бран типа А на Y , и наоборот. С математической точки зрения категория D-бран типа В – это производная категория когерентных пучков на данном многообразии [4], [5]. В качестве кандидата категории

Работа выполнена при поддержке фонда Вейля, Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01034), гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (грант № МД-2731.2004.1), Американского фонда гражданских исследований CRDF RUM1-2661-MO-05 и Фонда содействия отечественной науке.

А-бран на многообразии Калаби–Яу предлагается так называемая категория Фукаи. Ее объекты – это, грубо говоря, лагранжевы подмногообразия с плоскими расслоениями [4].

С другой стороны, физики также рассматривают зеркальную симметрию для многообразий других типов, например для многообразий Фано. В этом случае зеркально симметричными являются так называемые модели Ландау–Гинзбурга [6]. Общее определение модели Ландау–Гинзбурга включает кроме задания многообразия еще выбор голоморфной функции W на нем, которая называется суперпотенциалом.

Для многообразий Фано существуют как производная категория когерентных пучков (В-браны) так и, при наличии симплектической формы, категория Фукая (А-браны). Таким образом, если мы хотим распространить гипотезу о гомологической зеркальной симметрии на случай, когда многообразие не является многообразием Калаби–Яу, мы должны понять D-браны в моделях Ландау–Гинзбурга.

Категории А-бран в моделях Ландау–Гинзбурга изучались в [7] и [8] с математической точки зрения. Зеркальная симметрия связывает В-браны на многообразиях Фано (когерентные пучки) с А-бранами в ЛГ-моделях. Можно также рассмотреть категорию Фукая (А-браны) на многообразии Фано. Ожидается, что она эквивалентна категории В-бран в зеркально симметричной модели Ландау–Гинзбурга.

Математическое определение категории В-бран в моделях Ландау–Гинзбурга было предложено М. Концевичем. Коротко, оно состоит в том, что суперпотенциал W деформирует комплексы когерентных пучков в “скрученные” комплексы, в которых композиция дифференциалов больше не равна нулю, а есть умножение на W . В статье [3] была установлена связь между категориями В-бран в моделях Ландау–Гинзбурга и триангулированными категориями особенностей. Было показано, что произведение триангулированных категорий особенностей особых слоев суперпотенциала W эквивалентно категории В-бран. В частности, отсюда следует, что категория В-бран зависит только от особых слоев суперпотенциала.

В настоящей статье устанавливается эквивалентность между моделями Ландау–Гинзбурга разных размерностей. Более точно, доказывается эквивалентность между триангулированными категориями особенностей двух схем, первая из которых – подсхема нулей некоторого регулярного сечения $s \in H^0(S, \mathcal{E})$ для векторного расслоения $\mathcal{E}$ на гладкой схеме S , а другая – соответствующий дивизор в проективном расслоении $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ (теорема 2.1). Из этого результата следует эквивалентность категорий D-бран типа В для различных моделей Ландау–Гинзбурга. В частности, получается следующее. Пусть $W: Y \rightarrow \mathbb{A}^1$ – суперпотенциал на многообразии $Y = S \times \mathbb{A}^1$ вида $W = f + xg$, где f и g – две функции на гладком многообразии S и x – координата на $\mathbb{A}^1$. В данной ситуации можно редуцировать размерность и заменить модель Ландау–Гинзбурга на Y на модель Ландау–Гинзбурга на $X \subset S$, где X – дивизор нулей функции g с ограничением f в качестве суперпотенциала. Доказывается, что категория В-бран для модели Ландау–Гинзбурга на Y эквивалентна категории В-бран в модели Ландау–Гинзбурга на X (следствие 3.2). Ожидается естественно, что для таких ЛГ-моделей категории D-бран типа А также будут эквивалентны.

Автор благодарен А. Капустину и Л. Кацаркову за полезные обсуждения. В. Лунц прочитал предварительный вариант настоящей статьи и сделал ряд ценных замечаний. Хочется также поблагодарить А. Кузнецова, указавшего на существование полуортогонального разложения из предложения 2.10. Автор признателен Институту высших исследований (г. Принстон), во время пребывания в котором статья была написана, за гостеприимство и стимулирующую атмосферу.

§ 1. Триангулированные категории особенностей

Напомним, что триангулированная категория $\mathcal{D}$ – это аддитивная категория с дополнительными данными:

- а) аддитивная автоэквивалентность $[1]: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ (она называется функтор сдвига);
- б) класс точных (или выделенных) треугольников:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

которые должны удовлетворять определенному набору аксиом (см. [9]–[13]).

Функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ между двумя триангулированными категориями называется *точным*, если он коммутирует с функторами сдвига и переводит точные треугольники в точные.

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ – полная триангулированная подкатегория, т.е. полная подкатегория, замкнутая относительно функтора сдвига и триангулированная точными треугольниками в $\mathcal{D}$. Обозначим через $\Sigma(\mathcal{N})$ класс таких морфизмов s из $\mathcal{D}$, которые включаются в точный треугольник

$$X \xrightarrow{s} Y \longrightarrow N \longrightarrow X[1],$$

где $N \in \mathcal{N}$. Можно проверить, что $\Sigma(\mathcal{N})$ является мультипликативной системой. Определим факторкатегорию $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ как локализацию $\mathcal{D}[\Sigma(\mathcal{N})^{-1}]$ [14], [10], [9]. Категория $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ становится триангулированной категорией, если в качестве функтора сдвига рассмотреть функтор, индуцированный функтором сдвига в $\mathcal{D}$, и в качестве точных треугольников взять образы точных треугольников из $\mathcal{D}$. Канонический функтор $Q: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}$ аннулирует $\mathcal{N}$. Более того, любой точный функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ между триангулированными категориями такой, что $F(X) \simeq 0$ для всех $X \in \mathcal{N}$, единственным образом пропускается через Q .

Следующая лемма, которая нам понадобится впоследствии, очевидна.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ – полные триангулированные подкатегории в триангулированных категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ соответственно. Пусть $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ и $G: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ – пара точных сопряженных друг другу функторов таких, что $F(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}'$ и $G(\mathcal{N}') \subset \mathcal{N}$. Тогда они индуцируют функторы

$$\bar{F}: \mathcal{D}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{D}'/\mathcal{N}', \quad \bar{G}: \mathcal{D}'/\mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N},$$

которые также сопряжены. Более того, если функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ является вполне строгим, то функтор $\bar{F}: \mathcal{D}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{D}'/\mathcal{N}'$ также является вполне строгим.

Нас в основном будут интересовать такие триангулированные категории и их факторы по триангулированным подкатегориям, которые имеют алгебро-геометрическую природу.

Пусть X – схема над полем k . Скажем, что X удовлетворяет условию (ELF), если X – отделимая нётерова конечной Круль-размерности и имеет достаточно много локально свободных пучков, т.е. всякий когерентный пучок $\mathcal{F}$ является эпиморфным образом $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ локально свободного пучка $\mathcal{E}$.

К примеру, любая квазипроективная схема удовлетворяет данному условию.

Обозначим через $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ (соответственно $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$) ограниченную производную категорию когерентных (соответственно квазикогерентных) пучков на X . Так как X нётерова, естественный функтор

$$\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$$

является вполне строгим и осуществляет эквивалентность $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ с полной подкатегорией $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))_{\mathrm{coh}} \subset \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$, состоящей из комплексов с когерентными когомологиями (см. [1; гл. II, 2.2.2]).

Объекты категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$, которые изоморфны ограниченному комплексу из локально свободных пучков на X , образуют полную триангулированную подкатегорию. Она называется подкатегорией совершенных комплексов и обозначается $\mathfrak{P}\mathrm{erf}(X)$.¹

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Определим триангулированную категорию $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ по полной триангулированной категории $\mathfrak{P}\mathrm{erf}(X)$ и назовем ее *триангулированной категорией особенностей* X .

Хорошо известно, что если схема X является регулярной, то подкатегория совершенных комплексов совпадает со всей ограниченной категорией когерентных пучков. В этом случае триангулированная категория особенностей тривиальна.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – морфизм конечной Тог-размерности (к примеру, плоский морфизм или регулярное замкнутое вложение). Он задает функтор обратного образа $\mathbf{L}f^*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Очевидно, что функтор $\mathbf{L}f^*$ переводит совершенные комплексы на Y в совершенные комплексы на X . Следовательно, функтор $\mathbf{L}f^*$ индуцирует точный функтор $\mathbf{L}\bar{f}^*: \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$.

Предположим дополнительно, что морфизм $f: X \rightarrow Y$ собственный и локально конечного типа. Тогда функтор прямого образа $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ переводит совершенные комплексы на X в совершенные комплексы на Y (см. [1; III] или [2]). Таким образом, он задает функтор $\mathbf{R}\bar{f}_*: \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$, который сопряжен справа к $\mathbf{L}\bar{f}^*$.

Фундаментальным свойством триангулированных категорий особенностей является свойство локальности.

¹На самом деле, совершенный комплекс определяется как комплекс $\mathcal{O}_X$ -модулей, локально квазиизоморфный ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного типа. Однако при наших предположениях на схему любой такой комплекс квазиизоморфен ограниченному комплексу из локально свободных пучков конечного типа (см. [1; II] или [2; § 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (см. [3]). Пусть схема X удовлетворяет условию (ELF), и пусть $j: U \hookrightarrow X$ – открытое вложение такое, что $\text{Sing}(X) \subset U$. Тогда функтор $\bar{j}^*: \mathbf{D}_{\text{Sg}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{Sg}}(U)$ является эквивалентностью триангулированных категорий.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Понятие триангулированной категории особенностей может быть распространено на орбифолды и, более того, на стэки. Рассмотрим схематично пример факторстэка. Пусть G – аффинная групповая схема конечного типа, действующая на схеме S , которая удовлетворяет условию (ELF). Рассмотрим факторстэк $[S/G]$. Категория когерентных пучков на этом стэке $\text{coh}([S/G])$ совпадает с категорией $\text{coh}^G(S)$ G -эквивариантных когерентных пучков на S . Фактор ограниченной производной категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(\text{coh}([S/G]))$ по триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{P}erf([S/G])$, состоящей из ограниченных комплексов локально свободных пучков из $\mathbf{D}^b(\text{coh}([S/G])) \cong \mathbf{D}^b(\text{coh}^G(S))$, может быть назван триангулированной категорией особенностей факторстэка $[S/G]$. (Дополнительную информацию о том, когда факторстэк имеет достаточно много локально свободных пучков, можно найти в статьях [15], [16].)

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Можно также рассмотреть и некоммутативный случай. Пусть A – алгебра нётерова справа. Обозначим через $\text{mod-}A$ и $\text{Mod-}A$ абелевы категории конечно порожденных правых модулей и всех правых модулей соответственно. Рассмотрим ограниченные производные категории $\mathbf{D}^b(\text{mod-}A)$ и $\mathbf{D}^b(\text{Mod-}A)$. Они имеют триангулированные подкатегории, состоящие из объектов, изоморфных ограниченному комплексу из проективных модулей. Эти подкатегории можно рассматривать как производные от точных подкатегорий проективных модулей $\mathbf{D}^b(\text{proj-}A)$ и $\mathbf{D}^b(\text{Proj-}A)$ соответственно (см., например, [12]). Теперь можно определить триангулированные категории особенностей $\mathbf{D}_{\text{Sg}}(A)$ и $\mathbf{D}'_{\text{Sg}}(A)$ как факторы

$$\mathbf{D}^b(\text{mod-}A)/\mathbf{D}^b(\text{proj-}A) \quad \text{и} \quad \mathbf{D}^b(\text{Mod-}A)/\mathbf{D}^b(\text{Proj-}A).$$

Как и в коммутативном случае, если A имеет конечную гомологическую размерность, факторкатегории тривиальны.

Существует способ обобщения определения 1.2 на любую триангулированную категорию. Пусть $\mathcal{D}$ – триангулированная категория.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Скажем, что объект $A \in \mathcal{D}$ является *гомологически ограниченным*, если для всякого объекта $B \in \mathcal{D}$ все $\text{Hom}(A, B[i])$, за исключением конечного числа $i \in \mathbb{Z}$, являются тривиальными. Такие объекты образуют триангулированную подкатегорию, которую будем обозначать $\mathcal{D}_{\text{hf}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Определим триангулированную категорию $\mathcal{D}_{\text{Sg}}$ как фактор $\mathcal{D}/\mathcal{D}_{\text{hf}}$ триангулированной категории $\mathcal{D}$ по полной триангулированной подкатегории $\mathcal{D}_{\text{hf}}$.

Категории $\mathcal{D}_{\text{hf}}$ и $\mathcal{D}_{\text{Sg}}$ обладают правильным поведением относительно полуортогонального разложения $\mathcal{D}$. Напомним некоторые факты и определения, связанные с допустимыми подкатегориями и полуортогональными разложениями (см. [17], [18]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть $I: \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{D}$ – вложение полной триангулированной подкатегории $\mathcal{N}$ в триангулированную категорию $\mathcal{D}$. Назовем $\mathcal{N}$ *допустимой справа* (соответственно *допустимой слева*), если существует правый (соответственно левый) сопряженный функтор $P: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{N}$. Подкатегория $\mathcal{N}$ будет называться *допустимой*, если она допустима и справа, и слева.

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ – полная триангулированная подкатегория. *Правый ортогонал* к $\mathcal{N}$ – это полная подкатегория $\mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{D}$, состоящая из таких объектов M , что $\text{Hom}(N, M) = 0$ для всех $N \in \mathcal{N}$. *Левый ортогонал* ${}^\perp \mathcal{N}$ определяется аналогично. Ортогоналы также являются триангулированными подкатегориями.

Свойство быть допустимой справа для подкатегории $\mathcal{N}$ эквивалентно следующему свойству: для каждого $X \in \mathcal{D}$ существует точный треугольник $N \rightarrow X \rightarrow M$, в котором $N \in \mathcal{N}$ и $M \in \mathcal{N}^\perp$.

Если $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ – допустимая подкатегория, то будем говорить, что категория $\mathcal{D}$ имеет полуортогональное разложение вида $\langle \mathcal{N}^\perp, \mathcal{N} \rangle$ и $\langle \mathcal{N}, {}^\perp \mathcal{N} \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Последовательность допустимых подкатегорий $(\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$ в триангулированной категории $\mathcal{D}$ называется *полуортогональной*, если выполнены условия $\mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}_i^\perp$ для всех $1 \leq j < i \leq n$. Кроме того, полуортогональная последовательность называется *полной*, если она порождает категорию $\mathcal{D}$. В этом случае будем говорить, что категория $\mathcal{D}$ обладает *полуортогональным разложением*, и будем писать

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n \rangle.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Предположим, что триангулированная категория $\mathcal{D}$ имеет полуортогональное разложение $\mathcal{D} = \langle \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n \rangle$. Тогда категории $\mathcal{D}_{\text{hf}}$ и $\mathcal{D}_{\text{Sg}}$ также имеют полуортогональные разложения вида

$$\mathcal{D}_{\text{hf}} = \langle (\mathcal{N}_1)_{\text{hf}}, \dots, (\mathcal{N}_n)_{\text{hf}} \rangle, \quad \mathcal{D}_{\text{Sg}} = \langle (\mathcal{N}_1)_{\text{Sg}}, \dots, (\mathcal{N}_n)_{\text{Sg}} \rangle. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что если функтор $u: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ имеет правый сопряженный $v: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$, то $u(\mathcal{D}_{\text{hf}}) \subset \mathcal{D}'_{\text{hf}}$ по причине изоморфизма

$$\text{Hom}(uA, B[j]) \cong \text{Hom}(A, vB[j])$$

для всех $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}'$. Более того, если u есть полное вложение, то $u(\mathcal{D}_{\text{hf}}) = \mathcal{D}'_{\text{hf}} \cap u(\mathcal{D})$.

Во-вторых, можно предполагать, что $n = 2$. Так как $\mathcal{N}_k$ допустима, функтор вложения $i_k: \mathcal{N}_k \rightarrow \mathcal{D}$ имеет сопряженный справа p_k . Следовательно, i_k переводит гомологически конечные объекты в гомологически конечные. Теперь возьмем $X \in \mathcal{D}_{\text{hf}}$ и рассмотрим разложение

$$i_1 p_1(X) \rightarrow X \rightarrow i_2 q_2(X),$$

где $q_2: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{N}_2$ – левый сопряженный к i_2 . Как было показано выше, $q_2(X) \in (\mathcal{N}_2)_{\text{hf}}$. Следовательно, $i_2 q_2(X) \in \mathcal{D}_{\text{hf}}$. Отсюда получаем, что $i_1 p_1(X) \in \mathcal{D}_{\text{hf}}$ и, значит, $p_1(X) \in (\mathcal{N}_1)_{\text{hf}}$. Это дает полуортогональное разложение для $\mathcal{D}_{\text{hf}}$ вида (1). Наконец, применяя лемму 1.1, получаем полуортогональное разложение для $\mathcal{D}_{\text{Sg}}$ в виде $\mathcal{D}_{\text{Sg}} = \langle (\mathcal{N}_1)_{\text{Sg}}, \dots, (\mathcal{N}_n)_{\text{Sg}} \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. Пусть X удовлетворяет условию (ELF). Тогда подкатегория $\mathcal{D}_{\text{hf}}$ гомологически конечных объектов в $\mathcal{D} \cong \mathbf{D}^b(\text{coh}(X))$ совпадает с подкатегорией $\mathfrak{P}\text{erf}(X)$ и, следовательно, $\mathcal{D}_{\text{Sg}} \cong \mathbf{D}_{\text{Sg}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если объект $A \in \mathcal{D}$ является совершенным комплексом, то он квазиизоморфен ограниченному комплексу векторных расслоений. Так как когомологии когерентного пучка ограничены размерностью схемы X , то для всякого векторного расслоения $\mathcal{P}$ и любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ имеет место равенство $\text{Ext}^i(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = 0$, когда i больше размерности X . Следовательно, A принадлежит подкатегории $\mathcal{D}_{\text{hf}}$.

Теперь предположим, что $A \in \mathcal{D}_{\text{hf}}$. Объект A есть ограниченный комплекс когерентных пучков. Возьмем некоторую локально свободную ограниченную справа резольвенту $P^\bullet \xrightarrow{\sim} A$ и рассмотрим каноническое обрезание $\tau^{\geq -k} P^\bullet$ для достаточно большого $k \gg 0$, которое, очевидно, изоморфно A в $\mathcal{D}$.

Так как $A \in \mathcal{D}_{\text{hf}}$, то для любой замкнутой точки $t: x \hookrightarrow X$ при $|i| \gg 0$ группы $\text{Hom}(A, t_* \mathcal{O}_x[i])$ тривиальны. Это значит, что для достаточно большого $k \gg 0$ обрезание $\tau^{\geq -k} P^\bullet$ является комплексом пучков, локально свободных в точке x и, следовательно, в некоторой окрестности x . Так как схема X является квазикompактной, то найдется общее достаточно большое k такое, что обрезание $\tau^{\geq -k} P^\bullet$ есть комплекс из локально свободных пучков на всем X , т.е. A совершенный.

СЛЕДСТВИЕ 1.12. Пусть схема X удовлетворяет условию (ELF). Предположим, что ограниченная производная категория когерентных пучков на X обладает полуортогональным разложением $\mathbf{D}^b(\text{coh}(X)) = \langle \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n \rangle$. Тогда триангулированная категория особенностей $\mathbf{D}_{\text{Sg}}(X)$ также имеет полуортогональное разложение вида

$$\mathbf{D}_{\text{Sg}}(X) = \langle (\mathcal{D}_1)_{\text{Sg}}, \dots, (\mathcal{D}_n)_{\text{Sg}} \rangle.$$

ПРИМЕР 1.13. Пусть X есть расслоение на проективные пространства $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – векторное расслоение ранга r на схеме Y . Можно показать, что ограниченная производная категория $\mathbf{D}^b(\text{coh}(X))$ имеет для всякого $i \in \mathbb{Z}$ полуортогональное разложение вида

$$\mathbf{D}^b(\text{coh}(X)) = \langle p^* \mathbf{D}^b(\text{coh}(Y)) \otimes \mathcal{O}(i), \dots, p^* \mathbf{D}^b(\text{coh}(Y)) \otimes \mathcal{O}(i + r - 1) \rangle,$$

где $p: X \rightarrow Y$ – проекция. Данное утверждение для гладкой базы можно найти в [19], но доказательство работает для любой базы. По следствию 1.12 подкатегория совершенных комплексов $\mathfrak{P}\text{erf}(X)$ также имеет полуортогональное разложение вида

$$\mathfrak{P}\text{erf}(X) \cong \langle p^* \mathfrak{P}\text{erf}(Y) \otimes \mathcal{O}(i), \dots, p^* \mathfrak{P}\text{erf}(Y) \otimes \mathcal{O}(i + r - 1) \rangle.$$

И наконец, мы получаем полуортогональное разложение для триангулированной категории особенностей X через триангулированную категорию особенностей Y .

Триангулированная категория особенностей X имеет дополнительные хорошие свойства в случае, когда схема горенштейнова. Напомним, что нётерово

локальное кольцо A называется горенштейновым, если A как модуль над собой имеет конечную инъективную размерность. Можно показать, что если A горенштейново, то A является дуализирующим комплексом для себя (см. [20]). Это означает, что A имеет конечную инъективную размерность и естественное отображение

$$M \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}^*(\mathbf{R}\mathrm{Hom}^*(M, A), A)$$

является изоморфизмом для всякого конечно порожденного A -модуля M и, следовательно, для всякого объекта из $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\mathrm{Spec}(A)))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Схема X называется горенштейновой, если все ее локальные кольца являются горенштейновыми.

Если схема X горенштейнова и имеет конечную размерность, то пучок $\mathcal{O}_X$ является дуализирующим комплексом для X , т.е. он имеет конечную инъективную размерность как квазикогерентный пучок и естественное отображение

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}^*(\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}^*(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$$

является изоморфизмом для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$. В частности, отсюда следует, что существует целое n_0 такое, что $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для каждого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ и для всех $i > n_0$.

Следующие утверждения и их доказательства могут быть найдены в [3].

ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Пусть схема X удовлетворяет условию (ELF) и является горенштейновой. Будем говорить, что когерентный пучок $\mathcal{F}$ есть пучок Коэн–Маколея, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) пучки $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ тривиальны для всех $i > 0$;
- 2) существует правая локально свободная резольвента

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \{Q^0 \rightarrow Q^1 \rightarrow Q^3 \rightarrow \dots\}.$$

ЛЕММА 1.16. Пусть X удовлетворяет условию (ELF) и является горенштейновой. Пусть $\mathcal{F}$ – пучок Коэн–Маколея, который является совершенным как комплекс. Тогда $\mathcal{F}$ локально свободен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.17. Пусть X удовлетворяет условию (ELF) и является горенштейновой. Тогда всякий объект $A \in \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ изоморфен образу некоторого пучка Коэн–Маколея.

§ 2. Редукция размерности

Пусть S – нётерова отделимая регулярная схема конечной размерности Крулля, и пусть $\mathcal{E}$ – векторное расслоение ранга r на S , а $s \in H^0(S, \mathcal{E})$ – некоторое сечение. Обозначим через $X \subset S$ подсхему нулей s . Будем предполагать, что сечение s является регулярным, т.е. коразмерность подсхемы X равна рангу r .²

²По определению регулярность означает, что комплекс Кошуля, построенный по сечению s , является точным. Но так как схема S является регулярной, то данное условие эквивалентно тому, что коразмерность подсхемы нулей равна рангу r .

В частности, ограничение расслоения $\mathcal{E}$ на X совпадает с нормальным расслоением X в S , которое будем обозначать через $\mathcal{N}_{X/S}$.

Рассмотрим проективизации векторных расслоений $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ и $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{X/S}^\vee)$, где $\mathcal{E}^\vee$ и $\mathcal{N}_{X/S}^\vee$ – двойственные векторные расслоения. Обозначим эти схемы через S' и Z соответственно, а проекции на S и X – через q и p соответственно. На S' и Z имеются канонические линейные расслоения $\mathcal{O}_{S'}(1)$ и $\mathcal{O}_Z(1)$ соответственно вместе с каноническими проекциями

$$q^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{S'}(1), \quad p^*\mathcal{N}_{X/S} \rightarrow \mathcal{O}_Z(1). \quad (2)$$

Сечение s индуцирует сечение $w \in H^0(S', \mathcal{O}_{S'}(1))$. Обозначим через Y дивизор нулей w на S' . Естественное замкнутое вложение $Z = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{X/Y}^\vee)$ в S' пропускается через Y . Рассмотрим замкнутое вложение $i: Z \hookrightarrow Y$. Ядро второго отображения из (2) совпадает с нормальным расслоением $N_{Z/Y}$, т.е. имеется точная последовательность пучков на Z

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{Z/Y} \rightarrow p^*\mathcal{N}_{X/S} \rightarrow \mathcal{O}_Z(1) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Все схемы, определенные выше, включаются в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} Z = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{X/S}^\vee) & \xhookrightarrow{i} & Y & \xhookrightarrow{u} & S' = \mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee) \\ p \downarrow & & \searrow \pi & & \downarrow q \\ X & \xhookrightarrow{j} & & & S \end{array} \quad (4)$$

Рассмотрим функтор $\mathbf{R}i_*p^*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ и обозначим его через Φ_Z . Цель этого параграфа – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X, Y и Z – схемы, определенные выше. Тогда функтор $\Phi_Z: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$, заданный по формуле $\Phi_Z(\cdot) = \mathbf{R}i_*p^*(\cdot)$, индуцирует функтор

$$\overline{\Phi}_Z: \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y),$$

который является эквивалентностью триангулированных категорий.

Мы дадим два доказательства этой теоремы. Оба используют следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Функтор $\Phi_Z = \mathbf{R}i_*p^*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ вполне строгий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что функтор $\Phi_Z = \mathbf{R}i_*p^*$ имеет сопряженный справа функтор, который обозначим через Φ_{Z*} . Он представляется в виде композиции $\mathbf{R}p_*i^b$, где i^b – сопряженный справа к $\mathbf{R}i_*$. Функтор i^b совпадает с $\mathbf{L}i^*(\cdot \otimes \omega_{Z/Y})[-r+1]$, где $\omega_{Z/Y} \cong \Lambda^{r-1}\mathcal{N}_{Z/Y}$ (см., к примеру, [20; гл. III, следствие 7.3]).

Во-вторых, нетрудно видеть, что функтор $p^*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Z))$ вполне строгий, так как $\mathbf{R}p_*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_X$, и по формуле проекции получаем изоморфизмы

$$\mathbf{R}p_*p^*(A) \cong A \otimes \mathbf{R}p_*\mathcal{O}_Z \cong A \otimes \mathcal{O}_X \cong A$$

для любого $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$.

Теперь рассмотрим каноническое преобразование функторов $\mathrm{id} \rightarrow \Phi_Z^* \Phi_Z$. Для того чтобы доказать предложение, нужно показать, что данное преобразование является изоморфизмом. Таким образом, надо проверить, что для всякого объекта $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ конус C_A из точного треугольника

$$A \rightarrow \Phi_Z^* \Phi_Z A \rightarrow C_A \quad (5)$$

является нулевым объектом. Все такие объекты A , для которых $C_A = 0$, образуют триангулированную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Так как минимальная триангулированная подкатегория, содержащая все пучки, совпадает со всей $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$, достаточно показать, что $C_A = 0$, когда $A = \mathcal{G}$ есть пучок.

Пусть $A = \mathcal{G}$ – пучок. Так как функтор p^* вполне строгий, треугольник (5) есть образ относительно функтора $\mathbf{R}p_*$ треугольника

$$p^* \mathcal{G} \rightarrow i^b \mathbf{R}i_* p^* \mathcal{G} \rightarrow B_{\mathcal{G}}, \quad (6)$$

в котором первый морфизм – это каноническое отображение, индуцированное естественным преобразованием $\mathrm{id} \rightarrow i^b \mathbf{R}i_*$. Имеется следующая последовательность изоморфизмов:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}i_* i^b \mathbf{R}i_* p^* \mathcal{G} &\cong \mathbf{R}i_*(\mathbf{L}i^* \mathbf{R}i_* p^* \mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y})[-r+1] \\ &\cong \mathbf{R}i_*(p^* \mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z[-r+1] \\ &\cong \mathbf{R}i_*(p^* \mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y}) \stackrel{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_Z} (\mathcal{O}_Z \stackrel{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z)[-r+1]. \end{aligned} \quad (7)$$

Известно (см. [1; гл. VII, 2.5]), что $\mathcal{T}or_k^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \cong \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee$.

Таким образом, объект $\mathbf{R}i_* i^b \mathbf{R}i_* p^* \mathcal{G}$ есть комплекс, $(r-k-1)$ -я когомология которого изоморфна $i_*(p^* \mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y} \otimes \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee)$. Следовательно, объект $i^b \mathbf{R}i_* p^* \mathcal{G}$ – это комплекс на Z , k -я когомология которого есть $p^* \mathcal{G} \otimes \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}$ при $k = 0, \dots, r-1$. Отсюда получаем, что объект $B_{\mathcal{G}}$ имеет нетривиальные когомологии только при $k = 1, \dots, r-1$ и $H^k(B_{\mathcal{G}})$ изоморфны $p^* \mathcal{G} \otimes \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}$.

Теперь заметим, что применение функтора $\mathbf{R}p_*$ к точной последовательности (3) дает $\mathbf{R}p_* \mathcal{N}_{Z/Y} \cong 0$. Более того, легко проверить, что

$$\mathbf{R}p_* \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y} \cong 0 \quad \text{для всех } k > 0. \quad (8)$$

(Это относительный аналог следующего факта, который является частным случаем формулы Ботта: на проективном пространстве $H^i(\Omega^k(-k)) = 0$ для всех i и всех $k > 0$.) Равенства (8) приводят к равенствам

$$\mathbf{R}p_* H^k(B_{\mathcal{G}}) \cong 0 \quad \text{для всех } k.$$

Следовательно, $\mathbf{R}p_* B_{\mathcal{G}} = 0$. И, значит, функтор $\Phi_Z = \mathbf{R}i_* p^*$ вполне строгий.

Полезно отметить, что на самом деле мы доказали более общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $p: Z = \mathbb{P}(\mathcal{N}^\vee) \rightarrow X$ – расслоение на проективных пространствах, ассоциированное с векторным расслоением $\mathcal{N}$ на схеме X . Предположим, что существует регулярное замкнутое вложение $i: Z \hookrightarrow Y$

такое, что нормальное расслоение $\mathcal{N}_{Z/Y}$ совпадает с ядром канонического отображения $p^*\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1)$. Тогда функтор

$$\mathbf{R}i_*p^*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$$

является вполне строгим.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Функтор $\Phi_Z: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ индуцирует функтор

$$\bar{\Phi}_Z: \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y),$$

и он является вполне строгим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, функторы p^* и $i^b = \mathbf{L}i^*(\cdot \otimes \mathcal{O}(Z))[-1]$ как функторы обратного образа переводят совершенные комплексы в совершенные. Во-вторых, функторы прямого образа $\mathbf{R}i_*$ и $\mathbf{R}p_*$ также переводят совершенные комплексы в совершенные, так как оба морфизма i и p имеют конечную Тог-размерность. Значит, по лемме 1.1 существует функтор $\bar{\Phi}_Z: \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$, который является вполне строгим.

Таким образом, построен функтор $\bar{\Phi}_Z: \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$ и показано, что он является вполне строгим.

Теперь будет предложено первое доказательство теоремы 2.1. Покажем, что любой объект $F \in \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$, для которого $\bar{\Phi}_Z F = 0$, является нулевым объектом. Эквивалентность функтора $\bar{\Phi}_Z$ можно формально вывести из данного факта. Доказательство опирается на следующие две простые леммы.

ЛЕММА 2.5. Пусть $i: Z \hookrightarrow Y$ – замкнутое вложение. Пусть $\mathcal{F}$ – когерентный пучок на Y такой, что его ограничение на дополнение $U = Y \setminus Z$ локально свободно и $\mathbf{L}i^*\mathcal{F}$ изоморфен локально свободному пучку на Z . Тогда $\mathcal{F}$ локально свободен на Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы показать, что $\mathcal{F}$ локально свободен, достаточно проверить, что для любой замкнутой точки $t: y \hookrightarrow Y$ выполняются равенства $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, t_*\mathcal{O}_y) = 0$ для всех $i > 0$. Пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на U . Таким образом, нужно рассмотреть только случай $y \in Z$. Это значит, что $t = i \cdot t'$, где $t': y \hookrightarrow Z$ – замкнутая точка на Z . В данном случае

$$\mathrm{Ext}_Y^i(\mathcal{F}, t_*\mathcal{O}_y) = \mathrm{Hom}_Z^i(\mathbf{L}i^*\mathcal{F}, t'_*\mathcal{O}_y) = 0$$

для $i > 0$ по причине того, что $\mathbf{L}i^*\mathcal{F}$ изоморфен локально свободному пучку на Z .

ЛЕММА 2.6. Объект $B \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Z))$ совершенный, если и только если объекты $\mathbf{R}p_*(B(n))$ являются совершенными в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если объект B совершенный, то объекты $\mathbf{R}p_*(B(n))$ также совершенные. Обратное утверждение следует из полуортогонального разложения для $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Z))$, которое было описано в замечании 1.13.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Утверждение леммы 2.6 остается верным для любого гладкого морфизма $Z \rightarrow X$.

Используя данные две леммы, можно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Предположим, что объект $F \in \mathbf{D}_{\text{Sg}}(Y)$ удовлетворяет условию $\bar{\Phi}_{Z*}F \cong 0$. Тогда $F \cong 0$ в $\mathbf{D}_{\text{Sg}}(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале отметим, что все схемы X , Z и Y являются горнштейновыми как локально полные пересечения в регулярных схемах. Предложение 1.17 позволяет предполагать, что объект F представлен пучком Коэн–Маколея $\mathcal{F}$, в частности $\underline{\text{Ext}}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = 0$ для всех $i \neq 0$. Любой такой пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на дополнении $Y \setminus \text{Sing}(Y)$. Кроме того, так как пучок $\mathcal{F}$ имеет правую локально свободную резольвенту, объект $\mathbf{L}i^*\mathcal{F} \cong i^*\mathcal{F}$ является пучком.

Обозначим через $\mathcal{L}$ относительно обильное линейное расслоение на Y , получающееся ограничением линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$. Рассмотрим объект $G = \mathbf{L}u^*\mathbf{R}u_*\mathcal{F}$, где $u: Y \hookrightarrow S'$ – замкнутое вложение дивизора Y . С одной стороны, объект G является совершенным комплексом как обратный образ ограниченного комплекса когерентных пучков с регулярной схемы S' . С другой стороны, комплекс G имеет две когомологии: $\mathcal{F}$ как нулевую и $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ как (-1) -ю. Отсюда следует, что образ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ в $\mathbf{D}_{\text{Sg}}(Y)$ изоморфен образу $\mathcal{F}[-2]$. По предположению объект $\bar{\Phi}_{Z*}\mathcal{F}$ нулевой и, значит, $\bar{\Phi}_{Z*}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Обозначим пучок $i^*\mathcal{F}$ через $\mathcal{F}'$. Было показано, что $\mathbf{R}p_*(\mathcal{F}'(n))$ – совершенные комплексы на X для всех $n \in \mathbb{Z}$. По лемме 2.6 пучок $\mathcal{F}' = i^*\mathcal{F}$ также совершенен как комплекс на Z .

С другой стороны, пучок $\mathcal{F}' = i^*\mathcal{F}$ имеет правую локально свободную резольвенту и, значит, является пучком Коэн–Маколея на Z . Лемма 1.16 утверждает, что пучок $\mathcal{F}' = i^*\mathcal{F} = \mathbf{L}i^*\mathcal{F}$ локально свободен на Z . Следовательно, по лемме 2.5 пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на всем Y . Таким образом, F изоморфен нулевому объекту в $\mathbf{D}_{\text{Sg}}(Y)$.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Мы уже знаем, что функтор $\bar{\Phi}_Z$ вполне строгий по следствию 2.4. Теперь проверим, что функтор $\bar{\Phi}_{Z*}$ также вполне строгий. Возьмем объект $B \in \mathbf{D}_{\text{Sg}}(Y)$ и рассмотрим естественное отображение $\bar{\Phi}_Z\bar{\Phi}_{Z*}B \rightarrow B$. Обозначим через C_B его конус. Применяя функтор $\bar{\Phi}_{Z*}$ к получившемуся точному треугольнику и учитывая то, что функтор $\bar{\Phi}_Z$ вполне строгий, имеем изоморфизм $\bar{\Phi}_{Z*}C_B \cong 0$. Предложение 2.8 влечет, что объект C_B изоморфен нулевому объекту. Значит, отображение $\bar{\Phi}_Z\bar{\Phi}_{Z*}B \rightarrow B$ есть изоморфизм и функтор $\bar{\Phi}_{Z*}$ вполне строгий.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Теорема 2.1 остается верной и в случае факторстэков. Предположим, что групповая схема G действует на S так, что на $\mathcal{E}$ имеется структура эквивариантного расслоения, а сечение s инвариантно. В этом случае действие G может быть продолжено на все схемы X , Y , Z и S' . Более того, получаем функтор между эквивариантными категориями

$$\mathbf{R}i_*p^*: \mathbf{D}^b(\text{coh}^G(X)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\text{coh}^G(Y)).$$

Данный функтор индуцирует функтор $\mathbf{D}_{\text{Sg}}([X/G]) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{Sg}}([Y/G])$, который также является эквивалентностью триангулированных категорий.

Второе доказательство теоремы 2.1 основано на полуортогональном разложении производной категории когерентных пучков на Y . Данное разложение является частным случаем разложений, появляющихся в работе [21].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Категория $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ имеет полуортогональное разложение вида

$$\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y)) = \langle \mathbf{R}i_* p^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathbf{L}\pi^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}, \dots, \mathbf{L}\pi^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}^{r-1} \rangle,$$

где $\mathcal{L}$ – это ограничение $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ на Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, по предложению 2.2 функтор $\mathbf{R}i_* p^*$ является вполне строгим. Во-вторых, применяя к последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{S'} \rightarrow u_* \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

функторы $\mathbf{R}q_*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-k) \otimes -)$, получаем, что

$$\mathbf{R}\pi_* \mathcal{O}_Y \cong \mathbf{R}q_* \mathbf{R}u_* \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_S \quad \text{и} \quad \mathbf{R}\pi_* \mathcal{L}^{-k} = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 < k \leq r - 2.$$

Отсюда следует, что функтор $\mathbf{L}\pi^*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ вполне строгий и последовательность подкатегорий

$$(\mathbf{L}\pi^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}, \dots, \mathbf{L}\pi^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}^{r-1})$$

является полуортогональной.

В-третьих, для любых $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ и $B \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S))$ имеется последовательность изоморфизмов

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbf{L}\pi^* B \otimes \mathcal{L}^k, \mathbf{R}i_* p^* A) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{L}i^*(\mathbf{L}\pi^* B \otimes \mathcal{L}^k), p^* A) \\ &\cong \mathrm{Hom}(p^* \mathbf{L}j^* B, p^* A(-k)) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{L}j^* B, A \otimes \mathbf{R}p_* \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-k)) = 0. \end{aligned}$$

И последнее равенство выполнено, так как $\mathbf{R}p_* \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-k) = 0$ для $0 < k \leq r - 1$. Таким образом, получаем полуортогональную последовательность подкатегорий

$$(\mathbf{R}i_* p^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)), \mathbf{L}\pi^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}, \dots, \mathbf{L}\pi^* \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}^{r-1}). \quad (9)$$

В заключение осталось показать, что данная последовательность является полной. Обозначим через $\mathcal{C}$ подкатеорию в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$, которая порождена последовательностью (9). Так как $\mathcal{C}$ допустима, имеем полуортогональное разложение $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle$. Чтобы показать, что $\mathcal{C}^\perp$ тривиальна, достаточно проверить, что любой структурный пучок замкнутой точки принадлежит $\mathcal{C}$. Рассмотрим замкнутую точку $y \in Y$. Обозначим через s образ $\pi(y) \in S$. Слой над s изоморфен проективному пространству $\mathbb{P}^{r-2}$, если $s \in S \setminus X$, и изоморфен $\mathbb{P}^{r-1}$, если $s \in X$. В первом случае, так как π плоский над s , имеем $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}^k = \mathbf{L}\pi^* \mathcal{O}_s \otimes \mathcal{L}^k$. Данные пучки при $k = 1, \dots, r - 1$ принадлежат $\mathcal{C}$ и образуют полный исключительный набор на проективном пространстве $Y_s = \mathbb{P}^{r-2}$. Следовательно, и сам пучок $\mathcal{O}_y$ принадлежит $\mathcal{C}$.

Во втором случае мы знаем, что $\mathbf{R}i_* p^* \mathcal{O}_s = \mathcal{O}_{Y_s}$ принадлежит $\mathcal{C}$ и объекты $\mathbf{L}\pi^* \mathcal{O}_s \otimes \mathcal{L}^k = \mathbf{L}j^* \mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}^k$ также лежат в $\mathcal{C}$ при $k = 1, \dots, r - 1$. Объект $\mathbf{L}\pi^* \mathcal{O}_s \otimes \mathcal{L}$ – это комплекс с двумя когомологиями $\mathcal{O}_{Y_s}$ и $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}$. Так как $\mathcal{O}_{Y_s}$ принадлежит $\mathcal{C}$, то имеем, что и $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L} \in \mathcal{C}$. Повторяя данную процедуру,

получаем, что $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}^k \in \mathcal{C}$ для всех $k = 0, \dots, r-1$. Так как $Y_s = \mathbb{P}^{r-1}$, то по тем же самым причинам как и выше получаем, что $\mathcal{O}_y \in \mathcal{C}$ для всех $y \in Y$. Следовательно, наша полуортогональная последовательность является полной.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. По следствию 1.12 полуортогональное разложение категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ дает полуортогональное разложение для $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$. Так как S регулярна, то $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(S)$ тривиальна. Значит, категория $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$ эквивалентна $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$.

§ 3. Применения к D-бранам в моделях Ландау–Гинзбурга

Под моделью Ландау–Гинзбурга будем иметь в виду следующий набор данных: гладкое многообразие X с симплектической кэлеровой формой ω и регулярной непостоянной функцией W на X , которая, рассматриваемая как плоский морфизм $W: X \rightarrow \mathbb{A}^1$, должна быть симплектическим расслоением. Функция W называется суперпотенциалом. Отметим, что для определения D-бран типа В симплектическая форма не нужна.

Математическое определение категории D-бран типа В для аффинной модели Ландау–Гинзбурга было предложено М. Концевичем (см. [22], [3]). Коротко, он предположил, что суперпотенциал W превращает комплексы когерентных пучков в “скрученные” комплексы, т.е. композиция дифференциалов теперь не равна нулю, а есть умножение на W . Такое “скручивание” разрушает $\mathbb{Z}$ -градуировку до $\mathbb{Z}/2$ -градуировки. В статье [22] была проверена эквивалентность данного определения с физическим понятием В-бран в ЛГ-модели для случая простейшего квадратичного суперпотенциала и были предложены физические аргументы, подтверждающие данное определение в общем случае.

В [3; следствие 3.10] было доказано, что категория В-бран на гладком аффинном X с суперпотенциалом W эквивалентна произведению $\prod_{\lambda \in \mathbb{A}^1} \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X_\lambda)$, где X_λ – слой над $\lambda \in \mathbb{A}^1$. (Заметим, что данное произведение конечно.) Для не аффинного X категория $\prod_{\lambda \in \mathbb{A}^1} \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X_\lambda)$ может рассматриваться как определение категории D-бран типа В.

Пусть S – гладкое квазипроективное многообразие, и пусть $f, g \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$ – две регулярных функции. Предположим, что дивизор нулей $D \subset S$, задаваемый функцией g , является гладким и ограничение f на D не является постоянной. Многообразие D может быть рассмотрено как модель Ландау–Гинзбурга с суперпотенциалом $f_D: D \rightarrow \mathbb{A}^1$. Обозначим через D_λ слой отображения $f_D: D \rightarrow \mathbb{A}^1$ над точкой $\lambda \in \mathbb{A}^1$.

Другая модель Ландау–Гинзбурга состоит из гладкого многообразия $T = S \times \mathbb{A}^1$ и суперпотенциала $W: T \rightarrow \mathbb{A}^1$, заданного по правилу $W = f + xg$, где x – координата на $\mathbb{A}^1$. Обозначим через T_λ слой W над точкой λ . Естественное замкнутое вложение $Z_\lambda = D_\lambda \times \mathbb{A}^1$ в T индуцирует замкнутое вложение $i_\lambda: D_\lambda \rightarrow T_\lambda$. Рассмотрим функтор

$$\Phi_{Z_\lambda} = \mathbf{R}i_{\lambda*} p_\lambda^*: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(D_\lambda)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(T_\lambda)),$$

где $p_\lambda: Z_\lambda \rightarrow D_\lambda$ – каноническая проекция.

ТЕОРЕМА 3.1. *Функтор $\Phi_{Z_\lambda}: \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(D_\lambda)) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(T_\lambda))$ индуцирует функтор $\bar{\Phi}_{Z_\lambda}: \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(D_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(T_\lambda)$, который является эквивалентностью триангулированных категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это частный случай теоремы 2.1. Чтобы применить ее, рассмотрим тривиальное двумерное векторное расслоение $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S^{\oplus 2}$ на S и сечение $s_\lambda \in H^0(S, \mathcal{E})$, которое задается двумя функциями $g, f - \lambda 1$. Таким образом, D_λ – это подмногообразие нулей s_λ и является аналогом схемы X из теоремы 2.1. Повторяя конструкцию, предшествующую теореме 2.1, получаем многообразия $Z = X \times \mathbb{P}^1$ и $Y \subset S \times \mathbb{P}^1$, которые являются компактификациями Z_λ и T_λ соответственно. По теореме 2.1 триангулированные категории особенностей $X = D_\lambda$ и Y эквивалентны. Дополнение T_λ в Y является относительно обильным дивизором, который не пересекается с особенностями $\mathrm{Sing}(Y) = \mathrm{Sing}(T_\lambda)$. Следовательно, по предложению 1.3 многообразия Y и T_λ также имеют эквивалентные триангулированные категории особенностей.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть S – гладкое квазипроективное многообразие и f, g – две регулярные функции такие, что $D := \{g = 0\} \subset S$ гладкое и ограниченное. Тогда модели Ландау–Гинзбурга $f_D: D \rightarrow \mathbb{A}^1$ и $W: S \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$, где $W = f + xg$, имеют эквивалентные категории D -бран типа B .*

Список литературы

- [1] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, “Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch”, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967* (SGA 6), Lecture Notes in Math., **225**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [2] R. W. Thomason, T. Trobaugh, “Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories”, *The Grothendieck Festschrift*, vol. III, Progr. Math., **88**, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, 247–435.
- [3] Д. О. Орлов, “Триангулированные категории особенностей и D -браны в моделях Ландау–Гинзбурга”, *Алгебраическая геометрия. Методы, связи и приложения*, Посв. памяти чл.-корр. РАН А. Н. Тюрин, Тр. МИАН, **246**, 2004, 200–224.
- [4] M. Kontsevich, “Homological algebra of mirror symmetry”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 120–139.
- [5] M. R. Douglas, “D-branes, categories and $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry”, *J. Math. Phys.*, **42**:7 (2001), 2818–2843.
- [6] K. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv: hep-th/0002222.
- [7] K. Hori, A. Iqbal, C. Vafa, *D-branes and mirror symmetry*, arXiv: hep-th/0005247.
- [8] P. Seidel, “Vanishing cycles and mutations”, *European Congress of Mathematics*, vol. II (Barcelona, 2000), **202**, Birkhäuser, Basel, 2001, 65–85; arXiv: math.SG/0007115.
- [9] J.-L. Verdier, “Catégories dérivées. Quelques résultats”, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* (SGA 4 1/2), Lecture Notes in Math., **569**, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 262–311.
- [10] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производных категорий*, Наука, М., 1988.
- [11] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1994; рус. пер.: М. Касивара, П. Шапира, *Пучки на многообразиях*, Мир, М., 1997.

- [12] B. Keller, “Derived categories and their uses”, *Handbook of algebra*, vol. 1, eds. M. Hazewinkel, North-Holland, Amsterdam, 1996, 671–701.
- [13] A. Neeman, *Triangulated categories*, Ann. of Math. Stud., **148**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.
- [14] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1967; рус. пер.: П. Габриель, М. Цисман, *Категории частных и теория гомотопий*, Мир, М., 1971.
- [15] R. W. Thomason, “Equivariant resolution, linearization, and Hilbert’s fourteenth problem over arbitrary base schemes”, *Adv. Math.*, **65**:1 (1987), 16–34.
- [16] B. Totaro, “The resolution property for schemes and stacks”, *J. Reine Angew. Math.*, **577** (2004), 1–22.
- [17] А. И. Бондал, М. М. Капранов, “Представимые функторы, функторы Серра и перестройки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:6 (1989), 1183–1205.
- [18] A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, Preprint MPIM 95/15, 1995; [arXiv: alg-geom/9506012](#).
- [19] Д. О. Орлов, “Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:4 (1992), 852–862.
- [20] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Math., **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [21] A. Kuznetsov, *Homological projective duality*, in preparation.
- [22] A. Kapustin, Yi Li, “D-branes in Landau–Ginzburg models and algebraic geometry”, *JHEP*, **12** (2003), 005; [arXiv: hep-th/0210296](#).

Д. О. Орлов (D. O. Orlov)

Математический институт

им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: orlov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

10.08.2005