Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 9, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 08:32:09

УДК 517.982.256

А. Р. Алимов

Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$

Изучается структура чебышёвских множеств и строгих солнц в пространстве $C(Q)$, Q – компакт. Показано, что ограниченно компактное строгое солнце, в частности ограниченно компактное чебышёвское множество, в $C(Q)$ монотонно линейно связно, в частности P -ациклично. Установлено, что монотонно линейно связное чебышёвское множество в $C(Q)$ является солнцем.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Подмножество $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ называется *чебышёвским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x = \{y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ ее ближайших точек из M состоит из одной точки. Здесь $\rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|$ – расстояние от x до M . К примеру, чебышёвскими множествами являются подпространство многочленов степени не выше t в $C[0, 1]$ и прямая на евклидовой плоскости.

Помимо чебышёвских множеств в работе будут рассматриваться солнца и строгие солнца. Напомним, что множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ такая, что

$$y \in P_M[(1 - \lambda)y + \lambda x] \quad \text{для всех } \lambda \geq 0; \quad (1)$$

M называется *строгим солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ множество $P_M x$ ее ближайших точек из M непусто и утверждение (1) выполнено для каждой точки $y \in P_M x$. В конечномерном пространстве каждое чебышёвское множество является солнцем [1; теорема 4.13]. О чебышёвских множествах, солнцах и строгих солнцах см. [1]–[12].

Пусть $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X . Следуя [5], говорим, что кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \text{ext } S^*$, где $\text{ext } S^*$ – множество крайних точек единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* . Применительно к $C(Q)$ это определение записывается так: $(k(\tau))(q)$ является монотонной функцией по τ для любого фиксированного $q \in Q$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00160).

В работе важную роль будет играть понятие монотонно линейно связного множества. Подмножество M пространства $C(Q)$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить монотонной кривой $k(\cdot) \subset M$.

Х. Беренс и Л. Хетцельт [6] (см. также [4]) установили, что (в наших терминах) подмножество из $\mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто и монотонно линейно связно. Автором [8] установлено, что произвольное солнце в c_0 монотонно линейно связно.

Ниже, если не оговорено противное, Q – метризуемый компакт¹; под термином *компакт* мы далее, если не оговорено противное, понимаем *метризуемый компакт*; $C(Q)$ – пространство непрерывных действительных функций на Q .

В настоящей работе мы устанавливаем, что ограниченно компактное строгое солнце (в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество) в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно (теорема 3). В теореме 1 показано, что монотонно линейно связное чебышёвское множество в $C(Q)$ является солнцем. В теореме 2 утверждается, что образ компактного строгого солнца при факторотображении $C(Q)/L$, где L – координатное подпространство конечной коразмерности в $C(Q)$, является строгим солнцем. В теореме 4 утверждается, что пересечение ограниченно компактного строгого солнца в $C(Q)$ с произвольным количеством координатных полупространств является солнцем.

§ 2. Определения и вспомогательные утверждения

Для ограниченного множества $\emptyset \neq M \subset X$ пусть $m(M)$ – *оболочка Банаха–Мазура* множества M , т.е. пересечение всех замкнутых шаров $B(x, r)$ в X , содержащих M . Подмножество $M \subset X$ называется *m-связным* (см. [4]), если $m(\{x, y\}) \cap M \neq \emptyset$ для любых различных точек $x, y \in M$. Для краткости далее обозначаем $m(\{x, y\}) = m(x, y)$.

Следующее утверждение широко известно (см., например, [4; теорема 3.1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $x, y \in C(Q)$. Тогда

$$m(x, y) = \{z \in C(Q) \mid z(q) \in [x(q), y(q)], \quad q \in Q\}. \quad (2)$$

Напомним определение *опорного конуса* $\mathring{K}(y, x)$ к шару $B(x, \|x - y\|)$ в его граничной точке y (см. [1]):

$$\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x - y\|).$$

Здесь $\mathring{B}(x, r)$ – открытый шар с центром x и радиусом r .

Мы также будем использовать следующее эквивалентное представление для $\mathring{K}(y, x)$. Рассмотрим точку p на единичной сфере S . Через Σ_p обозначим

¹На самом деле, от Q помимо компактности нам требуются нормальность, вытекающая из хаусдорфовости и компактности, и сепарабельность. Однако для компакта его вес совпадает с сетевым весом, а по второй метризацииной теореме Урысона компакт со счетным весом метризуем.

множество всех функционалов из S^* , достигающих максимума на S в p (Σ_p – выпуклое w^* -компактное множество); $\mathcal{E}_p$ – множество экстремальных точек для Σ_p . Далее, для различных точек $x, y \in X$ положим $p = (y - x)/\|y - x\|$. Тогда [1; лемма 3.1]

$$\mathring{K}(y, x) = \{z \mid f(z) < f(y) \ \forall f \in \Sigma_p\} = \{z \mid f(z) < f(y) \ \forall f \in \mathcal{E}_p\}. \quad (3)$$

Важное свойство солнц (точка, не принадлежащая солнцу, отделяется от него посредством выпуклого открытого конуса) дается в следующем утверждении (см., например, [1; гл. 3]).

ЛЕММА А. Пусть X – линейное нормированное пространство.

- 1) Множество $M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$ такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.
- 2) Множество $M \subset X$ является строгим солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ множество $P_M x$ непусто и для любой точки $y \in P_M x$ выполнено $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.

Рассмотрим метрическое пространство (X, d) или, в частном случае, линейное нормированное пространство $(X, |\cdot|)$. Следуя [13] и [4], говорим, что точка $z \in X$ расположена d -между (или $|\cdot|$ -между) точками $x, y \in X$, если $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$. Множество $M \subset X$ называется d -выпуклым (или $|\cdot|$ -выпуклым), если для любых $x, y \in M$ множество $M \setminus \{x, y\}$ содержит хотя бы одну точку, расположенную d -между ($|\cdot|$ -между) точками x и y .

Рассмотрим следующие условия на линейное нормированное пространство X :

- (*) для всех $x, y \in X$ выполнено $m(x, y) = \{z \in X \mid \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leq \varphi(z) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \ \forall \varphi \in \text{ext } S^*\}$;
- (**) существует подмножество $F = \{f_i\}_{i \in I} \subset \text{ext } S^*$, $\text{card } I \leq \aleph_0$, такое, что $F \cup (-F)$ w^* -плотно в $\text{ext } S^*$.

Несложно проверить, что для $C(T)$ (T – сепарабельный топологический компакт) и для c_0 выполнено (**). Действительно, рассмотрим семейство точек $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset T$, всюду плотное в T , и положим $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, где $f_i(x) = x(\theta_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $f_i \in \text{ext } S^*$ и w^* -замыкание F совпадает с $\text{ext } S^*$. Отметим, что пространство $C(T)$ при несепарабельном T и $c_0(\Gamma)$ на несчетном множестве Γ не удовлетворяют (**).

Пусть пространство X удовлетворяет (**), $F = \{f_i\}_{i \in I}$ – семейство функционалов из (**), пусть $\{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, и пусть $\sum \alpha_i < \infty$. Положим

$$|x| = \sum_{i \in I} \alpha_i |f_i(x)|. \quad (4)$$

Тогда $|\cdot|$ – норма на X , которую, следуя Брауну [4], назовем ассоциированной. Ясно, что $|x| \leq \|x\| \sum \alpha_i$ для $x \in X$. К примеру, для c_0 ассоциированная норма определяется как $|x| = \sum \alpha_i |x^{(i)}|$, где $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots) \in c_0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots > 0$, $\sum \alpha_i < \infty$.

Следующий результат является естественным и прямым обобщением следствия 3.2 из [4; с. 92], доказанного Брауном в случае $\dim X < \infty$.

ЛЕММА 1. Пусть пространство X удовлетворяет $(*)$, $(**)$, $x, y \in X$. Следующие условия эквивалентны:

- а) $z \in m(x, y)$;
- б) $|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_i(y)|$ для всех $i \in I$, где семейство $F = \{f_i\}_{i \in I}$ определено в $(**)$;
- в) $|x - y| = |x - z| + |z - y|$, где $|\cdot|$ – ассоциированная норма, определенная в соответствии с $(**)$ и (4).

Из леммы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть пространство X удовлетворяет условиям $(*)$, $(**)$, $|\cdot|$ – ассоциированная норма (4) на X , и пусть $M \subset X$. Тогда M является m -связным, если и только если оно $|\cdot|$ -выпукло.

Понятно, что монотонно линейно связанное множество является m -связным. Обратное утверждение неверно. Следующий пример предложен К. Франчетти и С. Роверси²: пусть $M = M_1 \cup M_{-1}$, где $M_\sigma = \{x \in C[0, 1] \mid x(0) = \sigma\}$, $\sigma = \pm 1$. Тогда M состоит из двух выпуклых непересекающихся компонент, в то же время, несложно проверить, что M m -связно. Однако в $\ell^\infty(n)$, как отмечено Беренсом и Хетцельтом, и в c_0 [8; теорема 1] эти свойства эквивалентны: пусть $M \subset c_0$ или $M \subset \ell^\infty(n)$, M замкнуто и m -связно, тогда множество M и множества $M \cap B(x, r)$, $M \cap \overset{\circ}{B}(x, r)$ и $P_M x$ монотонно линейно связаны для любого выбора $x \in X$ и $r > 0$.

В общем случае ответ на вопрос о связности m -связных множеств положительен, если потребовать некоторую компактность множества M . Напомним, что множество называется *ограниченно компактным*, если его пересечение с любым замкнутым шаром компактно.

ЛЕММА 2. Пусть X удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, и пусть $M \subset X$ m -связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий:

- а) M ограничено компактно (в норме $\|\cdot\|$);
- б) $m(u, v) \|\cdot\|$ -компактно для любых $u, v \in X$;
- в) $M |\cdot|$ -замкнуто и $m(u, v) |\cdot|$ -компактно для любых $u, v \in X$.

Тогда M монотонно линейно связано.

Случай б) выполнен в пространстве $X = c_0$ или если $\dim X < \infty$.

Нам требуется

ЛЕММА В (Менгер [13], см. также [4; с. 93]). Пусть (Y, d) – d -выпуклое компактное метрическое пространство. Тогда для x и y в Y существует изометрия $f: [0, d(x, y)] \rightarrow Y$ такая, что $f(0) = x$ и $f(d(x, y)) = y$. Как следствие, Y линейно связано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пересечение $M \cap m(u, v) |\cdot|$ -компактно по условию в случае в) и из неравенства $|x| \leq \|x\| \sum \alpha_i$, $x \in X$, в случаях а) и б). Теперь из следствия 1 и леммы В получаем линейную связность множества M .

²Здесь и в дальнейшем результаты Франчетти (C. Franchetti) и Роверси (S. Roversi) цитируются по их неопубликованной рукописи “Suns, M -connected sets and P -acyclic sets in Banach spaces” (1988). С их любезного разрешения автор использует некоторые их утверждения (леммы 3 и 4), доказательства которых принадлежат Франчетти и Роверси.

Выберем произвольно $f \in \text{ext } S^*$ и, если необходимо, включим его в семейство $F = \{f_i\}$ из (**), присвоив ему номер 1. По семейству $\{f\} \cup F$ в соответствии с (4) определим новую ассоциированную норму $|\cdot|'$ на X . Так как в силу (**) объединение $F \cup (-F)$ w^* -плотно в $\text{ext } S^*$, то из $|\cdot|$ -замкнутости ($|\cdot|$ -компактности) множества вытекает его $|\cdot|'$ -замкнутость ($|\cdot|'$ -компактность). Далее норму $|\cdot|'$ будем обозначать через $|\cdot|$.

Без ограничения общности считаем, что $x = 0$, $f(y) \geq 0$. По лемме В для каждого $\delta \in (0, 1)$ существует точка $u \in k(\cdot)$ такая, что $|u| = \delta$, $|y - u| = \delta$. Имеем

$$|y| = \alpha_1|f(u)| + \alpha_1|f(y) - f(u)| + \sum_{i \geq 2} \alpha_i(|f_i(u)| + |f_i(y) - f_i(u)|). \quad (5)$$

Разобьем множество $\{i \geq 2\}$ на четыре непересекающихся множества:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{i \mid f_i(y) > 0, f_i(y) > f_i(u)\}, & I_2 &= \{i \mid f_i(y) > 0, f_i(y) \leq f_i(u)\}, \\ I_3 &= \{i \mid f_i(y) < 0, f_i(y) > f_i(u)\}, & I_4 &= \{i \mid f_i(y) < 0, f_i(y) \leq f_i(u)\}. \end{aligned}$$

Для каждого $i \geq 2$ оценим выражение, стоящее под знаком суммирования в (5): при $i \in I_1$ имеем

$$|f_i(u)| + |f_i(y) - f_i(u)| = |f_i(u)| - f_i(u) + f_i(y) \geq |f_i(y)|;$$

при $i \in I_2 \cup I_3$ имеем (поскольку $|f_i(u)| \geq |f_i(y)|$)

$$|f_i(u)| + |f_i(y) - f_i(u)| \geq |f_i(y)|;$$

при $i \in I_4$ имеем

$$|f_i(u)| + |f_i(y) - f_i(u)| = |f_i(u)| + f_i(u) - f_i(y) \geq -f_i(y) = |f_i(y)|.$$

Продолжая вычисления в (5), получаем

$$|y| = \alpha_1|f(u)| + \alpha_1|f(y) - f(u)| \geq \alpha_1|f(u)| + \alpha_1|f(y) - f(u)| + \sum_{i \geq 2} \alpha_i|f_i(y)|,$$

откуда, если предположить, что $f(u) < 0$ или $f(u) > f(y)$, получаем противоречие: $|y| > |y|$. Итак, для любого $f \in \text{ext } S^*$ функция $f(k(t))$ монотонна по t , что и требуется.

Лемма 2 доказана.

Пусть пространство X удовлетворяет условиям (*), (**) и $F = \{f_i\} \subset \text{ext } S^* - w^*$ -плотное в $\text{ext } S^*$ семейство. Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим ограниченный линейный оператор $s_n: X \rightarrow \ell^\infty(n)$, определенный как $s_n(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Отметим, что всегда $\|s_n(x)\| \leq \|x\|$ и $\|s_n(x)\| \rightarrow \|x\|$ при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3 (Франчетти–Роверси). Пусть пространство X удовлетворяет условиям (*) и (**), и пусть $M \subset X$ ограничено компактно. Тогда

- 1) если M m -связно в X , то $s_n(M)$ m -связно в $\ell^\infty(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) если $s_n(M)$ m -связно в $\ell^\infty(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то M m -связно в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Достаточно рассмотреть случай, когда M компактно. Предположим, что M m -связно. Тогда по лемме 2 M монотонно линейно связно; это свойство у образа сохраняется при линейном отображении $s_n(\cdot)$.

Предположим теперь, что $s_n(M)$ m -связно в $\ell^\infty(n)$ для всех n . Пусть $x, y \in M$, $x \neq y$. Мы можем предположить, что существует $\delta > 0$ такое, что если $n \geq \delta$, то $\|s_n(x) - s_n(y)\| \geq \varepsilon > 0$. Поскольку $s_n(M)$ m -связно, то выберем такую точку $z_n \in M$, что $s_n(z_n) \in m(s_n(x), s_n(y))$ и согласно [4; с. 94–95]

$$\|s_n(z_n) - s_n(x)\| = \|s_n(z_n) - s_n(y)\| = \frac{1}{2} \|s_n(x) - s_n(y)\| \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Поскольку $s_n(z_n) \in m(s_n(x), s_n(y))$ и $\|s(z_n)\| \rightarrow \|z_n\|$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность $\{z_n\}$ ограничена. Устремляя n к бесконечности, в силу компактности M имеем, при необходимости переходя к подпоследовательности, что $z_n \rightarrow z \in M$. Ясно, что $\|s_n(z_n - x)\| \rightarrow \|z - x\|$ и $\|s_n(z_n - y)\| \rightarrow \|z - y\|$. Отсюда $z \neq x$, $z \neq y$. Остается показать, что $z \in m(x, y)$. Зафиксировав $n \in \mathbb{N}$, поскольку $s_n(z_n) \in m(s_n(x), s_n(y))$, в силу леммы 1 имеем

$$\min[f_i(x), f_i(y)] \leq f_i(z_n) \leq \max[f_i(x), f_i(y)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Устремляя n к бесконечности, получаем

$$\min[f_i(x), f_i(y)] \leq f_i(z) \leq \max[f_i(x), f_i(y)],$$

откуда $z \in m(x, y)$ по лемме 1.

Лемма 3 доказана.

Напомним, что множество M *ациклично* [1; гл. 4, § 2], если оно непусто, компактно и его группы гомологий H_q , $q \geq 1$, и приведенная группа $\tilde{H}_0$ тривиальны. Стягиваемое (в частности, выпуклое) компактное подмножество линейного нормированного пространства ациклично; ацикличное множество связно; гомеоморфный образ ацикличного множества ацикличен. Множество M *P-ациклично*, если $P_M x$ ациклично для любой точки $x \in X$.

Браун доказал, что если ограничено компактное множество P -ациклично, то его пересечение с произвольным замкнутым шаром либо пусто, либо ациклично. Отметим, что если мы докажем ацикличность произвольного компактного m -связного множества, то отсюда будет следовать P -ацикличность произвольного ограничено компактного m -связного множества M . Это следует из факта, что пересечение такого M с произвольным шаром $B(x, r)$ компактно и m -связно.

ЛЕММА 4 (Франчетти–Роверси). Пусть пространство X удовлетворяет условиям (*), (**), и пусть $\emptyset \neq M \subset X$ ограничено компактно и m -связно. Тогда M P -ациклично.

Вначале сформулируем вспомогательное утверждение [14; предложение 2.1], предварительно напомнив, что обратной системой топологических пространств называется семейство $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma\}$, где множество Σ упорядочено отношением $\leq$, X_α – топологическое хаусдорфово пространство и $\pi_\alpha^\beta: X_\alpha \rightarrow X_\beta$ – непрерывное отображение для любых $\alpha \leq \beta$, при этом $\pi_\alpha^\alpha = \text{id}_{X_\alpha}$ и $\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$

для всех $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Подпространство произведения $\prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha$ называется обратным пределом системы S и обозначается

$$\varprojlim S = \left\{ \{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha \mid \pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha \text{ для всех } \alpha \leq \beta \right\}.$$

ЛЕММА С [14]. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma\}$ – обратная система. Если X_α компактно и ациклично для каждого α , то обратный предел $\varprojlim S$ компактен и ацикличесен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Достаточно рассмотреть случай, когда M компактно. Пусть Ω – упорядоченное по включению семейство конечных подмножеств из $\text{ext } S^*$. Для $A \in \Omega$ определим $s_A: X \rightarrow \ell^\infty(A)$ как $s_A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$. Тогда s_A – линейный ограниченный оператор. Семейство $\{s_A(M) \mid A \in \Omega\}$ образует обратную систему. По лемме 3 множества $s_A(M)$ являются компактными m -связными в $\ell^\infty(A)$ и, следовательно, по теореме Беренса и Хетцельта [6], [4; теорема 3.6] ациклическими множествами (и, более того, R_δ -множествами по Ароншайну). Мы покажем, что M изоморфно $\varprojlim s_A(M)$. Тогда по лемме С будет следовать, что M ациклично (и P -ациклично, см. замечание перед леммой 4), поскольку каждое $s_A(M)$ ациклично. Для $A, B \in \Omega$, $A \subset B$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & s_A(M) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & s_B(M) \end{array}.$$

Отсюда следует, что непрерывное отображение $M \rightarrow \varprojlim s_A(M)$ инъективно. Докажем его сюръективность. Предположим, что

$$\{x_A\}_{A \in \Omega} \in \varprojlim s_A(M) \subset \prod_{A \in \Omega} s_A(M).$$

Для каждого $A \in \Omega$ выберем $y_A \in M$ таким образом, что $s_A(y_A) = x_A$. Тогда $\{y_A\}_{A \in \Omega}$ является сетью в M и вследствие компактности M имеет предельную точку $y \in M$. Остается доказать, что $s_A(y) = x_A$ для каждого $A \in \Omega$. Рассмотрим $A, B \in \Omega$, $B \supset A$. Тогда $s_A(y_B) = s_B(y_B)|_A = x_A$. Переходя к пределу по подсети, получаем, что $s_A(y) = x_A$. Лемма 4 доказана.

Следующий результат играет вспомогательную роль при доказательстве теоремы 3. Однако отметим его “универсальную” полезность: с помощью леммы 5 многие геометрические факты, верные для компактных строгих солнц в $C(Q)$, удастся установить и для ограниченно компактных строгих солнц (например, как это сделано при доказательстве теорем 3 и 4).

ЛЕММА 5. Пусть $M \subset C(Q)$ – ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$. Предположим, что $M \cap \overset{\circ}{B}(\theta, r) \neq \emptyset$ для некоторых $\theta \in C(Q)$, $r > 0$. Тогда $M \cap B(\theta, r)$ – компактное строгое солнце в $C(Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $M \cap \mathring{B}(\theta, r) \neq \emptyset$ нельзя заменить на условие $M \cap B(\theta, r) \neq \emptyset$. В [11] построен пример строгого солнца M в $\ell^\infty(3)$ такого, что $M \cap \mathring{B}(\theta, r) = \emptyset$, $M \cap B(\theta, r) \neq \emptyset$ для некоторого шара $B(\theta, r)$, однако $M \cap B(\theta, r)$ не является строгим солнцем (являясь, однако, солнцем) в $\ell^\infty(3)$.

Подмножество $M \subset C(Q)$ называется *регулярным* (по Брозовскому–Вегману), если для любых $x, y \in M$ и для любого замкнутого множества $A \subset Q$ такого, что $\inf_{t \in A} |x(t) - y(t)| > 0$, найдется последовательность $\{v_n\}$ точек из M такая, что $v_n \rightarrow y$ и $(v_n(t) - y(t))(x(t) - y(t)) > 0$ для всех $t \in A$. При доказательстве леммы 5 нам потребуется следующий результат Брозовского–Вегмана (см., например, [7; теорема 4.1]).

ЛЕММА D. Пусть $M \subset C(Q)$. Тогда M регулярно в том и только том случае, когда для любых точек $x \in X \setminus M$, $y \in P_M x$ выполнено³ $y \in P_M[(1 - \lambda)y + \lambda x]$ для всех $\lambda \geq 0$.

Мы также воспользуемся следующим техническим результатом. Пусть

$$w, u, v \in C(Q), \quad u, v \in B(w, R), \quad \|w - v\| < R.$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$A_\delta = \{t \in Q \mid |u(t) - v(t)| \geq \delta\}.$$

Положим

$$\mathring{m}_\delta(u, v) = \{z \in C(Q) \mid z(t) \in (u(t), v(t)) \text{ при } t \in A_\delta; \\ z(t) \in (\min\{u(t), v(t)\} - \delta, \max\{u(t), v(t)\} + \delta) \text{ при } t \in Q \setminus A_\delta\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $0 < 2\delta < R - \|w - v\|$, то $\mathring{m}_\delta(u, v) \subset \mathring{B}(w, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть $z \in \mathring{m}_\delta(u, v)$ и $t \in A_\delta$. Тогда $z(t) \in (u(t), v(t))$. Отсюда следует

$$|z(t) - w(t)| < \max\{|u(t) - w(t)|, |v(t) - w(t)|\} \leq R,$$

что и требуется. Пусть теперь $t \in Q \setminus A_\delta$. Тогда

$$u(t) - w(t) + \delta \leq |u(t) - w(t)| + \delta \leq |u(t) - v(t)| + |v(t) - w(t)| + \delta \\ < \delta + R - 2\delta + \delta = R,$$

поскольку $|u(t) - v(t)| < \delta$ и $|v(t) - w(t)| < R - 2\delta$;

$$v(t) - w(t) \leq |v(t) - w(t)| + \delta < R - 2\delta.$$

Отсюда, поскольку $z(t) \in (\min\{u(t), v(t)\} - \delta, \max\{u(t), v(t)\} + \delta)$, получаем $|z(t) - w(t)| < R$. Предложение 2 доказано.

³Здесь не предполагается, что $P_M x$ непусто для любого x . Однако если $P_M x \neq \emptyset$ для любого x , то регулярное множество M есть строгое солнце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Поскольку M ограниченно компактно, то и $M \cap B(\theta, r)$ ограниченно компактно, откуда, очевидно, $P_{M \cap B(\theta, r)} z \neq \emptyset$ для любого $z \in C(Q)$. Без ограничения общности считаем, что $0 \notin M \cap B(\theta, r)$, $\rho(0, M \cap B(\theta, r)) = 1$, $y \in P_{M \cap B(\theta, r)}$. По лемме А для доказательства строгой солнечности пересечения $M \cap B(\theta, r)$ нам нужно показать, что $\mathring{K}(y, 0) \cap (M \cap B(\theta, r)) = \emptyset$.

Для краткости обозначим $B = B(0, 1)$, $\mathring{B} = \mathring{B}(0, 1)$.

Если $B \cap \mathring{B}(\theta, r) = \emptyset$, то из (3) следует, что $\mathring{K}(y, 0) \cap B(\theta, r) = \emptyset$, что и требуется. Итак, далее считаем, что $B \cap \mathring{B}(\theta, r) \neq \emptyset$.

Предположим противное: пусть $x \in \mathring{K}(y, 0) \cap (M \cap B(\theta, r))$. Сначала рассмотрим случай $x \in \mathring{B}(\theta, r)$.

Так как $x \in \mathring{K}(y, 0)$, то по [1; лемма 3.1] $[x, y] \cap \mathring{B} \neq \emptyset$. Это означает, что точка $x_\alpha := \alpha x + (1 - \alpha)y$ при малых $\alpha > 0$ содержится в шаре $\mathring{B}$ (и, понятно, в шаре $\mathring{B}(\theta, r)$). Зафиксируем такое малое α . Выберем $\delta > 0$ из условий $2\delta < 1 - \|x_\alpha\|$, $2\delta < r - \|x_\alpha - \theta\|$ и положим $A_\delta = \{t \in Q \mid |x_\alpha(t) - y(t)| \geq \delta\}$. Ясно, что $A_\delta \neq \emptyset$. По предположению 2, примененному к наборам $y = u$, $x_\alpha = v$, $w = 0$, $R = 1$ и $y = u$, $x_\alpha = v$, $w = \theta$, $R = r$, получаем, что $\mathring{m}_\delta(x_\alpha, y) \subset \mathring{B} \cap \mathring{B}(\theta, r)$.

Для точек $y, x \in M$ и замкнутого множества A_δ выберем в соответствии с леммой D последовательность $\{v_n\} \subset M$ такую, что $v_n \rightarrow y$, $(v_n(t) - y(t)) \times (x(t) - y(t)) > 0$ для всех $t \in A_\delta$. Установим, что для больших n выполнено $v_n \in \mathring{m}_\delta(x_\alpha, y)$. Действительно, для δ выберем номер N такой, что $\|v_n - y\| < \delta$ для всех $n \geq N$. Если $t \in A_\delta$ и $n \geq N$, то $|x_\alpha(t) - y(t)| \geq \delta$, откуда $v_n(t) \in (y(t), x_\alpha(t))$; а если $t \in Q \setminus A_\delta$, то поскольку $\|v_n - y\| < \delta$, для v_n выполнено $v_n(t) \in (\min\{x_\alpha(t), y(t)\} - \delta, \max\{x_\alpha(t), y(t)\} + \delta)$. Итак, $v_n \in \mathring{m}_\delta(x_\alpha, y)$ при $n \geq N$. Выше, однако, показано, что $\mathring{m}(x_\alpha, y) \subset \mathring{B} \cap \mathring{B}(\theta, r)$, и мы получаем $v_n \in M$, $v_n \in B(\theta, r)$, $v_n \in \mathring{B}$ при $n \geq N$. Это противоречит тому, что $\rho(0, B(\theta, r) \cap M) = 1$.

Пусть теперь $\|x - \theta\| = r$, $x \in \mathring{K}(y, 0) \cap M$. По доказанному выше мы считаем, что множество $\mathring{K}(y, 0) \cap \mathring{B}(\theta, r)$ не содержит точек из M . По условию найдется точка $w \in \mathring{B}(\theta, r) \cap M$. Для числа $\beta > 0$ рассмотрим точку $w_\beta = \beta w + (1 - \beta)x$. Поскольку точка x содержится в открытом множестве $\mathring{K}(y, 0)$, то $w_\beta \in \mathring{K}(y, 0)$ при всех малых $\beta > 0$. Зафиксируем такое β . Так как $x, w_\beta \in \mathring{K}(y, 0)$, то по определению $x, w_\beta \in \mathring{B}(-dy, (d+1))$ при достаточно большом $d > 0$. Выберем число δ из условий $0 < 2\delta < r - \|w_\beta\|$, $0 < 2\delta < d + 1 - \|-dy - w_\beta\|$. Положим $A_\delta = \{t \mid |x(t) - w_\beta(t)| \geq \delta\}$.

Для точек $x, w \in M$ и замкнутого множества A_δ выберем в соответствии с леммой D последовательность $\{v_n\} \subset M$ такую, что $v_n \rightarrow x$, $(v_n(t) - x(t)) \times (w(t) - x(t)) > 0$ для всех $t \in A_\delta$. Выберем номер N такой, что $\|v_n - x\| \leq \delta$ при $n \geq N$. Как и выше, несложно установить, что $v_n \in \mathring{m}_\delta(x, w_\beta)$ при $n \geq N$. По предположению 2, примененному к наборам $x = u$, $w_\beta = v$, $w = \theta$, $R = r$ и $x = u$, $w_\beta = v$, $w = -dy$, $R = (d+1)$, получаем, что $\mathring{m}_\delta(w_\beta, x) \subset \mathring{B}(\theta, r) \cap \mathring{B}(-dy, (d+1))$, т.е. $\mathring{m}_\delta(w_\beta, x) \subset \mathring{B}(\theta, r) \cap \mathring{K}(y, 0)$. Но $v_n \in M$, $v_n \in \mathring{m}_\delta(x, w_\beta)$, откуда $v_n \in \mathring{B}(\theta, r) \cap \mathring{K}(y, 0)$ – противоречие с тем, что множество $\mathring{K}(y, 0) \cap \mathring{B}(\theta, r)$ не содержит точек из M .

Итак, предположение, что $\mathring{K}(y, 0) \cap (M \cap B(\theta, r)) \neq \emptyset$, неверно и $M \cap B(\theta, r)$ – строгое солнце в $C(Q)$ по лемме А. Лемма 5 доказана.

§ 3. Основные результаты

Вопрос о солнечности чебышёвских множеств изучался Н. В. Ефимовым, С. Б. Стечкиным, В. Кли, Л. П. Власовым, Б. Брозовским, И. Г. Царьковым, С. В. Конягиным и др. (см. [1]–[5]). В конечномерном пространстве чебышёвское множество является солнцем. Ч. Данхем [15] (см. также [5]) построил пример несвязного локально компактного чебышёвского множества в $C[0, 1]$, не являющегося солнцем. В общем случае для доказательства солнечности множества на него налагаются, как правило, ограничения типа компактности или непрерывности метрической проекции P_M (см. [1; гл. 3], [2; гл. I, § 2]). Классическим является результат Л. П. Власова, который утверждает, что ограниченно компактное P -ацикличное множество (в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество) в банаховом пространстве является солнцем [1; теорема 4.4]. (Ответ на обратный вопрос – является ли ограниченно компактное солнце P -ацикличным – неизвестен, за редким исключением, даже в конечномерном случае, см. [4], [6], [8], [16], [17]. В нашей работе в теореме 3 мы показываем, что ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$ монотонно линейно связно и, как следствие, P -ациклично.) Власов также доказал, что в банаховом пространстве локально компактное чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией P_M является солнцем (см., например, [3]). Отметим также, что в $C(Q)$ или c_0 аппроксимативно компактное⁴ чебышёвское множество является солнцем [7], [10].

В следующей теореме для доказательства солнечности чебышёвского множества на него налагается иное структурное ограничение – монотонная линейная связность.

ТЕОРЕМА 1. *В пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем.*

Для c_0 аналог теоремы 1 установлен в [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – монотонно линейно связное чебышёвское множество. Докажем, что M – солнце. Без ограничения общности считаем $0 \notin M$, $P_M 0 = \{y\}$, $\|y\| = 1$. Обозначим $A = \{a \in Q \mid |y(a)| = 1\}$ (ясно, что $A \neq \emptyset$). Предположим противное: M не является солнцем. Тогда по лемме А найдется точка $u \in M \cap \mathring{K}(y, 0)$. Из (3) имеем $\mathring{K}(y, 0) = \{z \in C(Q) \mid z(a) \operatorname{sign} y(a) < \operatorname{sign} y(a), a \in A\}$.

Пусть $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, – монотонная кривая, соединяющая y и u , $k(0) = y$, $k(1) = u$. Значение функции $k(\tau)$ в точке $t \in Q$ будем обозначать $k(\tau, t)$. Поскольку $k(\cdot) \subset M$, то $k(\cdot) \cap B = \emptyset$. Покажем, что для всех малых $\tau > 0$ выполнено $\|k(\tau)\| = 1$. Предположим противное:

$$\begin{aligned} &\text{найдется последовательность } \{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1), \tau_n \rightarrow 0, \\ &\text{такая, что } \|k(\tau_n)\| > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6}$$

⁴Напомним, что подмножество $M \subset X$ аппроксимативно компактно [1], если для любой точки $x \in X$ и для любой последовательности $\{y_n\}$ из M такой, что $\|x - y_n\| \rightarrow \rho(x, M)$, найдется подпоследовательность, сходящаяся к элементу из M . Для такого M множество $P_M x$ всегда непусто и компактно.

Это означает, что

$$|k(\tau_n, t_n)| > 1 \quad \text{для некоторого } t_n \in Q \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Поскольку Q – компакт, то, при необходимости переходя к подпоследовательности, считаем, что $t_n \rightarrow t_0 \in Q$.

Предположим, что $t_0 \in A$. Не ограничивая общности, считаем $y(t_0) = 1$. Поскольку $k(\tau_n) \rightarrow y$, t_0 – предельная точка для $\{t_n\}$, а $y(t_0) = 1$, то из (7) при всех достаточно больших $n \geq N$ имеем, что

$$k(\tau_n, t_n) > 1 \quad \text{для всех } n \geq N. \quad (8)$$

В силу монотонности по τ функции $k(\tau, t)$, поскольку $|y(t_n)| = |k(0, t_n)| \leq 1$, из (8) вытекает, что $k(1, t_n) = u(t_n) > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$k(1, t_0) = u(t_0) \geq 1. \quad (9)$$

С другой стороны, $u \in \mathring{K}(y, 0)$, т.е. $u(t_0) < 1$, поскольку $t_0 \in A$ и $y(t_0) = 1$. Получили противоречие с (9).

Теперь пусть $t_0 \notin A$. Тогда $|y(t_0)| < 1$. С другой стороны, из (7) имеем $|y(t_0)| = \lim |k(\tau_n, t_n)| \geq 1$. Получили противоречие с неравенством $|y(t_0)| < 1$.

Итак, предположение (6) было неверно, и поэтому для всех достаточно больших n будет выполнено $\|k(\tau_n)\| = 1$, т.е. $k(\tau_n) \in P_M 0$ – противоречие с тем, что M – чебышёвское множество. Теорема 1 доказана.

Напомним определение координатного аффинного подпространства. Пусть $I \subset \mathbb{N}$, $\{a_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$, $\{q_i\}_{i \in I} \subset Q$. Положим $L = \{x \in C(Q) \mid x(q_i) = a_i, i \in I\}$. Если $\text{card } I = k < \infty$ фиксированно, то все такие L образуют класс *координатных аффинных подпространств* конечной коразмерности k :

$$\text{cAff}_{\omega-k}(C(Q)) = \{L \mid I \subset \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, q_i \in Q, i \in I, \text{card } I = k\}.$$

Для подпространства $L \subset C(Q)$ через $\pi(\cdot)$ обозначим факторотображение $\pi: C(Q) \rightarrow C(Q)/L$. Пусть $L \in \text{cAff}_{\omega-k}(C(Q))$ – координатное подпространство конечной коразмерности k . Иными словами, $L = \{x \mid x(\theta_1) = 0, \dots, x(\theta_k) = 0\}$ для некоторого выбора различных точек $\theta_1, \dots, \theta_k \in Q$. Несложно видеть, что $C(Q)/L$ естественным образом отождествляется с $\ell^\infty(k)$,

$$\|\pi(x/L)\|_{C(Q)/L} = \|s_k(x)\|_{\ell^\infty(k)},$$

при этом мы отождествляем $\pi(\cdot) = s_k(\cdot)$, где $s_k(x) = (x(\theta_1), \dots, x(\theta_k))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – компактное строгое солнце в $C(Q)$, и пусть $L \in \text{cAff}_{\omega-k}(C(Q))$ – координатное подпространство конечной коразмерности k . Тогда $\pi(M)$ – компактное строгое солнце в факторпространстве $C(Q)/L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отождествим $C(Q)/L$ с $\ell^\infty(k)$. Если $\pi(M) = \ell^\infty(k)$, то доказывать нечего. Пусть $x' \in \ell^\infty(k)$, $x' \notin \pi(M)$. Образ $\pi(M)$ компактного множества M при непрерывном отображении $\pi(\cdot)$ компактен в $\ell^\infty(k)$. Следовательно, $P_{\pi(M)} x' \neq \emptyset$. Пусть y' – ближайшая точка из $\pi(M)$ для x' . Не ограничивая общности, считаем $x' = 0$, $\|x' - y'\| = 1$. Из того, что $\rho(x', \pi(M)) = 1$, следует, что если $z \in M$, то $\rho(z, L) \geq 1$.

Пусть $y \in \pi^{-1}(y')$. Тогда $\rho(y, L) = 1$. Поскольку L – координатное подпространство конечной коразмерности, то L является множеством существования, т.е. найдется $x \in L$ такой, что $\|x - y\| = 1$. Ясно, что $\pi(x) = x'$. Пусть $\Theta = \{\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n}\} \subset \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ – все точки из Q , в которых $|y'(\theta_{j_i})| = 1$. Понятно, что $0 < n \leq k$. Пусть теперь

$$\begin{aligned} Z^\pm &= \{\theta \in Q \mid (y - x)(\theta) = \pm 1\}, \\ A^+ &= \{\theta \in Q \mid (y - x) \geq 0\}, \\ A^- &= \{\theta \in Q \mid (y - x) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n} \in Z^\pm$.

Если неотрицательная часть $(y - x)_+$ функции $y - x$ не тождественно равна нулю, то обозначим $\delta = \max\{(y - x)(\theta) \mid \theta \in A\}$, $0 < \delta \leq 1$, и положим $D^+ = \{\theta \mid (y - x)(\theta) = \delta\}$. Теперь, применяя большую лемму Урысона к замкнутым множествам $\Theta \cap A^+$ и D^+ , получаем функцию h' такую, что $h'|_{\Theta \cap A^+} = 0$, $h'|_{D^+} = 1/2$, $0 < h'|_{Q \setminus (\Theta \cap D^+)} < 1/2$. Если $(y - x)_+ \equiv 0$, то полагаем $h'|_{A^+} = 0$.

Аналогично рассматривая неположительную часть $(y - x)_-$ функции $y - x$, получаем функцию h'' . Полагая $h = h' + h''$, имеем $h \in L$ и

$$\begin{aligned} h_\Theta &= 0, \quad |h|_{D^+ \cup D^-} = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} &< h(q) < \frac{1}{2} \quad \text{при } q \in Q \setminus (\Theta \cup D^+ \cup D^-). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (y - (x + h))(\theta_{j_i}) &= (y - x)(\theta_{j_i}) = y(\theta_{j_i}) = \pm 1, \\ |(y - (x + h))(\theta)| &< 1 \quad \text{при } \theta \in Q \setminus \Theta. \end{aligned}$$

Обозначим $\hat{x} = x + h$. Тогда $\hat{x} \in L$, $y \in P_M \hat{x}$. По лемме А $\mathring{K}(y, \hat{x}) \cap M = \emptyset$, а из (3)

$$\mathring{K}(y, \hat{x}) = \mathring{K}(y - \hat{x}, 0) + \hat{x} = \{z \mid \varepsilon_1 z(\theta_{j_1}) < \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k z(\theta_{j_k}) < \varepsilon_k\},$$

где $\varepsilon_i = \text{sign}((y - x)(\theta_{j_i})) = \{\pm 1\}$, $i = 1, \dots, k$. Переходя в пространство $\ell^\infty(k)$, имеем

$$\pi(\mathring{K}(y, \hat{x})) = \mathring{K}(y', \pi(\hat{x})) = \mathring{K}(y', 0) = \{z' \in \ell^\infty(k) \mid \varepsilon_1 z'^{(1)} < \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k z'^{(k)} < \varepsilon_k\},$$

и поскольку $\mathring{K}(y, \hat{x}) \cap M = \emptyset$, то $\mathring{K}(y', 0) \cap \pi(M) = \emptyset$, откуда $\pi(M)$ – строгое солнце в $\ell^\infty(k)$ по лемме А.

Прежде чем сформулировать результат о монотонной линейной связности ограниченно компактных строгих солнц в пространстве $C(Q)$, напомним, что известно о связности солнц в линейных нормированных пространствах.

В. А. Кошечев [18], [19] установил связность солнц в конечномерных пространствах X_n . Позднее Браун [17], развивая технику Кошечева, установил, что солнце в X_n линейно связно и локально линейно связно. Беренс и Хетцельт [6] (см. также [4]) установили монотонную линейную связность солнц

в $\ell^\infty(n)$. Монотонная линейная связность солнц в c_0 установлена автором [8]; обратно, ашпроксимативно компактное монотонно линейно связанное множество в c_0 является солнцем [8].

В бесконечномерном случае Кошечев установил, что компактное солнце в линейном нормированном пространстве связано [19; теорема 6], ограниченно компактное строгое солнце в произвольном линейном нормированном пространстве V -связно [18; предложение 12] и что произвольное солнце в равномерно неквадратном⁵ банаховом пространстве связано [19; следствие 1]. В [20] Кошечев построил пример несвязного солнца в некотором банаховом пространстве. О структуре солнц и чебышёвских множеств в пространствах с равномерной нормой см. также [6]–[12], [15].

В следующей теореме мы частично усиливаем результат Кошечева о связности ограниченно компактных строгих солнц и – в пространстве $C(Q)$ – устанавливаем их монотонную линейную связность.

ТЕОРЕМА 3. *В пространстве $C(Q)$ ограниченно компактное строгое солнце монотонно линейно связано.*

Как следствие из леммы 4 и теоремы 3 вытекает, что ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$ P -ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M \subset C(Q)$ – ограниченно компактное строгое солнце. Рассмотрим $x, y \in M$ и выберем достаточно большой шар $B(\theta, r)$ таким образом, чтобы $x, y \in \overset{\circ}{B}(\theta, r)$. По лемме 5 $M \cap B(\theta, r)$ – компактное строгое солнце в $C(Q)$. Для любого координатного подпространства $L \in \text{сAff}_{\omega-k}(C(Q))$ конечной коразмерности k множество $(M \cap B(\theta, r))/L$ является строгим солнцем в $C(Q)/L = \ell^\infty(k)$ по теореме 2. По теореме Беренса и Хетцельта солнца в $\ell^\infty(n)$ монотонно линейно связны. Применяя лемму 3, получаем, что множество $M \cap B(\theta, r)$, а следовательно, и исходное множество M m -связно, а из леммы 2, поскольку M ограниченно компактно, следует монотонная линейная связность M .

Коротко напомним, что известно о связности чебышёвских множеств. В [21] Д. Вулберт установил, что в банаховом пространстве чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией $\dot{V}$ -связно (т.е. его пересечение с любым открытым шаром связано) и, в частности, линейно связано. Связность чебышёвских множеств также изучалась Л. П. Власовым, Ч. Данхемом, В. Кли, Н. В. Невесенко, С. В. Конягиным [22], И. Г. Царьковым [23] и другими. В $\ell^1(\Gamma)$, $\text{card } \Gamma \geq \mathfrak{c}$, Кли построил дискретное чебышёвское множество. Автор [8] установил, что в c_0 чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией монотонно линейно связано.

Из теоремы 3 мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Ограниченно компактное чебышёвское множество в $C(Q)$ монотонно линейно связано.*

⁵Напомним, что линейное нормированное пространство *равномерно неквадратно*, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \varepsilon$ или $\|(y-x)/2\| \leq (1 - \varepsilon)$ для всех $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Понятно, что c_0 , c и ℓ^∞ не являются такими пространствами.

Последний результат работы (теорема 4) посвящен изучению вопроса об аппроксимативных свойствах пересечения строгого солнца в $C(Q)$ с интервалами и промежутками функций в $C(Q)$ и, в частности, с аффинными координатными подпространствами.

Напомним, что множество $\Pi \subset C(Q)$ называется *промежутком*, если для любых $x, y \in \Pi$ множество Π содержит *интервал функций* $m(x, y)$. Структурные и аппроксимативные свойства интервалов и промежутков функций недавно исследовались А. А. Васильевой в [24], [25], а ранее – К. Франчетти и У. Чени, М. В. Кадецом, В. Н. Замятиным, С. Я. Хавинсоном. В [9], [10], [12] были изучены пересечения солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств с координатными подпространствами и промежутками в пространствах $\ell^\infty(n)$, c_0 и c .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M \subset C(Q)$ – ограниченно компактное строгое солнце, и пусть Π – замкнутый промежуток в $C(Q)$. Тогда

- а) если $M \cap \Pi \neq \emptyset$, то $M \cap \Pi$ – солнце в $C(Q)$;
- б) если $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$, то $M \cap \Pi$ – строгое солнце в $C(Q)$.

Обратно, пусть тело $\Pi \subset C(Q)$ таково, что если M – компактное строгое солнце в $C(Q)$ и $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$, то $M \cap \Pi$ – строгое солнце. Тогда Π – замкнутый промежуток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. По теореме 3 M монотонно линейно связно, в силу предложения 1 множество $M \cap \Pi$ также монотонно линейно связно. В силу леммы 4 и упомянутого результата Власова о том, что P -ацикличное множество является солнцем, имеем, что $M \cap \Pi$ – солнце в $C(Q)$. Пусть $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$. Предположим, что $M \cap \Pi$ – не строгое солнце. Тогда по лемме А найдутся точка $x \in \Pi$ и точка $y \in P_{M \cap \Pi} x$ такие, что $z \in \dot{K}(y, x) \cap (M \cap \Pi) \neq \emptyset$. Теперь рассмотрим шар $B(\theta, r)$ такой, что $y, x, z \in \dot{B}(\theta, r)$. По лемме 5 $M \cap B(\theta, r)$ – строгое солнце, но $y \in P_{M \cap B(\theta, r)} x$, а $z \in \dot{K}(y, x) \cap (M \cap B(\theta, r))$, что невозможно по лемме А. Итак, $M \cap \Pi$ – строгое солнце.

Пусть теперь подмножество $\Pi \subset C(Q)$, $\text{int } \Pi \neq \emptyset$, такое, что если M – компактное строгое солнце в $C(Q)$ и $M \cap \text{int } \Pi \neq \emptyset$, то $M \cap \Pi$ – строгое солнце. Установим, что Π – замкнутый промежуток.

Пусть $\theta \in \text{int } \Pi$. Рассмотрим такую точку $\vartheta \in \Pi$, что $\vartheta(q) \neq \theta(q)$ для любого $q \in Q$. (Поскольку $\text{int } \Pi \neq \emptyset$, то ясно, что такая точка ϑ существует.) Предположим, что найдется точка $w \in \text{int } m(\vartheta, \theta)$, $w \notin \Pi$. Рассмотрим множество $L = [\vartheta, w] \cup [w, \theta]$. В силу (2) $w(q) \in (\vartheta(q), \theta(q))$ для любого q . Отсюда L регулярно. Поскольку L компактно, то $P_L x \neq \emptyset$ для любого x . Поэтому из леммы D имеем, что L – строгое солнце; оно компактно и пересекает $\text{int } \Pi$. По предположению $L \cap \Pi$ – строгое солнце. Однако, поскольку $w \notin \Pi$, пересечение $L \cap \Pi$ несвязно. Это невозможно, поскольку любое компактное солнце связно [19; теорема 2]. Итак, $\text{int } m(\vartheta, \theta) \subset \Pi$. Несложно проверить, что отсюда следует, что и $m(\vartheta, \theta) \subset \Pi$ (для этого достаточно рассмотреть пересечения Π с отрезками (строгими солнцами), имеющими начало в $\text{int } \Pi$ и конец в точке границы $m(\vartheta, \theta) \subset \Pi$).

Пусть теперь $v \in \Pi$. Поскольку $\theta \in \text{int } \Pi$, то существует точка $\omega \in \text{int } \Pi$ такая, что $\omega(q) \neq \vartheta(q)$, $\omega(q) \neq \theta(q)$ для всех $q \in Q$, $\|\omega - \theta\| < \|\omega - v\|$. По доказанному выше $m(\theta, \omega) \subset \Pi$. Пусть теперь $u_n \in (\theta, \omega)$, $u_n \rightarrow \theta$ при $n \rightarrow \infty$.

Ясно, что $u_n \in \text{int } \Pi$ и $u_n(q) \neq v(q)$ для всех q . Снова имеем $m(u_n, v) \subset \Pi$. Переходя к пределу, получаем $m(\theta, v) \subset \Pi$.

Итак, мы установили, что $\text{int } \Pi$ — промежуток. Ясно, что множество Π замкнуто. Теперь, чтобы установить, что замыкание Π является промежутком, достаточно воспользоваться предельным переходом. Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] Л. П. Власов, “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *УМН*, **28**:6 (1973), 3–66.
- [2] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, “Проблема выпуклости чебышёвских множеств”, *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188.
- [3] М. И. Карлов, И. Г. Царьков, “Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц”, *Фундам. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 967–978.
- [4] A. L. Brown, “Suns in normed linear spaces which are finite dimensional”, *Math. Ann.*, **279**:1 (1987), 87–101.
- [5] B. Brosowski, F. Deutsch, J. Lambert, P. D. Morris, “Chebyshev sets which are not suns”, *Math. Ann.*, **212**:2 (1974), 89–101.
- [6] H. Berens, L. Hetzelt, “Die Metrische Struktur der Sonnen in $\ell_\infty(n)$ ”, *Aequationes Math.*, **27** (1984), 274–287.
- [7] D. Braess, “Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation”, *J. Approx. Theory*, **11**:3 (1974), 260–274.
- [8] А. Р. Алимов, “Связность солнц в c_0 ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 3–18.
- [9] А. Р. Алимов, “Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ ”, *Функц. анализ и его прилож.*, **39**:1 (2005), 1–10.
- [10] A. R. Alimov, “Characterisations of Chebyshev sets in c_0 ”, *J. Approx. Theory*, **129**:2 (2004), 217–229.
- [11] А. Р. Алимов, “Геометрическая характеристика строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ ”, *Матем. заметки*, **70**:1 (2001), 3–11.
- [12] А. Р. Алимов, “Геометрическое строение чебышёвских множеств в пространствах $\ell^\infty(n)$, c_0 и c ”, *УМН*, **60**:3 (2005), 171–172.
- [13] K. Menger, “Untersuchungen über allgemeine Metrik”, *Math. Ann.*, **100**:1 (1928), 75–163.
- [14] J. Andres, G. Gabor, L. Górniewicz, “Acyclicity of solution sets to functional inclusions”, *Nonlinear Anal.*, **49**:5 (2002), 671–688.
- [15] Ch. B. Dunham, “Chebyshev sets in $C[0, 1]$ which are not suns”, *Canad. Math. Bull.*, **18** (1975), 35–37.
- [16] A. L. Brown, “Suns in polyhedral spaces”, *Seminar of Mathematical Analysis* (Malaga/Seville, 2002/2003), eds. D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo and R. V. Caro, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003, 139–146.
- [17] A. L. Brown, “On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces”, *Functional analysis and optimization*, Workshop/Miniconference. (Canberra, Australia, 1988), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., **20**, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1988, 1–15.
- [18] В. А. Кошечев, “Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *Матем. заметки*, **17**:2 (1975), 193–204.
- [19] В. А. Кошечев, “Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *Матем. заметки*, **19**:2 (1976), 267–278.
- [20] В. А. Кошечев, “Пример несвязного солнца в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **26**:1 (1979), 89–92.

- [21] D. E. Wulbert, “Continuity of metric projections”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **134**:2 (1968), 335–341.
- [22] С. В. Конягин, “Связность множеств в задачах наилучшего приближения”, *Докл. АН СССР*, **261**:1 (1981), 20–23.
- [23] И. Г. Царьков, “О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **40**:2 (1986), 174–196.
- [24] А. А. Васильева, “Замкнутые промежутки в $C(T)$ и $L_\varphi(T)$ и их аппроксимативные свойства”, *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 135–138.
- [25] А. А. Васильева, “Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:4 (2004), 75–116.

А. Р. Алимов (A. R. Alimov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: alimov@shade.msu.ru

Поступила в редакцию

10.08.2005 и 17.05.2006