Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышёва для суммы экспонент, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 2, 141–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:22:11

УДК 517.53

А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова

Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышёва для суммы экспонент

Для функции $f(z) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j z}$ установлены асимптотические равенства для определителей Адамара ее коэффициентов Тейлора. Это позволило в некоторых случаях найти асимптотику уклонения от $f(z)$ аппроксимаций Паде $\Pi_{n,m}(z)$ и рациональных функций наилучшего равномерного приближения $r_{n,m}^*(z) = p_n^*(z) = q_m^*(z)$ при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbf{R}_{n,m}$ — класс всех рациональных функций, числитель которых имеет степень не выше n , а знаменатель — не выше m . Для каждой аналитической в области $G \supset \overline{D} = \{z : |z| \leq 1\}$ функции $f(z)$ соотношение

$$(Q_{m,n} \cdot f - P_{n,m})(z) = Az^{n+m+1} + \dots$$

единственным образом определяет рациональную функцию

$$\Pi_{n,m}(z) = \Pi_{n,m}(z; f) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

из $\mathbf{R}_{n,m}$, которая называется (n, m) -й аппроксимацией Паде. Следующую таблицу

$$\begin{bmatrix} \Pi_{0,0} & \Pi_{1,0} & \dots & \Pi_{n,0} & \dots \\ \Pi_{0,1} & \Pi_{1,1} & \dots & \Pi_{n,1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{0,m} & \Pi_{1,m} & \dots & \Pi_{n,m} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (1)$$

при этом называют таблицей Паде функции $f(z)$. Наряду с таблицей (1) будем рассматривать и таблицу Чебышёва, полученную из (1) заменой функции $\Pi_{n,m}(z)$ на $r_{n,m}^*(z)$, где $r_{n,m}^*(z)$ — одна из дробей наилучшего равномерного приближения $f(z)$ в классе $\mathbf{R}_{n,m}$. Последняя определяется из соотношений

$$\mathbf{R}_{n,m}(f, \overline{D}) = \inf_{r \in \mathbf{R}_{n,m}} \|f - r\| = \|f - r_{n,m}^*\|,$$

где $\|g\| = \sup\{|g(z)| : z \in \overline{D}\}$.

Функции $\Pi_{n,m}(z; f)$ введены Паде в 1892 году при исследовании непрерывных дробей $\exp z$ (см. [1], [2]). В частности, для экспоненты им был найден явный вид $\Pi_{n,m}(z)$ и доказана равномерная сходимость на компактах в $\mathbb{C}$ основных элементов таблицы (1) (строк, столбцов и диагонали). Позже (1913 г.) Перрон (см. [3]) получил компактное интегральное представление числителя и знаменателя дроби $\Pi_{n,m}(z; e^z)$, что позволило (см [4]) установить асимптотику главной диагонали (1).

В работе [5] В. К. Дзядык и Л. И. Филозоф предложили другой метод исследования поведения диагонали таблицы Паде (аппроксимационный метод) и показали, что в смысле сходимости к функции $\exp z$ диагонали таблиц Паде и Чебышёва ведут себя одинаково. Поведение строк таблиц Паде и Чебышёва исследовалось Саффом в [6]–[8]. В этих работах, в частности, найдена асимптотика для разности $e^z - r_{n,m}^*(z)$ при фиксированном m , $n \rightarrow \infty$ и $z \in \overline{D}$.

Вопросы поведения элементов таблиц Паде и Чебышёва на различных множествах из $\mathbb{C}$ рассматривались в работах Саффа, Варги и других математиков (по этому поводу см., например, [9]). Не останавливаясь подробно на результатах, полученных в этом направлении, отметим лишь известную задачу о скорости рациональной аппроксимации функции e^{-x} на полуоси $[0, +\infty)$. Как известно, ее полное решение было найдено в 1987 году А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым на основе конструкции многоточечных аппроксимаций Паде [10]. Работе [10] предшествовали многочисленные публикации так или иначе связанные с этой задачей. В них, в частности, имеется как обилие предлагаемых методов исследования, так и обширная библиография, относящаяся к рациональной аппроксимации $\exp z$ и ее аппроксимациям Паде (см., например, [11]–[13]). Подробный обзор этих результатов имеется также и в цитируемой выше работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [10].

Вернемся опять к таблице (1), когда $z \in \overline{D}$. В этом случае таблица Паде экспоненты полностью исследована Д. Браессом в [14]: для любого $z \in \overline{D}$ и $n + m \rightarrow \infty$

$$e^z - \Pi_{n,m}(z; e^z) = \frac{(-1)^m n! m! e^{\frac{2m}{n+m}z}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (2)$$

Аналогичный результат, относящийся к таблице Чебышёва, получен Л. Трефезеном [15]: при $n + m \rightarrow \infty$

$$\|e^z - r_{n,m}^*(z)\| = \frac{m! n!}{(n+m)!(n+m+1)!} (1 + o(1)). \quad (3)$$

Основываясь на своем результате для круга, Д. Браесс исследовал и случай отрезка $[-1; 1]$: при $n + m \rightarrow \infty$

$$\mathbf{R}_{n,m}(e^x; [-1; 1]) = \frac{m! n!}{2^{n+m} (n+m)!(n+m+1)!} (1 + o(1)).$$

Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что в смысле сходимости к $\exp z$ в $\overline{D}$, поведение отдельных элементов (строк, столбцов, диагонали и др.) таблиц Паде и Чебышёва одинаково в смысле порядка сходимости. С другой стороны, к настоящему времени экспонента остается единственной функцией, для которой

рассматриваемые таблицы изучены в полном объеме. В связи с этим А. И. Аптекаревым в [16] подробно рассматривается задача (постановка принадлежит Е. М. Никишину; по этому поводу см. [16]) о сходимости аппроксимаций Паде для суммы экспонент. Сформулируем основной результат этой работы.

ТЕОРЕМА [16]. Пусть

$$f(z) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j z}, \quad (4)$$

где λ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) – различные комплексные числа; $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_s| > |\lambda_{s+1}| > \dots > |\lambda_k|$. Тогда если $s = 1$, то при любом фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$ $\Pi_{n,m}(z; f)$ равномерно сходится на $\overline{D}$ к $f(z)$; если $s \geq 2$, то такая сходимость имеет место при любом фиксированном $m = ps$, $p = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство теоремы [16] основано на полученной асимптотике определителей Адамара и приводится с помощью одной леммы А. А. Гончара [17, лемма 1].

В данной работе установлены асимптотические равенства для определителей Адамара, уточняющие результаты из [16]. Это позволило в некоторых случаях найти скорость сходимости строк таблиц Паде и Чебышёва для суммы экспонент. В частности, установлена асимптотика уклонения $\Pi_{n,m}(z)$ и $r_{n,m}^*(z)$ от $f(z)$ при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$. Основные результаты статьи докладывались на Одесской школе по теории функций (1991 г.) и анонсированы в [18].

Авторы благодарят профессора В. Н. Русака (Белорусский государственный университет) и профессора А. А. Пекарского (Гроденский государственный университет) за полезные обсуждения и помощь в работе.

§ 2. Основные теоремы

Перейдем к формулировкам полученных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(z)$ определена соотношением (4) и $s = 1$. Тогда для любого фиксированного m и $z \in \overline{D}$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство

$$f(z) - \Pi_{n,m}(z; f) = \frac{(-1)^m m! (\lambda_1 z)^{n+m+1}}{n^{2m} (n+1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 при любом фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n,m}(f; \overline{D}) &= \|f - \Pi_{n,m}\| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{m! |\lambda_1|^{n+m+1}}{n^{2m} (n+m)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Сформулированные теоремы относятся к случаю, когда в сумме (4) есть одна доминирующая компонента. Как следует из (2), (3), (5) и (6), в этой ситуации строки таблиц Паде и Чебышёва ведут себя в смысле сходимости к $f(z)$ одинаково. При этом основной вклад в асимптотику вносит та компонента, которая доминирует.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(z)$ определена соотношением (4), где $k = s$, $\lambda_j = R \exp\{(\varphi_0 + 2\pi j/s)i\}$ ($j = 0, 1, \dots, s-1$), $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Тогда при любом фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$f(z) - \Pi_{sn, sm}(z; f) = \frac{(-s^2 R^s e^{is\varphi_0})^m m! s}{(ns)^{m(s+1)} (ns + s)!} z^{s(n+m+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 4. В предположениях теоремы 3 при любом фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{sn, sm}(f; \overline{D}) &= \|f - \Pi_{n, m}\| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{s^{2m} R^{sm} m! s}{(ns)^{m(s+1)} (ns + s)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (8)$$

В теоремах 3, 4 сумма экспонент имеет s доминирующих компонент. Полагая $R = 1$, $\varphi_0 = \pi/2$ ($\varphi_0 = 0$), $s = k = 2$, получим, что $f(z) = 2 \cos z$ ($f(z) = 2 \operatorname{ch} z$), и в силу однородности оператора Паде Π : $f \rightarrow \Pi_{n, m}$ равенства (7), (8) дают описание поведения строк таблиц Паде и Чебышёва функций $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, которое согласуется с полученным ранее в работах [19], [20]. Выбор чисел в двух предыдущих теоремах обусловлен, прежде всего, этими примерами. Как будет видно из доказательства теорем 1–4 (см. также [16]) поведение строк таблицы Паде зависит от алгебраических свойств чисел $(\lambda_j)_{j=1}^k$. При этом аналоги теорем 3, 4 можно получить, зная асимптотику изменения величин $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_k^n$ при $n \rightarrow \infty$. Без учета этого обстоятельства удастся получить лишь оценку сверху.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $f(z)$ определена равенством (4) и $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_s| = 1 > |\lambda_{s+1}| \geq \dots \geq |\lambda_k|$. Тогда при любом фиксированном $m = ps$, $p = 0, 1, 2, \dots$, и достаточно больших n справедливо неравенство

$$\mathbf{R}_{n, m}(f; \overline{D}) \leq \|f - S_{n, m}\| \leq \frac{c(m, s)}{(n+1)! n^m}, \quad (9)$$

где $S_{n, m}(\cdot; f) \in \mathbf{R}_{n, m}$ – частные рациональные суммы Фурье, знаменатель которых совпадает со знаменателем дроби Паде $\Pi_{n, m}(z; f)$.

В связи с последней теоремой заметим, что с точки зрения рациональной аппроксимации со свободными полюсами рациональные суммы Фурье обстоятельно изучались в работах В.Н. Русака (см., например, [20], [24]). В частности, в [20] рассмотрена аппроксимация такими суммами некоторых аналитических функций $f(z)$, когда в качестве полюсов $S_{n, m}(z; f)$ выбраны полюса $\Pi_{n, m}(z; f)$ (определение $S_{n, m}(z; f)$ см. далее).

§ 3. Доказательства теорем 1, 2

Приступим к доказательству теорем 1, 2. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (10)$$

– разложение в ряд Тейлора функции $f(z)$. Введем в рассмотрение определители Адамара ($c_j = 0$ при $j < 0$)

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

ЛЕММА 1. Пусть $(\lambda_j)_{j=1}^k$ – набор комплексных чисел $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_k|$, $f(z) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j z}$. Тогда для любого фиксированного m и $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_{n,m} = \frac{(-\lambda_1)^{m(m-1)/2}}{n^{m(m-1)}} \prod_{j=1}^m (m-j)! c_{n-m+j} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $f(z)$ коэффициенты степенного ряда (10) имеют вид

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^k \lambda_j^n.$$

Поэтому

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{n+1} \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j^{n+1}}{\sum_{j=1}^k \lambda_j^n} = \frac{\lambda_1}{n+1} (1 + O(q^n)), \quad (13)$$

где q можно считать равным λ_2/λ_1 , т.е. $|q| < 1$. Тогда, разделив j -столбец определителя $\Delta_{n,m}$ на c_{n-m+j} ($j = 1, 2, \dots, m$), получим

$$\Delta_{n,m} = \lambda_1^{m(m-1)/2} \prod_{j=1}^m c_{n-m+j} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ l_1(n-m+1) & \dots & l_1(n) \\ l_2(n-m+1) & \dots & l_2(n) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{m-1}(n-m+1) & \dots & l_{m-1}(n) \end{vmatrix}, \quad (14)$$

где $l_i(j) = c_{j+i}/(\lambda_1^i c_j)$, $1 \leq i \leq m-1$, $n-m+1 \leq j \leq n$. С учетом (13) имеем

$$\begin{aligned} l_i(j) &= \frac{1}{\lambda_1^i} \frac{c_{j+1}}{c_j} \frac{c_{j+2}}{c_{j+1}} \dots \frac{c_{j+i}}{c_{j+i-1}} \\ &= \frac{1}{(j+1)(j+2) \dots (j+i)} (1 + O(q^n)). \end{aligned} \quad (15)$$

Определитель в (14) имеет фиксированный порядок m и по определению равен сумме конечного числа слагаемых, определяемого числом всех перестановок чисел $1, 2, \dots, m$. Каждое такое слагаемое, содержащее множитель $O(q^n)$, имеет более высокий порядок убывания (порядок геометрической прогрессии), чем те слагаемые, в которых этот множитель отсутствует. Поэтому главный член асимптотики $\Delta_{n,m}$ зависит только от первых слагаемых в представлении (15) величин $l_i(j)$. Следовательно,

$$\Delta_{n,m} = \lambda_1^{m(m-1)/2} H(n, m) \prod_{j=1}^m c_{n-m+j} (1 + O(q^n)), \quad (16)$$

где

$$H(n, m) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\frac{1}{n-m+2}} & \frac{1}{\frac{1}{n-m+3}} & \dots & \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \\ \frac{1}{(n-m+2)(n-m+3)} & \frac{1}{(n-m+3)(n-m+4)} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-m+2) \dots n} & \frac{1}{(n-m+3) \dots (n+1)} & \dots & \frac{1}{(n+1) \dots (n+m-1)} \end{vmatrix}.$$

Займемся вычислением определителя $H(n, m)$. Для этого разделим каждый столбец этого определителя на элемент этого определителя, стоящий в последней m -ой строке. В результате получим

$$H(n, m) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\prod_{j=1}^{m-1} (n-m+j+i)} K(n, m), \quad (17)$$

где

$$K(n, m) = \begin{vmatrix} (n-m+2)_{(m-1)} & (n-m+3)_{(m-1)} & \dots & (n+1)_{(m-1)} \\ (n-m+3)_{(m-2)} & (n-m+4)_{(m-2)} & \dots & (n+2)_{(m-2)} \\ (n-m+4)_{(m-3)} & (n-m+5)_{(m-3)} & \dots & (n+3)_{(m-3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n)_{(1)} & (n+1)_{(1)} & \dots & (n+m-1)_{(1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (18)$$

а $(j)_{(i)} = j(j+1) \dots (j+i-1)$. Теперь, учитывая, что

$$(j)_{(i)} - (j+1)_{(i)} = -i(j+1)_{(i-1)}, \quad (19)$$

и вычитая последовательно из первого столбца определителя (18) второй столбец, из второго – третий и т.д., получим

$$K(n, m) = (-1)^{m-1} (m-1)! K(n, m-1).$$

Так как $K(n, 2) = -1$, отсюда и из (17) окончательно будем иметь

$$H(n, m) = (-1)^{m(m-1)/2} \prod_{j=1}^{m-1} j! \prod_{i=1}^m \frac{1}{\prod_{j=1}^{m-1} (n-m+j+i)}. \quad (20)$$

Учитывая (20) и (16), приходим к равенству (12). Лемма 1 доказана.

Для знаменателя аппроксимации Паде $\Pi_{n,m}(z) = P_{n,m}(z)/Q_{m,n}(z)$ имеет место представление (см. [9, с. 16])

$$Q_{m,n}(z) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Определитель $\Delta_{n,m}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{n,m}$ является минором элемента 1 в последней строке определителя (21). Обозначим через $\Delta_{n,m}^j$ миноры элементов z^j ($j = 0, 1, \dots, m$) из этой строки.

ЛЕММА 2. Пусть $(\lambda_j)_{j=1}^k$ – набор комплексных чисел $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_k|$, $f(z) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j z}$. Тогда для любого фиксированного m и $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\Delta_{n,m}^j = \frac{(-\lambda_1)^{m(m-1)/2} g(m)}{n^{m(m-1)}} \prod_{j=1}^{m-1} j! c_{n+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m c_{n-m+k} (1 + O(1/n)), \quad (22)$$

где $g(m)$ зависит только от m , $1 \leq j \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведя преобразования, аналогичные произведенным при вычислении определителя $\Delta_{n,m}$, будем иметь

$$\Delta_{n,m}^j = \lambda_1^{\frac{m(m-1)}{2}} c_{n+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m c_{n-m+j} H^j(n, m) (1 + O(q^n)), \quad (23)$$

где

$$H^j(n, m) = \begin{vmatrix} \frac{1}{n-m+2} & \dots & \frac{1}{n-j+2} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{(n-m+2)(n-m+3)} & \dots & \frac{1}{(n-j+2)(n-j+3)} & \dots & \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-m+2) \dots n} & \dots & \frac{1}{(n-j+2) \dots (n+m+j)} & \dots & \frac{1}{(n+2) \dots (n+m)} \end{vmatrix}.$$

Полужирным шрифтом отмечен $(m-j+1)$ -й столбец, который опускается. Разделив каждый столбец на элемент из этого столбца, стоящий в последней m -ой строке, получим

$$H^j(n, m) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m-j+1}}^{m+1} \frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n-m+k+i)} K^j(n, m), \quad (24)$$

где

$$K^j(n, m) = \begin{vmatrix} (n-m+2)_{(m-1)} & (n-m+3)_{(m-1)} & \dots & (n-j+2)_{(m-1)} & \dots & (n+2)_{(m-1)} \\ (n-m+3)_{(m-2)} & (n-m+4)_{(m-2)} & \dots & (n-j+3)_{(m-2)} & \dots & (n+3)_{(m-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n)_{(1)} & (n+1)_{(1)} & \dots & (n+m-j)_{(1)} & \dots & (n+m)_{(1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (25)$$

$j = 1, 2, \dots, m$. Покажем, что

$$K^j(n, m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{j=1}^{m-1} j! g(m), \quad (26)$$

где $g(m)$ зависит только от m . Действительно, из определения $K^j(n, m)$ и $K(n, m)$

$$\begin{aligned} K^0(n, l) &= K(n, l), & l &= 2, \dots, m; \\ K^l(n, l) &= K(n+1, l), & l &= 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычтем последовательно из первого столбца определителя (25) второй столбец, из второго – третий и т.д. При этом для получаемых разностей будем применять формулы (19) для всех столбцов за исключением $(m-j)$ -го. Каждый элемент $(m-j)$ -го столбца перепишем в виде

$$\begin{aligned} (n-j+1)_{(m-1)} - (n-j+3)_{(m-1)} &= \{(n-j+1)_{(m-1)} - (n-j+2)_{(m-1)}\} \\ &\quad + \{(n-j+2)_{(m-1)} - (n-j+3)_{(m-1)}\}, \\ (n-j+2)_{(m-2)} - (n-j+4)_{(m-2)} &= \{(n-j+2)_{(m-2)} - (n-j+3)_{(m-2)}\} \\ &\quad + \{(n-j+3)_{(m-2)} - (n-j+4)_{(m-2)}\}, \\ &\dots\dots\dots \\ (n+m-j-1)_{(1)} - (n+m-j+1)_{(1)} &= \{-1\} + \{-1\}, \end{aligned}$$

а затем применим формулы (19). В результате получим

$$K^j(n, m) = (-1)^{m-1} (m-1)! [K^{j-1}(n, m-1) + K^j(n, m-1)]. \quad (28)$$

Из (27), (28) с учетом величины определителя $K(n, m)$ легко выводится формула (26). Учитывая (26), (24), (23), получаем равенство (22). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При условии лемм 1, 2

$$Q_{m,n}(z) = \Delta_{n,m} (1 + O(1/n)). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (21) следует, что

$$Q_{m,n}(z) = \Delta_{n,m} \sum_{j=0}^m \frac{\Delta_{n,m}^j}{\Delta_{n,m}} z^j.$$

Отсюда и из равенств (12), (22) получим (29).

Введем в рассмотрение определители $(m+1)$ -го порядка

$$\Delta_{n,m,k} = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{n+m+k-1} & c_{n+m+k} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 3. При условии лемм 1, 2 для любого фиксированного m и $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_{n,m,k} = \frac{(-\lambda_1)^{m(m+1)/2} \lambda_1^{k-1}}{n^{m(m+1)+k-1}} \prod_{j=1}^m (m-j)! (j+k-1) \prod_{j=1}^{m+1} c_{n-m+j} (1 + O(1/n)). \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 1$ $\Delta_{n,m,1} = \Delta_{n+1,m+1}$ и (30) следует из (12). Пусть $k \geq 2$. Проведем те же преобразования с определителем $\Delta_{n,m,k}$, что и в леммах 1, 2, будем иметь

$$\Delta_{n,m,k} = \lambda_1^{m(m+1)/2+k-1} \prod_{j=1}^{m+1} c_{n-m+j} \times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ l_1(n-m+1) & \dots & l_1(n) & l_1(n+1) \\ l_2(n-m+1) & \dots & l_2(n) & l_2(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m-1}(n-m+1) & \dots & l_{m-1}(n) & l_{m-1}(n+1) \\ l_{m+k-1}(n-m+1) & \dots & l_{m+k-1}(n) & l_{m+k-1}(n+1) \end{vmatrix}.$$

Учитывая представление величин $l_i(j)$ в виде (15) и равенства

$$l_{m+k-1}(j) = \frac{1}{(j+1)(j+2) \dots (j+m+k-1)} (1 + O(q^n)),$$

при $n-m+1 \leq j \leq n+1$ с помощью уже известных рассуждений получим

$$\Delta_{n,m,k} = \lambda_1^{m(m+1)/2+k-1} \prod_{j=1}^{m+1} c_{n-m+j} H(n, m, k) (1 + O(q^n)), \quad (31)$$

где

$$H(n, m, k) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\frac{1}{n-m+2}} & \frac{1}{\frac{1}{n-m+3}} & \dots & \frac{1}{\frac{1}{n+2}} \\ \frac{\frac{1}{n-m+2}}{(n-m+2)(n-m+3)} & \frac{\frac{1}{n-m+3}}{(n-m+3)(n-m+4)} & \dots & \frac{\frac{1}{n+2}}{(n+2)(n+3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\frac{1}{(n-m+2) \dots n}}{(n-m+2) \dots (n+k)} & \frac{\frac{1}{(n-m+3) \dots (n+1)}}{(n-m+3) \dots (n+k+1)} & \dots & \frac{\frac{1}{(n+2) \dots (n+m)}}{(n+2) \dots (n+m+k)} \end{vmatrix}.$$

Вынося в каждом столбце элемент последней строки, будем иметь

$$H(n, m, k) = \prod_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\prod_{j=1}^{m+k-1} (n-m+j+i)} K(n, m, k), \quad (32)$$

где

$$K(n, m, k) = \begin{vmatrix} (n-m+2)_{(m+k-1)} & (n-m+3)_{(m+k-1)} & \dots & (n+2)_{(m+k-1)} \\ (n-m+3)_{(m+k-2)} & (n-m+4)_{(m+k-2)} & \dots & (n+3)_{(m+k-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+1)_{(k)} & (n+2)_{(k)} & \dots & (n+m+1)_{(k)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

В определителе $K(n, m, k)$ вычтем из первого столбца второй столбец, из второго – третий и т. д., а затем в полученном определителе каждый столбец разделим на элемент этого столбца, стоящий в последней строке. В результате получим

$$K(n, m, k) = (-1)^m \prod_{j=1}^m (j+k-1)(n+j+1)_{(k-1)} K(n+1, m).$$

Учитывая значение определителя $K(n+1, m)$, окончательно получим

$$K(n, m, k) = (-1)^{m(m+1)/2} \prod_{j=1}^m (m-j)! (j+k-1)(n+j+1)_{(k-1)}. \quad (33)$$

Теперь из (33), (32) и (31) легко получить равенство (30). Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\Pi_{n,m}(z) = P_{n,m}(z)/Q_{m,n}(z)$ – аппроксимация Паде функции

$$f(z) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j z},$$

и $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_k|$. Положим $R_{n,m}(z) = Q_{m,n}(z)f(z) - P_{n,m}(z)$. Тогда [9, с. 17]

$$R_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{n,m,k} z^{n+m+k} = \Delta_{n,m,1} z^{n+m+1} + L(z). \quad (34)$$

Для оценки $L(z)$ воспользуемся леммой 3: для любого $z \in \overline{D}$

$$|L(z)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |\Delta_{n,m,k}| = |\Delta_{n,m,1}| \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\Delta_{n,m,k}}{\Delta_{n,m,1}} \right| = |\Delta_{n,m,1}| O(1/n). \quad (35)$$

На основании (29), (34) и (35) будем иметь

$$f(z) - \Pi_{n,m}(z) = \frac{R_{n,m}(z)}{Q_{m,n}(z)} = \frac{\Delta_{n,m,1} z^{n+m+1} (1 + O(1/n))}{\Delta_{n,m} (1 + O(1/n))}.$$

Теперь для доказательства теоремы 1 достаточно воспользоваться равенствами (12) и (30), которые получены в леммах 1, 3. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из (5) очевидным образом вытекает, что

$$\mathbf{R}_{n,m}(f) \leq \frac{|\lambda_1|^{n+m+1} m!}{n^{2m} (n+1)!} (1 + O(1/n)). \quad (36)$$

Для получения оценки снизу для $\mathbf{R}_{n,m}(f)$ воспользуемся леммой В. К. Дзядька [21, лемма 3.1]. Пусть $r_{n,m}(z)$ – рациональная дробь наилучшего приближения функции $f(z)$, а $\varphi(z) = f(z) - \Pi_{n,m}(z)$. Тогда, учитывая что $\varphi(z)$ имеет не менее $(n+m+1)$ -го нуля в круге $|z| < 1$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n,m}(f) &= \|f - r_{n,m}\| = \|f - \Pi_{n,m} - (r_{n,m} - \Pi_{n,m})\| \\ &= \|\varphi - \tilde{r}_{n+m,2m}\| \geq \mathbf{R}_{n+m,2m}(\varphi) \geq \min_{|z|=1} |\varphi(z)|. \end{aligned}$$

Учитывая (5) и (36), равенство (6), а вместе с ним и теорема 2 доказаны.

§ 4. Доказательства теорем 3, 4, 5

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 2 с помощью леммы В. К. Дзядыка и равенства (7), полученного в теореме 3. Поэтому перейдем к доказательству теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\lambda_j = R \exp\{(\varphi_0 + 2\pi(j-1)/s)i\}$, $j = 1, 2, \dots, s$; а $f(z) = \sum_{j=1}^s e^{\lambda_j z}$. Тогда для коэффициентов Тейлора $f(z)$ получим представление

$$c_n = \frac{(Re^{i\varphi_0})^n}{n!} \sum_{j=1}^s e^{\frac{2\pi(j-1)}{s}ni}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} c_{ns} &= \frac{s(Re^{i\varphi_0})^{ns}}{(ns)!}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ c_j &= 0, \quad j \neq ns. \end{aligned} \quad (37)$$

Поэтому функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{ns} z^{ns}.$$

Произведя замену $\xi = z^s$, определим функцию $\tilde{f}(\xi)$:

$$\tilde{f}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n \xi^n,$$

где $\tilde{c}_n = c_{ns}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Pi_{ns,ms}(z; f) &= \Pi_{n,m}(z^s; \tilde{f}), \\ f(z) - \Pi_{ns,ms}(z; f) &= \tilde{f}(\xi) - \Pi_{n,m}(\xi; \tilde{f}). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно изучить поведение аппроксимаций Паде $\Pi_{n,m}(\xi; \tilde{f})$. Обозначим через $\tilde{\Delta}_{n,m}$ определители Адамара функции $\tilde{f}(\xi)$.

ЛЕММА 4. При указанном выборе чисел $(\lambda_j)_{j=1}^s$ для любого фиксированного m и $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\tilde{\Delta}_{n,m} = \frac{(-s^2 R^s e^{i\varphi_0 s})^{m(m-1)/2}}{(ns)^{(s+1)m(m-1)/2}} \prod_{j=1}^m (m-j)! c_{(n-m+1)s} (1 + O(1/n)). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\tilde{c}_n$ и (37) следует, что

$$\frac{\tilde{c}_{n+1}}{\tilde{c}_n} = \frac{(Re^{i\varphi_0})^s}{(ns+1)(ns+2)\cdots(ns+s)}. \quad (39)$$

Тогда, разделив j -столбец определителя $\tilde{\Delta}_{n,m}$ на $\tilde{c}_{n-m+j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{n,m} &= z_1^{m(m-1)/2} \prod_{j=1}^m \tilde{c}_{n-m+j} \\ &\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{l}_1(n-m+1) & \tilde{l}_1(n-m+2) & \dots & \tilde{l}_1(n) \\ \tilde{l}_2(n-m+1) & \tilde{l}_2(n-m+2) & \dots & \tilde{l}_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{l}_{m-1}(n-m+1) & \tilde{l}_{m-1}(n-m+2) & \dots & \tilde{l}_{m-1}(n) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\tilde{l}_i(j) = \frac{\tilde{c}_{j+i}}{z_1^i \tilde{c}_j}$, $z_1 = (Re^{i\varphi_0})^s$, а $1 \leq i \leq m-1$, $n-m+1 \leq j \leq n$. С учетом (39) при тех же i и j имеем

$$\frac{\tilde{c}_{j+i}}{\tilde{c}_j} = \frac{z_1^i}{(js+1)(js+2)\cdots(js+is)}. \quad (41)$$

Отсюда

$$\tilde{\Delta}_{n,m} = z_1^{m(m-1)/2} \tilde{H}(n, m) \prod_{j=1}^m \tilde{c}_{n-m+j}, \quad (42)$$

где

$$\tilde{H}(n, m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \prod_{j=1}^s \frac{1}{(n-m+1)s+j} & \prod_{j=1}^s \frac{1}{(n-m+2)s+j} & \dots & \prod_{j=1}^s \frac{1}{ns+j} \\ \prod_{j=1}^{2s} \frac{1}{(n-m+1)s+j} & \prod_{j=1}^{2s} \frac{1}{(n-m+2)s+j} & \dots & \prod_{j=1}^{2s} \frac{1}{ns+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{j=1}^{(m-1)s} \frac{1}{(n-m+1)s+j} & \prod_{j=1}^{(m-1)s} \frac{1}{(n-m+2)s+j} & \dots & \prod_{j=1}^{(m-1)s} \frac{1}{ns+j} \end{vmatrix}.$$

Остается найти асимптотику определителя $\tilde{H}(n, m)$. Для этого введем в рассмотрение $m-1$ функций

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=1}^{ks} \frac{1}{x+j}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1;$$

и положим $n_j = (n-m+j)s$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда согласно обобщению теоремы Ролля на систему функций [22, с. 64], существуют числа ξ_j , $j = 1, 2, \dots, m$, $n_1 \leq$

$\xi_j \leq n_m$, такие, что

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}(n, m) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(n_1) & \varphi_1(n_2) & \dots & \varphi_1(n_m) \\ \varphi_2(n_1) & \varphi_2(n_2) & \dots & \varphi_2(n_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m-1}(n_1) & \varphi_{m-1}(n_2) & \dots & \varphi_{m-1}(n_m) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (n_j - n_i)}{\prod_{j=1}^{m-1} j!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1(\xi_1) & \varphi'_1(\xi_2) & \dots & \varphi_1^{(m-1)}(\xi_m) \\ \varphi_2(\xi_1) & \varphi'_2(\xi_2) & \dots & \varphi_2^{(m-1)}(\xi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m-1}(\xi_1) & \varphi'_{m-1}(\xi_2) & \dots & \varphi_{m-1}^{(m-1)}(\xi_m) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (n_j - n_i)}{\prod_{j=1}^{m-1} j!} J_{n, m}, \tag{43}
 \end{aligned}$$

где $J_{n, m}$ — алгебраическое дополнение 1, стоящей в первой строке предыдущего определителя. Используя формулу Лейбница

$$\left(\prod_{j=1}^p \psi_j(x) \right)^{(l)} = \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_p = l} \frac{l!}{\prod_{j=1}^p (l_j)!} \prod_{j=1}^p \psi_j^{(l_j)}(x)$$

при $k = 1, 2, \dots, m-1$, $l = 1, 2, \dots, m-1$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 (\varphi_k(\xi_{l+1}))^{(l)} &= \left(\prod_{j=1}^{ks} \frac{1}{x+j} \right)^{(l)} \Big|_{x=\xi_{l+1}} \\
 &= \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_{ks} = l} \frac{l!}{\prod_{j=1}^{ks} (l_j)!} \prod_{j=1}^{ks} \left(\frac{1}{x} \right)^{(l_j)} \Big|_{x=ns} (1 + O(1/n)) \\
 &= \left(\frac{1}{x^{ks}} \right)^{(l)} \Big|_{x=ns} (1 + O(1/n)) = \frac{(-1)^l (ks)_{(l)}}{(ns)^{ks+l}} (1 + O(1/n)).
 \end{aligned}$$

Тогда $J_{n, m}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 J_{n, m} &= \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{(-1)^s}{(ns)^{s+1}} (1 + O(1/n)) & \dots & \frac{(-1)^{m-1} (s)_{(m-1)}}{(ns)^{s+(m-1)}} (1 + O(1/n)) \\ \frac{(-1)^{2s}}{(ns)^{2s+1}} (1 + O(1/n)) & \dots & \frac{(-1)^{m-1} (2s)_{(m-1)}}{(ns)^{2s+(m-1)}} (1 + O(1/n)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{(m-1)s}}{(ns)^{(m-1)s+1}} (1 + O(1/n)) & \dots & \frac{(-1)^{m-1} ((m-1)s)_{(m-1)}}{(ns)^{(m-1)s+(m-1)}} (1 + O(1/n)) \end{vmatrix}. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Определитель, составленный из первых слагаемых предыдущего определителя, легко вычисляется:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \frac{(-1)s}{(ns)^{s+1}} & \frac{(-1)^2 s(s+1)}{(ns)^{s+2}} & \cdots & \frac{(-1)^{m-1} (s)_{(m-1)}}{(ns)^{s+(m-1)}} \\ \frac{(-1)2s}{(ns)^{2s+1}} & \frac{(-1)^2 2s(2s+1)}{(ns)^{2s+2}} & \cdots & \frac{(-1)^{m-1} (2s)_{(m-1)}}{(ns)^{2s+(m-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(-1)(m-1)s}{(ns)^{(m-1)s+1}} & \frac{(-1)^2 (m-1)s((m-1)s+1)}{(ns)^{(m-1)s+2}} & \cdots & \frac{(-1)^{m-1} ((m-1)s+1)_{(m-1)}}{(ns)^{(m-1)s+(m-1)}} \end{vmatrix} \\
&= \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(ns)^{(s+1)m(m-1)/2}} \begin{vmatrix} s & s^2 & \cdots & s^{m-1} \\ 2s & (2s)^2 & \cdots & (2s)^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m-1)s & ((m-1)s)^2 & \cdots & ((m-1)s)^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(ns)^{(s+1)m(m-1)/2}} s^{m(m-1)/2} \prod_{j=1}^{m-1} j!. \tag{45}
\end{aligned}$$

Вычисленный определитель имеет порядок убывания равный $1/n^{(s+1)m(m-1)/2}$. С другой стороны, определитель $J_{n,m}$ представляет собой сумму конечного числа слагаемых, каждое из которых, если оно не содержит множителя $O(1/n)$, как нетрудно убедиться, имеет такой же порядок убывания $1/n^{(s+1)m(m-1)/2}$. Присутствие в слагаемом множителей вида $O(1/n)$ увеличивает его порядок убывания по крайней мере на 1. Поэтому главный член асимптотики определителя $J_{n,m}$ в точности равен вычисленному определителю. Тогда из (43)–(45) и (40) очевидным образом следует (38). Лемма доказана.

По аналогии введем в рассмотрение определители $\tilde{\Delta}_{n,m}^j, j = 1, 2, \dots, m; \tilde{\Delta}_{n,m}^0 = \tilde{\Delta}_{n,m}$. Рассуждая как и при доказательстве леммы 4, получим, что

$$\tilde{\Delta}_{n,m}^j = \tilde{\Delta}_{n,m} O(1/n).$$

Доказательство теоремы 3. таким образом, завершает следующая лемма.

ЛЕММА 5. При указанном выборе чисел $(\lambda_j)_{j=1}^s$ для любого фиксированного m и $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{n,m,k} &= \frac{(-s^2 R^s e^{i\varphi_0 s})^{m(m+1)/2} (R^s e^{i\varphi_0 s})^{k-1}}{(ns)^{(s+1)m(m+1)/2 + (k-1)s}} \\
&\quad \times \prod_{j=1}^m (m-j)! (j+k-1) \prod_{j=1}^{m+1} c_{(n-m+j)s} (1 + O(1/n)). \tag{46}
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прделав те же преобразования с определителем $\tilde{\Delta}_{n,m,k}$, что и в лемме 4, получим

$$\tilde{\Delta}_{n,m,k} = z_1^{\frac{m(m+1)}{2} + k - 1} \tilde{H}(n, m, k) \prod_{j=1}^{m+1} \tilde{c}_{n-m+j},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}(n, m, k) = \\ = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \prod_{j=1}^s \frac{1}{(n-m+1)s+j} & \dots & \prod_{j=1}^s \frac{1}{ns+j} & \prod_{j=1}^s \frac{1}{(n+1)s+j} \\ \prod_{j=1}^{2s} \frac{1}{(n-m+1)s+j} & \dots & \prod_{j=1}^{2s} \frac{1}{ns+j} & \prod_{j=1}^{2s} \frac{1}{(n+1)s+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{j=1}^{(m-1)s} \frac{1}{(n-m+1)s+j} & \dots & \prod_{j=1}^{(m-1)s} \frac{1}{ns+j} & \prod_{j=1}^{(m-1)s} \frac{1}{(n+1)s+j} \\ \prod_{j=1}^{(m+k-1)s} \frac{1}{(n-m+1)s+j} & \dots & \prod_{j=1}^{(m+k-1)s} \frac{1}{ns+j} & \prod_{j=1}^{(m+k-1)s} \frac{1}{(n+1)s+j} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Введем обозначения $\varphi_m(x) = \prod_{j=1}^{(m+k-1)s} 1/(x+j)$, $n_{m+1} = (n+1)s$ и применив к системе функций $(\varphi_k(x))_{k=1}^m$ обобщенную теорему Ролля, получим равенство

$$\tilde{H}(n, m, k) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m+1} (n_j - n_i)}{\prod_{j=1}^m j!} J_{n, m, k},$$

в котором асимптотика определителя $J_{n, m, k}$ находится как и в лемме 4 для определителя $J_{n, m}$. Приведем заключительные выкладки

$$\begin{aligned} J_{n, m, k} &= \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{(ns)^{(s+1)m(m+1)/2+(k-1)s}} (1 + O(1/n)) \\ &\times \begin{vmatrix} s & s^2 & \dots & s^m \\ 2s & (2s)^2 & \dots & (2s)^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1)s & ((m-1)s)^2 & \dots & ((m-1)s)^m \\ (m+k-1)s & ((m+k-1)s)^2 & \dots & ((m+k-1)s)^m \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-s)^{m(m+1)/2}}{(ns)^{(s+1)m(m+1)/2+(k-1)s}} \prod_{j=1}^m (m-j)! (j+k-1) (1 + O(1/n)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим

$$f(z) - \Pi_{ns, ms}(z) = \frac{\tilde{\Delta}_{n, m, 1}}{\tilde{\Delta}_{n, m}} z^{(n+m+1)s} (1 + O(1/n)).$$

Отсюда следует (7). Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $f(z)$ аналитична в G и задается степенным рядом (10). Через $\varkappa(z)$ будем обозначать произведение Бляшке, имеющее $(n-m)$ -кратный нуль при $z = 0$ и нули в точках $(w_k)_{k=1}^m$, $|w_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, m$; т.е.

$$\varkappa(z) = z^{n-m} \prod_{k=1}^m \frac{z - w_k}{1 - \bar{w}_k z} = z^{n-m} \frac{z^m + \bar{b}_1 z^{m-1} + \dots + \bar{b}_m}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m}. \quad (47)$$

Введем в рассмотрение частную сумму Фурье функции $f(z)$ по ортогональной системе Такенака–Малькмиста (подробнее см. [23], [24]):

$$S_{n,m}(z; f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} f(\xi) \frac{\xi \varkappa(\xi) - z \varkappa(z)}{(\xi - z) \xi \varkappa(\xi)} d\xi.$$

Известно, что $S_{n,m}(z; f)$ есть рациональная функция, имеющая в числителе полином степени не выше n , а в знаменателе полином $1 + b_1 z + \dots + b_m z^m$, интерполирующая функцию $f(z)$ в корнях произведения Бляшке (47) с кратностью равной кратности корней. Полюса $S_{n,m}(z; f)$, таким образом, совпадают с точками $(1/\overline{w_k})_{k=1}^m$ и являются свободными параметрами, которые можно выбирать в зависимости от свойств функции $f(z)$. В [20] доказано, что если $\Delta_{n,m} \neq 0$ и числа $(b_k)_{k=1}^m$ выбирать как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^m b_k c_{n+j-k} = -c_{n+j} \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

то знаменатели $S_{n,m}(z; f)$ и $P_{n,m}(z; f)$ совпадают и для любых $z \in \overline{D}$

$$|f(z) - S_{n,m}(z; f)| \leq c \sum_{j=m+1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^m b_k c_{n+j-k} \right|.$$

В условиях теоремы 5 из результатов работы [16] следует, что $|b_k| = O(1/n^k)$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Учитывая, что для суммы экспонент (4)

$$|c_{n+j}| = O(1/(n+j-k)!),$$

оценивая правую часть последнего неравенства, получим (9). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Padé H.* Memoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle // Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 1899. V. 16. №3. P. 394–426.
2. *Padé H.* Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles // Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 1892. V. 9. P. 1–93.
3. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. New York: Chel. Publ. Comp., 1948.
4. *Luke Y. L.* The special functions and their approximations. V. 53. New York–London: Acad. Press, 1969.
5. *Дзядык В. К., Филозоф Л. И.* О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций // Матем. сб. 1978. Т. 107(149). С. 347–363.
6. *Saff E. B.* The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 483–493.
7. *Saff E. B.* On the degree of best rational approximation to the exponential function // J. Approx. Theory. 1973. V. 9. №2. P. 97–101.
8. *Saff E. B.* The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 32. №1. P. 187–194.
9. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
10. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134(176). С. 306–352.

11. *Varga R. S.* Topics in polynomial and rational interpolation and approximation. University of Montreal Press, 1982.
12. *Varga R. S.* Scientific computation on some mathematical conjectures // Approximation theory / ed. S. K. Chui, L. L. Schumaker and J. D. Ward Academic Press, 1986. P. 191–209.
13. *Trefethen L. N., Gutknecht M.* The Caratheodory–Fejér method for real rational approximation // SIAM J. Numer. Anal. 1983. V. 20. P. 420–436.
14. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. № 4. P. 375–379.
15. *Trefethen L. N.* The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. № 4. P. 380–384.
16. *Аптеккерев А. И.* Асимптотика определителей Адамара и сходимость строк аппроксимаций Паде для суммы экспонент // Матем. сб. 1980. Т. 113(155). С. 520–537.
17. *Гончар А. А.* О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций // Матем. сб. 1975. Т. 98(140). С. 564–577.
18. *Старовойтов А. П., Старовойтова Н. А.* Поведение строк таблиц Паде и Чебышёва для суммы экспонент // Докл. Академии наук Беларуси. 1992. Т. 36. № 3–4. С. 202–204.
19. *Березкина Л. Л., Русак В. Н.* О наилучшей рациональной аппроксимации некоторых целых функций // Весці АН БССР. Сер. фіз.-матем. навук. 1990. № 4. С. 27–32.
20. *Русак В. Н.* Исследование строк рациональной таблицы Чебышёва для индивидуальных аналитических функций // Весці АН БССР. Сер. фіз.-матем. навук. 1988. № 6. С. 26–30.
21. *Дзядык В. К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ // Матем. сб. 1979. Т. 108 (150). № 2. С. 247–267.
22. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
23. *Джрбачян М. М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-матем. наук. 1957. Т. 9. № 7. С. 5–83.
24. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979.