Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Милованов, Полные инволютивные наборы функций на кокасательных расслоениях компактных солвмногообразий, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 5, 115–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 06:41:25

УДК 512.816.5+514.756.4

М. В. Милованов

Полные инволютивные наборы функций на кокасательных расслоениях компактных солвмногообразий

В работе доказано существование полного инволютивного набора линейных по импульсам аналитических функций на кокасательном расслоении произвольного компактного солвмногообразия.

Библиография: 11 названий.

Введение

Согласно теореме Лиувилля гамильтонова система дифференциальных уравнений на симплектическом многообразии M^{2n} интегрируется в квадратурах, если известны n ее независимых первых интегралов в инволюции. Интегрируемость по Лиувиллю играет весьма важную роль в аналитической механике [1].

Говорят, что на симплектическом многообразии M^{2n} размерности $2n$ гладкие функции $h_1, h_2, \dots, h_n$ образуют *полный инволютивный набор*, если они (почти всюду) функционально независимы и находятся попарно в инволюции. В этом случае любая гладкая функция вида $h = f(h_1, h_2, \dots, h_n)$ является гамильтонианом интегрируемой системы.

А. Т. Фоменко сформулировал следующую общую задачу [2; гл. 5]. Дано вещественно-аналитическое симплектическое многообразие. Существует ли на нем хотя бы один полный инволютивный набор, состоящий из аналитических функций? Каковы алгоритмы эффективного построения таких наборов?

Разработка новых методов построения полных инволютивных наборов функций для того или иного класса симплектических многообразий стимулирует развитие теории интегрирования гамильтоновых систем.

Важнейшими примерами симплектических многообразий являются кокасательные расслоения дифференцируемых многообразий [1]. Если $K = G/D$ – факторпространство связной группы Ли G по ее замкнутой подгруппе D , то кокасательное расслоение T^*K – аналитическое симплектическое многообразие.

Еще один важный класс аналитических симплектических многообразий образуют орбиты коприсоединенного представления связных групп Ли G [1].

В работе [3] был разработан алгоритм построения полных инволютивных наборов аналитических функций на орбитах общего положения коприсоединенного представления произвольной связной разрешимой группы Ли. Пусть теперь G – связная разрешимая группа Ли, D – ее замкнутая подгруппа. Факторпространство $K = G/D$ называется *солвмногообразием*. Наибольший интерес вызывают компактные солвмногообразия.

Главным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА. *На кокасательном расслоении $M = T^*K$ любого компактного солвмногообразия K существует полный инволютивный набор аналитических функций, каждая из которых линейна по импульсам в стандартной (локальной) канонической системе координат на M и может быть указана явно.*

Этот результат анонсирован автором в [4].

Метод построения таких наборов опирается на некоторые новые структурные результаты теории компактных солвмногообразий, представляющие самостоятельный интерес. Эти результаты позволяют, в частности, указать на базе K расслоения M всюду определенные и почти всюду независимые аналитические функции в количестве равном $\dim K$. Поднимая их на M , получаем еще один полный инволютивный набор на M , состоящий из аналитических функций, которые не зависят от импульсов.

Поскольку некомпактные солвмногообразия в этой работе не рассматриваются, то в дальнейшем всякое компактное солвмногообразие будет для краткости называться просто солвмногообразием. Необходимые нам факты о солвмногообразиях можно найти в [5].

§ 1. Некоторые сведения о кокасательных расслоениях

Пусть K – произвольное n -мерное аналитическое многообразие и $M = T^*K$ – его кокасательное расслоение. Множество M имеет естественную структуру аналитического многообразия размерности $2n$. Точка из M – это 1-форма на касательном пространстве к K в какой-либо точке из K . Выберем на многообразии K произвольную локальную систему координат и точку с координатами $(q_1, \dots, q_n)$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – касательные векторы к координатным кривым в этой точке, а $v_1^*, \dots, v_n^*$ – дуальный базис линейных форм к базису $v_1, \dots, v_n$. Рассмотрим произвольную линейную форму $x \in M$ в точке $(q_1, \dots, q_n)$. Ее можно представить в виде $x = p_1 v_1^* + \dots + p_n v_n^*$, так что x характеризуется набором $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. В результате на M появляется локальная система координат, а совокупность таких локальных координатных систем превращает M в аналитическое многообразие.

Кокасательное расслоение M имеет естественную симплектическую структуру. В описанных выше локальных координатах эта структура задается формулой

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Пусть G – произвольная группа Ли преобразований многообразия K . Если $\varphi(g)$ обозначает диффеоморфизм K , соответствующий элементу $g \in G$, то $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$. Так как каждый диффеоморфизм K переводит 1-формы на K в 1-формы, то $\varphi(g)$ индуцирует диффеоморфизм $\varphi^*(g)$ кокасательного расслоения M . При этом $\varphi^*(g)$ сохраняет симплектическую структуру ω^2 и $\varphi^*(g_1 g_2) = \varphi^*(g_2) \varphi^*(g_1)$. Поэтому $g \mapsto \varphi^*(g^{-1})$ есть представление группы G в группу симплектических диффеоморфизмов многообразия M . Это действие G на M и будет далее рассматриваться.

Всякая однопараметрическая подгруппа $\gamma(t)$ группы G задает на M фазовый поток, который имеет однозначную функцию Гамильтона h . Если действие $\gamma(t)$ на K имеет в локальных координатах $(q_1, \dots, q_n)$ вид

$$(q_1, \dots, q_n) \xrightarrow{\gamma(t)} (q_1(t), \dots, q_n(t)),$$

где $q_i(t) = \varphi_i(t, q_1, \dots, q_n)$, то соответствующий гамильтониан h на многообразии M в локальных координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ вычисляется по формуле

$$h(p, q) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0, q_1, \dots, q_n)p_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(0, q_1, \dots, q_n)p_n. \quad (1)$$

В результате каждому элементу a алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G соответствует гамильтониан h_a на M , отвечающий однопараметрической подгруппе $\gamma(t) = \exp ta$. При этом h_a линейно зависит от a и $h_{[a,b]} = \{h_a, h_b\}$, где $[a, b]$ – коммутатор элементов a и b алгебры Ли $\mathcal{G}$, а справа записана скобка Пуассона функций h_a и h_b [1; добавление 5].

Скобка Пуассона двух функций на M в координатах (p, q) вычисляется по формуле

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Говорят, что функции f и g на M *находятся в инволюции*, если их скобка Пуассона тождественно равна нулю: $\{f, g\} \equiv 0$. Гамильтонианы h_a и h_b находятся в инволюции тогда и только тогда, когда однопараметрические подгруппы $\exp ta$ и $\exp tb$ коммутируют на K .

§ 2. Нильпотентный случай

Начнем решение поставленной задачи с рассмотрения кокасательных расслоений компактных солвмногообразий вида $K = G/D$, где G – связная нильпотентная группа Ли, а D – ее замкнутая подгруппа. Такие многообразия называются *нильмногообразиями*. Нильмногообразия были введены и глубоко изучены А. И. Мальцевым [6] и нашли важные применения в алгебре и геометрии. Не ограничивая общности, можно считать, что группа G односвязна, а D – ее дискретная подгруппа. При этом D изоморфна фундаментальной группе нильмногообразия $K = G/D$ и определяет его с точностью до аналитического диффеоморфизма.

Пусть система однопараметрических подгрупп $d_1(t), \dots, d_n(t)$ группы G удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) всякий элемент G представим в форме $d_1(q_1) \cdots d_n(q_n)$;
- 2) совокупность элементов вида $d_i(q_i)d_{i+1}(q_{i+1}) \cdots d_n(q_n)$, $1 \leq i \leq n$, есть замкнутый нормальный делитель G_i в G ;
- 3) факторгруппы G_i/G_{i+1} односвязные однопараметрические.

Тогда любой элемент $x \in G$ может быть однозначно представлен в виде

$$x = d_1(q_1) \cdots d_n(q_n).$$

Ясно, что $h_1, \dots, h_n$ функционально независимы и аналитичны. Из коммутативности G вытекает, что они находятся попарно в инволюции и, следовательно, образуют полный инволютивный набор на M .

Воспользуемся индукцией по размерности группы G . Поскольку связная нильпотентная группа Ли G размерности 1 или 2 коммутативна, то для соответствующего нильногообразия $K = G/D$ теорема уже доказана. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\dim G > 2$.

Пусть $d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)$ – система координат 2-го рода в G , согласованная с D . Рассмотрим группу $G_0 = \{d_2(q_2) \cdots d_n(q_n) \mid q_i \in \mathbb{R}\}$ и ее подгруппу $D_0 = \{d_2(z_2) \cdots d_n(z_n) \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$. Группа G_0 есть связная односвязная нильпотентная группа Ли, а D_0 – ее равномерная дискретная подгруппа. Семейство однопараметрических подгрупп $d_2(t), \dots, d_n(t)$ образует на G_0 систему координат 2-го рода. Кроме того, G_0 является замкнутым нормальным делителем группы G и $D_0 = D \cap G_0$.

Поскольку $\dim G_0 < \dim G$, то будем предполагать, что на $K_0 = G_0/D_0$ уже определено действие однопараметрических подгрупп $\gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$ таких, что на $M_0 = T^*K_0$ им соответствуют аналитические гамильтонианы $h_2, \dots, h_n$, образующие на M_0 полный инволютивный набор.

Группа G является полупрямым произведением подгруппы $d_1(t)$ и своего нормального делителя G_0 : $G = d_1(t) \cdot G_0$. Поскольку G действует транзитивно на нильногообразии $K = G/D$ левыми сдвигами, то и G_0 действует на K , но уже не транзитивно. В результате K расслаивается на орбиты действия G_0 на K , каждая из которых является подмногообразием в K . Пусть $\mathcal{O}$ – одна из таких орбит. Покажем, что $\mathcal{O}$ содержит ровно один смежный класс вида $d_1(q_1)D$.

Выберем в $\mathcal{O}$ произвольный класс gD . Элемент g можно представить в виде $g = d_1(q_1)g_0$, $g_0 \in G_0$. Так как G_0 – нормальный делитель G , то элемент $g'_0 = d_1(q_1)g_0d_1(q_1)^{-1}$ тоже принадлежит G_0 и $g = g'_0d_1(q_1)$. Поэтому при левом сдвиге многообразия K на элемент g'_0 класс $d_1(q_1)D$ переходит в класс gD . Следовательно, орбита $\mathcal{O}$ содержит класс $d_1(q_1)D$.

Проверим, что если $d_1(q'_1)D$ – еще один класс из орбиты $\mathcal{O}$, то $d_1(q'_1)D = d_1(q_1)D$. Так как оба класса лежат на одной орбите, то найдется элемент $g_0 \in G_0$ такой, что $d_1(q'_1)D = g_0d_1(q_1)D$. Это означает, что существует $d \in D$, для которого

$$d_1(q'_1)d = g_0d_1(q_1). \quad (2)$$

Так как $d = d_1(z_1)d_2(z_2) \cdots d_n(z_n)$, $z_i \in \mathbb{Z}$, то $d = d_1(z_1)d_0$, где $z_1 \in \mathbb{Z}$, $d_0 \in G_0$. Поэтому $d_1(q'_1)d = d_1(q'_1 + z_1)d_0$. В то же время

$$g_0d_1(q_1) = d_1(q_1)(d_1(q_1)^{-1}g_0d_1(q_1)) = d_1(q_1)g''_0, \quad g''_0 \in G_0.$$

Поскольку $G = d_1(t) \cdot G_0$ – полупрямое произведение, то из (2) следует, что $d_1(q_1) = d_1(q'_1 + z_1)$. Но тогда

$$d_1(q_1)D = d_1(q'_1 + z_1)D = d_1(q'_1)d_1(z_1)D = d_1(q'_1)D,$$

так как $d_1(z_1) \in D$.

Стационарной подгруппой класса $d_1(q_1)D$ относительно действия группы G является $d_1(q_1)Dd_1(-q_1)$. Ее пересечение с G_0 является стационарной подгруппой класса $d_1(q_1)D$ относительно действия G_0 . Так как $D \cap G_0 = D_0$ и G_0 – нормальный делитель группы G , то это пересечение совпадает с $d_1(q_1)D_0d_1(-q_1)$. Поэтому [7; гл. 2, теорема 3.2] орбита $\mathcal{O}$ гомеоморфна факторпространству $G_0/d_1(q_1)D_0d_1(-q_1)$. Нужный гомеоморфизм устанавливается так:

$$g_0d_1(q_1)D \mapsto g_0(d_1(q_1)D_0d_1(-q_1)), \quad g_0 \in G_0.$$

В свою очередь, $G_0/d_1(q_1)D_0d_1(-q_1)$ гомеоморфно G_0/D_0 . Соответствующий гомеоморфизм таков:

$$g_0(d_1(q_1)D_0d_1(-q_1)) \mapsto (d_1(-q_1)g_0d_1(q_1))D_0.$$

В результате получаем следующий гомеоморфизм $\mathcal{O}$ на $K_0 = G_0/D_0$:

$$g_0d_1(q_1)D \mapsto (d_1(-q_1)g_0d_1(q_1))D_0.$$

Заметим, что если $g = g_0d_1(q_1)$, то $g = d_1(q_1)(d_1(-q_1)g_0d_1(q_1))$ – естественное разложение элемента g в полупрямом произведении $G = d_1(t) \cdot G_0$. Поэтому при любом выборе орбиты $\mathcal{O}$ построенный гомеоморфизм $\mathcal{O}$ на K_0 можно описать так: $gD \rightarrow g_0D_0$, если $g = d_1(q_1)g_0$, $g_0 \in G_0$.

Мы можем теперь перенести действие каждой однопараметрической подгруппы $\gamma_i(t)$, $i = 2, \dots, n$, с K_0 на произвольную орбиту $\mathcal{O}$, а потому и на K :

$$d_1(q_1)g_0D \mapsto g_0D_0 \xrightarrow{\gamma_i(t)} g_0(t)D_0 \mapsto d_1(q_1)g_0(t)D. \quad (3)$$

Если действие $\gamma_i(t)$ на K_0 (при достаточно малых t) записать в виде

$$(q_2, \dots, q_n) \xrightarrow{\gamma_i(t)} (q_2(t), \dots, q_n(t)),$$

то из (3) вытекает, что на K подгруппа $\gamma_i(t)$ действует так:

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \xrightarrow{\gamma_i(t)} (q_1, q_2(t), \dots, q_n(t)).$$

Ясно, что это действие аналитическое и ему соответствует на M некоторый гамильтониан $\tilde{h}_i$. При этом $\tilde{h}_i$ в локальных координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ выражается той же формулой, какой h_i записывается в локальных координатах $(p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n)$ (см. (1)). Следовательно, $\tilde{h}_i$ не зависит от p_1, q_1 . Поскольку по предположению $\{h_i, h_j\} \equiv 0$, то $\gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$ попарно коммутируют на K_0 , а потому и на каждой орбите $\mathcal{O}$. Но тогда они коммутируют и на многообразии K , откуда вытекает, что $\tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n$ находятся попарно в инволюции.

Мы получим на M искомый полный инволютивный набор $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n$, если сможем определить на K действие однопараметрической подгруппы $\gamma_1(t)$ таким образом, чтобы $\gamma_1(t)$ коммутировала на K с $\gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$, а соответствующий ей гамильтониан $\tilde{h}_1$ в локальных координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ зависел от переменной q_1 . Действительно, если $\gamma_1(t)$ коммутирует с $\gamma_i(t)$, то

$\tilde{h}_1$ и $\tilde{h}_i$ находятся в инволюции. А поскольку функции $\tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n$ не зависят от q_1 , то $\tilde{h}_1$ не может через них выражаться.

Среди однопараметрических подгрупп $\gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$, действующих на K_0 , выберем две произвольные подгруппы $\gamma_i(t), \gamma_j(t)$ и рассмотрим их прямое произведение $T = \gamma_i(t) \times \gamma_j(t)$. Так как $\gamma_i(t)$ и $\gamma_j(t)$ коммутируют на K_0 , то T действует на K_0 как группа Ли преобразований. Пусть L – алгебра Ли группы T , a и b – такие элементы L , что $\gamma_i(t) = \exp ta$, $\gamma_j(t) = \exp tb$. Тогда

$$\gamma_1(t, q_1) = \exp t(\cos 2\pi q_1 \cdot a + \sin 2\pi q_1 \cdot b)$$

есть однопараметрическая подгруппа группы T , зависящая от параметра q_1 . Поскольку гамильтониан h_a , отвечающий однопараметрической подгруппе $\exp ta$, зависит от a линейно, то однопараметрической подгруппе $\gamma_1(t, q_1)$ соответствует на M_0 гамильтониан

$$h_1(q_1) = \cos 2\pi q_1 \cdot h_i + \sin 2\pi q_1 \cdot h_j.$$

Пусть $\mathcal{O}$ – произвольная орбита действия G_0 на K . Как уже доказано, $\mathcal{O}$ содержит единственный смежный класс вида $d_1(q_1)D$. Поскольку классы $d_1(q_1)D$ и $d_1(q'_1)D$ совпадают тогда и только тогда, когда $q'_1 = q_1 + z$, где z – целое число, то $\mathcal{O} = \mathcal{O}(q_1)$, где параметр q_1 определен с точностью до целых слагаемых. Если перенести на орбиту $\mathcal{O} = \mathcal{O}(q_1)$ действие на K_0 группы $\gamma_1(t, q_1)$ так, как это было сделано выше для групп $\gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$, то такое действие не будет зависеть от выбора параметра q_1 для этой орбиты, поскольку функции $\cos 2\pi q_1$ и $\sin 2\pi q_1$ имеют период 1.

Обозначим через $\gamma_1(t)$ однопараметрическую подгруппу, которая действует на многообразии K так, что оставляет инвариантной каждую орбиту $\mathcal{O}(q_1)$, причем ее действие на этой орбите совпадает с действием подгруппы $\gamma_1(t, q_1)$. Если действие $\gamma_1(t, q_1)$ на K_0 записать в виде

$$(q_2, \dots, q_n) \xrightarrow{\gamma_1(t, q_1)} (q_2(t, q_1), \dots, q_n(t, q_1)),$$

то $\gamma_1(t)$ действует на K следующим образом:

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \xrightarrow{\gamma_1(t)} (q_1, q_2(t, q_1), \dots, q_n(t, q_1)).$$

Из формулы (1) следует, что действие $\gamma_1(t)$ на K приводит к гамильтониану $\tilde{h}_1$ на M , который в локальных координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ записывается той же формулой, которой записывается гамильтониан $h_1(q_1)$ в локальных координатах $(p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n)$, т.е.

$$\tilde{h}_1 = \cos 2\pi q_1 \cdot h_i + \sin 2\pi q_1 \cdot h_j = \cos 2\pi q_1 \cdot \tilde{h}_i + \sin 2\pi q_1 \cdot \tilde{h}_j.$$

Ясно, что $\tilde{h}_1$ аналитичен и зависит от q_1 , так как $\tilde{h}_i$ и $\tilde{h}_j$ от q_1 не зависят. В то же время действие $\gamma_1(t)$ на K по своему определению коммутирует с действием на K каждой из подгрупп $\gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$.

Отметим, что в определении действия $\gamma_1(t)$ на многообразии K есть определенная свобода. Функции $\cos 2\pi q_1$ и $\sin 2\pi q_1$ можно без ущерба для всей конструкции заменить произвольными периодическими аналитическими функциями переменной q_1 периода 1, если они не обращаются в нуль при одном и том же значении q_1 и не являются константами.

§ 3. Общий случай

Техника, разработанная в § 2, может быть использована и при рассмотрении произвольных солвмногобразий. Однако ее применение осложняется двумя обстоятельствами. Во-первых, если солвмногобразие $K = G/D$ получается с помощью разрешимой группы Ли G и ее замкнутой подгруппы D , то D уже нельзя считать дискретной подгруппой G . Во-вторых, подгруппа D может содержать элементы, через которые не проходят однопараметрические подгруппы G . Соответствующие примеры приведены в [5].

Как и в нильпотентном случае, покажем, что на любом солвмногобразии K размерности n можно определить действие однопараметрических подгрупп $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ таким образом, чтобы на кокасательном расслоении $M = T^*K$ им соответствовали аналитические гамильтонианы, образующие на M полный инволютивный набор.

Пусть $K = G/D$, где G – связная разрешимая группа Ли, D – ее равномерная замкнутая подгруппа, т.е. K – компакт. Не ограничивая общности, будем считать, что G односвязна и D не содержит связных нормальных делителей группы G . Обозначим через N *нильрадикал группы* G , т.е. максимальный связный нильпотентный нормальный делитель G . Тогда компонента связности единицы D содержится в N и $D \cap N$ – равномерная замкнутая подгруппа N (см. [8]). Можно показать, что $\dim N > 1$, даже если подгруппа D дискретна. Соответствующее рассуждение без труда извлекается из [5; гл. 3, лемма 3.1].

Воспользуемся индукцией по коразмерности N в G . Если $\text{codim } N = 0$, то $G = N$ и искомые подгруппы $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ указаны в § 2. Пусть теперь коразмерность N в G равна $s > 0$, и предположим, что поставленная задача уже решена для всех групп, содержащих нильрадикал коразмерности $s - 1$.

Если $\varphi: G \rightarrow G/N$ – естественный гомоморфизм, то группа $\varphi(G)$ изоморфна векторной группе $\mathbb{R}^s$, а $\varphi(D)$ – ее равномерная дискретная подгруппа. Можно считать, что $\varphi(D) = \mathbb{Z}^s \subset \mathbb{R}^s = \varphi(G)$. Рассмотрим подгруппу $\mathbb{R}^{s-1} \subset \mathbb{R}^s$ вида $\mathbb{R}^{s-1} = \{(0, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, $\varphi(D) \cap \mathbb{R}^{s-1}$ – равномерная дискретная подгруппа $\mathbb{R}^{s-1}$. Если $G_0 = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^{s-1})$, то G_0 – связный нормальный делитель группы G коразмерности 1, содержащий $D_0 = D \cap G_0$ в качестве равномерной замкнутой подгруппы. Так как группа G односвязна, то односвязным будет и ее нормальный делитель G_0 [9].

Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\gamma'(t) \subset \mathbb{R}^s$ вида

$$\gamma'(t) = \{(t, 0, \dots, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, $\varphi(D) \cap \gamma'(t)$ – равномерная дискретная подгруппа $\gamma'(t)$, порожденная элементом $\gamma'(1)$. Если $H = \varphi^{-1}(\gamma'(t))$, то H есть связный односвязный нормальный делитель G , содержащий $D \cap H$ в качестве равномерной замкнутой подгруппы. Мы можем представить H в виде полупрямого приращения $H = \gamma(t) \cdot N$ подходящей однопараметрической подгруппы $\gamma(t)$ и нильрадикала N . Очевидно, гомоморфизм φ переводит $\gamma(t)$ в $\gamma'(t)$. Меняя, если надо, параметризацию $\gamma(t)$, можно добиться, чтобы $\varphi(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ для каждого $t \in \mathbb{R}$.

Пусть d – такой элемент D , что $\varphi(d) = \gamma'(1)$. Так как $\gamma'(1) = \varphi(\gamma(1))$, то

$$d = \gamma(1)n, \tag{4}$$

где n – некоторый элемент N . Может случиться, что через d не проходит ни одна однопараметрическая подгруппа из H . В этом случае от сомножителя n из (4) избавиться нельзя.

Нетрудно убедиться, что $G = \gamma(t) \cdot G_0$ – полупрямое произведение. Подгруппа D порождается элементом d и своей нормальной подгруппой D_0 . Отметим также, что нильрадикалы групп G и G_0 совпадают и коразмерность N в G_0 равна $s - 1$.

Группа G действует на многообразии $K = G/D$ левыми сдвигами вместе со своим нормальным делителем G_0 . Так как действие G_0 на K не транзитивно, K расслаивается на орбиты этого действия. Каждая такая орбита $\mathcal{O}$ является аналитическим подмногообразием K , гомеоморфным солвмногообразию $K_0 = G_0/D_0$. Если gD – произвольный фиксированный элемент $\mathcal{O}$, а g_0 пробегает G_0 , то

$$gg_0D \mapsto g_0D_0$$

есть искомый гомеоморфизм $\mathcal{O}$ на K_0 (см. § 2).

Если класс gD принадлежит орбите $\mathcal{O}$ и $g = \gamma(q_1)g_0$, $g_0 \in G_0$, то и класс $\gamma(q_1)D$ принадлежит $\mathcal{O}$. Следовательно, каждая орбита $\mathcal{O}$ действия G_0 на K содержит хотя бы один класс вида $\gamma(q_1)D$. Нетрудно убедиться, что классы $\gamma(q_1)D$ и $\gamma(q'_1)D$ лежат на одной орбите $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $q'_1 = q_1 + z$, где z – целое число. При этом классы $\gamma(q_1)D$ и $\gamma(q_1 + z)D$ могут не совпадать, если в разложении (4) $n \neq e$. В частности, в общем случае нельзя считать, что $\gamma(0)D = \gamma(1)D$.

Пусть $n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – такая аналитическая кривая N , что $n(0) = e$, $n(1) = n$, где n – элемент из разложения (4). Так как $N \subset G_0$, то классы $\gamma(t)D$ и $\gamma(t)n(t)D$ принадлежат одной орбите действия G_0 на K . Положим $g(t) = \gamma(t)n(t)$, и пусть $k(t) = g(t)D$. Тогда $k(t)$ есть аналитическая кривая многообразия K , причем $k(0) = k(1)$. Действительно,

$$\begin{aligned} k(0) &= g(0)D = \gamma(0)n(0)D = eD = D, \\ k(1) &= g(1)D = \gamma(1)n(1)D = \gamma(1)nD = dD = D. \end{aligned}$$

Таким образом, $k(t)$, $t \in [0, 1]$, – замкнутая кривая многообразия K и всякая орбита $\mathcal{O}$ действия G_0 на K пересекает ее ровно в одной точке. Мы не можем, однако, говорить об аналитичности такой кривой в точке $k(0) = k(1)$. Этот недостаток будет устранен, если подобрать $n(t)$ так, чтобы $k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, стала периодической кривой с периодом 1. То, что это действительно возможно, утверждает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В группе N существует аналитическая кривая $n(t)$, которая определена для всех $t \in \mathbb{R}$ и может быть указана в явном виде, такая, что $n(0) = e$, $n(1) = n$ и если $g(t) = \gamma(t)n(t)$, то $k(t) = g(t)D$ есть периодическая аналитическая кривая солвмногообразия K периода 1. При этом всякая орбита $\mathcal{O}$ действия G_0 на K пересекает кривую $k(t)$ в единственной точке.*

Доказательство этого предложения будет приведено в следующем параграфе.

Предложение 1 дает возможность ввести на многообразии K новые локальные системы координат, которые удобнее старых при доказательстве теоремы.

Пусть $\mathcal{O}$ – произвольная орбита действия G_0 на K . Так как $\mathcal{O}$ содержит единственную точку $g(q_1)D$ кривой $k(t) = g(t)D$, то $\mathcal{O} = \mathcal{O}(q_1)$, где параметр q_1 определяется по модулю 1. Описанный выше гомеоморфизм $\mathcal{O}$ на K_0 будем теперь строить с помощью элемента $g(q_1)D$:

$$g(q_1)g_0D \mapsto g_0D_0.$$

Поскольку многообразие K расслаивается на орбиты действия G_0 , то возникает отображение $\psi: K \rightarrow K_0$. Нетрудно проверить, что оно непрерывно.

Пусть gD – произвольный элемент K и $\psi(gD) = g_0D_0$. Обозначим через U окрестность g_0D_0 на многообразии K_0 с заданной на ней локальной системой координат $q_2, \dots, q_n$. Так как отображение ψ непрерывно, найдется окрестность V элемента gD на многообразии K такая, что $\psi(V) \subset U$. Можно считать, что на V определена локальная система координат $x_1, \dots, x_n$, так что если $v \in V$, то $v = v(x_1, \dots, x_n)$. С другой стороны, положение элемента v на K характеризуется проходящей через него орбитой $\mathcal{O}$ и положением v на этой орбите. Если $\mathcal{O} = \mathcal{O}(q_1)$ и $\psi(v) = u$, причем $u = u(q_2, \dots, q_n)$, то локально положение v на K определяется набором чисел $q_1, q_2, \dots, q_n$, так что $v = v(q_1, \dots, q_n)$. В результате в окрестности V элемента gD возникает новая система координат $q_1, \dots, q_n$. Покажем, что эта новая локальная координатная система $q_1, \dots, q_n$ согласована со старой системой координат $x_1, \dots, x_n$, т.е. новые координаты выражаются через старые аналитически, и наоборот.

Достаточно рассмотреть случай, когда $x_1, \dots, x_n$ и $q_2, \dots, q_n$ – стандартные локальные системы координат на многообразиях K и K_0 соответственно [7; гл. 2, § 4].

Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{J}$ – алгебры Ли групп G и D , а W – такое векторное подпространство алгебры $\mathcal{G}$, что $\mathcal{G} = W + \mathcal{J}$ – прямая сумма. Обозначим через $e_1, \dots, e_n$ произвольный базис W и рассмотрим отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto g \exp(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) D.$$

При этом достаточно малая окрестность точки $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ гомеоморфно отображается на окрестность элемента gD пространства K . Отображение

$$g \exp(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) D \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

задает гомеоморфизм некоторой окрестности gD на окрестность точки $(0, \dots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$. Такие стандартные карты и определяют на K структуру аналитического многообразия.

Поскольку D и D_0 имеют одну и ту же компоненту связности единицы, то их алгебры Ли совпадают. Если $\mathcal{G}_0$ – алгебра Ли группы G_0 , то можно считать, что $\mathcal{G}_0$ есть прямая сумма $\mathcal{G}_0 = W_0 + \mathcal{J}$, где W_0 – подпространство W . При этом базис $e_1, \dots, e_n$ из W можно выбрать так, чтобы $e_2, \dots, e_n$ образовывали базис W_0 . Отображение

$$g_0 \exp(q_2 e_2 + \dots + q_n e_n) D_0 \mapsto (q_2, \dots, q_n)$$

задает стандартную локальную систему координат в окрестности элемента g_0D_0 многообразия K_0 .

Вернемся к окрестности V элемента gD с определенными на ней системами координат $x_1, \dots, x_n$ и $q_1, \dots, q_n$. Покажем сначала, что $q_1, \dots, q_n$ выражаются через $x_1, \dots, x_n$ аналитически.

Пусть v – произвольный элемент V с координатами $x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$v = g \exp(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) D.$$

Рассмотрим элемент $g' = g \exp(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$ группы G . Он аналитически зависит от $x_1, \dots, x_n$ в силу аналитичности экспоненциального отображения и умножения в группе Ли. Так как $G = \gamma(t) \cdot G_0$ есть полупрямое произведение, то g' единственным образом представляется в виде $g' = \gamma(q_1)g'_0$, $g'_0 \in G_0$, причем $\gamma(q_1)$ и g'_0 аналитически зависят от g' [7; гл.6, лемма 5.2]. В частности, q_1 аналитически зависит от $x_1, \dots, x_n$. Далее,

$$g' = \gamma(q_1)g'_0 = (\gamma(q_1)n(q_1))(n^{-1}(q_1)g'_0) = g(q_1)g''_0,$$

где $g''_0 = n^{-1}(q_1)g'_0$ – элемент G_0 . Так как $n(t)$ – аналитическая кривая группы G_0 , то $g(q_1)$ и g''_0 аналитически зависят от $x_1, \dots, x_n$.

Рассмотрим элемент

$$u = \psi(v) = \psi(g'D) = \psi(\gamma(q_1)g'_0 D) = \psi(g(q_1)g''_0 D) = g''_0 D_0.$$

Поскольку естественное отображение $g''_0 \mapsto g''_0 D_0$ отображает G_0 на $K_0 = G_0/D_0$ аналитически, то u аналитически зависит от $x_1, \dots, x_n$. Это означает, что если $u = u(q_2, \dots, q_n)$, то $q_2, \dots, q_n$ аналитически выражаются через $x_1, \dots, x_n$, как и q_1 .

Остается проверить, что зависимость $x_1, \dots, x_n$ от $q_1, \dots, q_n$ – тоже аналитическая. Так как $v = v(q_1, \dots, q_n)$, то $v \in \mathcal{O}(q_1)$. Поэтому найдется элемент $g'_0 \in G_0$ такой, что $v = g(q_1)g'_0 D$. При этом $u = \psi(v) = g'_0 D_0$. Поскольку $u = u(q_2, \dots, q_n)$, то

$$u = g_0 \exp(q_2 e_2 + \dots + q_n e_n) D_0.$$

Так как ψ отображает $\mathcal{O}(q_1)$ на K_0 взаимно однозначно, то v представляется в виде

$$v = g(q_1)g_0 \exp(q_2 e_2 + \dots + q_n e_n) D.$$

Если положить $g' = g(q_1)g_0 \exp(q_2 e_2 + \dots + q_n e_n)$, то $g' \in G$ и $v = g'D$. Ясно, что элемент g' аналитически зависит от $q_1, \dots, q_n$, так как $g(t)$ – аналитическая кривая группы G . Но тогда и $v = g'D$ зависит от $q_1, \dots, q_n$ аналитически, поскольку $g \mapsto gD$ задает аналитическое отображение G на $G/D = K$. Если учесть, что $v = v(x_1, \dots, x_n)$, то это означает аналитическую зависимость $x_1, \dots, x_n$ от $q_1, \dots, q_n$.

Роль новых локальных координат $q_1, \dots, q_n$ на солвмногообразии K вполне аналогична роли связанных с координатами 2-го рода локальных координат $q_1, \dots, q_n$ на нильмногообразии. При этом необходимый для доказательства теоремы индуктивный переход от солвмногообразия K_0 к солвмногообразию K дословно повторяет (с сохранением всех обозначений) изложенный в § 2 аналогичный переход от нильмногообразия K_0 к нильмногообразию K .

Это замечание завершает доказательство теоремы.

Разработанная техника позволяет указать на многообразии K набор из $n = \dim K$ всюду определенных и почти всюду независимых аналитических функций. При подъеме на $M = T^*K$ они образуют полный инволютивный набор из аналитических функций, не зависящих от импульсов.

Воспользуемся индукцией по n . При $n = 1$ солвмногообразие K можно рассматривать как периодическую кривую $k(t)$ периода 1. Если $f(t)$ – произвольная периодическая аналитическая функция периода 1 (отличная от константы), то правило $\tilde{f}(k(t)) = f(t)$ определяет на кривой $k(t)$ нужную аналитическую функцию $\tilde{f}$.

Пусть теперь известно, что искомые функции можно указать на любом солвмногообразии размерности $n - 1$. Рассмотрим произвольное солвмногообразие K размерности n . Согласно предложению 1 существует периодическая аналитическая кривая $k(t)$ многообразия K периода 1, которую всякая орбита $\mathcal{O}$ действия G_0 на K пересекает в единственной точке. С помощью этой точки строится гомеоморфизм орбиты $\mathcal{O}$ на солвмногообразии K_0 размерности $n - 1$. Поскольку многообразие K расслаивается на орбиты действия G_0 , то возникает отображение $\psi: K \rightarrow K_0$. По предположению индукции на многообразии K_0 можно указать набор из $n - 1$ всюду определенных и почти всюду независимых аналитических функций $f_2, \dots, f_n$. Положим $\tilde{f}_2 = f_2 \circ \psi, \dots, \tilde{f}_n = f_n \circ \psi$. Тогда $\tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n$ – функции на многообразии K .

Выберем произвольную периодическую аналитическую функцию $f_1(t)$ периода 1, отличную от константы. С ее помощью можно определить еще одну функцию $\tilde{f}_1$ на многообразии K . Через каждую точку $x \in K$ проходит единственная орбита $\mathcal{O}$ действия G_0 на K , которая пересекает кривую $k(t)$ в единственной точке $k(q_1)$. Число q_1 определено с точностью до целых слагаемых. Функция $\tilde{f}_1$ определяется так: $\tilde{f}_1(x) = f_1(q_1)$, $x \in K$.

Если теперь воспользоваться определенными выше специальными локальными координатами $q_1, \dots, q_n$ на многообразии K , то становится ясно, что функции $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n$ являются искомыми всюду определенными и почти всюду независимыми аналитическими функциями на K .

§ 4. Периодические кривые на солвмногообразиях

Цель этого параграфа – изложить доказательство предложения 1 из § 3.

Поскольку $k(t) = g(t)D$ должна быть периодической кривой периода 1 солвмногообразия $K = G/D$, то $g(t+1)D = g(t)D$ для всякого $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что для каждого t найдется такой элемент $d(t) \in D$, что

$$g(t+1) = g(t)d(t). \quad (5)$$

Так как кривая $n(t)$ предполагается аналитической и $g(t) = \gamma(t)n(t)$, то $g(t)$ зависит от t аналитически и, значит, $d(t) = g^{-1}(t)g(t+1)$ непрерывно зависит от t . В случае, когда подгруппа D дискретна, отсюда следует, что $d(t) \equiv d(0)$. Если в равенстве (5) положить $t = 0$ и учесть, что $g(t) = \gamma(t)n(t)$, $\gamma(0) = n(0) = e$, то получим $g(1) = d(0)$. Поэтому (5) принимает вид

$$g(t+1) = g(t)g(1). \quad (6)$$

Пусть теперь подгруппа D не обязательно дискретна, но выполняется условие (6). Так как $g(t) = \gamma(t)n(t)$, то $g(1) = \gamma(1)n(1) = \gamma(1)n = d \in D$ (см. (4)). Поэтому $g(t+1) = g(t)d$ и, следовательно, условие (6) всегда является достаточным для искомой периодичности кривой $k(t)$.

Поскольку $g(t) = \gamma(t)n(t)$, $\gamma(t)$ – однопараметрическая подгруппа и $n(1) = n$, то (6) равносильно условию

$$n(t+1) = (\gamma(1)^{-1}n(t)\gamma(1))n. \quad (7)$$

Заметим, что при выполнении этого условия из $n(0) = e$ вытекает $n(1) = n$.

Мы приходим к следующей самостоятельной задаче: найти аналитическую кривую $n(t)$ из N , удовлетворяющую уравнению

$$n(t+1) = (\gamma(1)^{-1}n(t)\gamma(1))n, \quad n(0) = e, \quad (8)$$

где n – произвольный фиксированный элемент N .

Покажем, что эта задача всегда имеет решение. Тем самым будет доказано и предложение 1.

Будем называть *квазимногочленом* всякую комплекснозначную функцию $f(t)$, которую можно записать в виде

$$f(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – некоторые комплексные числа, а $f_1(t), \dots, f_m(t)$ – многочлены от t с комплексными коэффициентами [10]. Например, для любого комплексного $a \neq 0$ функция a^t является квазимногочленом, поскольку a можно представить в виде $a = e^\lambda$ при подходящем комплексном λ .

Квазимногочлен $f(t)$ будем называть *вещественнозначным*, если он принимает вещественные значения при всех $t \in \mathbb{R}$. Например, функции $\cos t$ и $\sin t$ являются вещественнозначными квазимногочленами в силу формул Эйлера

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Отметим, что сумма и произведение двух произвольных квазимногочленов являются квазимногочленами. Если $f(t)$ – квазимногочлен, то квазимногочленом будет и функция $f(t+t_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В группе N существует аналитическая кривая $n(t)$, удовлетворяющая уравнению (8), которая в любой системе координат 2-го рода $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ задается набором вещественнозначных квазимногочленов $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Другими словами, $n(t) = \gamma_1(x_1(t)) \cdots \gamma_n(x_n(t))$.

Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{N}$ – алгебры Ли групп G и N соответственно, так что $\mathcal{N}$ можно считать идеалом алгебры $\mathcal{G}$. Рассмотрим присоединенное представление $g \rightarrow \text{Ad } g$, $g \in G$, группы G . Оно оставляет идеал $\mathcal{N}$ инвариантным и $\text{Ad } G$ можно считать группой автоморфизмов алгебры $\mathcal{N}$. Из теоремы Ли о разрешимых алгебрах следует, что $\mathcal{N}$ содержит 1-мерный или 2-мерный идеал $\mathcal{I}_1$, инвариантный относительно $\text{Ad } G$. Рассматривая действие $\text{Ad } G$ на факторалгебре $\mathcal{N}/\mathcal{I}_1$, можно снова применить теорему Ли и т.д. После нескольких шагов мы приходим к цепочке идеалов

$$\mathcal{N} = \mathcal{I}_m \supset \mathcal{I}_{m-1} \supset \dots \supset \mathcal{I}_2 \supset \mathcal{I}_1$$

алгебры $\mathcal{N}$, каждый из которых инвариантен относительно $\text{Ad } G$, причем всякий фактор $\mathcal{I}_j/\mathcal{I}_{j-1}$ коммутативен и имеет размерность 1 или 2.

Мы можем теперь выбрать в алгебре $\mathcal{N}$ такой базис $e_1, \dots, e_n$, что множество всех элементов вида $\alpha_i e_i + \alpha_{i+1} e_{i+1} + \dots + \alpha_n e_n$ образует идеал $\mathcal{N}_i$ в $\mathcal{N}$ и при этом каждый идеал $\mathcal{I}_j$, $j = 1, \dots, m$, содержится среди идеалов $\mathcal{N}_i$, $i = 1, \dots, n$. Система однопараметрических подгрупп $\gamma_1(t) = \exp te_1, \dots, \gamma_n(t) = \exp te_n$ образует систему координат 2-го рода группы N , согласованную с действием группы G на N .

Мы знаем (см. § 2), что если в группе N выбраны две системы координат 2-го рода, то координаты элемента $x \in N$ в этих координатных системах связаны между собой полиномиально. А так как многочлен от квазимногочленов есть квазимногочлен, то предложение 2 достаточно доказать для какой-либо системы координат 2-го рода, согласованной с действием G на N .

В уравнении (8) нам приходится иметь дело с сопряжением

$$\psi: x \mapsto \gamma(1)^{-1}x\gamma(1), \quad x \in N, \quad (9)$$

которое является автоморфизмом N и индуцирует на алгебре $\mathcal{N}$ автоморфизм $\text{Ad } \gamma(1) \in \text{Ad } G$.

Воспользуемся индукцией по размерности N .

Если $\dim N = 1$, то N – абелева группа и ее можно отождествить со своей алгеброй Ли. При этом сопряжение (9) является невырожденным линейным преобразованием N и уравнение (8) принимает вид

$$x(t+1) = ax(t) + b, \quad x(0) = 0,$$

где a и b – константы, причем $a \neq 0$. Справедливость предложения 2 для случая $\dim N = 1$ теперь гарантируется следующей леммой.

ЛЕММА 1. *Всякое уравнение вида*

$$x(t+1) = ax(t) + \varphi(t), \quad x(0) = x_0, \quad (10)$$

где a и x_0 – вещественные постоянные, $a \neq 0$, $\varphi(t)$ – вещественнозначный квазимногочлен, имеет вещественное решение в виде квазимногочлена $x(t)$.

Лемма 1 будет доказана в следующем параграфе.

Рассмотрим случай $\dim N = 2$. Так как группа N нильпотентна, то и в этом случае она абелева и может отождествляться со своей алгеброй Ли, а сопряжение (9) – ее невырожденное линейное преобразование. В результате уравнение (8) превращается в систему уравнений вида

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1, & x_1(0) = 0, \\ x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i – константы, причем $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Справедливость предложения 2 для случая $\dim N = 2$ теперь гарантируется следующей леммой.

ЛЕММА 2. *Всякая система уравнений вида*

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \varphi_1(t), & x_1(0) = x_1^0, \\ x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \varphi_2(t), & x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \quad (11)$$

где a_{ij}, x_i^0 – вещественные постоянные, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $\varphi_i(t)$ – вещественнозначные квазимногочлены, имеет вещественное решение в виде квазимногочленов $x_1(t), x_2(t)$.

Эта лемма также будет доказана в следующем параграфе.

Будем считать, что $\dim N = n$, $n > 2$, и для групп меньших размерностей предложение 2 уже доказано.

Пусть $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ – система координат 2-го рода группы N , согласованная с действием G на N . Тогда N содержит замкнутый нормальный делитель H группы G такой, что либо $H = \gamma_n(t)$, либо $H = \gamma_{n-1}(t) \times \gamma_n(t)$. Пусть $H = \gamma_n(t)$ и $f: G \rightarrow G/H$ – естественный аналитический гомоморфизм. Если $\bar{\gamma}_i(t) = f(\gamma_i(t))$, то $\bar{\gamma}_1(t), \dots, \bar{\gamma}_{n-1}(t)$ – однопараметрические подгруппы, образующие систему координат 2-го рода группы $f(N)$, согласованную с действием $f(G)$ на $f(N)$.

Если кривая $n(t)$ из N удовлетворяет уравнению (8), то применение гомоморфизма f приводит к равенствам

$$\bar{n}(t+1) = (\bar{\gamma}(1)^{-1}\bar{n}(t)\bar{\gamma}(1))\bar{n}, \quad \bar{n}(0) = \bar{e}, \quad (12)$$

где $\bar{n}(t) = f(n(t))$, $\bar{n} = f(n)$, $\bar{\gamma}(1) = f(\gamma(1))$, а $\bar{e}$ – единица $f(N)$. Это означает, что кривая $\bar{n}(t)$ группы $f(N)$ должна удовлетворять уравнению (12).

Если

$$n(t) = \gamma_1(x_1(t)) \cdots \gamma_{n-1}(x_{n-1}(t))\gamma_n(x_n(t)), \quad (13)$$

то, очевидно,

$$\bar{n}(t) = \bar{\gamma}_1(x_1(t)) \cdots \bar{\gamma}_{n-1}(x_{n-1}(t)). \quad (14)$$

Поскольку $\dim f(N) < \dim N$, то по предположению индукции уравнение (12) имеет решение $\bar{n}(t)$ вида (14) с квазимногочленами $x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)$. Мы покажем, что тогда можно найти такой квазимногочлен $x_n(t)$, что кривая, заданная формулой (13), есть искомое решение уравнения (8).

Положим

$$n_1(t) = \gamma_1(x_1(t)) \cdots \gamma_{n-1}(x_{n-1}(t)), \quad n_2(t) = \gamma_n(x_n(t)). \quad (15)$$

Тогда

$$n(t) = n_1(t)n_2(t),$$

причем кривая $n_1(t)$ уже определена, а $n_2(t)$ требуется найти.

Аналогично,

$$n = n_1n_2,$$

где

$$n_1 = \gamma_1(t_1) \cdots \gamma_{n-1}(t_{n-1}), \quad n_2 = \gamma_n(t_n)$$

при подходящих $t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$.

В новых обозначениях уравнение (8) принимает следующий вид:

$$n_1(t+1)n_2(t+1) = (\gamma(1)^{-1}n_1(t)n_2(t)\gamma(1))n_1n_2, \quad n_1(0)n_2(0) = e. \quad (16)$$

Покажем сначала, что условие $n_1(0)n_2(0) = e$ равносильно условию

$$n_2(0) = e.$$

Действительно, поскольку в уравнении (10) $\bar{n}(0) = \bar{e}$, то с учетом разложения (14) имеем равенство $\bar{\gamma}_1(x_1(0)) \cdots \bar{\gamma}_{n-1}(x_{n-1}(0)) = \bar{e}$. А так как $\bar{\gamma}_1(t), \dots, \bar{\gamma}_{n-1}(t)$ есть система координат 2-го рода группы $f(N)$ и $\bar{\gamma}_1(0) \cdots \bar{\gamma}_{n-1}(0) = \bar{e}$, то $x_1(0) = \cdots = x_{n-1}(0) = 0$. Поэтому $n_1(0) = \gamma_1(x_1(0)) \cdots \gamma_{n-1}(x_{n-1}(0)) = e$, так что $n_2(0) = e$.

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= f(n(t)) = f(n_1(t)) = \bar{n}_1(t), \\ \bar{n} &= f(n) = f(n_1) = \bar{n}_1, \end{aligned}$$

то из (12) следует, что

$$\bar{n}_1(t+1) = (\bar{\gamma}(1)^{-1}\bar{n}_1(t)\bar{\gamma}(1))\bar{n}_1,$$

откуда

$$(\gamma(1)^{-1}n_1(t)\gamma(1))n_1 = n_1(t+1)h(t), \quad (17)$$

где $h(t)$ – некоторая кривая из H . Ее можно указать явно:

$$h(t) = n_1(t+1)^{-1}(\gamma(1)^{-1}n_1(t)\gamma(1))n_1. \quad (18)$$

Вернемся к уравнению (16). Так как

$$\begin{aligned} (\gamma(1)^{-1}n_1(t)n_2(t)\gamma(1))n_1n_2 &= (\gamma(1)^{-1}n_1(t)\gamma(1))(\gamma(1)^{-1}n_2(t)\gamma(1))n_1n_2 \\ &\stackrel{(17)}{=} (n_1(t+1)h(t)n_1^{-1})(\gamma(1)^{-1}n_2(t)\gamma(1))n_1n_2 \\ &= n_1(t+1)h(t)((\gamma(1)n_1)^{-1}n_2(t)(\gamma(1)n_1))n_2, \end{aligned}$$

то

$$n_2(t+1) = h(t)((\gamma(1)n_1)^{-1}n_2(t)(\gamma(1)n_1))n_2.$$

Поскольку H – коммутативный нормальный делитель группы G , то уравнение (16) можно представить в виде

$$n_2(t+1) = ((\gamma(1)n_1)^{-1}n_2(t)(\gamma(1)n_1))(n_2h(t)), \quad n_2(0) = e. \quad (19)$$

Покажем, что в выбранной системе координат 2-го рода $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ координаты элемента $n_2h(t)$ являются квазимногочленами.

Мы знаем (см. § 2), что любой автоморфизм группы Ли N задается в системе координат 2-го рода полиномами. И поскольку у $n_1(t)$ координатами 2-го рода являются квазимногочлены, а многочлен от квазимногочленов есть квазимногочлен, то координатами 2-го рода элемента $\gamma(1)^{-1}n_1(t)\gamma(1)$ также являются квазимногочлены.

Так как

$$n_1(t) = \gamma_1(x_1(t)) \cdots \gamma_{n-1}(x_{n-1}(t)),$$

то

$$n_1(t+1)^{-1} = \gamma_{n-1}(-x_{n-1}(t+1)) \cdots \gamma_1(-x_1(t+1)).$$

Поскольку все $x_i(t)$ – квазимногочлены, то $-x_i(t+1)$ тоже являются квазимногочленами. Теперь ясно, что координаты 2-го рода элемента $h(t)$ – квазимногочлены (см. (18)). Надо лишь учесть, что умножение элементов группы N в координатах 2-го рода задается полиномиально. По той же причине квазимногочленами являются и координаты 2-го рода элемента $n_2h(t)$.

Вернемся к уравнению (19), в котором речь идет о неизвестной кривой $n_2(t) = \gamma_n(x_n(t))$ из одномерной абелевой группы $H = \gamma_n(t)$. Это уравнение эквивалентно уравнению вида (10). По лемме 1 такое уравнение имеет решение в виде квазимногочлена $x_n(t)$.

Приведенные рассуждения доказывают предложение 2 при $\dim H = 1$. Случай $\dim H = 2$ исследуется по той же схеме с незначительными изменениями. При этом вместо леммы 1 используется лемма 2.

§ 5. Об уравнениях в конечных разностях

В этом параграфе будут доказаны обе леммы из § 4, сыгравшие существенную роль при доказательстве предложения 2. Нам понадобится для этого общая теория линейных уравнений в конечных разностях с постоянными коэффициентами [11].

Убедимся сначала, что уравнение

$$x(t+1) - ax(t) = \varphi(t) \quad (20)$$

из леммы 1 всегда имеет своим частным решением некоторый квазимногочлен $\psi(t)$. Так как уравнение (20) линейное, а $\varphi(t)$ – квазимногочлен, то при этом можно ограничиться случаем, когда $\varphi(t) = g(t)e^{\lambda t}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $g(t) \in \mathbb{C}[t]$.

Пусть сначала $e^\lambda \neq a$. Тогда уравнение (20) имеет частное решение вида

$$\psi(t) = f(t)e^{\lambda t}, \quad (21)$$

где $f(t)$ – некоторый многочлен той же степени, что и $g(t)$. Его коэффициенты можно найти, подставив в уравнение (20) вместо $x(t)$ функцию (21) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t после сокращения на $e^{\lambda t}$. Искомые коэффициенты определяются при этом однозначно.

Пусть теперь $e^\lambda = a$. В этом случае уравнение (20) имеет частное решение вида

$$\psi(t) = tf(t)e^{\lambda t},$$

где, по-прежнему, степени многочленов $f(t)$ и $g(t)$ совпадают. Как и в первом случае, коэффициенты $f(t)$ однозначно определяются методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим теперь однородное уравнение, соответствующее уравнению (20):

$$x(t+1) - ax(t) = 0. \quad (22)$$

Очевидно, функция a^t ему удовлетворяет. Но тогда для произвольной комплексной постоянной C функция Ca^t тоже удовлетворяет уравнению (22).

Из линейности уравнения (20) следует, что функция

$$x(t) = Ca^t + \psi(t) \quad (23)$$

ему удовлетворяет. При этом константу C можно подобрать так, чтобы выполнялось начальное условие

$$x(0) = x_0 \quad (24)$$

из леммы 1: $C = x_0 - \psi(0)$. Если при этом функция (23) принимает вещественные значения для всех $t \in \mathbb{R}$, то она удовлетворяет лемме 1. Если же это не так, то рассмотрим сопряженную функцию $\bar{x}(t)$. Так как по условию $a, x_0 \in \mathbb{R}$, а $\varphi(t)$ принимает лишь вещественные значения, то $\bar{x}(t)$ тоже удовлетворяет уравнению (20) и начальному условию (24). Но тогда вещественнозначный квазимногочлен

$$\frac{1}{2}(x(t) + \bar{x}(t))$$

удовлетворяет лемме 1.

Важно отметить, что искомое решение уравнения (10) из леммы 1 всегда можно найти в явном виде.

При доказательстве леммы 2 нам придется иметь дело с разностным уравнением 2-го порядка вида

$$x(t+2) + a_1x(t+1) + a_2x(t) = \varphi(t) \quad (25)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad (26)$$

где a_1, a_2, x_0, x_1 – вещественные постоянные, $a_2 \neq 0$, а $\varphi(t)$ – вещественнозначный квазимногочлен. Покажем, что уравнение (25) всегда имеет вещественное решение в виде квазимногочлена, удовлетворяющего начальным условиям (26).

Убедимся сначала, что уравнение (25) имеет своим частным решением некоторый квазимногочлен $\psi(t)$, не обращая при этом внимания на начальные условия. Так как уравнение (25) линейное, а $\varphi(t)$ – квазимногочлен, то достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi(t) = g(t)e^{\lambda t}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $g(t) \in \mathbb{C}[t]$.

Характеристическое уравнение для уравнения (25) таково:

$$x^2 + a_1x + a_2 = 0. \quad (27)$$

Пусть сначала e^λ не является корнем уравнения (27). Тогда уравнение (25) имеет частное решение вида

$$\psi(t) = f(t)e^{\lambda t}, \quad (28)$$

где $f(t)$ – некоторый многочлен той же степени, что и $g(t)$. Его коэффициенты можно найти, подставив в уравнение (25) вместо $x(t)$ функцию (28) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t после сокращения на $e^{\lambda t}$. Искомые коэффициенты определяются при этом однозначно.

Если e^λ является корнем уравнения (27), то его кратность либо 1, либо 2. В первом случае уравнение (25) имеет частное решение вида

$$\psi(t) = tf(t)e^{\lambda t},$$

во втором –

$$\psi(t) = t^2 f(t)e^{\lambda t},$$

где $f(t)$ – подходящий многочлен той же степени, что и $g(t)$. В обоих случаях коэффициенты $f(t)$ определяются однозначно.

Рассмотрим теперь однородное уравнение, соответствующее уравнению (25):

$$x(t+2) + a_1 x(t+1) + a_2 x(t) = 0. \quad (29)$$

Чтобы найти два его линейно независимых решения, следует обратиться к корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения (27).

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то λ_1^t и λ_2^t – искомые решения. Любая их линейная комбинация

$$C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$$

также является решением уравнения (29). Из линейности уравнения (25) следует, что функция

$$x(t) = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t + \psi(t)$$

ему удовлетворяет. При этом константы C_1 и C_2 можно подобрать так, чтобы выполнялись начальные условия (26). Действительно, C_1 и C_2 должны в этом случае удовлетворять линейной системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 - \psi(0), \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = x_1 - \psi(1) \end{cases}$$

с ненулевым определителем.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то искомыми решениями уравнения (29) будут функции λ_1^t и $t\lambda_1^t$. Поэтому функция

$$x(t) = C_1 \lambda_1^t + C_2 t \lambda_1^t + \psi(t),$$

зависящая от произвольных постоянных C_1, C_2 , удовлетворяет уравнению (25). Константы C_1, C_2 можно подобрать так, чтобы выполнялись начальные условия (26). В самом деле, в этом случае C_1 и C_2 должны удовлетворять линейной системе

$$\begin{cases} C_1 = x_0 - \psi(0), \\ \lambda_1(C_1 + C_2) = x_1 - \psi(1). \end{cases}$$

Так как по условию $a_2 \neq 0$, то $\lambda_1 \neq 0$ и C_1, C_2 определяются однозначно.

Остается заметить, что если найденная функция $x(t)$ принимает вещественные значения при всех $t \in \mathbb{R}$, то $x(t)$ – искомый квазимногочлен. В противном случае следует перейти к вещественнозначному квазимногочлену

$$\frac{1}{2}(x(t) + \bar{x}(t)).$$

Применим изложенные выше результаты для доказательства леммы 2.

Рассмотрим вначале случай, когда в системе (11) коэффициенты a_{12} и a_{21} нулевые. Система (11) распадается тогда на два независимых уравнения 1-го порядка:

$$x_1(t+1) - a_{11}x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (30)$$

$$x_2(t+1) - a_{22}x_2(t) = \varphi_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (31)$$

Поскольку по условию $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ и по лемме 1 уравнения (30) и (31) имеют вещественные решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ в виде квазимногочленов.

Пусть теперь $a_{12} = 0$, $a_{21} \neq 0$, так что снова $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$. При этом первое уравнение системы (11) является уравнением 1-го порядка с неизвестной функцией $x_1(t)$:

$$x_1(t+1) - a_{11}x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0.$$

По лемме 1 оно имеет вещественное решение $x_1(t)$ в виде квазимногочлена и тем самым система (11) сводится к уравнению 1-го порядка относительно $x_2(t)$:

$$x_2(t+1) - a_{22}x_2(t) = a_{21}x_1(t) + \varphi_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0.$$

Поскольку правая часть этого уравнения является вещественнозначным квазимногочленом и $a_{22} \neq 0$, то по лемме 1 оно имеет вещественное решение $x_2(t)$ в виде квазимногочлена.

Случай $a_{12} \neq 0$, $a_{21} = 0$ ничем не отличается от предыдущего.

Пусть, наконец, $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$. Заменив в первом уравнении системы (11) переменную t на $t+1$, получим уравнение

$$x_1(t+2) = a_{11}x_1(t+1) + a_{12}x_2(t+1) + \varphi_1(t+1).$$

Подставив в него вместо $x_1(t+1)$, $x_2(t+1)$ правые части уравнений системы (11), приходим к уравнению

$$x_1(t+2) = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1(t) + a_{12}(a_{11} + a_{22})x_2(t) + (a_{11}\varphi_1(t) + a_{12}\varphi_2(t) + \varphi_1(t+1)). \quad (32)$$

С помощью первого уравнения системы (11) можно представить $x_2(t)$ в виде

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}}(x_1(t+1) - a_{11}x_1(t) - \varphi_1(t)). \quad (33)$$

Подставляя это выражение вместо $x_2(t)$ в уравнение (32), получаем уравнение 2-го порядка относительно $x_1(t)$:

$$x_1(t+2) - (a_{11} + a_{22})x_1(t+1) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) = a_{12}\varphi_2(t) - a_{22}\varphi_1(t) + \varphi_1(t+1). \quad (34)$$

В этом уравнении коэффициент при $x_1(t)$ отличен от нуля, а правая часть – некоторый вещественнозначный квазимногочлен. Поэтому уравнение (34) имеет вещественное решение $x_1(t)$ в виде квазимногочлена с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_1(1) = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \varphi_1(0). \quad (35)$$

Определив функцию $x_1(t)$, находим функцию $x_2(t)$ по формуле (33). Ясно, что $x_2(t)$ будет вещественнозначным квазимногочленом. С помощью формул (33) и (35) непосредственно проверяется, что $x_2(t)$ удовлетворяет начальному условию $x_2(0) = x_2^0$.

Так как функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ связаны формулой (33), то они удовлетворяют первому уравнению системы (11). Далее, пользуясь формулой (33) и тем, что $x_1(t)$ удовлетворяет уравнению (34), получаем

$$\begin{aligned} x_2(t+1) &= \frac{1}{a_{12}}(x_1(t+2) - a_{11}x_1(t+1) - \varphi_1(t+1)) \\ &= \frac{1}{a_{12}}(a_{22}x_1(t+1) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) + a_{12}\varphi_2(t) - a_{22}\varphi_1(t)). \end{aligned}$$

А поскольку $x_1(t)$, $x_2(t)$ удовлетворяют первому уравнению системы (11), то

$$\begin{aligned} x_2(t+1) &= \frac{1}{a_{12}}(a_{22}(a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \varphi_1(t)) \\ &\quad - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) + a_{12}\varphi_2(t) - a_{22}\varphi_1(t)) \\ &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Таким образом, найденные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ удовлетворяют и второму уравнению системы (11). Это завершает доказательство леммы 2.

Отметим, что описанный способ решения системы (11) позволяет получить искомые функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ в явном виде.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974; англ. пер.: V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во МГУ, М., 1988; англ. пер.: A. T. Fomenko, *Symplectic geometry*, Adv. Stud. Contemp. Math., **5**, Gordon and Breach, New York, 1988.
- [3] М. В. Милованов, “Интегрируемость разрешимых алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 45–92; англ. пер.: M. V. Milovanov, “Integrability of soluble Lie algebras”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 671–715.
- [4] М. В. Милованов, “О существовании полных инволютивных наборов функций на кокасательных расслоениях солвмногообразий”, *Докл. НАН Беларуси*, **48**:3 (2004), 5–8.
- [5] Л. Ауслендер, Л. Грин, Ф. Хан, *Потоки на однородных пространствах*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: L. Auslander, L. Green, F. Hahn, *Flows on homogeneous spaces*, Ann. of Math. Stud., **53**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963.
- [6] А. И. Мальцев, “Об одном классе однородных пространств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:1 (1949), 9–32; англ. пер.: A. I. Mal'cev, “On a class of homogeneous spaces”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **39** (1951).
- [7] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Acad. Press, New York–London, 1962.
- [8] G. D. Mostow, “Factor spaces of solvable groups”, *Ann. of Math* (2), **60**:1 (1954), 1–27.

- [9] А. И. Мальцев, “Об односвязности нормальных делителей групп Ли”, *Докл. АН СССР*, **34**:1 (1942), 12–15; англ. пер.: A. Mal'cev, “On the simple connectedness of invariant subgroups of Lie groups”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **34** (1942), 10–13.
- [10] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, 2-е изд., Наука, М., 1965; англ. пер. 1-го изд.: L. S. Pontryagin, *Ordinary differential equations*, Addison-Wesley Publ.Comp., Reading, Mass.; Pergamon Press, London–Paris, 1962.
- [11] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, 3-е изд., Наука, М., 1967; англ. пер.: A. O. Gel'fond, *Calculus of finite differences*, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1971.

М. В. Милованов (M. V. Milovanov)

Белорусский государственный

педагогический университет им. М. Танка

E-mail: mvmil@mail.ru

Поступила в редакцию

15.08.2005 и 05.06.2006