Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тушев, О контролерах простых идеалов групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга над полем положительной характеристики, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 9, 115–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 11:05:27

УДК 512.544

А. В. Тушев

О контролерах простых идеалов групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга над полем положительной характеристики

В представленной работе развиваются некоторые методы, которые позволяют изучать свойства контролера простого точного идеала I групповой алгебры kA абелевой группы без кручения A конечного ранга над полем k . При этом основная идея заключается в том, что факторкольцо kA/I по данному идеалу I может быть вложено как область целостности $k[A]$ в некоторое поле F , а группа A становится при этом подгруппой мультипликативной группы поля F . Это позволяет применить к изучению области целостности $k[A]$ некоторые результаты теории полей такие, как теория Куммера и свойства мультипликативных групп полей. В свою очередь, свойства области целостности $k[A] \cong kA/I$ существенно зависят от свойств идеала I . С использованием этих методов, в частности, получено независимое доказательство новой версии теоремы Брукса о контролерах простых идеалов групповой алгебры kA абелевой группы без кручения A конечного ранга в случае, когда поле k имеет положительную характеристику.

Библиография: 19 названий.

Введение

Пусть R – кольцо, G – группа, и пусть I – правый идеал группового кольца RG . Идеал I называется точным, если $I^\dagger = G \cap (1 + I) = 1$. Будем говорить, что подгруппа H группы G контролирует идеал I , если

$$I = (I \cap RH)RG. \quad (1)$$

Пересечение $c(I)$ всех подгрупп группы G , контролирующих идеал I , называется контролером идеала I . Нетрудно заметить, что подгруппа B группы G контролирует идеал I тогда и только тогда, когда $c(I) \leq B$.

Пусть H – подгруппа группы G . Множество представителей, выбранных по одному из каждого правого (левого) смежного класса группы G по подгруппе H , называется правой (левой) трансверсалью подгруппы H в группе G .

Пусть U – правый RH -модуль. Поскольку групповое кольцо RG можно рассматривать как левый RH -модуль, то можно определить тензорное произведение $U \otimes_{RH} RG$ (см. [1; § 5.1]), которое является правым RG -модулем, называемым RG -модулем, индуцированным с RH -модуля U (см. [1; § 5.1, предложение 3]). Согласно [2; гл. III, предложение 5.3] если M является RG -модулем и U является его RH -подмодулем, то

$$M = U \otimes_{RH} RG \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда

$$M = \bigoplus_{t \in T} Ut, \quad (3)$$

где T – правая трансверсаль подгруппы H в группе G .

Предположим, что $M = aRG$ является циклическим RG -модулем, порожденным ненулевым элементом $a \in M$. Пусть $I = \text{Ann}_{kG}(a)$ – аннулятор элемента a в кольце RG , и пусть $U = akH$, где H – подгруппа группы G . Нетрудно показать, что в приведенных выше обозначениях равенство (1) выполняется тогда и только, когда выполняется равенство (3). Таким образом, в данном случае равенства (1)–(3) означают одно и то же.

Если k – подполе поля f и A – подмножество поля f , то через $[f : k]$ будем обозначать степень расширения f поля k , т.е. размерность поля f как векторного пространства над полем k ; через $(f : k)$ будем обозначать степень трансцендентности поля f над подполем k ; $k(A)$ будет обозначать поле, полученное присоединением к под полю k множества A ; $k[A]$ будет обозначать область целостности, порожденную подполем k и множеством A . Как обычно, f^* обозначает мультипликативную группу поля f .

Будем говорить, что поле k порождается своим подмножеством A , если поле k получено присоединением множества A к минимальному под полю k . Если при этом множество A является конечным, то поле k называется конечно порожденным.

Пусть k является полем, и пусть A является абелевой группой без кручения конечного ранга. В представленной работе рассматриваются свойства контролеров точных простых идеалов групповой алгебры kA . Основная идея наших исследований заключается в том, что в случае, когда P является точным простым идеалом групповой алгебры kA , факторкольцо kA/P может быть вложено как область целостности $k[A]$ в некоторое поле F , а так как идеал P является точным, то при этом группа A становится подгруппой мультипликативной группы поля F . Это позволяет применить к изучению области $k[A]$ методы теории полей. Такой подход использовался в работах [3], [4], при этом к изучению области целостности $k[A]$ применялась теория нормирований полей. В настоящей работе применяются другие методы теории полей такие, как теория Куммера и свойства мультипликативных групп полей. Впервые такие методы были применены в работе [5] (см. [5; леммы 2, 5]), где было доказано равенство (3) для модулей над абелевыми группами конечного ранга. В дальнейшем эти методы развивались в работах [6]–[10].

В свою очередь, свойства факторкольца $k[A] \cong kA/P$ существенным образом определяются свойствами идеала P . Для того чтобы доказать равенство (1), мы доказываем равенства (2), (3) для kA -модуля $k[A]$.

Абелева группа называется минимаксной, если она обладает конечным рядом, каждый фактор которого является либо циклическим, либо квазициклическим. Если A является абелевой минимаксной группой, то спектр $\text{Sp}(A)$ группы A состоит из простых чисел p таких, что группа A обладает бесконечной p -секцией. Нетрудно заметить, что множество $\text{Sp}(A)$ конечно.

Пусть A – абелева группа, и пусть B – подгруппа группы A . Множество элементов $a \in A$ таких, что $a^n \in B$ для некоторого натурального числа n ,

является подгруппой группы A , которую называют изолятором подгруппы B в группе A . Подгруппа B называется плотной в группе A , если $\text{is}_A(B) = A$. Если же $\text{is}_A(B) = B$, то подгруппа B называется изолированной в группе A .

В п. 1.1 рассматриваются свойства мультипликативных групп некоторых полей положительной характеристики. При этом доказано, что в некоторых важных случаях мультипликативная группа поля положительной характеристики p является расширением прямого произведения периодической и свободной абелевых групп с помощью p -группы (см. предложение 1.1.4).

В п. 1.2 изучаются абелевы группы без кручения конечного ранга, на которых действуют группы операторов. Наиболее важными здесь являются свойства некоторых характеристических подгрупп таких групп; определения этих характеристических подгрупп приводятся в начале п. 1.2. В п. 1.3 рассматриваются некоторые свойства инвариантных идеалов групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга, на которых действует группа операторов.

В п. 2.1 изучаются свойства контролеров точных простых идеалов в групповых алгебрах абелевых групп без кручения конечного ранга. Основной результат п. 2.1 (теорема 2.1.2, (iv)) утверждает, что если конечно порожденное поле k имеет положительную характеристику $p > 0$, A является абелевой группой без кручения конечного ранга и P является точным простым идеалом групповой алгебры kA , то контролер $c(P)$ идеала P является минимаксной группой такой, что $\text{Sp}(c(P)) \subseteq \{p\}$.

Пусть k – поле, A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть I – идеал групповой алгебры kA . Подгруппа $S_\Gamma(I)$ группы Γ , состоящая из элементов $\gamma \in \Gamma$ таких, что $I \cap kB = I^\gamma \cap kB$ для некоторой конечно порожденной плотной подгруппы B группы A , называется стандартизатором идеала I в группе Γ (см. [3]). Основной результат п. 2.2 (теорема 2.2.3) утверждает, что если поле k является конечно порожденным и имеет положительную характеристику $p > 0$, а идеал I является простым и точным таким, что $S_\Gamma(I) = \Gamma$, то идеал I контролируется минимаксной Γ -инвариантной подгруппой S такой, что $\text{Sp}(S) \subseteq \{p\}$.

Недавно выяснилось, что оригинальное доказательство теоремы А работы К. Брукса [3] является неверным. Более того, существует пример, который показывает, что эта теорема вообще неверна в случае, когда поле k имеет положительную характеристику; этот пример приводится в начале §3. Ошибка произошла в доказательстве леммы 10.2 работы [3], и вызвана она была неточностями и пробелами в изложении материала, связанного с теорией нормирований полей. Эти неточности анализируются и исправляются в пп. 3.1 и 3.2.

К счастью, как об этом К. Брукс любезно информировал автора, ему удалось сформулировать новую версию своей теоремы для случая поля положительной характеристики. В п. 3.3 получено независимое доказательство новой версии теоремы Брукса [3; теорема А] в случае поля положительной характеристики (теорема 3.3.7), при этом ключевую роль в доказательстве играет теорема 2.2.3. Следует отметить, что на настоящий момент какого-либо другого доказательства новой версии теоремы Брукса [3; теорема А] для случая поля положительной характеристики пока не опубликовано. Поэтому в сло-

жившейся ситуации любое независимое доказательство теоремы Брукса для случая поля положительной характеристики является вполне актуальным и может быть очень полезным для исправления доказательств многочисленных результатов, в которых используется теорема А работы [3].

§ 1. Вспомогательные результаты

Материал настоящего параграфа носит вспомогательный характер, и полученные здесь результаты будут использованы в последующих параграфах. Однако некоторые из полученных здесь результатов могут иметь и самостоятельный интерес. Прежде всего это относится к результатам следующего пункта.

1.1. О мультипликативных группах некоторых полей положительной характеристики. Будем говорить, что поле k является регулярным, если его мультипликативная группа является счетной и, кроме того, ее можно представить в виде прямого произведения периодической и свободной абелевых групп.

Пусть A – абелева группа, тогда $t(A)$ обозначает периодическую часть группы A .

ЛЕММА 1.1.1. Пусть поле $f = k(S)$ является трансцендентным расширением поля k , где S – конечное подмножество поля f . Если поле k регулярное, то регулярным будет и поле f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество S является конечным, то конечной будет и степень трансцендентности поля f над подполем k . Кроме того, так как поле k счетное, то счетным будет и поле f .

Пусть $z \notin k$, и пусть элементы $z, z_1, \dots, z_n$ образуют максимальную алгебраически независимую систему элементов поля f . Пусть $f_1 = k(z, z_1, \dots, z_n)$, тогда f_1 является полем частных кольца многочленов $k[z, z_1, \dots, z_n]$ над полем k от коммутирующих переменных $z, z_1, \dots, z_n$. Поскольку счетное кольцо $k[z, z_1, \dots, z_n]$ является областью с однозначным разложением на множители, то отсюда нетрудно получить, что $f_1^* = k^* \times N$, где N – счетная свободная абелева группа. Так как поле k является регулярным, то отсюда следует, что регулярным будет и поле f_1 . Поскольку $f \geq f_1 \geq k$ и $f = k(S)$, то можно заключить, что $f = f_1(S)$. Тогда, поскольку поле f является конечно порожденным алгебраическим расширением поля f_1 , из [11; гл. VII, § 1, предложение 5] следует, что степень расширения $[f : f_1]$ конечна.

Пусть $\varphi_z : f^* \rightarrow f_1^*$ является гомоморфизмом, который каждому элементу мультипликативной группы f^* ставит в соответствие его норму в поле f_1 . Тогда из определения нормы (см. [11; гл. VIII, § 5]) следует, что $\varphi_z(z) = z^m$ для некоторого натурального числа m .

Предположим, что $z \in \text{is}_f^*(\text{Ker } \varphi_z)$, тогда существует натуральное число r такое, что $z^r \in \text{Ker } \varphi_z$ и, значит, $1 = \varphi_z(z^r) = (\varphi_z(z))^r = z^{mr}$. Следовательно, $z \in t(f^*)$. Но с другой стороны, поскольку поле f является трансцендентным расширением поля k , то факторгруппа f^*/k^* является группой без кручения,

а так как $z \notin k$, то мы видим, что $z \notin t(f^*)$. Таким образом, полученное противоречие показывает, что $z \notin \text{is}_{f^*}(\text{Ker } \varphi_z)$.

Так как по теореме о гомоморфизмах

$$f^*/\text{Ker } \varphi_z \cong \varphi_z(f^*) \leq f_1^*$$

и поле f_1 является регулярным, то отсюда легко получить, что факторгруппа f^*/f_z свободная абелева, где $f_z = \text{is}_{f^*}(\text{Ker } \varphi_z)$.

Итак, для любого элемента $z \notin f \setminus k$ существует подгруппа f_z группы f^* такая, что $z \notin f_z$ и факторгруппа f^*/f_z является свободной абелевой. Положим $T = \bigcap_{z \in f \setminus k} f_z$, тогда, очевидно, $T \leq k^*$ и факторгруппа f^*/T аппроксимируется свободными абелевыми группами. Так как группа f^* является счетной, то отсюда следует, что факторгруппа f^*/T является свободной абелевой и, следовательно, $f^* = L \times T$, где L – свободная абелева группа. Поскольку $T \leq k^*$ и поле k регулярное, то отсюда следует, что группа T представима в виде прямого произведения периодической и свободной абелевых групп и, следовательно, поле f является регулярным.

ЛЕММА 1.1.2. Пусть f – поле положительной характеристики p , порожденное всеми корнями из 1 и конечным множеством S . Тогда поле f является регулярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – подполе поля f , порожденное всеми корнями из 1, тогда мультипликативная группа k^* является периодической. Следовательно, поле k является регулярным и $f = k(S)$. Поскольку поле k является локально конечным, то всякий элемент a из f , алгебраический над полем k , будет алгебраическим над некоторым конечным подполем k_1 поля k . Тогда поле $k_1(a)$ является конечным и, следовательно, всякий элемент a из f , алгебраический над полем k , является корнем из 1. Таким образом, f является трансцендентным расширением поля k , причем $f = k(S)$, где множество S конечное, а поле k регулярное. Тогда по лемме 1.1.1 поле f является регулярным.

ЛЕММА 1.1.3. Пусть k – подполе поля f характеристики $p > 0$ и G – подгруппа мультипликативной группы f^* поля f такие, что факторгруппа $G/G \cap k^*$ является p -группой. Пусть $h = k(G)$, тогда факторгруппа h^*/k^* является p -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку факторгруппа $G/G \cap k^*$ является p -группой, то группа G обладает возрастающим рядом

$$G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_n \leq \dots$$

подгрупп G_n таким, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$, $G_1 = G \cap k^*$ и $G_{n+1}^p \leq G_n$. Тогда мультипликативная группа h^* поля $h = k(G)$ обладает возрастающим рядом

$$h_1^* \leq h_2^* \leq \dots \leq h_n^* \leq \dots$$

подгрупп h_n^* таким, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} h_n^* = h^*$, где $h_n = k(G_n)$.

Поскольку поле h имеет характеристику $p > 0$, то из формулы бинома Ньютона следует, что $(a + b)^p = a^p + b^p$ для любых элементов $a, b \in h$. Тогда,

поскольку $G_{n+1}^p \leq G_n$ и $h_n = k(G_n)$, нетрудно показать, что $(h_{n+1})^p \leq h_n$ и, следовательно, $(h_{n+1}^*)^p \leq h_n^*$. Так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} h_n^* = h^*$, то отсюда, очевидно, следует, что факторгруппа h^*/k^* является p -группой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.4. Пусть f – поле положительной характеристики p , содержащее все корни из 1, пусть A – минимаксная подгруппа без кручения мультипликативной группы f^* поля f такая, что $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$, и пусть B – конечно порожденная плотная подгруппа группы A такая, что факторгруппа A/B является p -группой. Пусть k – подполе поля f , порожденное всеми корнями из 1, конечным подмножеством $S \subseteq f$ и подгруппой B . Пусть $h = k(A)$, тогда поле k является регулярным, а факторгруппа h^*/k^* является p -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку подгруппа B конечно порожденная, то подполе k порождается множеством всех корней из 1 и конечным подмножеством поля f . Тогда по лемме 1.1.2 поле k является регулярным. Очевидно, $B \leq k^*$ и, следовательно, поскольку факторгруппа A/B является p -группой, то и факторгруппа $A/(A \cap k^*)$ также является p -группой. Тогда утверждение следует из леммы 1.1.3.

1.2. Некоторые инвариантные подгруппы абелевых групп с операторами. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ . Отметим, что при этом группу A всегда можно рассматривать как $\mathbb{Z}\Gamma$ -модуль.

Множество $\Delta_{\Gamma}(A)$ элементов группы A , имеющих конечные орбиты при действии группы Γ , образуют подгруппу группы A , которую называют FC -центром группы A при действии группы Γ .

Подгруппа B группы A называется Γ -орбитальной (или просто орбитальной, когда понятно, о какой группе операторов идет речь), если $|\Gamma : N_{\Gamma}(B)| < \infty$, т.е. подгруппа B имеет конечную орбиту при действии группы Γ . Очевидно, что для любой подгруппы H конечного индекса в группе Γ подгруппа B группы A тогда и только тогда является Γ -орбитальной, когда она является H -орбитальной.

Обозначим через $\Lambda_{\Gamma}(A)$ изолятор в группе A подгруппы, порожденной всеми орбитальными подгруппами ранга 1 группы A .

Отметим, что для любой подгруппы B группы A можно определить подгруппу $\Lambda_{\Gamma}(B)$ как изолятор в подгруппе B подгруппы, порожденной всеми Γ -орбитальными подгруппами ранга 1 из подгруппы B . При этом если подгруппа B является Γ -орбитальной, то нетрудно показать, что $\Lambda_{\Gamma}(B) = \Lambda_{\Phi}(B)$, где $\Phi = N_{\Gamma}(B)$.

Пусть p – простое число. Обозначим через $\Lambda_{\Gamma}^p(A)$ изолятор в группе A подгруппы, порожденной всеми элементами $a \in A$, для которых группа Γ обладает подгруппой Γ_a конечного индекса такой, что любой элемент $\gamma \in \Gamma_a$ действует на элементе a следующим образом:

$$a^{\gamma} = a^{p^m},$$

где m – некоторое целое число.

Предположим, что $r(A) = n$ и $C_\Gamma(A) = 1$. Тогда группу A можно вложить в n -мерное векторное пространство $\bar{A} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Следовательно, группа Γ вкладывается в общую линейную группу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$, т.е. группа Γ является линейной. Таким образом, для изучения группы Γ можно применить свойства линейных групп такие, как альтернатива Титса и теорема Колчина–Мальцева. Под базисом группы A будем понимать любую совокупность ее элементов, образующих базис пространства $\bar{A}$ над полем $\mathbb{Q}$.

Группа Γ действует на группе A рационально неприводимо, если $\bar{A} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ является неприводимым $\mathbb{Q}\Gamma$ -модулем. Если же $\bar{A}$ является вполне приводимым $\mathbb{Q}\Gamma$ -модулем, то будем говорить, что группа Γ действует на группе A рационально вполне приводимо. Легко заметить, что группа Γ обладает подгруппой конечного индекса, которая действует на подгруппах $\Delta_\Gamma(A)$, $\Lambda_\Gamma^p(A)$ и $\Lambda_\Gamma(A)$ рационально вполне приводимо.

ЛЕММА 1.2.1. *Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ . Тогда*

- (i) $\Delta_\Gamma(A)$, $\Lambda_\Gamma^p(A)$ и $\Lambda_\Gamma(A)$ являются изолированными Γ -инвариантными подгруппами группы A такими, что $\Delta_\Gamma(A) \leq \Lambda_\Gamma^p(A) \leq \Lambda_\Gamma(A)$;
- (ii) $\Delta_\Gamma(A) = \Delta_H(A)$, $\Lambda_\Gamma^p(A) = \Lambda_H^p(A)$ и $\Lambda_\Gamma(A) = \Lambda_H(A)$ для любой подгруппы $H \leq \Gamma$ конечного индекса;
- (iii) $\Delta_\Gamma(D) = \Delta_\Gamma(A) \cap D$, $\Lambda_\Gamma^p(D) = \Lambda_\Gamma^p(A) \cap D$ и $\Lambda_\Gamma(D) = \Lambda_\Gamma(A) \cap D$ для любой Γ -инвариантной подгруппы D группы A ;
- (iv) если группа Γ действует на группе A рационально вполне приводимо, то $\Delta_\Gamma(A/\Delta_\Gamma(A)) = \Delta_\Gamma(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) непосредственно следуют из определения подгрупп $\Delta_\Gamma(A)$, $\Lambda_\Gamma^p(A)$ и $\Lambda_\Gamma(A)$.

(iii) Для подгруппы $\Delta_\Gamma(A)$ утверждение очевидно.

Пусть $\bar{A} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Из определения подгруппы $\Lambda_\Gamma(A)$ следует, что группа Γ содержит подгруппу конечного индекса Θ такую, что $\mathbb{Q}\Theta$ -модуль $\bar{\Lambda} = \Lambda_\Gamma(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ порождается своими неприводимыми $\mathbb{Q}\Theta$ -подмодулями, которые имеют размерность 1 над полем $\mathbb{Q}$. Следовательно, $\bar{\Lambda}$ является вполне приводимым $\mathbb{Q}\Theta$ -модулем и всякий его подмодуль порождается $\mathbb{Q}\Theta$ -подмодулями, которые имеют размерность 1 над $\mathbb{Q}$. Тогда модуль

$$(\mathrm{is}_A(D \cap \Lambda_\Gamma(A))) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

порождается $\mathbb{Q}\Theta$ -подмодулями X_i , которые имеют размерность 1 над $\mathbb{Q}$. Отсюда нетрудно заключить, что Θ -инвариантные подгруппы $D \cap X_i$ порождают плотную Θ -инвариантную подгруппу в $D \cap \Lambda_\Gamma(A)$. Так как $D \cap X_i$ являются Γ -орбитальными подгруппами ранга 1, то отсюда следует, что $D \cap \Lambda_\Gamma(A) \leq \Lambda_\Gamma(D)$, а обратное включение является очевидным. Таким образом, $D \cap \Lambda_\Gamma(A) = \Lambda_\Gamma(D)$.

Докажем теперь утверждение для подгруппы $\Lambda_\Gamma^p(A)$. Из определения подгруппы $\Lambda_\Gamma^p(A)$ следует, что подгруппу Θ можно выбрать так, что $\mathbb{Q}\Theta$ -модуль

$$\bar{\Lambda}^p = \Lambda_\Gamma^p(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

порождается своими неприводимыми $\mathbb{Q}\Theta$ -подмодулями Y_i , которые имеют размерность 1 над полем $\mathbb{Q}$, причем любой элемент $\gamma \in \Theta$ действует на подмодуле Y_i следующим образом:

$$Y_i \gamma = Y_i p^m,$$

где m – некоторое целое число. Отсюда можно заключить, что и любой $\mathbb{Q}\Theta$ -подмодуль из $\overline{\Lambda^p}$ порождается подмодулями такого рода. Далее для доказательства достаточно повторить рассуждения, приведенные выше для подгруппы $\Lambda_\Gamma(A)$, заменив подгруппу $\Lambda_\Gamma(A)$ на подгруппу $\Lambda_\Gamma^p(A)$.

(iv) По условию $\overline{A} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ является вполне приводимым $\mathbb{Q}\Gamma$ -модулем. Нетрудно показать, что

$$\overline{\Delta} = \Delta_\Gamma(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

является подмодулем модуля $\overline{A}$. Поскольку модуль $\overline{A}$ является вполне приводимым, то существует подмодуль A_1 модуля $\overline{A}$ такой, что $\overline{A} = \overline{\Delta} \oplus A_1$. Если $\Delta_\Gamma(A/\Delta_\Gamma(A)) \neq \Delta_\Gamma(A)$, то $\Delta_\Gamma(A_1) \neq 1$. Но, очевидно, $\Delta_\Gamma(A_1) \leq \overline{\Delta}$, а это приводит к противоречию.

ЛЕММА 1.2.2. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ . Тогда

- (i) факторгруппа $\Gamma/C_\Gamma(\Delta_\Gamma(A))$ является конечной;
- (ii) факторгруппа $\Gamma/C_\Gamma(\Lambda_\Gamma(A))$ обладает свободной абелевой подгруппой конечного индекса;
- (iii) если группа Γ является почти абелевой и $\Lambda_\Gamma(A)$ является максимальной орбитальной подгруппой группы A такой, что $r(A/\Lambda_\Gamma(A)) > 1$, то существует минимальная изолированная орбитальная подгруппа X группы A такая, что $X \cap \Lambda_\Gamma(A) = 1$;
- (iv) если группа $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ циклическая и $C_A(\Gamma) \neq 1$, то существует изолированная Γ -инвариантная подгруппа D группы A такая, что на факторгруппе A/D группа Γ действует тождественно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, переходя к факторгруппе $\Gamma/C_\Gamma(\Lambda_\Gamma(A))$, можно считать, что $C_\Gamma(\Lambda_\Gamma(A)) = 1$. Ввиду леммы 1.2.1, (ii) в доказательстве утверждений (i) и (ii) группу Γ можно заменить любой ее подгруппой конечного индекса. Из определения подгруппы $\Lambda_\Gamma(A)$ следует, что она обладает плотной подгруппой B , которая является прямым произведением конечного семейства орбитальных подгрупп B_i ранга 1. Поскольку $|\Gamma : N_\Gamma(B_i)| < \infty$ для любого i , то, заменив группу Γ ее подгруппой $\bigcap_{i=1}^m N_\Gamma(B_i)$ конечного индекса, можно считать, что все подгруппы B_i являются Γ -инвариантными, а значит, Γ -инвариантной является и подгруппа B .

(i) Из определения подгруппы $\Delta_\Gamma(A)$ нетрудно получить, что $|\Gamma : C_\Gamma(B)| < \infty$ для любой конечно порожденной подгруппы B группы $\Delta_\Gamma(A)$. Если при этом B является плотной подгруппой в $\Delta_\Gamma(A)$, то, поскольку подгруппа $\Delta_\Gamma(A)$ является абелевой и без кручения, получаем, что $C_\Gamma(B) = C_\Gamma(\Delta_\Gamma(A))$, откуда следует утверждение.

(ii) Пусть B – плотная Γ -инвариантная подгруппа из $\Lambda_\Gamma(A)$, которая является прямым произведением конечного семейства Γ -инвариантных подгрупп ранга 1. Поскольку подгруппа B является плотной в $\Lambda_\Gamma(A)$ и $C_\Gamma(\Lambda_\Gamma(A)) = 1$,

то $C_\Gamma(B) = 1$ и, следовательно, группа Γ вкладывается в группу автоморфизмов $\text{Aut } B$ подгруппы B . Поскольку подгруппа B является прямым произведением конечного семейства Γ -инвариантных подгрупп ранга 1, то утверждение легко следует из того факта, что группа автоморфизмов абелевой группы без кручения ранга 1 является прямым произведением конечной и свободной абелевых групп.

(iii) Заменяя группу Γ ее подгруппой конечного индекса, можно считать, что группа Γ абелева. Пусть B – плотная Γ -инвариантная подгруппа из $\Lambda_\Gamma(A)$, которая является прямым произведением $B = \times_{i=1}^m B_i$ конечного семейства Γ -инвариантных подгрупп B_i ранга 1. Будем рассматривать группу A как $\mathbb{Z}\Gamma$ -модуль. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что каждая из подгрупп B_i является циклическим $\mathbb{Z}\Gamma$ -модулем. Так как B является плотной подгруппой абелевой подгруппы без кручения $\Lambda_\Gamma(A)$, то

$$\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\Lambda_\Gamma(A)) = \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(B).$$

Поскольку $B = \bigoplus_{i=1}^m B_i$, то

$$\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(B) = \bigcap_{i=1}^m \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(B_i)$$

и, следовательно,

$$\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\Lambda_\Gamma(A)) = \bigcap_{i=1}^m \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(B_i).$$

Пусть $a \in A \setminus \Lambda_\Gamma(A)$, и пусть $M = a\mathbb{Z}\Gamma$ – циклический $\mathbb{Z}\Gamma$ -модуль, порожденный элементом a . Тогда имеют место соотношения $M \cong \mathbb{Z}\Gamma / \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(a)$ и $\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(a) \geq \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A)$.

Предположим, что $\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\Lambda_\Gamma(A)) \leq \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A)$. Тогда, так как $\Lambda_\Gamma(A) \leq A$, получаем, что

$$\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\Lambda_\Gamma(A)) = \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A)$$

и, следовательно,

$$\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A) = \bigcap_{i=1}^m \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(B_i).$$

Отсюда очевидным образом получаем

$$\begin{aligned} N = \mathbb{Z}\Gamma / \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A) &= \mathbb{Z}\Gamma / \left(\bigcap_{i=1}^m \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(B_i) \right) \\ &\leq \bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z}\Gamma / \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(B_i)) = B = \bigoplus_{i=1}^m B_i \end{aligned}$$

и, следовательно, модуль N обладает конечным рядом подмодулей, факторы которого являются группами без кручения ранга 1. Из соотношений $M \cong \mathbb{Z}\Gamma / \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(a)$ и $\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(a) \geq \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A)$ следует, что M является фактормодулем

модуля N , и, значит, модуль M обладает конечным рядом подмодулей, факторы которого являются группами без кручения ранга 1. Однако это невозможно, так как на факторгруппе $M/(M \cap \Lambda_\Gamma(A))$ группа Γ действует рационально неприводимо и $r(M/(M \cap \Lambda_\Gamma(A))) > 1$.

Полученное противоречие показывает, что $\text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\Lambda_\Gamma(A)) \not\subseteq \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A)$ и, следовательно, существует элемент $\alpha \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\Lambda_\Gamma(A)) \setminus \text{Ann}_{\mathbb{Z}\Gamma}(A)$. Тогда отображение $\varphi: A \rightarrow A$, действующее по правилу $\varphi: x \mapsto \alpha x$, является ненулевым $\mathbb{Z}\Gamma$ -эндоморфизмом модуля A таким, что $\text{Ker } \varphi \geq \Lambda_\Gamma(A)$. Так как $\Lambda_\Gamma(A)$ является максимальной орбитальной подгруппой группы A , то отсюда следует, что $\text{Ker } \varphi = \Lambda_\Gamma(A)$. Следовательно, $\varphi(A) \cong A/\text{Ker } \varphi = A/\Lambda_\Gamma(A)$, откуда получаем, что $X = \text{is}_A(\varphi(A))$ является минимальной изолированной орбитальной подгруппой группы A , причем $r(X) > 1$. Из определения подгруппы $\Lambda_\Gamma(A)$ и условия $r(X) > 1$ следует, что $X \cap \Lambda_\Gamma(A) = 1$.

(iv) Пусть $\bar{A}$ является делимой оболочкой группы A . Будем рассматривать группу $\bar{A}$ как $\mathbb{Q}\langle\gamma\rangle$ -модуль. Поскольку групповое кольцо $\mathbb{Q}\langle\gamma\rangle$ является областью главных идеалов и $\bar{A}$ является конечно порожденным $\mathbb{Q}\langle\gamma\rangle$ -модулем, то из [12; гл. VII, § 1.2, предложения 6, 7] следует, что $\bar{A} = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, где каждый подмодуль A_i аннулируется некоторой степенью простого элемента α_i кольца $\mathbb{Q}\langle\gamma\rangle$. Так как $C_A(\Gamma) \neq 1$, то можно заключить, что $\alpha_i = 1 - \gamma$ для некоторого номера i , и, следовательно, можно положить $D = A \cap \bar{A}(1 - \gamma)$.

ЛЕММА 1.2.3. Пусть p – простое число, и пусть A – абелева минимаксная группа без кручения такая, что $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$. Пусть Γ – группа операторов группы A такая, что $C_\Gamma(A) = 1$. Тогда

- (i) $\Lambda_\Gamma^p(A) = A$ в том и только том случае, когда группа Γ обладает конечно порожденной свободной абелевой подгруппой H конечного индекса, причем в некотором базисе группы A элементы группы H представимы в виде диагональных матриц, диагональные элементы которых имеют вид p^{m_i} , где m_i – некоторые целые числа;
- (ii) если $\Lambda_\Gamma^p(A) \neq A$ и группа Γ почти абелева, то найдется элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\Lambda_{\langle\gamma\rangle}^p(A) \neq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 1.2.1, (ii) в доказательстве группу Γ можно заменить любой ее подгруппой конечного индекса.

(i) Поскольку $\Lambda_\Gamma^p(A) = A$, то из определения подгруппы $\Lambda_\Gamma^p(A)$ следует, что группа Γ обладает подгруппой H конечного индекса, а группа A обладает плотной H -инвариантной подгруппой B такой, что $B = \times_{i=1}^n B_i$, где для каждого i подгруппа B_i является H -инвариантной подгруппой ранга 1 и для каждого элемента $\gamma \in H$ и каждого элемента $a \in B_i$ имеем $a^\gamma = a^{p^{m_i}}$ для некоторого целого числа m_i . Следовательно, для каждого номера i факторгруппа $H/C_H(B_i) = \langle\gamma_i\rangle$ является либо тривиальной, либо бесконечной циклической. Тогда из теоремы Ремака следует, что факторгруппа $H/C_H(B) = H/(\bigcap_{i=1}^n C_H(B_i))$ является конечно порожденной свободной абелевой группой. Поскольку B – плотная подгруппа группы без кручения A , то $C_H(B) = C_H(A)$, а так как $C_H(A) = 1$, то $C_H(B) = 1$. Итак, можно заключить, что H является свободной абелевой группой конечного ранга. Выбрав в качестве базиса группы A совокупность элементов $\{b_1, \dots, b_n\}$, где $1 \neq b_i \in B_i$, нетрудно показать, что в этом базисе

группы A элементы из группы H представимы в виде диагональных матриц с диагональными элементами вида p^{m_i} , где m_i – целые числа.

(ii) Заменив группу Γ на ее подгруппу конечного индекса, можно считать, что группа Γ абелева.

Если $\Lambda_{\langle\gamma\rangle}^p(A) \neq A$ для некоторого элемента $\gamma \in \Gamma$, то утверждение леммы справедливо. Поэтому можно предположить, что $\Lambda_{\langle\gamma\rangle}^p(A) = A$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$, а затем попытаться получить противоречие с условием $\Lambda_{\Gamma}^p(A) \neq A$.

Так как $\Lambda_{\langle\gamma\rangle}^p(A) = A$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$, то из определения подгруппы $\Lambda_{\langle\gamma\rangle}^p(A)$ следует, что для любого элемента $1 \neq \gamma \in \Gamma$ найдется элемент $1 \neq \alpha \in \langle\gamma\rangle$ такой, что группа A обладает плотной $\langle\alpha\rangle$ -инвариантной подгруппой $B = \times_{i=1}^n B_i$, где для каждого номера i подгруппа B_i является изолированной $\langle\alpha\rangle$ -инвариантной подгруппой группы A такой, что для всех элементов $a \in B_i$ имеем $a^\alpha = a^{p^{m_i}}$ для некоторого целого числа m_i и $m_i \neq m_j$ если $i \neq j$. Поскольку группа Γ абелева, а каждая подгруппа B_i является изолированной $\langle\alpha\rangle$ -инвариантной, то нетрудно показать, что каждая подгруппа B_i является Γ -инвариантной. Тогда из конечности ранга группы A следует, что группа A обладает плотной подгруппой C такой, что $C = \times_{i=1}^n C_i$, где для каждого номера i подгруппа C_i является изолированной Γ -инвариантной подгруппой группы A и для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ найдется элемент $\alpha \in \langle\gamma\rangle$ такой, что $a^\alpha = a^{p^{m_i}}$ для некоторого целого числа m_i и для всех элементов $a \in C_i$.

Чтобы получить противоречие, покажем, что в этом случае $\Lambda_{\Gamma}^p(A) = A$. Очевидно, достаточно показать, что $\Lambda_{\Gamma}^p(C_i) = C_i$ для каждого номера i . Тогда можно предполагать, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ найдется элемент $\alpha \in \langle\gamma\rangle$ такой, что $a^\alpha = a^{p^m}$ для некоторого целого числа m и для всех элементов $a \in A$. Таким образом, элемент $\alpha \in \langle\gamma\rangle$ представим в виде скалярной матрицы $p^m E$, где E – единичная матрица. Следовательно, группа Γ обладает плотной циклической подгруппой Φ , которая представима в виде скалярных матриц $p^m E$.

По теореме Колчина–Мальцева группа Γ обладает подгруппой H конечного индекса, которая сопряжена в группе $\mathrm{GL}_n(F)$ с некоторой подгруппой группы треугольных матриц $T_n(F)$, где F – конечное расширение поля рациональных чисел. Заменив группу Γ ее подгруппой конечного индекса, можно считать, что $\Gamma = H$. Тогда группа Γ вкладывается в группу $T_n(F)$, и можно считать, что $\Gamma \leq T_n(F)$. Из [13; теорема 1] следует, что мультипликативная группа поля F является прямым произведением свободной абелевой и конечной групп. Тогда факторгруппа $U = T_n(F)/UT_n(F)$ обладает свободной абелевой подгруппой конечного индекса, где $UT_n(F)$ – группа унитарных матриц. Поскольку подгруппа Φ представима скалярными матрицами, то можно заключить, что пересечение $\Phi \cap UT_n(F)$ является тривиальным. Следовательно, так как Φ является плотной подгруппой группы Γ и группа унитарных матриц $UT_n(F)$ не имеет кручения, то пересечение $\Gamma \cap UT_n(F)$ также является тривиальным. Итак, можно заключить, что группа Γ вкладывается в группу U , которая содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса. Отсюда следует, что группа Γ содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса. А так как Φ – плотная подгруппа группы Γ , то Φ является циклической подгруппой

конечного индекса группы Γ . Поскольку подгруппа Φ представима скалярными матрицами вида $p^m E$, то отсюда следует, что $\Lambda_\Gamma^p(A) = A$, а это приводит к противоречию.

ЛЕММА 1.2.4. Пусть p – простое число, и пусть A – абелева минимаксная группа без кручения такая, что $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$. Пусть Γ – группа операторов группы A такая, что $C_\Gamma(A) = 1$, и пусть H – свободная абелева группа конечного ранга, на которой группа Γ действует тождественно. Пусть $A_1 = A \times H$, и пусть D – Γ -инвариантная подгруппа группы A_1 такая, что $A \cap D = H \cap D = 1$. Тогда

- (i) $\Lambda_\Gamma^p(A_1) = \Lambda_\Gamma^p(A) \times H$;
- (ii) $D \leq C_\Gamma(A_1) \leq \Lambda_\Gamma^p(A_1)$;
- (iii) группа H содержит подгруппу $K = N \times L$ конечного индекса такую, что $D \leq N \times A$, $A_2 = (K \times A)/D \cong \bar{A} \times \bar{L}$, где $\bar{A} = AD/D \cong A$ и $\bar{L} = LD/D \cong L$, и, следовательно, $\Lambda_\Gamma^p(A_2) = \Lambda_\Gamma^p(\bar{A}) \times \bar{L} = \overline{\Lambda_\Gamma^p(A)} \times \bar{L}$, где $\overline{\Lambda_\Gamma^p(A)} = \Lambda_\Gamma^p(A)D/D \cong \Lambda_\Gamma^p(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Очевидно, $\Lambda_\Gamma^p(A_1) \geq \Lambda_\Gamma^p(A) \times H$.

Предположим, что $\Lambda_\Gamma^p(A_1) > \Lambda_\Gamma^p(A) \times H$, тогда существуют элемент $a \in \Lambda_\Gamma^p(A_1) \setminus \Lambda_\Gamma^p(A) \times H$ и подгруппа Γ_a конечного индекса в группе Γ такие, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma_a$ имеет место равенство $a^\gamma = a^{p^m}$, где m – некоторое целое число. Элемент a можно представить в виде $a = bh$, где $b \in A$ и $h \in H$, и, следовательно, $b^\gamma h^\gamma = a^\gamma = a^{p^m} = b^{p^m} h^{p^m}$. Так как $A_1 = A \times H$, то отсюда следует, что $b^\gamma = b^{p^m}$ и $h^\gamma = h^{p^m}$. Тогда $b \in \Lambda_\Gamma^p(A)$, а так как $h \in H$, то $a \in \Lambda_\Gamma^p(A) \times H$. Последнее соотношение приводит к противоречию и, следовательно, $\Lambda_\Gamma^p(A_1) = \Lambda_\Gamma^p(A) \times H$.

(ii) Каждый элемент $a \in D$ можно представить в виде $a = bh$, где $b \in A$ и $h \in H$. Тогда поскольку D является Γ -инвариантной подгруппой группы A_1 , то $a^\gamma = b^\gamma h^\gamma = b^\gamma h \in D$ для каждого элемента $\gamma \in \Gamma$. Следовательно, $a^\gamma a^{-1} = b^\gamma h h^{-1} b^{-1} = b^\gamma b^{-1} \in D \cap A = 1$ и, значит, $b^\gamma b^{-1} = 1$ для каждого элемента $\gamma \in \Gamma$. Тогда $b^\gamma = b$, откуда получаем $a^\gamma = a$ для каждого элемента $\gamma \in \Gamma$ и каждого элемента $a \in D$. Таким образом, можно заключить, что $D \leq C_\Gamma(A_1) \leq \Lambda_\Gamma^p(A_1)$.

(iii) Пусть H_1 – проекция подгруппы D на группу H , и пусть H_2 – изолатор подгруппы H_1 в группе H . Так как группа H свободная абелева, то $|H : H_2| < \infty$. Поскольку факторгруппа H/H_2 свободная абелева, то существует подгруппа L группы H такая, что $H = H_2 \times L$. Положим $N = H_1$ и $K = N \times L$. Поскольку подгруппа H_1 имеет конечный индекс в H_2 , то можно заключить, что K – подгруппа конечного индекса группы H . Так как подгруппа N является проекцией подгруппы D на подгруппу K и $A \cap D = K \cap D = 1$, то нетрудно заметить, что $A_2 = (K \times A)/D \cong \bar{A} \times \bar{L}$, где $\bar{A} = AD/D \cong A$ и $\bar{L} = LD/D \cong L$. Тогда из утверждения (i) следует, что $\Lambda_\Gamma^p(A_2) = \Lambda_\Gamma^p(\bar{A}) \times \bar{L}$. Поскольку $A \cap D = 1$, то нетрудно показать, что $\Lambda_\Gamma^p(\bar{A}) = \overline{\Lambda_\Gamma^p(A)}$, где $\overline{\Lambda_\Gamma^p(A)} = \Lambda_\Gamma^p(A)D/D \cong \Lambda_\Gamma^p(A)$.

ЛЕММА 1.2.5. Пусть p – простое число, и пусть A – минимаксная абелева группа без кручения такая, что $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$. Пусть $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ – циклическая группа операторов группы A такая, что $C_\Gamma(A) = 1$. Предположим, что

$A/\Lambda_\Gamma^p(A) = \Lambda_\Gamma^p(A/\Lambda_\Gamma^p(A))$. Тогда группа Γ содержит подгруппу $\langle \delta \rangle$ конечного индекса такую, что

- (i) группа A содержит плотную подгруппу $B = \times_{i=1}^m B_i$, где подгруппы B_i являются $\langle \delta \rangle$ -инвариантными, причем либо $r(B_i) = 1$, либо $r(B_i) = 2$, и в последнем случае подгруппа B_i обладает изолированной $\langle \delta \rangle$ -инвариантной подгруппой C_i ранга 1, которая $\langle \delta \rangle$ -изоморфна факторгруппе B_i/C_i ;
- (ii) группа $\langle \delta \rangle$ действует на подгруппах B_i ранга 1 и на подгруппах C_i следующим образом: $b^\delta = b^{t_i}$, где $b \in B_i$ или $b \in C_i$, а t_i – числа вида $t_i = p^{r_i}$ для некоторого целого числа r_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку группа A имеет конечный ранг, то из определения подгруппы $\Lambda_\Gamma^p(A)$ следует существование подгруппы $\langle \delta \rangle$ конечного индекса в группе Γ такой, что подгруппа $\Lambda_\Gamma^p(A)$ порождается элементами $a \in A$ такими, что $a^\delta = a^{p^r}$, где r – целые числа. Так как $A/\Lambda_\Gamma^p(A) = \Lambda_\Gamma^p(A/\Lambda_\Gamma^p(A))$, то по тем же соображениям можно считать, что факторгруппа $A/\Lambda_\Gamma^p(A)$ порождается элементами $\bar{a} \in A/\Lambda_\Gamma^p(A)$ такими, что $\bar{a}^\delta = \bar{a}^{p^r}$, где r – целые числа.

Пусть M является делимой оболочкой группы A . Тогда M можно рассматривать как $\mathbb{Q}\langle \delta \rangle$ -модуль, а так как $r(M) < \infty$, то легко видеть, что M – конечно порожденный $\mathbb{Q}\langle \delta \rangle$ -модуль. Тогда так как $\mathbb{Q}\langle \delta \rangle$ – область главных идеалов, то из [12; гл. VII, § 4, предложения 6, 7] следует, что $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, причем каждый подмодуль $M_i \cong \mathbb{Q}\langle \delta \rangle / \alpha_i^{m_i} \mathbb{Q}\langle \delta \rangle$, где α_i – простой элемент кольца $\mathbb{Q}\langle \delta \rangle$ и m_i – натуральное число.

Поскольку $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$, подгруппа $\Lambda_\Gamma^p(A)$ порождается элементами $a \in A$ такими, что $a^\delta = a^{p^r}$, и факторгруппа $A/\Lambda_\Gamma^p(A)$ порождается элементами $\bar{a} \in A/\Lambda_\Gamma^p(A)$ такими, что $\bar{a}^\delta = \bar{a}^{p^r}$, где r – целые числа, то нетрудно заметить, что $\alpha_i = \delta - p^{r_i}$ и $m_i \leq 2$ для каждого номера i , где r_i – целые числа. Тогда либо $r(M_i) = 1$, либо $r(M_i) = 2$, и в последнем случае подгруппа M_i обладает изолированной Γ -инвариантной подгруппой D_i ранга 1 такой, что модули D_i и M_i/D_i являются $\mathbb{Q}\langle \delta \rangle$ -изоморфными. Поскольку A является плотной подгруппой группы M , то легко видеть, что $r(M_i) = r(M_i \cap A)$ для каждого номера i . Тогда в качестве подгруппы B_i можно выбрать циклический $\mathbb{Z}\langle \delta \rangle$ -модуль из $M_i \cap A$ такой, что $r(B_i) = r(M_i \cap A)$, и, полагая $C_i = D_i \cap B_i$, получаем утверждение (i).

(ii) Утверждение следует из определения подгруппы $\Lambda_\Gamma^p(A)$ и выбора подгруппы $\langle \delta \rangle$.

1.3. Об инвариантных идеалах групповых колец абелевых групп с операторами. Кольцо $R * G$ называется скрещенным произведением кольца R и группы G , если $R \leq R * G$ и существует инъективное отображение $g \rightarrow \bar{g}$ группы G в группу обратимых элементов кольца $R * G$ такое, что каждый элемент $a \in R * G$ единственным образом представим в виде конечной суммы $a = \sum_{g \in G} a_g \bar{g}$, где $a_g \in R$. При этом сложение двух таких сумм производится покомпонентно, а умножение определяется формулами $\bar{g} \cdot \bar{c} = t(g, c) \bar{g} \bar{c}$ и $r \bar{g} = \bar{g}(\bar{g}^{-1} r \bar{g})$, где $g, c \in G$, $r \in R$, $\bar{g}^{-1} r \bar{g} \in R$ и $t(g, c)$ – обратимый элемент кольца R . Из равенства $r \bar{g} = \bar{g}(\bar{g}^{-1} r \bar{g})$ следует, что каждый элемент

из $R * G$ однозначно представим в виде конечной суммы $\sum_{g \in G} \bar{g} b_g$, где $b_g \in R$ (см. [14], [15]).

Если $a = \sum_{g \in G} a_g \bar{g} \in R * G$, то множество $\text{Supp}(a)$ элементов $g \in G$ таких, что $a_g \neq 0$, называется носителем элемента a . Пусть $H \leq G$, тогда множество элементов $a \in R * G$ таких, что $\text{Supp}(a) \subseteq H$, образует скрещенное произведение $R * H$, содержащееся в $R * G$. Если при этом подгруппа H нормальная и $P - \bar{G}$ -инвариантный идеал кольца $R * H$, то нетрудно проверить, что факторкольцо $R * G / P(R * G)$ является скрещенным произведением $(R * H / P) * (G / H)$ кольца $R * H / P$ и группы G / H .

Подмножество X кольца S называется мультипликативным, если $xy \in X$ для любых $x, y \in X$. Элемент $0 \neq x \in S$ называется регулярным, если из равенств $xy = 0$ и $zx = 0$ следует $z = 0$ и $y = 0$.

Пусть X – мультипликативное подмножество кольца S , состоящее из регулярных элементов. Кольцо SX^{-1} называется правым кольцом частных кольца S относительно подмножества X , если $S \leq SX^{-1}$, все элементы из X обратимы в SX^{-1} и каждый элемент из SX^{-1} представим в виде sx^{-1} , где $s \in S$ и $x \in X$.

Если Y – подкольцо кольца K , причем K обладает правым кольцом частных R относительно подмножества $Y \setminus \{0\}$, то для упрощения обозначений, так же как и в [16], будем обозначать R через KY^{-1} .

ЛЕММА 1.3.1. Пусть k – поле, и пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга такая, что $A = D \times \langle x \rangle$. Пусть $k * A$ – коммутативное скрещенное произведение поля k и группы A . Предположим, что кольцо $k * A$ содержит ненулевой простой идеал P такой, что $P \cap (k * D) = 0$. Тогда идеал P порождается одним элементом, который является единственным с точностью до умножения на обратимые элементы кольца $k * A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда группа D конечно порожденная, и покажем, что в этом случае идеал P порождается одним элементом. При этом D является свободной абелевой группой, а так как $A = D \times \langle x \rangle$, то группа A также свободная абелева. Пусть $a_1, \dots, a_n$ – свободные порождающие группы A , тогда элементы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ порождают свободную абелеву подгруппу $\bar{A}$ обратимых элементов кольца $k * A$ такую, что $k \cap \bar{A} = 1$. Отсюда нетрудно получить, что скрещенное произведение $k * A$ является групповым кольцом $k\bar{A}$. Тогда из [11; гл. V, теорема 10] следует, что кольца $k * A$, $k * D$ и $k * D[x]$ являются областями с однозначным разложением на множители.

Поскольку $A = D \times \langle x \rangle$, то скрещенное произведение $k * A$ можно рассматривать как групповое кольцо $(k * D)\langle x \rangle$. Пусть $f(x)$ – многочлен наименьшей степени $\deg(f(x))$ из $P \cap (k * D)[x]$. Так как кольцо $k * D$ является областью с однозначным разложением и P – простой идеал, то можно считать, что содержание многочлена $f(x)$ (т.е. наибольший общий делитель его коэффициентов) равно 1. Пусть $g(x)$ – некоторый элемент из $P \cap (k * D)[x]$, тогда из [11; гл. V, § 4, теорема 2] следует, что существуют элемент $u \in k * D$ и элементы $b(x), r(x) \in (k * D)[x]$ такие, что $ug(x) = f(x)b(x) + r(x)$ и либо $\deg(f(x)) > \deg(r(x))$, либо $r(x) = 0$. Тогда $r(x) = ug(x) - f(x)b(x) \in P \cap (k * D)[x]$ и из минимальности $\deg(f(x))$ следует, что $r(x) = 0$.

Таким образом, $ug(x) = f(x)b(x)$. Поскольку $(k * D)[x]$ – область с однозначным разложением на множители, то отсюда следует, что элемент u имеет общие делители либо с $f(x)$, либо с $b(x)$. Так как содержание многочлена $f(x)$ совпадает с 1, то можно заключить, что элемент u делит $b(x)$. Следовательно, $g(x) = f(x)a(x)$, где $ua(x) = b(x)$, и, следовательно, элемент $f(x)$ порождает идеал $P \cap (k * D)[x]$ кольца $(k * D)[x]$. Отсюда, очевидно, следует, что элемент $f(x)$ порождает идеал P кольца $(k * D)\langle x \rangle$.

Рассмотрим теперь общий случай. Факторкольцо $k * A/P$ можно рассматривать как циклический $(k * A)$ -модуль $M = a(k * A)$, где $P = \text{Ann}_{k * A}(a)$. Поскольку P – простой идеал кольца $k * A$ такой, что $P \cap (k * D) = 0$, то модуль M не имеет $(k * D)$ -кручения. Тогда согласно [8; лемма 2(i)] существуют кольцо частных $R = k * A(k * D)^{-1}$ и циклический R -модуль $aR = M(k * D)^{-1}$ такие, что $M \leq M(k * D)^{-1}$. Так как $A = D \times \langle x \rangle$, то нетрудно показать, что R является групповым кольцом $d\langle x \rangle$, где d – поле частных области целостности $k * D$. Следовательно, поскольку $d\langle x \rangle$ – область главных идеалов, то аннулятор Q модуля $M(k * D)^{-1}$ в кольце $d\langle x \rangle$ порождается одним элементом, который можно выбрать как многочлен $f(x)$ наименьшей степени из $Q \cap (k * D)[x]$. Очевидно, существует конечно порожденная плотная подгруппа $C \leq D$ такая, что $f(x) \in k * B$, где $B = C \times \langle x \rangle$. Согласно [8; лемма 2(iii)]

$$R = k * A(k * D)^{-1} = k * C(k * C)^{-1} \otimes_{k * C} k * A,$$

а так как $C \leq B$, то

$$R = k * A(k * D)^{-1} = k * B(k * C)^{-1} \otimes_{k * B} k * A.$$

Тогда $aR = (a(k * B(k * C)^{-1})) \otimes_{k * B} k * A$, поскольку порождающий элемент аннулятора Q содержится в кольце $k * B$. Отсюда очевидным образом следует, что

$$M = a(k * A) = (a(k * B)) \otimes_{k * B} k * A$$

и, следовательно,

$$P = (P \cap k * B)k * A.$$

Группа B является конечно порожденной и, следовательно, как показано выше, идеал $P \cap k * B$ порождается одним элементом. Поскольку

$$P = (P \cap k * B)k * A,$$

то отсюда следует, что идеал P порождается одним элементом; кроме того, непосредственно проверяется, что этот элемент является единственным с точностью до умножения на обратимые элементы области целостности $k * A$.

Пусть R – кольцо, G – группа, и пусть I – правый идеал скрещенного произведения $R * G$. Будем говорить, что подгруппа H группы G контролирует идеал I , если $I = (I \cap R * H)R * G$. Так же как и в случае группового кольца, можно определить контролер $c(I)$ идеала I как пересечение всех подгрупп группы G , контролирующих идеал I . Если группа G абелева, то через $C(I)$ будем обозначать изолятор подгруппы $c(I)$ в группе G .

ЛЕММА 1.3.2. Пусть k – поле, и пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует циклическая группа операторов $\Gamma = \langle \gamma \rangle$. Пусть P – ненулевой простой Γ -инвариантный идеал скрещенного произведения $k * A$, который порождается одним элементом, причем этот порождающий элемент является единственным с точностью до умножения на обратимые элементы кольца $k * A$. Тогда

- (i) идеал P контролируется подгруппой Δ группы A , где $\Delta_\Gamma(A) \leq \Delta$ и $\Delta/(\Delta_\Gamma(A)) = \Delta_\Gamma(A/(\Delta_\Gamma(A)))$;
- (ii) если группа Γ действует на группе A рационально вполне приводимо, то идеал P контролируется подгруппой $\Delta_\Gamma(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что ввиду леммы 1.2.1, (ii) в доказательстве группу Γ можно заменить на любую ее подгруппу конечного индекса. Тогда ввиду леммы 1.2.2, (i), заменив группу Γ ее подгруппой конечного индекса, можно считать, что $\Delta_\Gamma(A) = C_A(\Gamma)$.

(i) Пусть a – порождающий элемент идеала P , тогда элемент a можно представить в виде

$$a = \sum_{g \in \text{Supp}(a)} a_g \bar{g}.$$

При этом, очевидно, элемент a можно выбрать так, что $e \in \text{Supp}(a)$, где e – нейтральный элемент группы A . Так как идеал P является Γ -инвариантным, то a^γ также является порождающим элементом идеала P для любого $\gamma \in \Gamma$. Поскольку порождающий элемент идеала P является единственным с точностью до умножения на обратимые элементы кольца $k * A$, то найдется обратимый элемент s кольца $k * A$ такой, что $a^\gamma = as$. Так как A является абелевой группой без кручения конечного ранга, то любой обратимый элемент s кольца $k * A$ имеет вид $s = c_g \bar{g}$, где $c_g \in k^*$ и $g \in A$. Отсюда, очевидно, следует, что $(\text{Supp}(a))^\gamma = (\text{Supp}(a))g$, где $g \in A$. Так как $e \in \text{Supp}(a)$, то $e \in (\text{Supp}(a))^\gamma$, а так как $(\text{Supp}(a))^\gamma = (\text{Supp}(a))g$, то $e \in (\text{Supp}(a))g$. Отсюда следует, что $h = g^{-1} \in \text{Supp}(a)$, а так как $(\text{Supp}(a))^\gamma = (\text{Supp}(a))g$, то $(\text{Supp}(a))^\gamma h = \text{Supp}(a)$, где $h \in \text{Supp}(a)$. Тогда, очевидно, $h^\gamma h \in \text{Supp}(a)$ и по индукции ввиду соотношения $(\text{Supp}(a))^\gamma h = \text{Supp}(a)$ получаем, что $h^{\gamma^n} h^{\gamma^{n-1}} \dots h^\gamma h \in \text{Supp}(a)$ для любого натурального числа n . Так как множество $\text{Supp}(a)$ конечно, то отсюда следует, что

$$h^{\gamma^n} h^{\gamma^{n-1}} \dots h^\gamma h = h^{\gamma^m} h^{\gamma^{m-1}} \dots h^\gamma h,$$

где n и m – натуральные числа такие, что $n > m$. Тогда после серии очевидных сокращений получаем

$$h^{\gamma^t} h^{\gamma^{t-1}} \dots h^\gamma h = e,$$

где t – натуральное число. Отсюда следует, что

$$h^{\gamma^{t+1}} h^{\gamma^t} \dots h^{\gamma^2} h^\gamma = e$$

и, значит,

$$h^{\gamma^{t+1}} h^{\gamma^t} \dots h^{\gamma^2} h^\gamma (h^{\gamma^t} h^{\gamma^{t-1}} \dots h^\gamma h)^{-1} = e.$$

Из последнего равенства после сокращений получаем

$$h^{\gamma^{t+1}} h^{-1} = e,$$

т.е. $h^{\gamma^{t+1}} = h$. Таким образом, $h \in \Delta_\Gamma(A)$, а так как $\Delta_\Gamma(A) = C_A(\Gamma)$, то $h \in C_A(\Gamma)$, т.е. $h^\gamma = h$.

Итак, мы получили, что

$$(\text{Supp}(a))^\gamma h = \text{Supp}(a),$$

причем $h^\gamma = h$. Тогда для любого элемента $g \in \text{Supp}(a)$ получаем $g^\gamma h \in \text{Supp}(a)$. Отсюда ввиду соотношения $(\text{Supp}(a))^\gamma h = \text{Supp}(a)$ по индукции получаем, что

$$g^{\gamma^n} h^{\gamma^{n-1}} \cdots h^\gamma h \in \text{Supp}(a)$$

для любого натурального числа n . Так как множество $\text{Supp}(a)$ конечно, то отсюда следует, что

$$g^{\gamma^n} h^{\gamma^{n-1}} \cdots h^\gamma h = g^{\gamma^m} h^{\gamma^{m-1}} \cdots h^\gamma h,$$

где n и m – натуральные числа такие, что $n > m$. Так как $h^\gamma = h$, то отсюда следует, что $g^{\gamma^n} h^n = g^{\gamma^m} h^m$ и, далее, $(gh^n)^{\gamma^n} = (gh^m)^{\gamma^m}$. Из последнего равенства после сокращений получаем $g^{\gamma^t} h^t = g$, где t – натуральное число. Отсюда, так как $h \in \Delta_\Gamma(A)$, очевидно следует, что $g \in \Delta$, где Δ – подгруппа группы A такая, что $\Delta_\Gamma(A) \leq \Delta$ и $\Delta/(\Delta_\Gamma(A)) = \Delta_\Gamma(A/(\Delta_\Gamma(A)))$.

Таким образом, $\text{Supp}(a) \subseteq \Delta$, а так как элемент a порождает идеал P , то отсюда следует, что идеал P контролируется подгруппой Δ .

(ii) Утверждение следует из (i) и леммы 1.2.1, (iv), так как в этом случае $\Delta_\Gamma(A) = \Delta$.

ЛЕММА 1.3.3. Пусть A – абелева p -делимая группа без кручения и k – конечное поле такое, что $|k| = p^t = m$. Тогда групповая алгебра kA обладает автоморфизмом β , действующим по правилу $\beta: x \mapsto x^m$ для любого элемента $x \in kA$. При этом любой идеал групповой алгебры kA является $\langle \beta \rangle$ -инвариантным и сужение автоморфизма β на группу A является центральным элементом группы $\text{Aut } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A – абелева p -делимая группа без кручения, то существует автоморфизм α группы A такой, что $\alpha: a \mapsto a^p$ для любого элемента $a \in A$. Поскольку $|k| = p^t = m$, то $b^m = b$ для любого элемента $b \in k$. Пусть $\beta = \alpha^t$, тогда $\beta: a \mapsto a^m$ для любого элемента $a \in A$. Кроме того, нетрудно заметить, что β является центральным элементом группы $\text{Aut } A$.

Автоморфизм β группы A можно продолжить до автоморфизма групповой алгебры kA , полагая

$$x^\beta = \sum_{g \in A} \alpha_g g^\beta$$

для любого элемента $\sum_{g \in A} \alpha_g g = x \in kA$. Тогда, поскольку $b^m = b$ для любого элемента $b \in k$ и поле k имеет характеристику p , нетрудно показать, что

$$x^\beta = \sum_{g \in A} \alpha_g g^\beta = \sum_{g \in A} (\alpha_g g)^m = x^m$$

для любого элемента $x \in kA$. Отсюда, очевидно, следует, что любой идеал групповой алгебры kA является $\langle \beta \rangle$ -инвариантным.

§ 2. О контролерах простых идеалов групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга

Как отмечалось во введении, при некоторых дополнительных условиях соотношения (1)–(3) означают одно и то же. В настоящем параграфе развивается подход, который позволяет с помощью результатов теории полей таких, как теория Куммера и свойства мультипликативных групп полей, доказывать эти соотношения для случая групповой алгебры kA , где k – конечно порожденное поле и A – абелева группа без кручения конечного ранга.

2.1. Индуцированные модули и контролеры точных простых идеалов групповых алгебр абелевых групп. Пусть k – подполе поля f , и пусть G – подгруппа мультипликативной группы f^* поля f . Тогда поле $k(G)$ можно рассматривать как kG -модуль, а поле k можно рассматривать как $k(G \cap k^*)$ -модуль. Следовательно, можно определить тензорное произведение

$$k \otimes_{k(G \cap k^*)} kG,$$

при этом соотношение $k(G) = k \otimes_{k(G \cap k^*)} kG$ означает, что $k(G) = \bigoplus_{t \in T} kt$, где T – трансверсаль подгруппы $G \cap k^*$ в группе G . Если $|G/G \cap k^*| = m < \infty$, то соотношение $k(G) = k \otimes_{k(G \cap k^*)} kG$ имеет место тогда и только тогда, когда $[k(G) : k] = m$. Связь между $|G/G \cap k^*|$ и $[k(G) : k]$ изучается в теории Куммера (см. [11; гл. VIII, теорема 13]). Таким образом, можно надеяться, что существует связь между индуцированными модулями над групповыми алгебрами абелевых групп и теорией Куммера. Эта связь рассматривается в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.1. Пусть k – подполе поля f , и предположим, что поле k содержит все корни из 1. Пусть A – подгруппа мультипликативной группы f^* поля f , и пусть $B = k^* \cap A$. Предположим, что факторгруппа A/B является периодической, причем $\text{char } k \notin \pi(A/B)$. Тогда

$$k(A) = k \otimes_{kB} kA = \bigoplus_{t \in T} kt,$$

где T – трансверсаль подгруппы B в группе A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, группа A является объединением подгрупп $C \leq A$ таких, что $B \leq C$ и $|C : B| < \infty$. Тогда достаточно показать, что для любой такой подгруппы $C \leq A$ выполняется соотношение

$$k(C) = k \otimes_{kB} kC = \bigoplus_{t \in T} kt,$$

где T – трансверсаль подгруппы C в группе A . Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $|A/B| < \infty$.

Положим $D = Ak^*$, тогда $D/k^* \cong Ak^*/k^* \cong A/(A \cap k^*) = A/B$. Пусть m – наименьшее натуральное число такое, что $D^m \leq k^*$. Поскольку поле k содержит все корни из 1, то периодическая часть $t(k^*)$ группы k^* является делимой группой и, следовательно, $t(k^*) \leq (k^*)^m \leq D^m$. Нетрудно проверить, что отображение $\varphi: D \rightarrow k^*$, заданное правилом $\varphi: a \mapsto a^m$, является эндоморфизмом группы D таким, что $\text{Кер } \varphi \leq t(k^*) \leq (k^*)^m \leq D^m$. Отсюда очевидным образом следует, что $D^m/(k^*)^m \cong D/k^* \cong A/B$.

Пусть $G = (D^m)^{1/m}$, тогда $D \leq G$. Предположим, что $D \neq G$, т.е. существует элемент $g \in G \setminus D$, тогда $g^m = d^m$ для некоторого элемента $d \in D$ и, следовательно, $(gd^{-1})^m = 1$. Таким образом, $(gd^{-1})^m \in t(f^*) = t(k^*)$ и, следовательно, $g \in D$. Итак $(D^m)^{1/m} = D$, поэтому из [11; гл. VIII, теорема 13] следует, что $[k(D) : k] = |D^m : (k^*)^m|$. Тогда, поскольку $D^m/(k^*)^m \cong A/B$ и $D = Ak^*$, получаем $[k(A) : k] = |A : B|$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$k(A) = k \otimes_{kB} kA = \bigoplus_{t \in T} kt,$$

где T – трансверсаль подгруппы B в группе A .

ТЕОРЕМА 2.1.2. Пусть k – конечно порожденное поле положительной характеристики p , A – абелева группа без кручения конечного ранга, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Положим $R = kA/P$, и пусть h – поле частных области целостности R . Пусть f – поле, полученное присоединением к полю h всех корней из 1. Пусть C – плотная минимаксная подгруппа группы A такая, что $\text{Sp}(C) \subseteq \{p\}$ и $p \notin \pi(A/C)$. Пусть s – подполе поля f , полученное присоединением к полю k подгруппы C и всех корней из 1. Пусть $B = A \cap s^*$. Тогда

- (i) B является плотной минимаксной подгруппой группы A такой, что $\text{Sp}(B) \subseteq \{p\}$;
- (ii) $f = s(A) = s \otimes_{sB} sA = \bigoplus_{t \in T} st$, где T – трансверсаль подгруппы B в группе A ;
- (iii) $P = (P \cap kB)kA$;
- (iv) контролер $c(P)$ идеала P является минимаксной подгруппой группы A такой, что $\text{Sp}(c(P)) \subseteq \{p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего следует отметить, что поскольку идеал P является точным, то группу A можно рассматривать как подгруппу мультипликативной группы f^* поля f .

(i) Очевидно, $C \leq B$, а так как C – плотная подгруппа группы A , то B тоже является плотной подгруппой группы A .

Поскольку $\text{Sp}(C) \subseteq \{p\}$, то, очевидно, подгруппа C обладает конечно порожденной плотной подгруппой D такой, что факторгруппа C/D является p -группой. Пусть d – подполе поля s , полученное присоединением к полю k подгруппы D и всех корней из 1. Так как поле k и подгруппа D являются конечно порожденными, то поле d порождается всеми корнями из 1 и конечным подмножеством поля s . Тогда, поскольку факторгруппа C/D является p -группой, из предложения 1.1.4 следует, что поле d является регулярным, а факторгруппа

s^*/d^* является p -группой. Следовательно, так как подгруппа B без кручения, то подгруппа $B \cap d^*$ свободная абелева, а факторгруппа $B/(B \cap d^*)$ является p -группой. Отсюда нетрудно получить, что B является плотной минимаксной подгруппой группы A такой, что $\text{Sp}(B) \subseteq \{p\}$.

(ii) Из определения полей f и s следует, что $f = s(A)$. Поскольку $C \leq B = A \cap s^*$ и $p \notin \pi(A/C)$, то $p \notin \pi(A/(A \cap s^*))$. Тогда утверждение следует из предложения 2.1.1.

(iii) Пусть $k[A]$ – подкольцо поля f , порожденное полем k и подгруппой A мультипликативной группы f^* поля f . Пусть $k[B]$ – подкольцо поля f , порожденное полем k и подгруппой B группы A . Тогда $k[B] \leq s$ и поскольку $s(A) = \bigoplus_{t \in T} st$ (ввиду утверждения (ii)), где T – трансверсаль подгруппы B в группе A , то можно заключить, что $k[A] = \bigoplus_{t \in T} k[B]t$. Так как $k[A] \cong kA/P$, то отсюда следует, что $P = (P \cap kB)kA$.

(iv) Утверждение следует из (i) и (iii).

2.2. Стандартизуемые простые идеалы групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга. Пусть k – поле, A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть I – идеал групповой алгебры kA . Подгруппа $N_\Gamma(I) \leq \Gamma$, состоящая из элементов $\gamma \in \Gamma$ таких, что $I = I^\gamma$, называется нормализатором идеала I в группе Γ . Очевидно, $N_\Gamma(I) \leq S_\Gamma(I)$. Определение стандартизатора $S_\Gamma(I)$ идеала I в группе Γ приводится во введении.

ЛЕММА 2.2.1. Пусть k – поле положительной характеристики p , A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Пусть C – плотная минимаксная подгруппа группы A такая, что $\text{Sp}(C) \subseteq \{p\}$. Тогда для любого элемента $\gamma \in S_\Gamma(P)$ найдется подгруппа D группы A такая, что $D \leq C$, $|C/D| < \infty$, $p \notin \pi(C/D)$ и $kD \cap P = kD \cap P^\gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\gamma \in S_\Gamma(P)$, то существует конечно порожденная плотная подгруппа H группы A такая, что $kH \cap P = kH \cap P^\gamma$. Так как C является плотной подгруппой группы A , то нетрудно заметить, что $|H : C \cap H| < \infty$, и, заменив H на ее подгруппу $H \cap C$, можно считать, что $H \leq C$. Пусть D/H – силовская p -подгруппа факторгруппы C/H . Тогда, так как $\text{Sp}(C) \subseteq \{p\}$, нетрудно заметить, что $|C/D| < \infty$, и из определения подгруппы D следует, что $p \notin \pi(C/D)$.

Покажем теперь, что $kD \cap P = kD \cap P^\gamma$. Очевидно, подгруппа D обладает возрастающим рядом подгрупп $\{H_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ таких, что $H = H_1$, $H_i \leq H_{i+1}$, $|H_{i+1} : H_i| = p$ и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i = D$. Достаточно показать, что $kH_i \cap P = kH_i \cap P^\gamma$ для каждого i . Используя индукцию по i , достаточно показать, что $kH_{i+1} \cap P = kH_{i+1} \cap P^\gamma$, если $kH_i \cap P = kH_i \cap P^\gamma = L$. Пусть $a \in kH_{i+1} \cap P$, тогда так как поле k имеет положительную характеристику p и $H_{i+1}^p \leq H_i$, нетрудно показать, что $a^p \in kH_i \cap P = L \subseteq kH_{i+1} \cap P^\gamma$, и, следовательно, так как $kH_{i+1} \cap P^\gamma$ является простым идеалом, то $a \in kH_{i+1} \cap P^\gamma$. Таким образом, $kH_{i+1} \cap P \leq kH_{i+1} \cap P^\gamma$ и те же самые аргументы показывают, что $kH_{i+1} \cap P^\gamma \leq kH_{i+1} \cap P$.

Пусть A – абелева группа, k – поле и I – идеал групповой алгебры kA . Через $C(I)$ будем обозначать изолятор в группе A контролера $c(I)$ идеала I .

ЛЕММА 2.2.2. Пусть k – поле, A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть P – точный простой идеал групповой алгебры kA . Тогда

- (i) $c(kB \cap P) \leq c(P) \cap B$ для любой подгруппы B группы A ;
- (ii) $C(P) \cap B = C(kB \cap P)$ для любой плотной подгруппы B группы A , где $C(kB \cap P) = \text{is}_B(c(kB \cap P))$;
- (iii) если $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то $C(P)$ является Γ -инвариантной подгруппой группы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $M = \text{ak } A$ – циклический kA -модуль такой, что $\text{Ann}_{kA}(a) = P$. Положим $C = c(P)$. Тогда из определения контролера $c(P)$ следует, что $\text{ak } A = \bigoplus_{t \in T} \text{ak } Ct$, где T – трансверсаль подгруппы C в группе A . Пусть T_1 – трансверсаль подгруппы $C \cap B$ в подгруппе B . Очевидно, трансверсаль T можно выбрать так, что $T_1 \subseteq T$. Тогда, так как $B = \bigcup_{t \in T_1} (C \cap B)t$ и $\text{ak } A = \bigoplus_{t \in T} \text{ak } Ct$, получаем

$$\text{ak } B = \bigoplus_{t \in T_1} \text{ak } (C \cap B)t.$$

Отсюда следует, что подгруппа $c(P) \cap B$ контролирует идеал P и, значит,

$$c(kB \cap P) \leq c(P) \cap B.$$

(ii) Из утверждения (i) следует, что $C(kB \cap P) \leq C(P) \cap B$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $C(P) = A$. При этом достаточно показать, что $C(P \cap kB) = B$. Предположим, что $B > C(kB \cap P)$. Тогда, так как $C(P \cap kB)$ является собственной изолированной подгруппой плотной подгруппы B группы A , нетрудно показать, что существует изолированная подгруппа D группы A такая, что $C(P \cap kB) \leq D \cap B$ и $r(A/D) = 1$.

Пусть k_1 – поле частных области целостности kA/P , и пусть k_2 – поле частных области целостности $kD/(kD \cap P)$. Поскольку ранг группы A конечен, то существует изолированная подгруппа C из D , которая является максимальной относительно свойства $(P \cap kD) \cap kC = 0$. Тогда степень трансцендентности $(k_2 : k)$ поля k_2 над полем k совпадает с $r(C)$. Так как $C(P) = A$, то можно заключить, что поле k_1 является алгебраическим расширением поля k_2 и, следовательно, степень трансцендентности $(k_1 : k)$ поля k_1 над полем k совпадает с $r(C)$.

Пусть k_3 – поле частных области целостности $kB/(kB \cap P)$. Так как факторгруппа A/B периодическая, то поле k_1 является алгебраическим расширением поля k_3 и, следовательно, степень трансцендентности $(k_3 : k)$ поля k_3 над полем k совпадает с $r(C)$. Но с другой стороны, так как $k(C \cap B) \cap P = 0$ и $C(P \cap kB) \leq D \cap B$, то можно заключить, что степень трансцендентности $(k_3 : k)$ поля k_3 над полем k не меньше чем $r(C) + 1$.

(iii) Так как $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то согласно определению стандартизатора $S_\Gamma(P)$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ существует конечно порожденная плотная подгруппа B

группы A такая, что $kB \cap P = kB \cap P^\gamma$. Тогда из утверждения (i) следует, что $c(kB \cap P) \leq c(P) \cap c(P)^\gamma$, а из утверждения (ii) следует, что $r(c(P)) = r(c(kB \cap P)) = r(c(P)^\gamma)$. Отсюда нетрудно заключить, что подгруппа $c(P) \cap c(P)^\gamma$ является плотной в подгруппах $c(P)$ и $c(P)^\gamma$. Тогда

$$\text{is}_A c(P) = \text{is}_A(c(P)^\gamma) = (\text{is}_A c(P))^\gamma$$

и, следовательно, $C(P) = C(P)^\gamma$.

ТЕОРЕМА 2.2.3. Пусть k – конечно порожденное поле положительной характеристики p , A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Предположим, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Тогда идеал P контролируется Γ -инвариантной минимаксной подгруппой S группы A такой, что $\text{Sp}(S) \subseteq \{p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.2.2, (iii), заменив группу A на ее Γ -инвариантную подгруппу $C(P) = \text{is}_A c(P)$, не ограничивая общности, можно считать, что $c(P)$ является плотной подгруппой группы A .

Пусть $R = kA/P$, и пусть h – поле частных области целостности R . Тогда, так как идеал P является точным, группу A можно рассматривать как подгруппу мультипликативной группы h^* поля h . Пусть f – поле, полученное присоединением к полю h всех корней из 1. По теореме 2.1.2, (iv) $c(P)$ является минимаксной абелевой группой такой, что $\text{Sp}(c(P)) \subseteq \{p\}$, и, следовательно, существует плотная подгруппа C группы A такая, что $C \geq c(P)$, $\text{Sp}(C) \subseteq \{p\}$ и $p \notin \pi(A/C)$.

Пусть s – подполе поля f , полученное присоединением к полю k всех корней из 1 и подгруппы C . Пусть $B = A \cap s^*$, тогда по теореме 2.1.2, (i), (iii) B является плотной подгруппой группы A такой, что $\text{Sp}(B) \subseteq \{p\}$ и $c(P) \leq C \leq B$. Так как $C \leq B$ и $p \notin \pi(A/C)$, то $p \notin \pi(A/B)$.

Пусть $\gamma \in \Gamma$. Так как $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то по лемме 2.2.1 существует плотная подгруппа D группы A такая, что $D \leq B$, $|B/D| < \infty$, $p \notin \pi(A/D)$ и $kD \cap P = kD \cap P^\gamma$.

Пусть d – подполе поля s , полученное присоединением к полю k подгруппы D и всех корней из 1. Пусть $H = A \cap d^*$, тогда из теоремы 2.1.2, (iii) следует, что $c(P) \leq H$. Так как $d \leq s$, $B = A \cap s^*$ и $H = A \cap d^*$, то $H \leq B$.

Пусть $R_\gamma = kA/P^\gamma$, и пусть h_γ – поле частных области целостности R_γ . Пусть f_γ – поле, полученное присоединением к полю h_γ всех корней из 1. Пусть d_γ – подполе поля f_γ , полученное присоединением к полю k подгруппы D и всех корней из 1, и пусть $H_\gamma = A \cap (d_\gamma^*)$. Пусть K_1 – подкольцо поля f , порожденное полем k и подгруппой D , и пусть K_2 – подкольцо поля f_γ , порожденное полем k и подгруппой D . Так как $kD \cap P = kD \cap P^\gamma$, то можно заключить, что

$$K_1 = kD/(kD \cap P) = kD/(kD \cap P^\gamma) = K_2 = K.$$

Тогда поля d и d_γ являются полями разложения одного и того же множества Ω многочленов над полем частных области целостности K . Точнее, Ω – это множество всех многочленов деления круга для всех корней из 1. Следовательно,

согласно [11; гл. VII, теорема 3] существует изоморфизм ψ поля d на поле d_γ , который действует тождественно на элементах области целостности K . Таким образом, можно считать, что $d \cong d_\gamma$ и $K \leq d \cap d_\gamma$.

Предположим, что $H \neq H_\gamma$. Тогда существует элемент $a \in A$ такой, что либо $a \in H \setminus H_\gamma$, либо $a \in H_\gamma \setminus H$. Предположим сначала, что $a \in H \setminus H_\gamma$.

Из определения подгрупп H и H_γ следует, что $D \leq H \cap H_\gamma$. Так как D – плотная подгруппа группы A , то существует наименьшее натуральное число m такое, что $a^m = b \in D$. Поскольку $p \notin \pi(A/D)$, то число m не делится на p . Так как $a \in H = A \cap d$ и поле d содержит все корни из 1, то нетрудно получить, что все корни многочлена $X^m - b$ содержатся в поле d . С другой стороны, так как $a \notin H_\gamma = A \cap d_\gamma$ и, в то же время, a является корнем полинома $X^m - b$ в поле f_γ , то можно заключить, что поле d_γ не содержит всех корней многочлена $X^m - b$. Так как $d \cong d_\gamma$, $K \leq d \cap d_\gamma$ и $b \in K$, то полученное выше ведет к противоречию. Если $a \in H_\gamma \setminus H$, то аналогичные рассуждения опять приводят к противоречию. Таким образом, $H = H_\gamma$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$.

Очевидно, $c(P^\gamma) = (c(P))^\gamma$. Из теоремы 2.1.2, (iii) следует, что $(c(P))^\gamma \leq H_\gamma$, а так как $H_\gamma = H \leq B$, то можно заключить, что $(c(P))^\gamma \leq B$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$. Тогда $S = \langle (c(P))^\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle \leq B$ и, следовательно, S является Γ -инвариантной подгруппой группы A , контролирующей идеал P , а так как $\text{Sp}(B) \subseteq \{p\}$, то $\text{Sp}(S) \subseteq \{p\}$.

§ 3. Теорема Брукса о контролерах простых идеалов групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга

Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ . Теорема А работы [3] утверждает, что если k – поле и P – простой точный идеал групповой алгебры kA такой, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то идеал P контролируется подгруппой $\Delta_\Gamma(A)$. Для случая, когда группа A является конечно порожденной и $|\Gamma : N_\Gamma(P)| < \infty$, аналогичный результат был доказан Роузблэйдом в [4; теорема D].

Однако, как отмечалось во введении, оригинальное доказательство [3; теорема А] содержит ошибку. Ошибка произошла в доказательстве [3; лемма 10.2], где эквивалентные нормирования интерпретировались как эквивалентные отображения (см. [3; с. 47, строка 5]). Однако эквивалентность нормирований означает лишь то, что они имеют одно и то же кольцо нормирования, но это не означает, что эти нормирования совпадают как отображения (см. [17; гл. VI, § 8]). Именно такая ситуация складывается в следующем на удивление простом примере, который показывает, что теорема А работы [3] неверна в случае, когда поле k имеет положительную характеристику.

ПРИМЕР. Пусть p – простое число, пусть k – конечное поле порядка p , и пусть A – p -делимая минимаксная абелева группа без кручения ранга 2 такая, что $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$. Пусть $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ – циклическая группа автоморфизмов группы A такая, что $a^\gamma = a^p$ для любого элемента $a \in A$. Тогда $\Delta_\Gamma(A) = 1$ и любой

идеал групповой алгебры kA является Γ -инвариантной. Поэтому чтобы построить контрпример к теореме А работы [3], достаточно показать, что групповая алгебра kA обладает простыми точными нетривиальными идеалами.

Пусть B – p -делимая минимаксная абелева группа без кручения ранга 1 такая, что $\text{Sp}(B) \subseteq \{p\}$. Пусть f – поле частных групповой алгебры kB , тогда поле f имеет степень трансцендентности 1 над полем k . Так как $(kB)^p = kB$, то мультипликативная группа f^* поля f является p -делимой. Из предложения 1.1.4 следует, что группа f^* является прямым произведением конечной группы и расширения свободной абелевой группы счетного ранга с помощью p -группы. Отсюда следует существование вложения группы A в группу f^* , причем это вложение продолжается до кольцевого гомоморфизма φ групповой алгебры kA в поле f . При этом $\text{Ker } \varphi$ является простым точным идеалом кольца kA , а так как поле f имеет степень трансцендентности 1 над полем k , то $\text{Ker } \varphi \neq 0$.

К сожалению, нам неизвестно имя автора этого примера, и заинтересованный читатель может обратиться за справками к К. Бруксу.

Леммы 10.1–10.4 работы [3] играют ключевую роль в доказательстве теоремы А из [3], при этом в отличие от леммы 10.2 остальные три леммы являются верными. В свою очередь, упомянутые выше леммы обобщают леммы 12–14 и следствие 11 работы Роузблэйда [4]. При этом доказательства результатов работы [3] существенным образом зависят от идей и методов, введенных в работе [4].

Доказательства лемм 10.1–10.3 работы [3] основываются на свойствах нормирований поля $k(A)$. Эти свойства рассматриваются в следующем пункте.

3.1. О нормированиях полей частных факторколец групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга. В этом пункте развиваются некоторые идеи и методы, введенные в [3; § 11] и [4; § 6.4]. Впервые же методы теории нормирований полей были применены к изучению идеалов групповых алгебр абелевых групп конечного ранга в работе Бергмана [18], где была доказана гипотеза Залесского.

Следует отметить, что помимо упомянутой выше ошибки, которая разрушила доказательство леммы 10.2 работы [3], в [3; § 11] содержатся и другие неточности и пробелы в изложении материала, связанного с нормированиями полей, которые, однако, не имели столь печальных последствий для результатов работы [3]. Вместе с тем наличием этих пробелов и неточностей, по-видимому, и можно объяснить тот факт, что несмотря на значительное количество работ, в которых используются результаты работы [3], ошибка в доказательстве леммы 10.2 работы [3] так и не была обнаружена на протяжении стольких лет. Исправление этих пробелов и неточностей является основной целью настоящего пункта.

Прежде всего, следует сделать некоторые замечания по поводу обозначений, используемых в [3; леммы 10.1–10.4] и в нашей работе. Пусть k – поле, A – абелева группа, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Тогда факторкольцо $R = kA/P$ является областью целостности, и поскольку идеал P

является точным, то группа A является подгруппой мультипликативной группы f^* поля частных f области целостности R . Пусть B – подгруппа группы A , тогда через $k(B)$ будем обозначать подполе поля f , полученное присоединением к полю k подгруппы B , при этом, очевидно, $f = k(A)$. Если B и D – подгруппы группы A такие, что $D \leq B$, то $(k(B) : k(D))$ будет обозначать степень трансцендентности поля $k(B)$ над полем $k(D)$. (В работе [3] эта степень трансцендентности обозначалась через $[k(B) : k(D)]$, однако в настоящей работе это обозначение уже занято для обозначения степени расширения. Поэтому, чтобы избежать недоразумений, мы используем обозначение $(k(B) : k(D))$.)

Нетрудно заметить, что изолированная подгруппа B группы A тогда и только тогда контролирует идеал P , когда $(k(A) : k(B)) = r(A/B)$. Таким образом, если $C(P) = A$, то $(k(A) : k(B)) < r(A/B)$ для любой изолированной подгруппы B группы A .

Напомним, что нормирования v и ϖ поля $k(A)$ с группами значений нормирований G_v и G_ϖ называются эквивалентными, если существует сохраняющий порядок изоморфизм φ группы G_v на группу G_ϖ такой, что $\varphi(v(x)) = \varpi(x)$ для всех $x \in k(A)^*$. Нормирования v и ϖ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же кольцо нормирования $R_v = R_\varpi$. В теории нормирований полей эквивалентные нормирования считаются одинаковыми, при этом используется обозначение $\varpi = v$ (см. [17; гл. VI, § 8]).

Каждое нормирование v поля $k(A)$ индуцирует множество гомоморфизмов группы A в группу G_v значений нормирования v . Следует отметить, что это множество гомоморфизмов является бесконечным, поскольку nv также является нормированием поля $k(A)$ с группой значений нормирования nG_v для любого натурального числа n . В то же время, нормирования v и nv являются эквивалентными, поскольку отображение $\varphi : G_v \rightarrow nG_v$ по правилу $\varphi : g \mapsto ng$ является сохраняющим порядок изоморфизмом группы значений нормирования G_v на группу значений нормирования nG_v . Однако гомоморфизмы θ_v и $n\theta_v$ являются, очевидно, различными.

Так как группа значений нормирования не имеет кручения, то ядро A_v каждого такого гомоморфизма θ_v является изолированной подгруппой группы A . Так как $A_v = A \cap R_v$, где R_v – кольцо нормирования v , то можно заключить, что $A_v = A_\varpi$, если нормирования v и ϖ являются эквивалентными, т.е. $\varpi = v$, в то время как гомоморфизмы θ_v и θ_ϖ могут быть различными.

Пусть Ω – множество всех нормирований поля $k(A)$, и пусть

$$K = \{A_v \mid v \in \Omega\}.$$

Пусть X – конечно порожденная плотная подгруппа группы A , тогда сужение $v|_X$ нормирования v поля $k(A)$ на подполе $k(X)$ является нормированием поля $k(X)$. И наоборот, из [17; гл. IV, § 4, теорема 5'] следует, что любое нормирование поля $k(X)$ может быть расширено до нормирования поля $k(A)$, однако такое расширение в общем случае не является однозначным. Пусть Ω_X – множество всех сужений нормирований $v \in \Omega$ на поле $k(X)$. Пусть $v \in \Omega$, и пусть X_v – ядро сужения на подгруппу X гомоморфизма θ_v группы A . Положим

$$K_X = \{X_v \mid v \in \Omega\}.$$

Тогда

$$X_v = A_v \cap X, \quad \text{is}_A(X_v) = A_v, \quad (4)$$

и эти соотношения устанавливают биективное соответствие между множествами K и K_X .

Пусть v и ϖ – нормирования поля $k(A)$. Будем использовать обозначение $v \sim \varpi$, если $v|_X = \varpi|_X$ для некоторой конечно порожденной плотной подгруппы X группы A , где $v|_X$ и $\varpi|_X$ – сужения нормирований v и ϖ поля $k(A)$ на подполе $k(X)$. Если $v \sim \varpi$, то будем говорить, что нормирования v и ϖ являются подобными.

Очевидно, $v \sim v$; кроме того, $v \sim \varpi$ тогда и только тогда, когда $\varpi \sim v$ для любых нормирований $v, \varpi \in \Omega$. Пусть $v, \varpi, \tau \in \Omega$. Если $v \sim \varpi$ и $\varpi \sim \tau$, то существуют конечно порожденные плотные подгруппы X и Y группы A такие, что $v|_X = \varpi|_X$ и $\varpi|_Y = \tau|_Y$. Пусть $Z = X \cap Y$, тогда Z – конечно порожденная плотная подгруппа группы A . Так как $v|_Z = \varpi|_Z$ и $\varpi|_Z = \tau|_Z$, то $v|_Z = \tau|_Z$ и, следовательно, $v \sim \tau$. Таким образом, $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве Ω . Будем обозначать через $[v]$ класс эквивалентности, содержащий нормирование v , а через $[\Omega]$ – множество всех таких классов. При этом если $\varpi \in [v]$, то из соотношений (4) следует, что $A_v = A_\varpi$.

Предположим теперь, что на группе A действует группа операторов Γ , причем $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Пусть $\gamma \in \Gamma$, пусть $k(A)^\gamma$ – поле частных области целостности kA/P^γ , и пусть Ω^γ – множество нормирований поля $k(A)^\gamma$.

Автоморфизм γ групповой алгебры kA индуцирует изоморфизм колец

$$\gamma: kA/P \rightarrow kA/P^\gamma,$$

который можно продолжить до изоморфизма полей

$$\gamma: k(A) \rightarrow k(A)^\gamma.$$

Пусть v – нормирование поля $k(A)$ с группой значения G_v , тогда отображение $v^\gamma: k(A)^\gamma \rightarrow G_v$, определяемое по правилу

$$v^\gamma(a) = v(a^{\gamma^{-1}}), \quad (5)$$

где $a \in k(A)^\gamma$, является нормированием поля $k(A)^\gamma$. Так как $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то существует конечно порожденная плотная подгруппа X группы A такая, что $kX \cap P = kX \cap P^\gamma$ и, следовательно,

$$(kX + P)/P = (kX + P^\gamma)/P^\gamma.$$

Пусть $k(X)^\gamma$ – поле частных области целостности $(kX + P^\gamma)/P^\gamma$, и пусть Ω_X^γ – множество сужений нормирований поля $k(A)^\gamma$ на поле $k(X)^\gamma$. Поскольку

$$(kX + P)/P = (kX + P^\gamma)/P^\gamma,$$

то можно заключить, что $k(X) = k(X)^\gamma$. Тогда $\Omega_X = \Omega_X^\gamma$ и, следовательно, $v^\gamma|_X = \varpi|_X$ для некоторого нормирования ϖ поля $k(A)$. Полагая затем

$[v]^\gamma = [\varpi]$, мы видим, что оператор γ группы A индуцирует подстановку на множестве $[\Omega]$.

Пусть $\gamma, \beta \in \Gamma$. Так как $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то нетрудно заметить, что существует конечно порожденная плотная подгруппа X группы A такая, что

$$kX \cap P = kX \cap P^\gamma = kX \cap P^\beta = kX \cap P^{\gamma\beta}.$$

Тогда

$$k(X) = k(X)^\gamma = k(X)^\beta = k(X)^{\gamma\beta}$$

и, следовательно, $\Omega_X = \Omega_X^\gamma = \Omega_X^\beta = \Omega_X^{\gamma\beta}$. Ввиду соотношения (5) получаем, что

$$v^{\gamma\beta}(a) = v(a^{(\gamma\beta)^{-1}}) = v((a^{\beta^{-1}})^{\gamma^{-1}}) = v^\gamma(a^{\beta^{-1}}) = (v^\gamma)^\beta(a)$$

для любого элемента $a \in k(X)$ и любого нормирования $v \in \Omega$. Таким образом, $[v]^{\gamma\beta} = ([v]^\gamma)^\beta$ и, следовательно, группа Γ действует на множестве $[\Omega]$.

Из определения класса $[v]^\gamma$ и соотношений (4), (5) следует, что $A_\varpi = A_v^\gamma$ для любого нормирования $\varpi \in [v]^\gamma$, откуда можно заключить, что группа Γ действует на множестве $K = \{A_v \mid v \in \Omega\}$.

Пусть B – изолированная орбитальная подгруппа группы A . Пусть $\Omega(B)$ – множество всех нормирований поля $k(A)$, тривиальных на подполе $k(B)$, т.е. отображающих мультипликативную группу подполя $k(B)$ в нулевой элемент группы значений нормирования. Из [17; гл. VI, § 11, лемма 2] следует, что если $v \in \Omega(B)$ и $v \sim \varpi$, то $\varpi \in \Omega(B)$. Таким образом, можно рассматривать множество $[\Omega(B)]$.

Пусть

$$K(B, r) = \{A_v \mid v \in \Omega(B), r(A/A_v) = r\},$$

тогда для любой подгруппы $A_v \in K(B, r)$ получаем $B \leq A_v$ и $r(A/A_v) = r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.1. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ . Пусть k – поле, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Пусть $k(A)$ – поле частных области целостности kA/P . Пусть B – изолированная подгруппа группы A такая, что $(k(A) : k(B)) = r$. Тогда

- (i) множество $K(B, r)$ конечно и непусто;
- (ii) если подгруппа B является орбитальной и $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то группа $\Gamma_1 = N_\Gamma(B)$ действует на множестве $K(B, r)$, при этом любая подгруппа $A_v \in K(B, r)$ является орбитальной, причем $B \leq A_v$ и $r(A/A_v) = r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть X – конечно порожденная плотная подгруппа группы A , и пусть $\Omega(B)_X$ – множество всех сужений нормирований $v \in \Omega(B)$ на подполе $k(X)$. Пусть $\Omega(B_X)$ – множество всех нормирований поля $k(X)$, тривиальных на подполе $k(B_X)$, где $B_X = B \cap X$. Согласно [17; гл. VI, § 6, теорема 11] любое нормирование из множества $\Omega(B_X)$ можно продолжить до нормирования всего поля $k(A)$, при этом из [17; гл. VI, § 11, лемма 2] следует, что любое такое продолжение принадлежит множеству $\Omega(B)$. Таким образом, можно заключить, что $\Omega(B_X) = \Omega(B)_X$.

Пусть $v \in \Omega(B)$, и пусть $X_v = A_v \cap X$ – ядро сужения на подгруппу X гомоморфизма θ_v группы A . Так как $\Omega(B_X) = \Omega(B)_X$, то из [4; следствие 16] следует, что множество

$$K(B, r)_X = \{X_v \mid v \in \Omega(B), r(X/X_v) = r\}$$

является конечным и непустым. Тогда соотношения (4) показывают, что непустым и конечным является и множество $K(B, r)$.

(ii) Так как $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ существует конечно порожденная плотная подгруппа X группы A такая, что $kX \cap P = kX \cap P^\gamma$ и, следовательно, $k(X) = k(X)^\gamma$. Из соотношения (5) следует, что если $\gamma \in \Gamma_1 = N_\Gamma(B)$ и $v \in \Omega(B)$, то нормирование v^γ является тривиальным на подполе $k(B)^\gamma$ и, очевидно, $r(A/A_{v^\gamma}) = r$. Тогда нормирование $v^\gamma|_X$ является тривиальным на подполе $k(X \cap B) = k(X \cap B)^\gamma$. Так как поле $k(B)$ является алгебраическим расширением поля $k(X \cap B)$, то из [17; гл. VI, § 11, лемма 2] следует, что $[v]^\gamma \in [\Omega(B)]$. Таким образом, группа $\Gamma_1 = N_\Gamma(B)$ действует на множестве $[\Omega(B)]$, откуда очевидным образом следует, что группа $\Gamma_1 = N_\Gamma(B)$ действует и на множестве $K(B, r)$. Ввиду (i) множество $K(B, r)$ является конечным, а так как подгруппа $\Gamma_1 = N_\Gamma(B)$ имеет конечный индекс в группе Γ , то существует подгруппа Γ_2 конечного индекса в группе Γ , стабилизирующая все подгруппы из множества $K(B, r)$. Отсюда следует, что множество $K(B, r)$ состоит из орбитальных подгрупп. Из определения множеств $\Omega(B)$ и $K(B, r)$ следует, что $B \leq A_v$ и $r(A/A_v) = r$.

Рассмотрим теперь другой тип нормирований поля $k(A)$, которые возникают благодаря целозамкнутым областям поля $k(A)$.

Пусть I_X – подкольцо области целостности I . Предположим, что кольцо I является целым над I_X . Пусть Q_X – простой идеал кольца I_X , тогда согласно [17; гл. V, § 2, теорема 3] существует простой идеал Q области целостности I такой, что $I_X \cap Q = Q_X$. Будем говорить, что идеал Q является простым продолжением идеала Q_X на область I .

ЛЕММА 3.1.2. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, и пусть B – изолированная подгруппа группы A . Пусть k – поле, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Пусть $k(A)$ – поле частных области целостности kA/P , $(k(A) : k(B)) = 0$. Пусть I – целое замыкание в поле $k(A)$ области целостности $k[B]$. Пусть X – конечно порожденная плотная подгруппа группы A , пусть $B_X = B \cap X$, и пусть I_X – целое замыкание в поле $k(X)$ области целостности $k[B_X]$. Тогда

- (i) область I является целой над I_X и $k[B_X]$;
- (ii) если область целостности $k[A]$ не является целой над $k[B]$, то область целостности $k[X]$ не является целой над $k[B_X]$;
- (iii) область целостности I_X является нётеровой и целозамкнутой, причем $k(X)$ является полем частных области I_X ;
- (iv) $Q_X = Q \cap I_X$ является минимальным простым идеалом области целостности I_X для любого минимального простого идеала Q области

целостности I ; и наоборот, для любого минимального простого идеала Q_X области целостности I_X любое простое продолжение Q идеала Q_X на область целостности I является минимальным простым идеалом области I ;

- (v) если Q является минимальным простым идеалом области целостности I и I_Q – локализация области I по идеалу Q , то $I_Q \cap k(X) = I_{Q_X}$ является локализацией области целостности I_X по идеалу $Q_X = Q \cap I_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Так как B_X является плотной подгруппой подгруппы B , то нетрудно заметить, что область $k[B]$ является целой над $k[B_X]$. Тогда из [17; гл. V, § 1, теорема 2] следует, что область I является целой над $k[B_X]$. Так как $k[B_X] \leq I_X \leq I$, то отсюда следует, что область I является целой над I_X .

(ii) Предположим, что область целостности $k[X]$ является целой над $k[B_X]$, тогда из определений I и I_X следует, что $k[X] \leq I_X \leq I$. Так как X является плотной подгруппой группы A , то нетрудно показать, что область $k[A]$ является целой над $k[X]$. Тогда, поскольку область I целозамкнутая и $k[X] \leq I$, можно заключить, что $k[A] \leq I$ и, следовательно, область $k[A]$ является целой над $k[B]$, что приводит к противоречию.

(iii) Согласно [17; гл. V, § 4, теорема 9] область целостности I_X является нётеровой. Так как $(k(A) : k(B)) = 0$, то поле $k(A)$ является алгебраическим расширением поля $k(B)$. Отсюда нетрудно получить, что поле $k(X)$ является алгебраическим расширением поля $k(B_X)$. Тогда всякий элемент $a \in k(X)$ является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из области $k[B_X]$. Отсюда нетрудно получить, что для любого элемента $a \in k(X)$ существует элемент $b \in k[B_X]$ такой, что $ab \in I_X$, и, следовательно, $k(X)$ является полем частных области целостности I_X . Таким образом, I_X – целозамкнутая нётерова область.

(iv) Пусть Q – минимальный простой идеал области целостности I . Предположим, что $Q_X = Q \cap I_X$ не является минимальным простым идеалом области целостности I_X , тогда существует простой идеал P_X области целостности I_X такой, что $P_X < Q_X$. Поскольку область I_X является целозамкнутой и согласно (i) область I целая над I_X , то из [17; гл. V, § 3, теорема 6] следует, что существует простой идеал P области I такой, что $P_X = P \cap I_X$ и $P \leq Q$. Так как $P_X < Q_X$, то отсюда следует, что $P \neq Q$ и, следовательно, $P < Q$, однако это противоречит минимальности идеала Q . Таким образом, $Q_X = Q \cap I_X$ – минимальный простой идеал области целостности I_X .

Пусть теперь Q_X – минимальный простой идеал области целостности I_X , и пусть Q – простое продолжение идеала Q_X на область целостности I , тогда $Q_X = Q \cap I_X$. Предположим, что Q не является минимальным простым идеалом области целостности I , тогда существует простой идеал P области целостности I такой, что $P < Q$. Пусть $P_X = P \cap I_X$, тогда, очевидно, $P_X \leq Q_X$. Если $P_X = Q_X$, то получаем противоречие с [17; гл. V, § 2, дополнение 1 к теореме 3], поскольку согласно (i) область I является целой над I_X . Отсюда следует, что $P_X \neq Q_X$ и, значит, $P_X < Q_X$, однако это противоречит минимальности идеала Q_X .

(v) Из утверждения (i) следует, что $I_X = I \cap k(X)$ и, следовательно, $I_Q \cap k(X) \geq I_{Q_X}$. Согласно (iii) $k(X)$ является полем частных области целостности I_X . Следовательно, каждый элемент кольца $I_Q \cap k(X)$ можно записать в виде a/b , где $a \in I_X$ и $b \in I_X \setminus Q$. Отсюда следует, что $a/b \in I_{Q_X}$ и, значит, $I_Q \cap k(X) \leq I_{Q_X}$. Таким образом, $I_Q \cap k(X) = I_{Q_X}$.

Предположим, что $(k(A) : k(B)) = 0$. Пусть в обозначениях предыдущей леммы Q_X – минимальный простой идеал области целостности I_X , и пусть I_{Q_X} – локализация области I_X по идеалу Q_X . По лемме 3.1.2, (ii) I_X является нётеровой целозамкнутой областью и $k(X)$ является полем частных области целостности I_X . Тогда I_{Q_X} является кольцом нормирования некоторого дискретного нормирования v_{Q_X} ранга 1 поля $k(X)$ [17; гл. VI, § 10, следствие 2]. Через $\Omega_1(B_X)$ будем обозначать множество всех таких нормирований v_{Q_X} поля $k(X)$, нетривиальных на подгруппе X , т.е. таких, что $v_{Q_X}(X) \neq 0$.

Далее $\Omega_1(B)$ будет обозначать множество всех нормирований v_Q поля $k(A)$, нетривиальных на группе A (т.е. таких, что $v_Q(A) \neq 0$), для которых кольцо нормирования R_{v_Q} совпадает с локализацией I_Q целого замыкания I области целостности $k[B]$ в поле $k(A)$ по некоторому минимальному простому идеалу Q области I .

ЛЕММА 3.1.3. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, пусть k – поле, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Пусть $k(A)$ – поле частных области целостности kA/P . Пусть X – конечно порожденная плотная подгруппа группы A . Пусть B – изолированная подгруппа группы A , причем $(k(A) : k(B)) = 0$. Предположим, что область целостности $k[A]$ не является целой над кольцом $k[B]$. Тогда

- (i) множество $\Omega_1(B_X)$ является конечным и непустым;
- (ii) для любого нормирования $v_{Q_X} \in \Omega_1(B_X)$ любое его продолжение v на поле $k(A)$ принадлежит множеству $\Omega_1(B)$;
- (iii) множество $\Omega_1(B)$ совпадает с множеством всех продолжений на поле $k(A)$ нормирований $v_{Q_X} \in \Omega_1(B_X)$ для любой конечно порожденной плотной подгруппы X группы A ;
- (iv) любое нормирование $v_Q \in \Omega_1(B)$ имеет ранг 1 и $v_Q(B) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку область $k[A]$ не является целой над кольцом $k[B]$, то из леммы 3.1.2, (ii) следует, что область целостности $k[X]$ не является целой над кольцом $k[B_X]$ и, следовательно, подгруппа X не содержится в целом замыкании I_X области $k[B_X]$ в поле $k(X)$. Поскольку подгруппа X не содержится в области I_X , то из [17; гл. VI, § 10, следствие 3 (2, 3)] следует, что множество $\Omega_1(B_X)$ непусто. Тогда, так как подгруппа X конечно порождена, из [17; гл. VI, § 10, следствие 3 (1)] очевидным образом следует, что множество $\Omega_1(B_X)$ конечно.

(ii) Пусть $v_{Q_X} \in \Omega_1(B_X)$, и пусть v – продолжение на поле $k(A)$ нормирования v_{Q_X} . Так как X – плотная подгруппа группы A , то поле $k(A)$ является алгебраическим расширением поля $k(X)$. Поэтому из [17; гл. VI, § 11, лемма 2] следует, что нормирование v имеет ранг 1.

Пусть R_v – кольцо нормирования для v , и пусть Q_v – простой идеал нормирования кольца R_v . По определению нормирования v_{Q_X} кольцо нормирования R_{v_X} для v_{Q_X} совпадает с локализацией I_{Q_X} целого замыкания I_X области $k[B_X]$ по минимальному простому идеалу Q_X области I_X и, следовательно, $I_X \leq R_{v_X}$. Поскольку v является продолжением нормирования v_{Q_X} , то $R_{v_X} \leq R_v$ и, следовательно, $I_X \leq R_v$. Из [19; гл. 5, предложение 5.18 (iii)] следует, что кольцо нормирования R_v содержит целое замыкание области I_X в поле $k(A)$. По лемме 3.1.2, (i) область I является целой над I_X и, следовательно, $I \leq R_v$. Тогда $Q = Q_v \cap I$ – простой идеал области I такой, что $Q_X = Q \cap I_X$. Поэтому из леммы 3.1.2, (iv) следует, что Q – минимальный простой идеал области I . Поскольку все элементы из $I \setminus Q$ обратимы в кольце R_v , кольцо нормирования R_v содержит локализацию I_Q области целостности I по идеалу Q , т.е. $I_Q \leq R_v$.

Покажем теперь, что на самом деле имеет место равенство $R_v = I_Q$. Поскольку группа A является объединением своих конечно порожденных плотных подгрупп Y , то достаточно показать, что $R_v \cap k(Y) = I_Q \cap k(Y) = I_{Q_Y}$ для любой конечно порожденной плотной подгруппы Y группы A . Предположим, что существует конечно порожденная плотная подгруппа Y группы A такая, что $I_{Q_Y} < R_v \cap k(Y)$. По лемме 3.1.2, (ii) I_Y является нётеровой целозамкнутой областью и $k(Y)$ является полем частных области целостности I_X . Тогда I_{Q_Y} является кольцом нормирования некоторого дискретного нормирования v_{Q_Y} ранга 1 поля $k(Y)$ [17; гл. VI, § 10, следствие 2].

Поскольку I_{Q_Y} – кольцо нормирования для дискретного нормирования v_{Q_Y} ранга 1 и $I_{Q_Y} < R_v \cap k(Y)$, то из [19; гл. 5, предложение 5.18 (ii)] следует, что $R_v \cap k(Y)$ – кольцо нормирования для некоторого нормирования v_1 поля $k(Y)$. При этом ввиду неравенства $I_{Q_Y} < R_v \cap k(Y)$ из [17; гл. VI, § 10, теорема 17] следует, что ранг нормирования v_1 меньше 1, однако это невозможно, так как нормирование v_1 не является тривиальным.

Таким образом, $R_v = I_Q$. Поскольку нормирование v_{Q_X} нетривиальное на подгруппе X , то его продолжение v нетривиально на группе A и, следовательно, $v \in \Omega_1(B)$.

(iii) Пусть X – конечно порожденная плотная подгруппа группы A , и пусть $v_Q \in \Omega_1(B)$. Тогда по определению нормирования v_Q кольцо нормирования для v_Q совпадает с локализацией I_Q целого замыкания I области $k[B]$ в поле $k(A)$ по некоторому минимальному простому идеалу Q области целостности I .

По лемме 3.1.2, (v) $I_Q \cap k(X) = I_{Q_X}$ является локализацией области целостности I_X по идеалу $Q_X = Q \cap I_X$, который по лемме 3.1.2, (iv) является минимальным простым идеалом области целостности I_X . Так как группа значений нормирования v_Q без кручения, X – плотная подгруппа группы A и $v_Q(A) \neq 0$, то $v_Q(X) \neq 0$.

Отсюда следует, что ограничение нормирования v_Q на подполе $k(X)$ принадлежит множеству $\Omega_1(B_X)$. Теперь утверждение следует из (ii).

(iv) Из определения множества $\Omega_1(B_X)$ следует, что любое нормирование $v_{Q_X} \in \Omega_1(B_X)$ имеет ранг 1 и $v_{Q_X}(B_X) = 0$. Так как поле $k(A)$ является

алгебраическим расширением поля $k(X)$, то из [17; гл. VI, § 11, лемма 2] и (iii) следует, что любое нормирование $v_Q \in \Omega_1(B)$ имеет ранг 1 и $v_Q(B) = 0$.

Из леммы 3.1.3, (iii) следует, что если $v_Q \in \Omega_1(B)$ и $v_Q \sim w$, то $w \in \Omega_1(B)$. Таким образом, можно рассматривать множество $[\Omega_1(B)]$.

Положим $K_1(B) = \{A_v \mid v \in \Omega_1(B)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.4. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , пусть k – поле, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Пусть $k(A)$ – поле частных области целостности kA/P . Пусть B – изолированная подгруппа группы A , причем $(k(A) : k(B)) = 0$. Предположим, что область целостности $k[A]$ не является целой над $k[B]$. Тогда

- (i) множества $[\Omega_1(B)]$ и $K_1(B)$ являются конечными и непустыми;
- (ii) если $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то группа $\Gamma_1 = N_\Gamma(B)$ действует на множестве $K_1(B)$;
- (iii) если подгруппа B является орбитальной и $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то множество $K_1(B)$ состоит из орбитальных подгрупп, причем $B \leq A_v$ и $r(A/A_v) = 1$ для любой подгруппы $A_v \in K_1(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть X – конечно порожденная плотная подгруппа группы A . По лемме 3.1.3, (i) множество $\Omega_1(B_X)$ является конечным и непустым. Тогда множество $K_1(B_X) = \{X_v \mid v \in \Omega_1(B_X)\}$ также является конечным и непустым. Так как множество $\Omega_1(B_X)$ является конечным и непустым, то и из леммы 3.1.3, (iii) следует, что множество $[\Omega_1(B)]$ является конечным и непустым. Поскольку множество $K_1(B_X) = \{X_v \mid v \in \Omega_1(B_X)\}$ является конечным и непустым, то соотношения (4) показывают, что непустым и конечным является и множество $K_1(B)$.

(ii) Пусть $\gamma \in \Gamma_1$, и пусть $k(A)^\gamma$ – поле частных области целостности kA/P^γ . Очевидно, оператор γ индуцирует изоморфизм поля $k(A)$ на поле $k(A)^\gamma$.

Так как $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то существует конечно порожденная плотная подгруппа X группы A такая, что $P \cap kX = P^\gamma \cap kX$ и, следовательно, $k(X) = k(X)^\gamma$, где $k(X)^\gamma$ – подполе поля $k(A)^\gamma$, являющееся полем частных области целостности $kX/(P^\gamma \cap kX)$.

Пусть $v_Q \in \Omega_1(B)$. Напомним, что соотношение (5) определяет нормирование $(v_Q)^\gamma$ поля $k(A)^\gamma$. Пусть $R_{(v_Q)^\gamma}$ – кольцо нормирования для $(v_Q)^\gamma$. Тогда из соотношения (5) следует, что $R_{(v_Q)^\gamma} = (R_{v_Q})^\gamma$, где $(R_{v_Q})^\gamma$ – образ кольца нормирования R_{v_Q} в поле $k(A)^\gamma$ при действии изоморфизма γ . Поскольку по определению нормирования v_Q кольцо R_{v_Q} совпадает с локализацией I_Q целого замыкания I области целостности $k[B]$ в поле $k(A)$ по минимальному идеалу Q области I и $B^\gamma = B$, то можно заключить, что кольцо $(R_{v_Q})^\gamma$ является локализацией $I_{Q^\gamma}^\gamma$ целого замыкания I^γ в поле $k(A)^\gamma$ области целостности $k[B]^\gamma = (kB + P^\gamma)/P^\gamma$ по минимальному простому идеалу Q^γ области I^γ . Так как $k(X) = k(X)^\gamma$, то нетрудно заметить, что $k[B_X]^\gamma = k[B_X]$, где $k[B_X]^\gamma = (kB_X + P^\gamma)/P^\gamma$, и, следовательно, $I^\gamma \cap k[X]^\gamma = I \cap k[X] = I_X$. Таким образом, $(R_{v_Q})^\gamma \cap k(X)$ является локализацией области целостности I_X по ее минимальному простому идеалу и, следовательно, $(R_{v_Q})^\gamma \cap k(X)$ является кольцом нормирования для некоторого нормирования $v_{Q_X} \in \Omega_1(B)_X$. Отсюда

следует, что нормирование $(v_Q)^\gamma$ является продолжением нормирования v_{Q_X} и, значит, $[(v_Q)^\gamma] \in [\Omega_1(B)]$.

Таким образом, группа Γ_1 действует на множестве $[\Omega_1(B)]$ и, следовательно, она действует и на множестве $K_1(B)$.

(iii) Поскольку подгруппа B является орбитальной, то $\Gamma_1 = N_\Gamma(B)$ является подгруппой конечного индекса группы Γ . Согласно (i) множество $K_1(B)$ является конечным, а согласно (ii) группа Γ_1 действует на множестве $K_1(B)$. Поэтому существует подгруппа конечного индекса группы Γ , которая стабилизирует подгруппы из множества $K_1(B)$. Таким образом, множество $K_1(B)$ состоит из орбитальных подгрупп. По лемме 3.1.3, (iv) любое нормирование $v_Q \in \Omega_1(B)$ имеет ранг 1 и $v_Q(B) = 0$. Отсюда следует, что $B \leq A_v$ и $r(A/A_v) = 1$ для любой подгруппы $A_v \in K_1(B)$.

3.2. О леммах Роузблэйда–Брукса. Рассмотрим теперь основные идеи доказательства лемм 10.1, 10.3 и 10.4 работы [3], чтобы убедиться в том, что эти результаты остаются справедливыми.

Пусть k – поле, A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA такой, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$.

Доказательство леммы 10.4 работы [3] представляет собой непосредственное применение следствия 11 работы [4] к идеалам $P \cap kC$, определяемым конечно порожденными плотными подгруппами C группы A , и упомянутая выше ошибка в рассуждениях с нормированиями не затронула доказательство леммы 10.4 работы [3].

Обратимся теперь к [3; леммы 10.1, 10.3]. Пусть B – изолированная орбитальная подгруппа группы A , и предположим, что $(k(A) : k(B)) = r$. По предложению 3.1.1, (ii) любая подгруппа $A_v \in K(B, r)$ является орбитальной, причем $B \leq A_v$, $r(A/A_v) = r$. Таким образом, если B – максимальная изолированная орбитальная подгруппа группы A и $(k(A) : k(B)) < r(A/B)$, то $(k(A) : k(B)) = 0$, что и является утверждением леммы 10.1 работы [3].

Предположим теперь, что существует орбитальная изолированная подгруппа D группы A такая, что $B < D < A$ и $(k(A) : k(B)) = (k(D) : k(B)) = r(D/B)$. Тогда по предложению 3.1.1, (ii) любая подгруппа $A_v \in K(B, r)$ является орбитальной, причем $B \leq A_v$, $r(A/A_v) = r(D/B)$. Положим $E = A_v$ для некоторой подгруппы $A_v \in K(B, r)$. Очевидно, $D \cap E \geq B$. Предположим, что $D \cap E = H > B$. Но тогда ранг нормирования $v|_D$ меньше чем $r = r(D/B)$, а так как поле $k(A)$ является алгебраическим над $k(D)$, то из [17; гл. VI, § 11, лемма 2] следует, что ранг нормирования v меньше чем r , что приводит к противоречию. Таким образом, $D \cap E = B$.

Предположим, что область $k[A]$ является целой над $k[E]$. Поскольку $E = A_v$, то область $k[E]$ содержится в кольце нормирования R_v для v . Тогда поскольку область $k[A]$ является целой над $k[E]$, то из [17; гл. VI, § 5, теорема 6] следует, что $k[A] \leq R_v$ и, следовательно, нормирование v является тривиальным на группе A , т.е. $A = A_v$, что приводит к противоречию. Итак, если D – орбитальная изолированная подгруппа группы A такая, что $B < D < A$ и

$(k(A) : k(B)) = (k(D) : k(B)) = r(D/B)$, то существует изолированная орбитальная подгруппа E группы A такая, что $D \cap E = B$ и область $k[A]$ не является целой над $k[E]$, что представляет собой утверждение леммы 10.3 работы [3].

Таким образом, леммы 10.1, 10.3, 10.4 работы [3] остаются справедливыми, и эти леммы являются единственными результатами работы [3], которые используются в нашей работе. Нам также необходима следующая версия леммы 10.1 работы [3].

ЛЕММА 3.2.1. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , пусть k – поле, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA такой, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$ и $C(P) = A$. Пусть $k(A)$ – поле частных области целостности kA/P . Пусть B – максимальная изолированная подгруппа группы A . Тогда $(k(A) : k(B)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C(P) = A$, то нетрудно заметить, что $(k(A) : k(B)) < r(A/B)$. Тогда из [3; лемма 10.1] следует, что $(k(A) : k(B)) = 0$.

Лемма 10.2 работы [3] утверждает, что если B – максимальная изолированная орбитальная подгруппа группы A такая, что $(k(A) : k(B)) = 0$ и факторгруппа A/B не централизуется некоторой подгруппой конечного индекса группы Γ , то область $k[A]$ является целой над $k[B]$. Однако пример, приведенный в начале §3, показывает, что лемма 10.2 работы [3] не является справедливой, по крайней мере когда поле k имеет положительную характеристику.

Ошибка в доказательстве леммы 10.2 работы [3] произошла из-за того, что эквивалентные нормирования поля $k(A)$ трактовались там как совпадающие функции на мультипликативной группе $k(A)^*$ поля $k(A)$. Однако, по определению, эквивалентность нормирований этого не означает. Эта неточность привела к ошибочному заключению, что эквивалентные нормирования ν индуцируют единственный гомоморфизм θ_ν группы A . Но, как отмечалось в предыдущем пункте, на самом деле множество таких гомоморфизмов является бесконечным, хотя все эти гомоморфизмы и имеют одно и то же ядро A_ν . Указанная ошибка не затронула доказательства лемм 10.1 и 10.3 работы [3], так как в них фигурируют только ядра A_ν указанных гомоморфизмов, а эквивалентные нормирования индуцируют только одно такое ядро. В то же время, в доказательстве леммы 10.2 работы [3] было сделано ошибочное заключение о том, что конечное множество нормирований из [3; формула (32)] индуцирует конечное множество гомоморфизмов θ_ν группы A , хотя на самом деле множество этих гомоморфизмов бесконечно. Это повлекло за собой неверную формулу “ $\vartheta_\nu(a) = \vartheta_\nu(a^\gamma)$ ” (см. [3; с. 47, строка 5]), из которой, собственно, и следует неверное утверждение леммы 10.2 работы [3].

На самом деле, аргументы доказательства леммы 10.2 работы [3] приводят только к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.2.2. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , пусть k – поле, и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA такой, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Пусть $k(A)$ – поле частных области целостности kA/P . Пусть B – максимальная

изолированная орбитальная подгруппа группы A такая, что $(k(A) : k(B)) = 0$. Если $r(A/B) > 1$, то область $k[A]$ является целой над $k[B]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что область $k[A]$ не является целой над $k[B]$. Тогда по предложению 3.1.4, (iii) существует орбитальная изолированная подгруппа $A_v \leq A$ такая, что $B \leq A_v$ и $r(A/A_v) = 1$. Поскольку B – максимальная изолированная орбитальная подгруппа группы A и $B \leq A_v < A$, то отсюда следует, что $B = A_v$, но это противоречит условию $r(A/B) > 1$.

К сожалению, лемма 3.2.2 и леммы 10.1, 10.3, 10.4 работы [3] не дают возможности доказать теорему А работы [3], и мы можем доказать только следующее утверждение, которое значительно слабее, чем теорема А [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.3. Пусть k – поле, пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ . Пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA такой, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Предположим, что для любой собственной изолированной орбитальной подгруппы B группы A идеал $kB \cap P$ контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma(B)$. Тогда

- (i) $\Lambda_\Gamma(C(P)/\Lambda_\Gamma(C(P))) = C(P)/\Lambda_\Gamma(C(P))$;
- (ii) факторгруппа $\Gamma/C_\Gamma(C(P))$ содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве используются основные идеи дедукции оригинального доказательства теоремы А работы [3]. Поскольку по лемме 1.2.1, (ii) $\Lambda_\Gamma(A) = \Lambda_H(A)$ для любой подгруппы H конечного индекса группы Γ , то в доказательстве группу Γ можно заменить любой ее подгруппой H конечного индекса.

По лемме 2.2.2, (iii) $C(P)$ является Γ -инвариантной подгруппой группы A . Тогда, заменив группу A ее Γ -инвариантной подгруппой $C(P)$, можно считать, что $C(P) = A$. Очевидно, также можно считать, что $C_\Gamma(A) = 1$.

(i) Положим $L = \Lambda_\Gamma(A)$. Предположим сначала, что L является максимальной орбитальной подгруппой группы A . Тогда по лемме 3.2.1 $(k(A) : k(L)) = 0$, т.е. поле $k(A)$ является алгебраическим над $k(L)$. Если $L = 1$, то $(k(A) : k) = 0$, т.е. поле $k(A)$ алгебраическое над k . Тогда, поскольку для любого многочлена $f(x)$ с коэффициентами из поля k группа Γ действует на конечном множестве корней многочлена $f(x)$, легко видеть, что $\Delta_\Gamma(A) = A$, откуда следует утверждение. Таким образом, можно считать, что $L \neq 1$.

Если $r(A/L) = 1$, то получаем доказываемое утверждение. Поэтому можно предположить, что $r(A/L) > 1$. Пусть $C = C_\Gamma(L)$. Поскольку для любого многочлена $f(x)$ с коэффициентами из поля $k(L)$ группа C действует на конечном множестве корней многочлена $f(x)$, то нетрудно получить, что $\Delta_C(A) = A$, и из леммы 1.2.2, (i) следует, что группа C является конечной. По лемме 1.2.2, (ii) факторгруппа Γ/C содержит свободную абелеву подгруппу конечного индекса, а так как подгруппа C конечна, то отсюда следует, что группа Γ обладает свободной абелевой подгруппой конечного индекса. Следовательно, заменив группу Γ ее подгруппой конечного индекса, можно считать, что группа Γ является свободной абелевой.

Поскольку группа Γ абелева, то из леммы 1.2.2, (iii) следует существование минимальной изолированной орбитальной подгруппы X группы A такой, что $X \cap L = 1$. Пусть N – максимальная изолированная орбитальная подгруппа из L , тогда из определения подгруппы L следует, что $r(L/N) = 1$. Пусть T – изолятор подгруппы NX в группе A . Тогда легко видеть, что T – максимальная изолированная орбитальная подгруппа группы A и N – максимальная изолированная орбитальная подгруппа из T , причем имеют место соотношения $r(A/T) = 1$ и $r(T/N) > 1$. Очевидно, $\Lambda_\Gamma(T) = N$ и, следовательно, по условиям доказываемого предложения идеал $kT \cap P$ контролируется подгруппой N . Отсюда следует, что $(k(T) : k(N)) = r(T/N)$, а поскольку по лемме 3.2.1 $(k(A) : k(T)) = 0$, то получаем $(k(A) : k(N)) = r(T/N) > 1$. Но с другой стороны, по лемме 3.2.1 $(k(A) : k(L)) = 0$, а поскольку $(k(L) : k(N)) \leq r(L/N) = 1$, то получаем $(k(A) : k(N)) \leq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения для случая, когда L – максимальная изолированная орбитальная подгруппа группы A .

Таким образом, теперь можно считать, что L не является максимальной изолированной орбитальной подгруппой группы A , т.е. существует собственная изолированная орбитальная подгруппа B группы A такая, что $L < B$. По лемме 3.2.1 $(k(A) : k(B)) = 0$ для любой максимальной изолированной орбитальной подгруппы B группы A такой, что $L < B$. Кроме того, поскольку $\Lambda_\Gamma(B) = L$, то по условиям предложения идеал $kB \cap P$ контролируется подгруппой L и, следовательно, $(k(B) : k(D)) = r(B/D)$ для любой изолированной подгруппы D группы A такой, что $L \leq D \leq B$.

Предположим, что D – максимальная изолированная орбитальная подгруппа из B , тогда из [3; лемма 10.3] следует, что существует изолированная орбитальная подгруппа E группы A такая, что $E \cap B = D$, и область $k[A]$ не является целой над $k[E]$. Поскольку $E \cap B = D$ и D является максимальной изолированной орбитальной подгруппой из B , то можно заключить, что E является максимальной изолированной орбитальной подгруппой группы A . Тогда по лемме 3.2.1 $(k(A) : k(E)) = 0$ и, следовательно, $(k(A) : k(D)) = r(E/D)$. Из леммы 3.2.2 следует, что $r(A/E) = 1$, откуда следует, что $(k(A) : k(D)) = r(E/D) = r(A/D) - 1$. Поскольку $(k(A) : k(B)) = 0$, то

$$(k(A) : k(D)) = (k(B) : k(D)) = r(B/D) = r(A/D) - 1.$$

Таким образом,

$$r(B/D) = r(E/D) = r(A/D) - 1.$$

Так как $r(A/E) = 1$ и $E \cap B = D$, то отсюда можно заключить, что $r(A/B) = 1$ для любой максимальной изолированной орбитальной подгруппы B группы A такой, что $L < B$.

Итак, $r(A/B) = 1$ для любой максимальной изолированной орбитальной подгруппы B группы A такой, что $L < B$. Положим $M/\Lambda_\Gamma(A) = \Lambda_\Gamma(A/\Lambda_\Gamma(A))$. Предположим, что $M \neq A$. Тогда существует максимальная изолированная орбитальная подгруппа B группы A такая, что $B \geq M \geq L$. Поскольку по лемме 3.2.1 $(k(A) : k(B)) = 0$ и $(k(B) : k(L)) = r(B/L)$, то из [3; лемма 10.3] следует, что существует изолированная орбитальная подгруппа E группы A

такая, что $E \cap B = L$. Так как $r(A/B) = 1$ и $E \cap B = L$, то получаем $r(E/L) = 1$ и, следовательно, $E \leq M$. Однако это невозможно, так как $B \geq M \geq L$ и $E \cap B = L$. Полученное противоречие показывает, что

$$A/\Lambda_{\Gamma}(A) = \Lambda_{\Gamma}(A/\Lambda_{\Gamma}(A)).$$

(ii) Из утверждения (i), теоремы Ремака и леммы 1.2.2, (ii) следует, что группа Γ обладает конечным рядом нормальных подгрупп $\Gamma \supseteq K \supseteq H$ таким, что $|\Gamma : K| < \infty$, факторгруппа K/H свободная абелева и

$$H \leq C_{\Gamma}(\Lambda_{\Gamma}(A) \cap C_{\Gamma}(A/\Lambda_{\Gamma}(A))).$$

Таким образом, достаточно показать, что $H = 1$.

Предположим, что $H \neq 1$, тогда $C = C_A(H) \geq \Lambda_{\Gamma}(A)$ – собственная изолированная подгруппа группы A и, следовательно, группа A обладает конечным рядом Γ -инвариантных подгрупп, на факторах которого подгруппа H действует тождественно. Тогда из [3; лемма 10.4] следует, что идеал P контролируется подгруппой C . Однако это невозможно, поскольку $C(P) = A$.

3.3. Новая версия теоремы Брукса для случая поля положительной характеристики. В новой версии теоремы А работы [3] для случая поля положительной характеристики p К. Брукс предположил, что подгруппу $\Delta_{\Gamma}(A)$ можно заменить на подгруппу группы A , порожденную всеми элементами $a \in A$ такими, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ найдется натуральное число n такое, что $a^{\gamma^n} = a^{p^m}$ для некоторого целого числа m . В теореме 3.3.7 нам удалось доказать, что подгруппу $\Delta_{\Gamma}(A)$ можно заменить подгруппой $\Lambda_{\Gamma}^p(A)$, которая является изолятором в группе A подгруппы, порожденной всеми элементами $a \in A$, для которых группа Γ обладает подгруппой Γ_a конечного индекса такой, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma_a$ имеет место равенство $a^{\gamma} = a^{p^m}$ для некоторого целого числа m .

ЛЕММА 3.3.1. Пусть k – поле положительной характеристики p и A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ . Пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA , который не контролируется подгруппой $\Lambda_{\Gamma}^p(A)$ и такой, что $S_{\Gamma}(P) = \Gamma$. Тогда для любой плотной Γ -инвариантной подгруппы B группы A идеал $kB \cap P$ является простым точным идеалом групповой алгебры kB , который не контролируется подгруппой $\Lambda_{\Gamma}^p(B)$ и для которого имеет место равенство $S_{\Gamma}(P \cap kB) = \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку идеал P не контролируется подгруппой $\Lambda_{\Gamma}^p(A)$, то подгруппа $C(P)$ не содержится в $\Lambda_{\Gamma}^p(A)$. Из леммы 2.2.2, (ii) следует, что $C(kB \cap P) = C(P) \cap B$ для любой плотной Γ -инвариантной подгруппы B группы A и по лемме 1.2.1, (iii) $\Lambda_{\Gamma}^p(B) = \Lambda_{\Gamma}^p(A) \cap B$. Тогда, поскольку $C(P)$ и $\Lambda_{\Gamma}^p(A)$ являются изолированными подгруппами группы A и подгруппа $C(P)$ не содержится в $\Lambda_{\Gamma}^p(A)$, нетрудно заключить, что подгруппа

$$C(kB \cap P) = C(P) \cap B$$

не содержится в $\Lambda_{\Gamma}^p(B) = \Lambda_{\Gamma}^p(A) \cap B$. Таким образом, идеал $kB \cap P$ не контролируется подгруппой $\Lambda_{\Gamma}^p(B)$. Очевидно, $kB \cap P$ – простой точный идеал групповой

алгебры kB , а поскольку B – плотная Γ -инвариантная подгруппа группы A , то из условия $S_\Gamma(P) = \Gamma$ нетрудно получить соотношение $S_\Gamma(P \cap kB) = \Gamma$.

ЛЕММА 3.3.2. *Предположим, что существуют поле k положительной характеристики p , абелева группа без кручения A конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и простой точный идеал P групповой алгебры kA такие, что идеал P не контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A)$ и $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Тогда*

- (i) *существуют конечно порожденное подполе $k_1 \leq k$, минимаксная подгруппа $A_1 \leq A$ такая, что $\text{Sp } A_1 \subseteq \{p\}$, конечно порожденная подгруппа $H \leq \Gamma$, для которой подгруппа A_1 является H -инвариантной, и простой точный идеал $P_1 = P \cap k_1 A_1$ групповой алгебры $k_1 A_1$, который не контролируется подгруппой $\Lambda_H^p(A_1)$ и такой, что $S_H(P) = H$;*
- (ii) *если группа Γ является почти разрешимой, то подгруппу H можно выбрать циклической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что группа Γ действует на группе A точно, т.е. $C_\Gamma(A) = 1$. По лемме 2.2.2, (iii) $C(P)$ является Γ -инвариантной подгруппой группы A , и, следовательно, заменив группу A ее подгруппой $C(P)$, можно считать, что $C(P) = A$. Если K – подгруппа конечного индекса группы Γ , то по лемме 1.2.1, (ii) $\Lambda_\Gamma^p(A) = \Lambda_K^p(A)$ и, следовательно, в процессе доказательства леммы группу Γ можно заменить любой ее подгруппой конечного индекса.

(i) Прежде всего покажем, что поле k можно заменить его конечно порожденным подполем. Поскольку идеал P не контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A)$, то существует элемент $\alpha \in P \setminus ((P \cap k\Lambda_\Gamma^p(A))kA)$. Пусть k_1 – подполе поля k , порожденное всеми коэффициентами элемента α , и пусть $P_1 = P \cap k_1 A$. Тогда, очевидно, $\alpha \in P_1 \setminus ((P_1 \cap k_1 \Lambda_\Gamma^p(A))k_1 A)$ и, следовательно, идеал P_1 не контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A)$. Нетрудно показать, что P_1 – простой точный идеал групповой алгебры $k_1 A$ и $S_\Gamma(P_1) = \Gamma$.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда поле k является конечно порожденным. Тогда по теореме 2.2.3 идеал P контролируется Γ -инвариантной минимаксной подгруппой S группы A такой, что $\text{Sp}(S) \subseteq \{p\}$. Поскольку $C(P) = A$, то S является плотной подгруппой группы A . Так как $\Lambda_\Gamma^p(A)$ – собственная изолированная подгруппа группы A и по лемме 1.2.1, (iii) $\Lambda_\Gamma^p(S) = \Lambda_\Gamma^p(A) \cap S$, то $\Lambda_\Gamma^p(S)$ – собственная изолированная подгруппа группы S . Следовательно, заменив группу A ее подгруппой S , можно считать, что A – минимаксная абелева группа такая, что $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$.

Итак, осталось показать существование конечно порожденной подгруппы H группы Γ , для которой $\Lambda_H^p(A)$ является собственной изолированной подгруппой группы A . Поскольку группа Γ является линейной, то из альтернативы Титса следует, что либо группа Γ является почти разрешимой, либо она содержит конечно порожденную свободную неабелеву подгруппу H . В последнем случае утверждение следует из леммы 1.2.3, (i), поскольку по этой лемме если $\Lambda_H^p(A) = A$, то группа H является почти абелевой.

(ii) И наконец, рассмотрим случай, когда группа Γ является почти разрешимой. По теореме Колчина–Мальцева группа Γ обладает конечным нормальным

рядом $\Gamma \geq K \geq N$ таким, что $|\Gamma : K| < \infty$, факторгруппа K/N абелева, подгруппа N нильпотентная и группа A обладает конечным рядом изолированных Γ -инвариантных подгрупп, на факторах которого подгруппа N действует тождественно.

Если $N \neq 1$, то $C_A(N) = \Delta_N(A)$ является собственной изолированной Γ -инвариантной подгруппой группы A и из [3; лемма 10.4] следует, что идеал P контролируется подгруппой $\Delta_N(A)$, но это невозможно, так как $C(P) = A$. Таким образом, $N = 1$ и, следовательно, группа Γ является почти абелевой. Поскольку $|\Gamma : K| < \infty$, то группу Γ можно заменить ее подгруппой K , т.е. можно считать, что группа Γ является абелевой. Поскольку группа Γ является линейной над полем рациональных чисел, периодическая часть группы Γ является конечной, и, следовательно, заменив группу Γ ее подгруппой конечного индекса, можно считать, что группа Γ абелева и без кручения. Тогда утверждение следует из леммы 1.2.3, (ii).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.3. *Предположим, что существуют поле положительной характеристики p , абелева группа без кручения A конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и простой точный идеал P групповой алгебры kA , который не контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^P(A)$ и такой, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Тогда*

- (i) *существуют конечное поле k_1 , абелева минимаксная группа A_2 , удовлетворяющая условию $\text{Sp } A_2 \subseteq \{p\}$, на которой действует конечно порожденная подгруппа H группы Γ , и простой точный идеал P_2 групповой алгебры $k_1 A_2$, который не контролируется подгруппой $\Lambda_H^P(A_2)$ и такой, что $N_H(P_2) = H$, т.е. идеал P_2 является H -инвариантным;*
- (ii) *если группа Γ является почти разрешимой, то группу H можно выбрать циклической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Ввиду леммы 3.3.2 можно считать, что поле k является конечно порожденным, группа A является минимаксной и такой, что $\text{Sp } A \subseteq \{p\}$, а группа Γ является конечно порожденной. По лемме 2.2.2, (iii) $C(P)$ является Γ -инвариантной подгруппой группы A , и, следовательно, заменив группу A ее подгруппой $C(P)$, можно считать, что $C(P) = A$. Так как идеал P не контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^P(A)$, то $\Lambda_\Gamma^P(A)$ является собственной изолированной подгруппой группы A .

Пусть X – конечное множество порождающих элементов группы Γ , тогда, поскольку $\text{Sp } A \subseteq \{p\}$, из леммы 2.2.1 следует, что для любого элемента $\gamma \in X$ существует подгруппа A_γ конечного индекса в группе A такая, что $P \cap kA_\gamma = P^\gamma \cap kA_\gamma$. Поскольку $|A : A_\gamma| < \infty$, то $A^n \leq A_\gamma$ для некоторого натурального числа n . Тогда, полагая $A^n = A_\gamma$, можно считать, что подгруппы A_γ являются Γ -инвариантными. Поскольку множество X конечное, то $A_1 = \bigcap_{\gamma \in X} A_\gamma$ – Γ -инвариантная подгруппа конечного индекса группы A такая, что $P \cap kA_1 = P^\gamma \cap kA_1$ для любого элемента $\gamma \in X$ и, следовательно, $P \cap kA_1 = P^\gamma \cap kA_1$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma = \langle X \rangle$. Из леммы 2.2.2, (ii) следует, что $C(P \cap kA_1) = A_1$, и нетрудно заметить, что $\Lambda_\Gamma^P(A_1) \neq A_1$. Таким образом, заменив группу A ее Γ -инвариантной подгруппой A_1 , можно считать, что идеал P является Γ -инвариантным, т.е. $N_\Gamma(P) = \Gamma$.

Поскольку поле k является конечно порожденным и имеет положительную характеристику, то оно содержит конечное подполе k_1 такое, что поле k является трансцендентным расширением поля k_1 и степень трансцендентности $(k : k_1)$ поля k над k_1 является конечной. Отсюда следует, что мультипликативная группа поля k обладает конечно порожденной подгруппой без кручения B такой, что $k = k_1(B)$ и, следовательно, $kA/P \cong k[A] \geq k_1[BA] \cong k_1A_1/P$, где $A_1 = B \times A$ и P_1 – простой идеал групповой алгебры k_1A_1 . Поскольку идеал P является Γ -инвариантным, то группа Γ действует на кольце $kA/P \cong k[A]$. Очевидно, $k_1[BA] \cong k_1A_1/P_1$ является Γ -инвариантным подкольцом кольца $k[A]$ и, следовательно, идеал P_1 является Γ -инвариантным.

Так как группа Γ действует на подгруппе B тождественно, то согласно лемме 1.2.4, (i) $\Lambda_\Gamma^p(A_1) = \Lambda_\Gamma^p(A) \times B$. Предположим, что $C(P_1) \leq \Lambda_\Gamma^p(A_1)$, тогда идеал P_1 контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A) \times B$. Следовательно,

$$k_1[BA] = \bigoplus_{t \in T} k_1[B\Lambda_\Gamma^p(A)]t,$$

где T – трансверсаль подгруппы $\Lambda_\Gamma^p(A)$ в группе A . Тогда, поскольку

$$k_1[B\Lambda_\Gamma^p(A)] = k_1[B][\Lambda_\Gamma^p(A)]$$

и k является полем частных области целостности $k_1[B]$, имеем

$$k[A] = \bigoplus_{t \in T} k[\Lambda_\Gamma^p(A)]t$$

и, следовательно, идеал P контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A)$, но это приводит к противоречию. Таким образом, идеал P_1 не контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A_1)$.

Поскольку P_1 является Γ -инвариантным идеалом групповой алгебры k_1A_1 , то $P_1^\dagger$ является Γ -инвариантной подгруппой группы A_1 . Так как подгруппы A и B вкладываются в группу обратимых элементов области целостности $k_1[BA] \cong k_1A_1/P_1$, то нетрудно заметить, что $P_1^\dagger \cap B = P_1^\dagger \cap A = 1$. Тогда из леммы 1.2.4, (iii) следует, что группа B обладает подгруппой K конечного индекса такой, что $K = N \times L$, $P_1^\dagger \leq N \times A$ и $A_2 = (K \times A)/P_1^\dagger \cong \bar{A} \times \bar{L}$, где $\bar{A} = AP_1^\dagger/P_1^\dagger \cong A$ и $\bar{L} = LP_1^\dagger/P_1^\dagger \cong L$. Отсюда следует, что

$$\Lambda_\Gamma^p(A_2) = \Lambda_\Gamma^p(\bar{A}) \times \bar{L} = \overline{\Lambda_\Gamma^p(A)} \times \bar{L},$$

где

$$\overline{\Lambda_\Gamma^p(A)} = \Lambda_\Gamma^p(A)P_1^\dagger/P_1^\dagger \cong \Lambda_\Gamma^p(A).$$

Поскольку подгруппа K имеет конечный индекс в B , то подгруппа $A_2 = K \times A$ имеет конечный индекс в группе $A_1 = B \times A$. Тогда ввиду леммы 3.3.1, заменив группу $A_1 = B \times A$ на ее плотную Γ -инвариантную подгруппу $A_2 = K \times A$, можно считать, что $B = N \times L$, $A_2 = A_1/P_1^\dagger \cong \bar{A} \times \bar{L}$, где $\bar{A} = AP_1^\dagger/P_1^\dagger \cong A$ и $\bar{L} = LP_1^\dagger/P_1^\dagger \cong L$, и, следовательно, $\Lambda_\Gamma^p(A_2) = \Lambda_\Gamma^p(\bar{A}) \times \bar{L} = \overline{\Lambda_\Gamma^p(A)} \times \bar{L}$, где $\overline{\Lambda_\Gamma^p(A)} = \Lambda_\Gamma^p(A)P_1^\dagger/P_1^\dagger \cong \Lambda_\Gamma^p(A)$.

Положим $P_2 = P_1/(1 - P_1^\dagger)k_1A_1$, тогда P_2 является простым точным идеалом групповой алгебры k_1A_2 . Поскольку, очевидно, $P_1^\dagger \leq C(P_1)$ и по лемме 1.2.4, (ii) $P_1^\dagger \leq \Lambda_\Gamma^P(A_1)$, то отсюда следует, что $c(P_2) = c(P_1)/P_1^\dagger$ не содержится в подгруппе $\Lambda_\Gamma^P(A_2) = \Lambda_\Gamma^P(\bar{A}) \times \bar{L} = \overline{\Lambda_\Gamma^P(A)} \times \bar{L}$, так как идеал P_1 не контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^P(A_1)$. Поскольку идеал P_1 и подгруппа $P_1^\dagger$ являются Γ -инвариантными, то идеал P_2 также является Γ -инвариантным.

(ii) Утверждение следует из леммы 3.3.2, (ii).

ЛЕММА 3.3.4. Пусть k – поле положительной характеристики p , и пусть $\bar{A}$ – абелева группа, на которой действует группа операторов Γ . Пусть A – плотная Γ -инвариантная подгруппа группы $\bar{A}$ такая, что факторгруппа $\bar{A}/A$ является p -группой, и пусть P – простой Γ -инвариантный идеал групповой алгебры kA . Тогда

- (i) существует простой Γ -инвариантный идеал $\bar{P}$ групповой алгебры $k\bar{A}$ такой, что $\bar{P} \cap kA = P$;
- (ii) если A – абелева группа без кручения конечного ранга и $C(P) = A$, то $C(\bar{P}) = \bar{A}$; если, кроме того, идеал P является точным, то точным будет и идеал $\bar{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку факторгруппа $\bar{A}/A$ является периодической, то кольцо $k\bar{A}$ является целым над кольцом kA . Тогда согласно [17; гл. V, § 2, теорема 3] существует простой идеал $\bar{P}$ групповой алгебры $k\bar{A}$ такой, что $\bar{P} \cap kA = P$.

Пусть M и N – простые идеалы групповой алгебры $k\bar{A}$ такие, что $M \cap kA = N \cap kA = P$. Покажем, что $M = N = \bar{P}$. Пусть $a \in M$. Поскольку факторгруппа $\bar{A}/A$ является p -группой и поле k имеет характеристику p , то нетрудно показать, что $a^{p^n} \in M \cap kA \leq N$ для некоторого натурального числа n , а поскольку идеал N является простым, то можно заключить, что $a \in N$. Следовательно, $M \leq N$ и те же аргументы показывают, что $M \geq N$. Таким образом, $M = N = \bar{P}$, откуда нетрудно получить, что идеал $\bar{P}$ является Γ -инвариантным.

(ii) Из леммы 2.2.2, (ii) следует, что $C(\bar{P}) = \bar{A}$, а поскольку $\bar{P} \cap kA = P$, то $\bar{P}^\dagger \cap kA = P^\dagger$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.5. Пусть k – поле, и пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует циклическая группа операторов $\Gamma = \langle \gamma \rangle$. Пусть P – ненулевой простой точный Γ -инвариантный идеал групповой алгебры kA такой, что $C(P) = A$. Предположим, что группа A обладает изолированной Γ -инвариантной подгруппой L такой, что $P \cap kD = (P \cap k(L \cap D))kD$ для любой собственной изолированной Γ -инвариантной подгруппы D группы A , причем на факторгруппе A/L группа Γ действует рационально вполне приводимо. Если $C_{A/C}(\Gamma) \neq 1$ для некоторой изолированной Γ -инвариантной подгруппы C группы A , то группа Γ обладает подгруппой конечного индекса, которая действует тождественно на факторгруппе A/L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C_{A/C}(\Gamma) \neq 1$, то из леммы 1.2.2, (iv) следует, что группа A обладает Γ -инвариантной изолированной подгруппой D такой,

что $C \leq D$, $r(A/D) = 1$ и на факторгруппе A/D группа Γ действует тождественно. Пусть $x \in A \setminus D$, тогда, так как на факторгруппе A/D группа Γ действует тождественно, подгруппа $A_1 = D \times \langle x \rangle$ является Γ -инвариантной.

Поскольку $D \times \langle x \rangle$ – плотная подгруппа группы A , то достаточно показать, что группа Γ обладает подгруппой конечного индекса, действующей тождественно на факторгруппе $(D \times \langle x \rangle)/(L \cap (D \times \langle x \rangle))$. Из леммы 2.2.2, (ii) следует, что $C(P \cap k(D \times \langle x \rangle)) = D \times \langle x \rangle$; кроме того, из леммы 2.2.2, (i) следует, что для любой изолированной Γ -инвариантной подгруппы X группы $D \times \langle x \rangle$ идеал $P \cap kX$ контролируется подгруппой $X \cap L$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $A = D \times \langle x \rangle$.

Пусть $L_1 = L \cap D$, тогда L_1 является изолированной Γ -инвариантной подгруппой группы A . Покажем, что на факторгруппе A/L_1 группа операторов Γ действует рационально вполне приводимо. Если $L \leq D$, то $L_1 = L$ и, следовательно, на факторгруппе A/L_1 группа операторов Γ действует рационально вполне приводимо. Если же подгруппа L не содержится в D , то DL является плотной Γ -инвариантной подгруппой группы A . При этом $(DL)/L_1 = (D/L_1) \times (L/L_1)$, где на факторгруппе (D/L_1) группа операторов Γ действует рационально вполне приводимо, а факторгруппа L/L_1 имеет ранг 1. Отсюда следует, что на факторгруппе $(DL)/L_1$ группа операторов Γ действует рационально вполне приводимо, а так как DL является плотной Γ -инвариантной подгруппой группы A , то и на факторгруппе A/L_1 группа операторов Γ действует рационально вполне приводимо.

Так как $P \cap kD = (P \cap kL_1)kD$, то факторкольцо $kD/(kD \cap P)$ можно рассматривать как скрещенное произведение $R * \bar{D}$ абелевой группы без кручения $\bar{D} = D/L_1$ конечного ранга и области целостности $R = kL_1/(kL_1 \cap P)$. Тогда, так как $A = D \times \langle x \rangle$, нетрудно заметить, что факторкольцо $kA/(kL_1 \cap P)kA$ является скрещенным произведением $R * \bar{A}$, где $\bar{A} = \bar{D}\langle x \rangle$. При этом $\bar{P} = P/(kL_1 \cap P)kA$ является Γ -инвариантным простым идеалом кольца $R * \bar{A}$ таким, что $\bar{P} \cap (R * \bar{D}) = 0$. Кроме того, из соотношения $C(P) = A$ следует, что $C(\bar{P}) = \bar{A}$. Пусть Q – поле частных области целостности R . Тогда кольцо $R * \bar{A}$ естественным образом вкладывается в кольцо $Q * \bar{A}$, а идеал $\bar{P}$ порождает простой Γ -инвариантный идеал $\tilde{P}$ скрещенного произведения $Q * \bar{A}$ такой, что $\tilde{P} \cap (R * \bar{D})\langle x \rangle = \bar{P}$, $\tilde{P} \cap (Q * \bar{D}) = 0$ и $C(\tilde{P}) = \bar{A}$. По лемме 1.3.1 идеал $\tilde{P}$ порождается одним элементом, который является единственным с точностью до умножения на обратимые элементы скрещенного произведения $Q * \bar{A}$. Поскольку $\bar{A} = A/L_1$, то на группе $\bar{A}$ группа операторов Γ действует рационально вполне приводимо. Тогда, так как по лемме 1.3.2, (ii) идеал $\tilde{P}$ контролируется подгруппой $\Delta_\Gamma(\bar{A})$, из соотношения $C(\tilde{P}) = \bar{A}$ получаем, что $\Delta_\Gamma(\bar{A}) = \bar{A}$. Теперь предложение следует из леммы 1.2.2, (i).

СЛЕДСТВИЕ 3.3.6. Пусть p – простое число, и пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга такая, что $\text{Sp}(A) \subseteq \{p\}$. Предположим, что на группе A действует циклическая группа операторов $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ так, что $A = \times_{i=1}^n A_i$, где A_i являются Γ -инвариантными подгруппами, причем либо $r(A_i) = 1$, либо $r(A_i) = 2$ и в последнем случае подгруппа A_i обладает изолированной Γ -инвариантной подгруппой C_i ранга 1 такой, что группы C_i и

A_i/C_i являются Γ -изоморфными. При этом группа Γ действует на подгруппах A_i ранга 1 и на подгруппах C_i следующим образом: $a^\gamma = a^{t_i}$, где $a \in A_i$ или $a \in C_i$ и t_i – положительные рациональные числа. Пусть k – поле, и предположим, что групповая алгебра kA обладает ненулевым простым Γ -инвариантным идеалом P таким, что $C(P) = A$ и для любой собственной изолированной Γ -инвариантной подгруппы D группы A идеал $P \cap kD$ контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(D)$. Пусть $C = \langle C_i \rangle$, и предположим, что $C_{A/C}(\Gamma) \neq 1$. Тогда группа Γ действует тождественно на факторгруппе $A/\Lambda_\Gamma^p(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = \Lambda_\Gamma^p(A)$. По лемме 1.2.1, (iii) $\Lambda_\Gamma^p(D) = D \cap L$ для любой Γ -инвариантной подгруппы D группы A . Следовательно, идеал $P \cap kD$ контролируется подгруппой $D \cap L$ для любой изолированной Γ -инвариантной подгруппы D группы A . Тогда из предложения 3.3.5 следует, что группа Γ обладает подгруппой конечного индекса, которая действует тождественно на факторгруппе A/L .

Очевидно, $A/L = \times_{i=1}^m Y_i$, где Y_i является Γ -инвариантной подгруппой ранга 1, причем группа Γ действует на подгруппах Y_i следующим образом: $a^\gamma = a^{t_i}$, где $a \in Y_i$ и t_i являются положительными рациональными числами. Тогда, поскольку группа Γ обладает подгруппой конечного индекса, которая действует тождественно на факторгруппе A/L , найдется натуральное число s такое, что $(t_i)^s = 1$ для всех i . Следовательно, поскольку t_i является положительным рациональным числом, то $t_i = 1$ для всех i и, значит, группа Γ действует тождественно на факторгруппе $A/\Lambda_\Gamma^p(A)$.

ТЕОРЕМА 3.3.7. Пусть k – поле положительной характеристики p , пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Предположим, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$, тогда идеал P контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по лемме 2.2.2, (ii) $C(P)$ является Γ -инвариантной подгруппой группы A , то можно считать, что $C(P) = A$, и, следовательно, достаточно показать, что в этом случае $\Lambda_\Gamma^p(A) = A$. По лемме 1.2.1, (ii) $\Lambda_\Gamma^p(A) = \Lambda_H^p(A)$ для любой подгруппы $H \leq \Gamma$ конечного индекса, и, следовательно, в доказательстве группу Γ можно заменить любой ее подгруппой конечного индекса.

Предположим, что подгруппа $\Lambda_\Gamma^p(A)$ не контролирует идеал P , т.е. $\Lambda_\Gamma^p(A) \neq A$. Согласно предложению 3.3.3, (i) можно считать, что поле k является конечным, группа A является минимаксной и такой, что $\text{Sp } A \subseteq \{p\}$, группа Γ является конечно порожденной и P является Γ -инвариантным идеалом групповой алгебры kA .

Доказательство проведем индукцией по рангу $r(A)$ группы A . При этом по предположению индукции можно считать, что для любой собственной Γ -орбитальной изолированной подгруппы D группы A идеал $kD \cap P$ контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(D)$. Тогда по предложению 3.2.3 можно считать, что

$\Lambda_\Gamma(A/\Lambda_\Gamma(A)) = A/\Lambda_\Gamma(A)$ и группа Γ является почти абелевой. Следовательно, по предложению 3.3.3, (ii) можно считать, что группа $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ является циклической.

Так как $\text{Sp } A \subseteq \{p\}$ и $\Lambda_\Gamma(A/\Lambda_\Gamma(A)) = A/\Lambda_\Gamma(A)$, то нетрудно заключить, что $\Lambda_\Gamma^p(A/\Lambda_\Gamma^p(A)) = A/\Lambda_\Gamma^p(A)$. Тогда по лемме 1.2.5 группа Γ обладает подгруппой $\langle \delta \rangle$ конечного индекса, а группа A обладает плотной $\langle \delta \rangle$ -инвариантной подгруппой $B = \times_{i=1}^n B_i$, где B_i являются $\langle \delta \rangle$ -инвариантными подгруппами такими, что либо $r(B_i) = 1$, либо $r(B_i) = 2$, причем в последнем случае подгруппа B_i обладает изолированной $\langle \delta \rangle$ -инвариантной подгруппой C_i ранга 1 такой, что группы C_i и B_i/C_i являются $\langle \delta \rangle$ -изоморфными. При этом подгруппа $\langle \delta \rangle$ действует на подгруппах B_i ранга 1 и на подгруппах C_i следующим образом: $b^\delta = b^{t_i}$, где $b \in B_i$ или $b \in C_i$ и t_i – положительные рациональные числа вида $t_i = p^{r_i}$ для некоторого целого числа r_i . Заменяв группу Γ на ее подгруппу конечного индекса $\langle \delta \rangle$, можно считать, что $\Gamma = \langle \delta \rangle$.

Ввиду леммы 3.3.1 группу A можно заменить любой ее Γ -инвариантной плотной подгруппой. Тогда, заменив группу A ее подгруппой B , можно считать, что $A = \times_{i=1}^n A_i$, где A_i являются Γ -инвариантными подгруппами такими, что либо $r(A_i) = 1$, либо $r(A_i) = 2$, причем в последнем случае подгруппа A_i обладает изолированной Γ -инвариантной подгруппой C_i ранга 1 такой, что группы C_i и A_i/C_i являются Γ -изоморфными. При этом группа $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ действует на подгруппах A_i ранга 1 и на подгруппах C_i следующим образом: $b^\gamma = b^{t_i}$, где $b \in A_i$ или $b \in C_i$ и t_i – положительные рациональные числа вида $t_i = p^{r_i}$ для некоторого целого числа r_i .

Пусть $\bar{A}$ – p -делимая оболочка группы A , тогда $\bar{A} = \times_{i=1}^n \bar{A}_i$, где $\bar{A}_i$ – p -делимая оболочка группы A_i . По лемме 3.3.4 существует Γ -инвариантный простой точный идеал $\bar{P}$ групповой алгебры $k\bar{A}$ такой, что $\bar{P} \cap kA = P$ и $C(\bar{P}) = \bar{A}$. Поскольку $\Lambda_\Gamma^p(A) \neq A$, то легко видеть, что $\Lambda_\Gamma^p(\bar{A}) \neq \bar{A}$.

Таким образом, можно предполагать, что $A = \bar{A}$ и $P = \bar{P}$, т.е. можно считать, что группа A является p -делимой. Тогда по лемме 1.3.3 групповая алгебра kA обладает автоморфизмом β , действующим по правилу $\beta: x \mapsto x^m$ для любого элемента $x \in kA$. При этом любой идеал групповой алгебры kA является $\langle \beta \rangle$ -инвариантным и сужение автоморфизма β на группу A является центральным элементом группы $\text{Aut } A$.

Если $\langle \beta \rangle \cap \langle \gamma \rangle \neq 1$, то, заменив группу $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ ее подгруппой конечного индекса, можно считать, что $\langle \gamma \rangle \leq \langle \beta \rangle$, откуда следует, что $\Lambda_\Gamma^p(A) = A$, но это приводит к противоречию. Таким образом, $\langle \beta \rangle \cap \langle \gamma \rangle = 1$ и, следовательно, $B = \langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta \rangle \times \langle \gamma \rangle$, так как β является центральным элементом группы $\text{Aut } A$. Очевидно, идеал P является B -инвариантным.

Положим $C = \langle C_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ и покажем существование натурального числа h такого, что группа $\langle \beta^h \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на факторгруппе A/C .

Очевидно, $A/C = \bar{A} = \times_{i=1}^n \bar{A}_i$, где $\bar{A}_i$ являются Γ -инвариантными подгруппами такими, что $r(\bar{A}_i) = 1$. При этом группа $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ действует на группе $\bar{A}_i$ следующим образом: $a^\gamma = a^{s_i}$ для всех элементов $a \in \bar{A}_i$, где s_i – рациональные числа вида $s_i = p^{r_i}$ для некоторого целого числа r_i . Заменяв группу $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ ее подгруппой конечного индекса $\langle \gamma^t \rangle$, где $p^t = m = |k|$, можно считать, что

в равенствах $s_i = p^{r_i}$ числа r_i имеют вид $r_i = th_i$ для каждого i . Тогда из определения автоморфизма β следует, что группа $\langle \beta^{h_i} \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на подгруппе $\bar{A}_i$. Поскольку при этом на каждой подгруппе $\bar{A}_j$ группа $\langle \beta^{h_i} \gamma^{-1} \rangle$ действует следующим образом: $a^{(\beta^{h_i} \gamma^{-1})} = a^{m_j}$, где m_j – положительные числа, то по следствию 3.3.6 группа $\langle \beta^{h_i} \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на факторгруппе $A/\Lambda_\Gamma^p(A)$.

Итак, для каждого i группа $\langle \beta^{h_i} \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на факторгруппе $A/\Lambda_\Gamma^p(A)$, откуда нетрудно получить, что $h_i = h_j$ для всех i и j . Таким образом, существует целое число h такое, что группа $\langle \beta^h \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на каждой подгруппе $\bar{A}_i$ и, следовательно, группа $\langle \beta^h \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на факторгруппе A/C . Так как группы C_i и A_i/C_i являются Γ -изоморфными для каждого i , отсюда следует, что группа $\langle \beta^h \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на каждой подгруппе C_i и, следовательно, группа $E = \langle \beta^h \gamma^{-1} \rangle$ действует тождественно на подгруппе C .

Таким образом, группа A обладает конечным рядом $1 \leq C \leq A$, состоящим из E -инвариантных подгрупп, на факторах которого группа E действует тождественно. Тогда идеал P контролируется подгруппой $\Delta_E(A)$ [3; лемма 10.4], а поскольку $A = C(P)$, то получаем $\Delta_E(A) = A$. Тогда по лемме 1.2.2, (i) найдется натуральное число s такое, что группа E^s действует тождественно на группе A и, следовательно, $\beta^{hs} = \gamma^s$. Однако это приводит к противоречию, так как $\langle \beta \rangle \cap \langle \gamma \rangle = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.8. Пусть k – конечно порожденное поле положительной характеристики p , пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , и пусть P – простой точный идеал групповой алгебры kA . Предположим, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$, тогда идеал P контролируется Γ -инвариантной подгруппой S группы A такой, что $\text{Sp}(S) \subseteq \{p\}$ и $\Lambda_\Gamma^p(S) = S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 3.3.7 и теоремы 2.2.3.

Список литературы

- [1] И. Ламбек, *Кольца и модули*, Мир, М., 1971.
- [2] К. С. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987.
- [3] Ch. J. B. Brookes, “Ideals in group rings of soluble groups of finite rank”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **97** (1985), 27–49.
- [4] J. E. Roseblade, “Prime ideals in group rings of polycyclic groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **36**:3 (1978), 385–447.
- [5] А. В. Тушев, “Нетеровы модули над абелевыми группами конечного свободного ранга”, *Укр. матем. журн.*, **43**:7–8 (1991), 1042–1048.
- [6] D. Segal, “On the group rings of Abelian minimax groups”, *J. Algebra*, **237**:1 (2001), 64–94.
- [7] А. В. Тушев, “О нетеровых модулях над минимаксными абелевыми группами”, *Укр. матем. журн.*, **54**:7 (2002), 969–980.
- [8] А. В. Тушев, “О примитивных представлениях минимаксных нильпотентных групп”, *Матем. заметки*, **72**:1 (2002), 131–144.

- [9] А. В. Тушев, “Индукцированные представления абелевых групп конечного ранга”, *Укр. матем. журн.*, **55**:9 (2003), 1249–1253.
- [10] A. V. Tushev, “On deviation in groups”, *Illinois J. Math.*, **47**:1/2 (2003), 539–550.
- [11] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968.
- [12] Н. Бурбаки, *Алгебра: модули, кольца, формы*, Наука, М., 1966.
- [13] В. С. Чарин, “О группах автоморфизмов нильпотентных групп”, *Укр. матем. журн.*, **6**:3 (1954), 295–304.
- [14] P. H. Kropholler, P. A. Linnell, J. A. Moody, “Applications of a new K -theoretic theorem to soluble group rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:3 (1988), 675–684.
- [15] D. S. Passman, “Algebraic crossed products”, *Group actions on rings*, Proc. AMS-IMS-SIAM Summer Res. Conf. (Brunswick/Maine 1984), Contemp. Math., **43**, 1985, 209–225.
- [16] D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Wiley, New York, 1977.
- [17] П. Самюэль, О. Зарисский, *Коммутативная алгебра*, т. 1, 2, ИЛ, М., 1963.
- [18] G. M. Bergman, “The logarithmic limit-set of an algebraic variety”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **157** (1971), 459–469.
- [19] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972.

А. В. Тушев (A. V. Tushev)

Днепропетровский национальный университет,

г. Днепропетровск, Украина

E-mail: tushev@member.ams.org

Поступила в редакцию

16.08.2005