Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Каржеманов, Теорема полубильности для слабых лог-многообразий Фано, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 57–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:25:45

УДК 512.763

И. В. Каржеманов

Теорема полуобильности для слабых лог-многообразий Фано

В работе дается доказательство полуобильности дивизора $-(K_X + S)$ для пары (X, S) с чисто лог-терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, где X – трехмерное проективное нормальное алгебраическое многообразие, $S \subset X$ – нормальная поверхность, дивизор $-(K_X + S)$ численно эффективен и объемен.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе доказывается следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть (X, S) – пара с чисто лог-терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, X – трехмерное проективное нормальное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $S \subset X$ – нормальная поверхность, дивизор $-(K_X + S)$ численно эффективен и объемен. Тогда дивизор $-(K_X + S)$ полуобилен, т.е. линейная система $|-m(K_X + S)|$ не имеет базисных точек (свободна) для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Для сравнения рассмотрим классическую теорему о свободе.

ТЕОРЕМА 1.2 (см., например, [1]). Дана пара (X, D) с лог-терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, где $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$. Пусть L – численно эффективный дивизор Картье такой, что дивизор $aL - (K_X + D)$ обилен для некоторого $a \in \mathbb{N}$. Тогда линейная система $|mL|$ свободна для некоторого $m \gg 0$.

Заметим, что утверждение теоремы 1.2 останется верным, если считать пару (X, D) лог-терминальной по Кавамате, а дивизор $aL - (K_X + D)$ – только численно эффективным и объемным.

Если же дивизор $aL - (K_X + D)$ численно эффективен и объемен, а пара (X, D) лишь лог-терминальна (или чисто лог-терминальна, как в теореме 1.1), то, вообще говоря, утверждение теоремы 1.2 при таких условиях неверно (см. контрпример Зариского в [2]).

Таким образом, доказательство теоремы 1.1, вообще говоря, нельзя получить из теоремы 1.2, просто заменив в последней особенности пары (X, S) на чисто лог-терминальные, а дивизор L – на $-(K_X + S)$.

Опишем идею доказательства теоремы 1.1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00353-а).

Предположим, что утверждение теоремы 1.1 неверно. Ограничивая дивизор $-(K_X + S)$ на поверхность S , получаем два случая: дивизор $-(K_X + S)|_S$ объемен или нет. В первом случае согласно результату из [3] линейная система $|-m(K_X + S)|_S|$ свободна для некоторого $m \in \mathbb{N}$, и остается применить одну из теорем об обращении в нуль, чтобы закончить доказательство в этом случае.

Если же дивизор $-(K_X + S)|_S$ не является объемным, то, используя результаты из [3] и [4], приходим к ситуации, когда базисное множество линейной системы $|-m(K_X + S)|$, $m \in \mathbb{N}$, состоит из неособой эллиптической кривой C и поверхность S неособа в окрестности C .

В § 2 рассмотрены эти случаи, а также даны формулировки необходимых утверждений.

Остается показать, что получившаяся ситуация невозможна. Это будет сделано в §§ 3, 4 методом, аналогичным технике Каваматы в доказательстве теоремы 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1.1 является частным случаем следующего более общего утверждения (см. [5]).

ГИПОТЕЗА 1.3 (Рид). *Если (X, S) – пара с лог-каноническими особенностями, многообразие X трехмерно, дивизор $-(K_X + S)$ численно эффективен и объемен, то линейная система $|-m(K_X + S)|$ свободна для некоторого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство этой гипотезы, по-видимому, может быть получено редукцией к теореме 1.1. Однако это потребует применения лог-программы минимальных моделей и теории особенностей поверхностей, не являющихся нормальными, что не входит в число задач, рассматриваемых в настоящей работе.

Автор признателен С. А. Кудрявцеву за постановку задачи и полезные обсуждения, а также В. А. Исковских за внимание к работе.

§ 2. Соглашения и предварительные результаты

2.1. Мы работаем с проективными алгебраическими многообразиями над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Изучаемая пара (X, S) состоит из нормального трехмерного проективного алгебраического многообразия X и нормальной поверхности $S \subset X$; пара (X, S) имеет чисто лог-терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, дивизор $L = -(K_X + S)$ численно эффективен и объемен (определения и обозначения см., например, в [6]).

Предположим, что линейная система $|mL|$ не является свободной для всех чисел $m \in \mathbb{N}$. Ниже мы приведем это предположение к противоречию.

Возьмем m таким, что линейная система $|mL|$ задает бирациональное отображение (далее предполагаем, что m настолько большое, насколько это необходимо).

По формуле присоединения $L|_S = -(K_S + \Delta)$, где Δ – дифферента (см. [7; гл. 16]); кроме того, так как пара (X, S) имеет чисто лог-терминальные особенности, то пара (S, Δ) имеет лог-терминальные по Кавамате особенности (см., например, [7; гл. 16]).

Выясним, как связаны линейные системы $|mL|$ и $|(mL)|_S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *В предыдущих обозначениях $\text{Bs } |mL| \cap S = \text{Bs } |(mL)|_S$. Более того, линейная система $|mL|$ свободна тогда и только тогда, когда свободна линейная система $|(mL)|_S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(mL - S) \rightarrow \mathcal{O}_X(mL) \rightarrow \mathcal{O}_S((mL)|_S) \rightarrow 0.$$

Поскольку пара (X, S) имеет чисто лог-терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, дивизор $-(K_X + S)$ численно эффективен и объемен, то по теореме об обращении в нуль из [2; предложение 1-2-6]

$$\begin{aligned} 0 &= H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X - (m+1)(K_X + S))) \\ &= H^1(X, \mathcal{O}_X(-m(K_X + S) - S)) = H^1(X, \mathcal{O}_X(mL - S)) \end{aligned}$$

(напомним, что число m достаточно большое). Таким образом, линейная система $|mL|$ свободна вне S и

$$S \cap \text{Bs } |mL| = \text{Bs } |(mL)|_S,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что $\text{Bs } |mL| = \text{Bs } |m'L|$ для достаточно больших $m, m' \in \mathbb{N}$, поскольку дивизор L объемен.

Из предложения 2.1 следует, что для доказательства теоремы 1.1 достаточно установить полуобильность дивизора $-(K_S + \Delta)$.

2.2. Поскольку дивизор $-(K_X + S)$ численно эффективен и объемен, то дивизор $-(K_S + \Delta)$ также численно эффективен, но, вообще говоря, не будет объемным. Получаем два случая.

Случай 1: $-(K_S + \Delta)$ объемен. Тогда доказательство теоремы 1.1 получается из следующего результата.

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [3]). *Пусть S – полная нормальная поверхность с границей Δ такая, что пара (S, Δ) лог-канонична, дивизор $-(K_S + \Delta)$ численно эффективен и объемен. Тогда линейная система $|-m(K_S + \Delta)|$ свободна для некоторого $m \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [7; предложение 6.16] существуют такие бирациональное стягивание $g: S' \rightarrow S$ и граница Δ' на S' , что

- (i) $K_{S'} + \Delta' \equiv g^*(K_S + \Delta)$;
- (ii) пара (S', Δ') имеет дивизориально лог-терминальные особенности;
- (iii) S' – неособая поверхность.

Значит, можно считать, что пара (S, Δ) имеет дивизориально лог-терминальные особенности и S – неособая поверхность.

Положим $C = [\Delta]$, $B = \{\Delta\}$. Заметим, что кривая C связная по лемме о связности (см. [7; предложение 17.4]). Так же как в предложении 2.1 получаем, что $C \cap \text{Bs } |-m(K_S + \Delta)| = \text{Bs } |-m(K_S + \Delta)|_C$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Теперь если кривая C есть дерево из рациональных кривых, то линейная система $|-m(K_S + \Delta)|_{C_i}|$ свободна на каждой компоненте $C_i \subset C$ (число m такое, что дивизор $-m(K_S + \Delta)$ – дивизор Картье). Значит, свободна и линейная система $|-m(K_S + \Delta)|_C|$.

Если кривая C не является деревом из рациональных кривых, то из классификации лог-канонических особенностей в размерности два (см. [7; гл. 3]) получаем, что $p_a(C) = 1$ и C – либо неособая эллиптическая кривая, либо особая рациональная кривая, либо колесо из неособых рациональных кривых. Отсюда вытекает, что $0 \leq 2p_a(C) - 2 + \deg \text{Diff}_C(B) = (K_S + C + B) \cdot C \leq 0$, следовательно, $\text{Diff}_C(B) = 0$, т.е. $\text{Supp } B \cap C = \emptyset$. А тогда $(K_S + \Delta)|_C = (K_S + C)|_C = K_C = 0$, и $\text{Bs } |-m(K_S + \Delta)| = \emptyset$ и в этом случае. Теорема 2.2 доказана.

Перейдем теперь к ситуации, когда дивизор $-(K_S + \Delta)$ не является объемным.

Случай 2: $-(K_S + \Delta)$ не объемен. Дадим определение $\mathbb{Q}$ -дополнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 (см. [5]). Пусть (X, D) – лог-пара, D – субграница. Тогда $\mathbb{Q}$ -дополнением дивизора $K_X + D$ называется дивизор $K_X + D'$ такой, что $D' \geq D$, дивизор $K_X + D'$ лог-каноничный и $m(K_X + D') \sim 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Теперь, в зависимости от того, имеет ли пара (S, Δ) $\mathbb{Q}$ -дополнение, снова получаем два случая.

Пара (S, Δ) имеет $\mathbb{Q}$ -дополнение. Воспользуемся следующим результатом, вытекающим из [3; предложение 2.5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. В предыдущих обозначениях если пара (S, Δ) имеет $\mathbb{Q}$ -дополнение, то дивизор $-(K_S + \Delta)$ полуобильен.

Предложение 2.4 дает противоречие с нашим предположением о том, что дивизор $-(K_X + S)$ не является полуобильным.

Пара (S, Δ) не имеет $\mathbb{Q}$ -дополнений. Поскольку пара (S, Δ) имеет лог-терминальные по Кавамате особенности, то согласно результату из [4] в этом случае поверхность S есть $\mathbb{P}_Z(\mathcal{E})$, где Z – неособая эллиптическая кривая, $\mathcal{E}$ – неразложимый пучок ранга 2 и степени 0 над Z ; носитель $\text{Supp } \Delta$ границы Δ есть неособая эллиптическая кривая C – сечение расслоения $\mathbb{P}_Z(\mathcal{E})$, т.е. $\Delta = aC$, $0 \leq a < 1$. Кроме того, по определению кривой C имеем $K_S \cdot C = (C^2) = 0$.

Вернемся к исходной паре (X, S) , чтобы сделать некоторые предположения. Для доказательства теоремы 1.1 достаточно все рассуждения проводить лишь в окрестности базисного множества линейной системы $|-m(K_X + S)|$. Тогда можно считать, что

- (i) носитель дивизора $-m(K_X + S)|_S$ есть базисное множество линейной системы $|-m(K_X + S)|$ (ср. предложение 2.1);
- (ii) носитель дифференты Δ , кривая C , есть базисное множество линейной системы $|-m(K_X + S)|$ либо
- (ii') $(K_X + S)|_S = K_S$ и базисное множество линейной системы $|-m(K_X + S)|$ есть кривая $-mK_S$, причем $K_S^2 = 0$.

Дальше мы будем рассуждать в предположениях (i), (ii) (в случае (i), (ii') все аналогично).

2.3. В п. 2.2 мы выяснили, как устроена пара (S, Δ) в случае, если дивизор $-(K_S + \Delta)$ не является полуобильным. Получили:

- (i) $\Delta = aC$, $0 \leq a < 1$, C – неособая эллиптическая кривая с $(C^2) = K_S \cdot C = 0$;
- (ii) $\text{Supp}(-m(K_S + \Delta)) = C$;
- (iii) поверхность S неособа (в окрестности C).

В следующих параграфах мы приведем это к противоречию.

Дальше нам понадобятся следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.5 (критерий обильности Клеймана, см. [8]). *Пусть X – проективное алгебраическое многообразие. Дивизор Картье H на X обилен тогда и только тогда, когда он положителен на конусе Моры $\overline{NE}(X) \setminus \{0\}$.*

ТЕОРЕМА 2.6 (теорема Каваматы–Фивега об обращении в нуль, см. [1; гл. 5]). *Пусть X – неособое проективное алгебраическое многообразие, R – $\mathbb{Q}$ -дивизор на X . Предположим, что R обилен и $\{R\}$ имеет простые нормальные пересечения. Тогда $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + \lceil R \rceil)) = 0$ для всех $i > 0$.*

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

3.1. Вместо исходной пары (X, S) рассмотрим пару $(X, (1-\varepsilon)S)$ для некоторого $0 < \varepsilon < 1$; $(X, (1-\varepsilon)S)$ имеет лог-терминальные по Кавамате особенности, дивизор $-(K_X + (1-\varepsilon)S)$ объемен. Пусть $(1-\varepsilon)S = S'$, $-m(K_X + (1-\varepsilon)S) = L'$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что $L' = -m(K_X + S) + \varepsilon mS$, так что если линейная система $|-m(K_X + S)|$ имеет базисные точки, то это справедливо и для $|L'|$.

Рассмотрим лог-разрешение $f: Y \rightarrow X$ пары (X, S') такое, что дивизор $\text{Exc}(f) \cup f_*^{-1}S' \cup f_*^{-1}L'$ имеет простые нормальные пересечения (определения см. в [6]) и $f_*L' = M + \sum_j r_j E_j$, где линейная система $|M|$ свободна, $r_j > 0$, $E_j \subset \text{Exc}(f)$ для всех j .

Запишем $K_Y + f_*^{-1}S' = f^*(K_X + S') + \sum_j a_j E_j$, $a_j > -1$; $[f_*^{-1}S'] = 0$, так как пара (X, S') лог-терминальна по Кавамате. Заметим здесь же, что так как дивизор L' объемен, то M тоже объемен, а поскольку линейная система $|M|$ свободна, то M численно эффективен.

3.2. Теперь рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} K_Y + f_*^{-1}S' + f^*(qL') &= f^*(K_X + S' + L') + \sum_j (-r_j + a_j)E_j - M + f^*(qL') \\ &= f^*\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)L'\right) + \sum_j (-r_j + a_j)E_j - M + f^*(qL') \end{aligned}$$

для некоторого $q \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Перепишем его в виде

$$M + f^*(qL') = f^*\left(\left(q + 1 - \frac{1}{m}\right)L'\right) + \sum_j (-r_j + a_j)E_j - K_Y - f_*^{-1}S';$$

здесь M численно эффективен и объемен, $f^*(qL')$ объемен. Вычтем из обеих частей последнего равенства $\sum_j qr_j E_j$. Тогда

$$M + f^*(qL') - \sum_j qr_j E_j = (q+1)M$$

численно эффективен и объемен. Итак, окончательно получаем

$$\begin{aligned} R &= M + f^*(qL') - \sum_j qr_j E_j \\ &= f^*\left(\left(q+1 - \frac{1}{m}\right)L'\right) + \sum_j ((q+1)(-r_j) + a_j)E_j - K_Y - f_*^{-1}S', \end{aligned}$$

где R численно эффективен и объемен (на самом деле R можно считать обильным дивизором, прибавив к обеим частям $-\sum_j \delta_j E_j$, $0 < \delta_j \ll 1$, см. теорему 2.5).

Теперь если q таково, что $q+1 - 1/m \in (0, 1]$ и $-(1+q)r_j + a_j \in (-2, -1]$ для всех j таких, что $r_j \neq 0$, то

$$[R] = f^*(L') + E - F - K_Y,$$

где $F, E \subset \text{Exc}(f)$ – эффективные дивизоры без общих компонент, $F \neq 0$, $f(F) \subset \text{Bs}|L'|$. Далее считаем, что F неприводим. Рассмотрим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(X, f^*(L') + E - F) \rightarrow H^0(X, f^*(L') + E) \\ &\rightarrow H^0(F, (f^*(L') + E)|_F) \rightarrow H^1(X, f^*(L') + E - F); \end{aligned}$$

$H^1(X, f^*(L') + E - F) = 0$ по теореме 2.6; $H^0(F, (f^*(L') + E)|_F) \neq 0$, так как $f^*(L')$ объемен и дивизоры E и F не имеют общих компонент. Отсюда вытекает, что $H^0(X, f^*(L') + E) \neq 0$. Следовательно, $f(F)$ не содержится в $\text{Bs}|L'|$, получили противоречие.

Значит, чтобы закончить доказательство теоремы 1.1, нужно подобрать число q .

§ 4. Окончание доказательства: подбор числа q

Ясно, что для того чтобы подобрать число q , можно снова рассматривать пару (X, S) (число ε из предыдущего параграфа тогда следует взять достаточно близким к нулю). Возьмем снова “достаточно хорошее” лог-разрешение пары (X, S) , обозначим его тоже через f .

Положим здесь $S' = f_*^{-1}S$, $C' \subset S'$ – кривая, доминирующая кривую C . Поскольку S неособа в окрестности C (см. § 2), получаем следующую ситуацию: $\varphi = f|_{S'}: S' \rightarrow S$ – последовательность раздутий, C' – собственный прообраз C . Отметим свойства кривой C и морфизма φ :

- (i) $K_{S'} = \varphi^*(K_S) + a_j C' + \sum_{i \neq j} a_i E_i$, где $E_i := E_i|_{S'} - (-1)^g$ -кривые для всех $i \neq j$;
- (ii) $C' = \varphi^*(C) - \sum_{i \neq j} k_i E_i$, $k_i \in \mathbb{N}$;
- (iii) $K_{S'} = \varphi^*(K_S + C) + (-r_j + a_j)C' + \sum_{i \neq j} (-r_i + a_i)E_i$.

Первые два свойства очевидны; третье вытекает из того, что

$$-m(K_X + S)|_S = C$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$ (см. п. 2.3).

Так как, кроме того, $(C^2) = K_S \cdot C = 0$, то получаем

$$\begin{aligned} (K_{S'} + C') \cdot C' &= \left(-\sum_{i \neq j} k_i^2 \right) (1 + a_j) + \sum_{i \neq j} k_i a_i \\ &= \left(-\sum_{i \neq j} k_i^2 \right) (1 + a_j - r_j) + \sum_{i \neq j} k_i (-r_i + a_i). \end{aligned}$$

Поскольку все $r_k > 0$, то $\sum_{i \neq j} k_i = 0$, откуда все $k_i = 0$. Таким образом, $C' = \varphi^*(C)$.

Теперь имеем

$$\begin{aligned} K_{S'} &= \varphi^*(K_S + C) + (-r_j + a_j)C' + \sum_{i \neq j} (-r_i + a_i)E_i \\ &= \varphi^*(K_S) + C' + (-r_j + a_j)C' + \sum_{i \neq j} (-r_i + a_i)E_i \\ &= \varphi^*(K_S) + a_j C' + \sum_{i \neq j} a_i E_i. \end{aligned}$$

Отсюда $r_i = 0$ для всех $i \neq j$, а $r_j = 1$.

Значит, остается подобрать такое $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, что $-(1 + q) + a_j \in (-2, -1]$ и $q + 1 - 1/m \in (0, 1]$, а тогда $q \in [a_j, a_j + 1]$. Поскольку $a_j + 1 > 0$ и число m достаточно большое, то такое q найдется.

Доказательство теоремы 1.1 закончено.

Список литературы

- [1] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [2] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, “Introduction to the minimal model problem”, *Algebraic geometry* (Sendai, 1985), Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.
- [3] V. V. Shokurov, “Complements on surfaces”, *J. Math. Sci. (New York)*, **102**:2 (2000), 3876–3932.
- [4] I. Yu. Fedorov, S. A. Kudryavtsev, “ $\mathbb{Q}$ -Complements on log surfaces”, [arXiv:math.AG/0311325](https://arxiv.org/abs/math.AG/0311325).
- [5] Yu. G. Prokhorov, *Lectures on complements on log surfaces*, MSJ Mem., **10**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

- [6] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry*, Proceedings of the Summer Research Institute (Santa Cruz, CA, July 9–29, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
- [7] J. Kollár (ed.), *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry (University of Utah, Salt Lake City, UT, 1991), Astérisque, **211**, Soc. Math. France, Paris, 1992.
- [8] S. Kleiman, “Toward a numerical theory of ampleness”, *Ann. of Math.* (2), **84**:3 (1966), 293–344.

И. В. Каржеманов (I. V. Karzhemanov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ilkarjem@rambler.ru

Поступила в редакцию

17.08.2005