Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Долгих, К. А. Мирзоев, Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 4, 53–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:14:59

УДК 517.94

И. Н. Долгих, К. А. Мирзоев

Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов

В настоящей работе исследуются задачи об асимптотическом поведении решений уравнения $l_n y = \lambda y$ произвольного порядка (четного или нечетного) с комплекснозначными коэффициентами в окрестности точки $+\infty$ и в окрестности нуля. При этом предполагается, что коэффициенты квазидифференциального выражения l_n таковы, что если уравнение $l_n y = \lambda y$ свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка, то полученную систему удастся преобразовать к системе дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой при $x = \infty$ или $x = 0$. Полученные результаты позволяют определить индексы дефекта соответствующих минимальных симметрических дифференциальных операторов и характер спектра самосопряженных расширений этих операторов.

Кроме того, с помощью уточненных асимптотических формул для решений уравнения $l_n y = \lambda y$ в работе найдены дефектные числа одного дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением со старшим коэффициентом, обращающимся в нуль внутри рассматриваемого интервала.

Библиография: 14 названий.

Введение

Пусть комплекснозначные функции f_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, $n > 1$, – элементы матрицы-функции $F := (f_{ij})$ – определены на интервале $I := (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, и удовлетворяют следующим условиям:

- a) $f_{ij} = 0$ почти всюду на I при $2 \leq i+1 < j \leq n$;
- b) $f_{ij} \in \mathcal{L}_1(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha, \beta \in I$ и $1 \leq i, j \leq n$, т.е. f_{ij} локально абсолютно интегрируемы ($f_{ij} \in \mathcal{L}_{1, \text{loc}}(I)$);
- c) $f_{i, i+1} \neq 0$ почти всюду на I при $1 \leq i \leq n-1$;
- d) $F = -J^{-1}F^*J$, где F^* – сопряженная матрица к матрице F , т.е. $F^* = (\overline{f_{ji}})$, и $J := ((-1)^i \delta_{i, n+1-j})$, $1 \leq i, j \leq n$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Работа выполнена в рамках ведомственной научной программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект “Спектральный анализ дифференциальных и разностных операторов”, код 8351); кроме того, работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-01-00989) и Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1927.2003.1).

Определим квазипроизводные заданной функции y посредством матрицы F , полагая

$$y^{[0]} := y,$$

$$y^{[i]} := (f_{i,i+1})^{-1} \left[(y^{[i-1]})' - \sum_{j=1}^i f_{ij} y^{[j-1]} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

при условии, что $y^{[i-1]}$ уже определены и являются абсолютно непрерывными функциями на каждом компакте $[\alpha, \beta] \subset I$

$$y^{[n]} := (y^{[n-1]})' - \sum_{j=1}^n f_{nj} y^{[j-1]},$$

и скалярное симметрическое квазидифференциальное выражение l_n , полагая

$$l_n y := i^n y^{[n]}.$$

Область определения выражения l_n – это множество всех функций y , для которых существуют локально абсолютно непрерывные квазипроизводные $y^{[i]}$ до $(n-1)$ -го порядка включительно. Для таких функций $l_n y$ существует почти всюду и локально интегрируемо на I .

Согласно общепринятой терминологии (см., например, [1; гл. IV, V], [2; гл. V] и [3; гл. XIII]) выражение l_n называется *регулярным*, если интервал I конечен и элементы матрицы F суммируемы на всем интервале I . В противном случае выражение l_n называется *сингулярным*. При этом левый конец $a \in I$ интервала I называется *регулярным*, если $a > -\infty$ и элементы матрицы F суммируемы на каждом $[a, \beta] \subset I$, $\beta < b$. В противном случае конец a называется *сингулярным*. Аналогично определяются понятия регулярности и сингулярности для правого конца интервала I .

Отметим, что условия а), с) и d) нужны для того, чтобы можно было определить скалярное симметрическое квазидифференциальное выражение l_n , порожденное матрицей F , а условие б) – для обеспечения справедливости теоремы существования и единственности решений соответствующих систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Если элементы матрицы F удовлетворяют условиям а)–d), то множество финитных функций из области определения выражения l_n образует всюду плотное линейное многообразие в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(I)$. Исходя из этого известным образом определяется минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(I)$, порожденный выражением l_n (подробности см. [1; гл. II], [2; гл. V, § 17], [4]).

Обозначим через n_+ и n_- дефектные числа оператора L_0 в верхней и нижней полуплоскости соответственно. В абстрактной теории симметрических операторов пару (n_+, n_-) называют *индексом дефекта оператора* L_0 .

Известно, что если элементы матрицы F удовлетворяют условиям а)–d) и один из концов интервала I регулярный, то при любом не вещественном λ уравнение

$$l_n y = \lambda y \tag{1}$$

имеет решения из $\mathcal{L}_2(I)$ и $n_+(n_-)$ равно максимальному числу линейно независимых решений уравнения (1) при $\text{Im } \lambda > 0$ ($\text{Im } \lambda < 0$), принадлежащих пространству $\mathcal{L}_2(I)$, и не зависит от λ .

Известно (см., например, [4]), что если матрица F удовлетворяют условиям а)–д), то, в частности, справедлива

ТЕОРЕМА 1. Числа n_+ и n_- удовлетворяют следующим неравенствам:

1) если $n = 2m$, $m \geq 1$, то

$$\frac{1}{2}n = m \leq n_+, n_- \leq 2m = n;$$

2) если $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n-1) = m &\leq n_+ \leq 2m+1 = n, \\ \frac{1}{2}(n+1) = m+1 &\leq n_- \leq 2m+1 = n. \end{aligned}$$

Уравнение (1) равносильно системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{y}' = (F + \Lambda)\mathbf{y}, \quad (2)$$

где $\mathbf{y} := \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, \dots, y^{[n-1]})$, а элементы числовой матрицы $\Lambda := (\lambda_{ij})$ определяются равенствами $\lambda_{n1} := i^{-n}\lambda$ и $\lambda_{ij} := 0$ для остальных значений i и j . Эквивалентность (1) и (2) понимается в том смысле, что если y является решением (1), то $\mathbf{y} = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, \dots, y^{[n-1]})$, $y = y^{[0]}$, является решением (2), и наоборот, если $\mathbf{y} = \text{colon}(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ – решение системы (2), то $y = y_0$ – решение уравнения (1) и $y_k = y^{[k]}$, $0 \leq k \leq n-1$ (более подробно см. [1], [2; гл. V], [3; гл. XIII], [4]).

Следуя работе [5], рассмотрим один частный случай выражения l_n , а именно, предположим, что

I) функции $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ измеримы, принимают вещественные значения при $x \in [1, +\infty)$ и при любом $1 < b < +\infty$

$$\int_1^b |p_m|^{-1} < +\infty, \quad \int_1^b |p_k| < +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-1;$$

II) $p_0(z), p_1(z), \dots, p_m(z)$ – аналитические функции при $|z| \geq x_0 > 1$ и

$$p_k(z) := z^{2k+\nu} \left[a_k + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(k)} z^{-j} \right], \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad |z| \geq x_0 > 1,$$

где $a_m \neq 0$, а $\nu \geq 0$ – целое число.

Условие I) позволяет определить выражение l_n порядка $n = 2m$ формулой

$$\begin{aligned} l_{2m}y := p_0(x)y + \frac{d}{dx} \left\{ p_1(x)y' + \frac{d}{dx} \left[p_2(x)y'' + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d}{dx} \left(p_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \frac{d}{dx} (p_m(x)y^{(m)}) \right) \dots \right] \right\}, \end{aligned}$$

а из условия II) следует, что выражение l_{2m} при $x > x_0$ имеет вид

$$l_{2m}[y] = \sum_{k=0}^m (p_k(x)y^{(k)})^{(k)}.$$

Сформулируем теорему, принадлежащую С. А. Орлову (см. [5]).

ТЕОРЕМА 2. *Если функции $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ удовлетворяют условиям I) и II), то максимальное число линейно независимых решений уравнения (1), принадлежащих $\mathcal{L}_2(1, +\infty)$, равно*

1) *при $\nu > 0$ числу корней полинома*

$$\mathfrak{F}_{2m}(z, \nu) := \sum_{k=1}^m a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] + a_0,$$

лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$, и не зависит от λ ;

2) *при $\nu = 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_{2m}(z, 0) - \lambda$, лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$, и при не вещественном λ равно m .*

При этом в случае $\nu > 0$ спектр любого самосопряженного расширения оператора L_0 дискретный.

Предположим, что коэффициенты $p_0, p_1, \dots, p_m$ выражения l_{2m} представляются в виде

$$p_k(x) = x^{2k+\nu}(a_k + r_k(x)), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad p_m(x) = \frac{x^{2m+\nu}}{1/a_m + r_m(x)},$$

где ν – неотрицательное (необязательно целое) число, $a_0, a_1, \dots, a_m$ – вещественные числа, $a_m \neq 0$, а $r_0, r_1, \dots, r_m$ – вещественные функции на $[1, +\infty)$. Пусть далее выполняются условия:

i) *при некотором $x_0 (\geq 1)$*

$$\int_{x_0}^{+\infty} |r_k(x)| \frac{dx}{x} < +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m;$$

ii) *все корни полинома $\mathfrak{F}_{2m}(z, \nu)$ при $\nu > 0$ и полинома $\mathfrak{F}_{2m}(z, 0) - \lambda$ при $\nu = 0$ различны.*

В работе [6] при выполнении условий I), i) и ii) найдены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения (1). В частности там доказано, что утверждения 1) и 2) теоремы 2 остаются справедливыми, если в ней условие II) заменить условиями i) и ii).

Отметим, что в [2] в общих чертах изложены содержания работ [5] и [6] (см. [2; гл. V, § 17]). Работа [5] включена также в библиографию книги [3]. Однако в гл. XIII книги [3], посвященной обыкновенным дифференциальным операторам, нет ссылки на [5]. В работе [7], вошедшей позже в [8], заново открыта теорема 2 для частного случая $p_k(x) = a_k x^{2k+\nu}$, $k = 0, 1, \dots, m$, и подробно изучен полином $\mathfrak{F}_{2m}(z, \nu)$. Таким образом, по-видимому, работы [5] и [6] так и остались незамеченными авторами книги [8]. В [8] рассматриваются

и некоторые дифференциальные выражения нечетного порядка частного вида и исследуются соответствующие им полиномы.

Отметим также, что в [9; гл. 7] исследуются дифференциальные операторы, порожденные обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке с двумя сингулярными концами.

Предположим теперь, что коэффициент при производной порядка k дифференциального выражения l_n имеет непрерывные производные до k -го порядка включительно на множестве I . Как известно, всякое симметрическое дифференциальное выражение порядка $n > 1$ с такими коэффициентами можно представить в виде

$$l_n y = \sum_{k=0}^{[n/2]} (p_k y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \{(q_k y^{(k+1)})^{(k)} + (q_k y^{(k)})^{(k+1)}\},$$

где $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа a , а $p_0, p_1, \dots, p_{[n/2]}$ и $q_0, q_1, \dots, q_{[(n-1)/2]}$ – вещественнозначные функции на I и

$$p_k \in C^{(k)}(I), \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad q_k \in C^{(k+1)}(I), \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad (3)$$

При этом известен также вид матрицы F , посредством которой определяются квазипроизводные и квазидифференциальное выражение, совпадающее с выражением l_n при выполнении условий (3) (см. [1; добавление А], [4], эти матрицы мы приводим также в §1). Настоящая работа посвящена исследованию дифференциальных операторов, порожденных квазидифференциальными выражениями, определяемыми матрицами этого вида.

Первый параграф этой работы носит в основном вспомогательный характер и посвящен преобразованию системы (2) к виду, удобному для дальнейших исследований. Далее, в §2 и §3 исследуется задача об асимптотическом поведении решений уравнения (1) произвольного порядка (четного или нечетного) с комплекснозначными коэффициентами в окрестности точки $+\infty$ и правосторонней окрестности нуля и полученные результаты применяются к задаче об определении индекса дефекта соответствующих минимальных симметрических дифференциальных операторов и к задаче о характере спектра самосопряженных расширений этих операторов. При этом предполагается, что коэффициенты квазидифференциального выражения l_n и, следовательно, элементы матрицы F удовлетворяют условиям, аналогичным либо I) и II) (§2, теоремы 3, 4), либо I), i) и ii) (§3, теоремы 5–8) в окрестности соответствующей точки. Особо отметим, что эти условия обеспечивают, в частности, выполнение условий а)–d) для соответствующей матрицы F .

Теперь вкратце обсудим случай, когда коэффициенты выражения l_n удовлетворяют условию (3), но старший коэффициент этого выражения (т.е. функция p_m при $n = 2m$ или функция q_m при $n = 2m + 1$) обращается в нуль в некоторых точках внутри множества I . Как мы уже отмечали, и в этом случае можно построить матрицу F и определить квазипроизводные заданной функции. Однако при этом для матрицы F условие b) нарушается. Тем не менее множество бесконечно дифференцируемых финитных функций является всюду плотным линейным многообразием в пространстве $\mathcal{L}_2(I)$ и $l_n y \in \mathcal{L}_2(I)$,

если y – из этого множества. Далее, исходя из этого известным образом определяется минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(I)$, порожденный выражением l_n (см. [3; гл. XIII, § 2]).

В настоящей работе, следуя [3; гл. XIII], будем называть дифференциальное выражение l_n *иррегулярным дифференциальным выражением*, если коэффициенты этого выражения удовлетворяют условию (3) и его старший коэффициент обращается в нуль в некоторых точках множества I .

Дифференциальные операторы, порожденные иррегулярными дифференциальными выражениями, возникают во многих областях современного анализа; таковыми являются, например, обобщенные операторы Лежандра (см. [9; гл. 7]) из теории квазиклассических ортогональных многочленов. Однако вопросы спектрального анализа этих операторов изучены удивительно мало. В частности, лишь сравнительно недавно стали появляться работы, посвященные определению дефектных чисел операторов, порожденных одночленными иррегулярными дифференциальными выражениями с вещественными коэффициентами (см. [10] и работы, на которые там имеются ссылки).

Итак, в работе [10] рассматривается минимальный симметрический дифференциальный оператор $L_0^{(p)}$, порожденный иррегулярным дифференциальным выражением

$$(l_{2m}y)(x) := (x^p a(x) y^{(m)}(x))^{(m)}, \quad x \in (-1, 1),$$

где $p \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$, $a(x)$ – бесконечно дифференцируемая действительная функция и $a(x) \neq 0$ для любого $x \in [-1, 1]$. В ней доказано, что для верхнего дефектного числа n_+ ($= n_-$) оператора $L_0^{(p)}$ справедлива формула $n_+ = 2m + p$, если $p \in \{1, 2, \dots, m\}$. Кроме того, в [10] сформулирована гипотеза о справедливости равенства $n_+ = 4m - p$ в случае $p \in \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\}$. В § 4 настоящей работы, уточняя формулы для решений уравнения $(l_{2m}y)(x) = \lambda y(x)$, $x \in (0, 1]$, приведенные в § 2 для более общего случая, мы находим дефектные числа оператора $L_0^{(p)}$, в частности доказываем справедливость сформулированной выше гипотезы.

Часть результатов (теоремы 4 и 6) настоящей работы опубликованы без доказательства в [11].

§ 1. Преобразование основного уравнения

Этот параграф посвящен преобразованию системы (2) к виду, удобному для дальнейших исследований. Здесь символом I будем обозначать либо полуинтервал $(0, 1]$, либо полуось $[1, +\infty)$.

Сначала рассмотрим случай $n = 2m$.

Известно, что при $m = 1$ квазидифференциальное выражение l_2 порождается матрицей

$$F_2 := \begin{pmatrix} -iq_0 p_1^{-1} & -p_1^{-1} \\ p_0 + q_0^2 p_1^{-1} & -iq_0 p_1^{-1} \end{pmatrix},$$

где p_0, q_0, p_1 – вещественные функции на I , $p_1^{-1}, q_0 p_1^{-1}, p_0 + q_0^2 p_1^{-1}$ из $\mathcal{L}_{1,\text{loc}}(I)$, и имеет вид

$$l_2 = (p_1 y' + iq_0 y)' + p_0 y + iq_0 y'.$$

Пусть выполнено

УСЛОВИЕ А ($n = 2m$). Функции $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_{m-1}$, $m = 2, 3, \dots$, вещественные на I и все функции

$$\begin{aligned}\alpha_m &:= (-1)^{m-1} p_m^{-1}, \\ \alpha_{m-1} &:= (-1)^{m+1} (p_{m-1} + q_{m-1}^2 p_m^{-1}), \quad \beta_{m-1} := -q_{m-1} p_m^{-1}, \\ \alpha_k &:= (-1)^{m+1} p_k, \quad \beta_k := (-1)^{m+1} q_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2,\end{aligned}$$

принадлежат $\mathcal{L}_{1,\text{loc}}(I)$.

Определим матрицу $F_{2m} := F$, положив

$$F_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & i\beta_{m-1} & \alpha_m & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & i\beta_{m-2} & \alpha_{m-1} & i\beta_{m-1} & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & \alpha_{m-2} & i\beta_{m-2} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & i\beta_1 & \alpha_2 & . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ i\beta_0 & \alpha_1 & i\beta_1 & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ \alpha_0 & i\beta_0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, элементы матрицы F_{2m} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}f_{2m-k,k+1} &= \alpha_k, & k &= 0, 1, \dots, m; \\ f_{2m-k,k} &= f_{2m+1-k,k+1} = i\beta_{k-1}, & k &= 1, 2, \dots, m; \\ f_{k,k+1} &= 1, & k &= 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, 2m-1,\end{aligned}$$

и $f_{ij} = 0$ при всех остальных значениях i и j . Следовательно, матрица F_{2m} удовлетворяет условиям а)–д), если выполнено условие А.

Квазидифференциальное выражение l_{2m} , $m \geq 1$, порожденное матрицей F_{2m} , обладает тем свойством, что если $p_k \in C^{(k)}(I)$, $k = 0, 1, \dots, m$, $q_k \in C^{(k+1)}(I)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ (см. (3)), и $p_m(x) \neq 0$ для всех $x \in I$, то оно совпадает с классическим дифференциальным выражением

$$l_{2m}y = \sum_{k=0}^m (p_k y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{k=0}^{m-1} [(q_k y^{(k+1)})^{(k)} + (q_k y^{(k)})^{(k+1)}]$$

(см. [1; добавление А]).

Если же условие (3) выполняется, но $p_m(x) = 0$ при некоторых $x \in I$, то $l_{2m}y$ уже является иррегулярным дифференциальным выражением. Однако – подчеркнем еще раз – и в этом случае выражение $l_{2m}y$ порождается матрицей F_{2m} и определение квазипроизводных для этого выражения посредством матрицы F_{2m} остается в силе.

Пусть выполнено

УСЛОВИЕ В ($n = 2m$). Функции $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_{m-1}$ имеют вид

$$p_k(x) := x^{2k+\nu}(a_k + r_k(x)), \quad q_k(x) := x^{2k+\nu+1}(b_k + s_k(x)), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\ p_m(x) := \frac{x^{2m+\nu}}{1/a_m + r_m(x)}$$

при всех $x \in I$, где $\nu, a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$ – действительные числа, $a_m \neq 0$, а $r_0, r_1, \dots, r_m, s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$ – вещественные функции на I .

Обозначим через $D := (d_i \delta_{ij})_{i,j=1}^{2m}$ диагональную матрицу с элементами

$$d_k(x) := x^{-k+1/2}, \quad d_{k+m}(x) := x^{m+\nu-k+1/2}, \quad k = 1, \dots, m.$$

В системе (2) с $F = F_{2m}$ сделаем замену $\mathbf{y} = D\mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y}$ – новая неизвестная вектор-функция. Тогда система (2) преобразуется к виду

$$\mathbf{Y}' = (D^{-1}F_{2m}D + D^{-1}\Lambda D - D^{-1}D')\mathbf{Y}.$$

Заметим, что

$$D^{-1}D' = x^{-1} \text{diag} \left(\left(-\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{3}{2} \right), \dots, \left(-m + \frac{1}{2} \right), \left(m + \nu - 1 + \frac{1}{2} \right), \right. \\ \left. \left(m + \nu - 2 + \frac{1}{2} \right), \dots, \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right),$$

все элементы $\tilde{\lambda}_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, 2m$, матрицы $\tilde{\Lambda} := D^{-1}\Lambda D$ равны нулю, кроме $\tilde{\lambda}_{2m,1}(x) = x^{-1}(-1)^m \lambda / x^\nu$, а элементы матрицы $\tilde{F} := D^{-1}F_{2m}D$ несложно выписать с помощью формул перемножения матриц, например, элементы $\tilde{f}_{2m-k,k+1}(x)$ имеют вид:

$$\tilde{f}_{2m-k,k+1} = d_{2m-k}^{-1} f_{2m-k,k+1} d_{k+1} = d_{2m-k}^{-1} \alpha_k d_{k+1} = (-1)^{m+1} x^{-2k-\nu-1} p_k, \\ k = 0, 1, \dots, m-2.$$

Таким же образом вычисляя другие элементы матрицы $\tilde{F}$ с учетом условий А и В, находим, что неизвестная вектор-функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет системе уравнений

$$x \frac{d\mathbf{Y}}{dx} = (A + B(x))\mathbf{Y}, \quad (4)$$

где элементы a_{ij} числовой матрицы A и элементы $b_{ij}(x)$ матрицы-функции $B(x)$ определяются следующими равенствами:

$$a_{k,k+1} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, 2m-1; \\ a_{m,m+1} = \frac{(-1)^m}{a_m}, \quad b_{m,m+1}(x) = (-1)^m r_m(x); \\ a_{2m,1} = (-1)^m (\lambda - a_0), \quad b_{2m,1}(x) = (-1)^{m+1} r_0(x), \quad \nu = 0; \\ a_{2m,1} = (-1)^{m+1} a_0, \quad b_{2m,1}(x) = (-1)^m \left(\frac{\lambda}{x^\nu} - r_0(x) \right), \quad \nu \neq 0;$$

$$\begin{aligned}
a_{2m-k,k+1} &= (-1)^{m+1} a_k, & b_{2m-k,k+1}(x) &= (-1)^{m+1} r_k(x), \\
& k = 1, 2, \dots, m-2; \\
a_{m+1,m} &= (-1)^{m+1} \left(a_{m-1} + \frac{b_{m-1}^2}{a_m} \right), \\
b_{m+1,m}(x) &= (-1)^{m+1} \left(r_{m-1}(x) + \left(\frac{1}{a_m} + r_m(x) \right) (b_{m-1} + s_{m-1}(x))^2 - \frac{b_{m-1}^2}{a_m} \right); \\
a_{k,k} &= k - \frac{1}{2}, & a_{k+1+m,k+1+m} &= k + \frac{1}{2} - m - \nu, & k &= 1, 2, \dots, m-1; \\
a_{m,m} &= m - \frac{1}{2} - \frac{ib_{m-1}}{a_m}, & a_{m+1,m+1} &= \frac{1}{2} - m - \nu - \frac{ib_{m-1}}{a_m}; \\
b_{m,m}(x) &= b_{m+1,m+1}(x) = -i \left(\frac{s_{m-1}(x)}{a_m} + b_{m-1} r_m(x) + s_{m-1}(x) r_m(x) \right); \\
a_{2m-k,k} &= a_{2m+1-k,k+1} = (-1)^{m+1} ib_{k-1}, & k &= 1, 2, \dots, m-1; \\
b_{2m-k,k}(x) &= b_{2m+1-k,k+1}(x) = (-1)^{m+1} is_{k-1}(x), & k &= 1, 2, \dots, m-1;
\end{aligned}$$

все неуказанные элементы в обеих матрицах A и $B(x)$ равны нулю.

Пусть теперь $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$. Предположим, что выполнено

УСЛОВИЕ А ($n = 2m + 1$). *Функции $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_m$ вещественные на I , $(-1)^m q_m(x) > 0$ при $x \in I$ и все функции*

$$\begin{aligned}
\alpha_m &:= p_m(2q_m)^{-1}, & \alpha_k &:= (-1)^m p_k, & k &= 0, 1, \dots, m-1, \\
\beta_m &:= [(-1)^m 2q_m]^{-1/2} (> 0), & \beta_{m-1} &:= (-1)^{m+1} q_{m-1} \beta_m, \\
\beta_k &:= (-1)^{m+1} q_k, & k &= 0, 1, \dots, m-2,
\end{aligned}$$

принадлежат $\mathcal{L}_{1,\text{loc}}(I)$.

Определим матрицу $F_{2m+1} := F$, положив

$$F_{2m+1} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 0 & \beta_m & 0 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & \beta_{m-1} & i\alpha_m & \beta_m & . & . & . & . \\
. & . & . & . & i\alpha_{m-1} & \beta_{m-1} & 0 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \beta_1 & i\alpha_2 & . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\
\beta_0 & i\alpha_1 & \beta_1 & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \\
i\alpha_0 & \beta_0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Следовательно, элементы матрицы F_{2m+1} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
f_{2m+1-k,k+1} &= i\alpha_k, & k &= 0, 1, \dots, m, \\
f_{2m+1-k,k} &= f_{2m+2-k,k+1} = \beta_{k-1}, & k &= 1, 2, \dots, m+1, \\
f_{k,k+1} &= 1, & k &= 1, 2, \dots, m-1, m+2, \dots, 2m,
\end{aligned}$$

и $f_{ij} = 0$ при всех остальных значениях i и j .

Выражение $l_{2m+1}y$, $m \geq 1$, представляется обыкновенным дифференциальным выражением

$$l_{2m+1}y = \sum_{k=0}^m (p_k y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{k=0}^m [(q_k y^{(k+1)})^{(k)} + (q_k y^{(k)})^{(k+1)}],$$

если $p_k \in C^{(k)}(I)$, $k = 0, 1, \dots, m$; $q_k \in C^{(k+1)}(I)$, $k = 0, 1, \dots, m$ (см. [1; добавление А]).

В этом случае условие В имеет следующий вид.

УСЛОВИЕ В ($n = 2m + 1$). Функции $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$, $q_0, q_1, \dots, q_{m-1}$ такие же, как в случае $n = 2m$, а p_m, q_m представляются в виде

$$p_m(x) := x^{2m+\nu}(a_m + r_m(x)),$$

$$q_m(x) := \frac{x^{2m+\nu+1}}{1/b_m + s_m(x)}$$

при всех $x \in I$, где a_m и b_m – действительные числа и $(-1)^m b_m > 0$, а r_m и s_m – вещественные функции на I .

Определим диагональные элементы d_k матрицы D в замене $y = DY$ в рассматриваемом случае следующими равенствами:

$$d_k := x^{-k+1/2}, \quad d_{m+1+k} := x^{\nu+m-k+1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad d_{m+1} := x^{\nu/2}.$$

С помощью такой замены система (2) опять преобразуется к системе вида (4) для вектор-функции Y , где ненулевые элементы числовой матрицы A и элементы $b_{ij}(x)$ матрицы-функции $B(x)$ определяются следующими равенствами:

$$a_{k,k+1} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, m+2, \dots, 2m;$$

$$a_{m,m+1} = a_{m+1,m+2} = \left(\frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{b_m} \right)^{1/2};$$

$$b_{m,m+1} = b_{m+1,m+2} = \left[(-1)^m \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_m} + s_m(x) \right) \right]^{1/2} - \left[\frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{b_m} \right]^{1/2};$$

$$a_{2m+1,1} = (-1)^m i(a_0 - \lambda), \quad b_{2m+1,1}(x) = (-1)^m i r_0(x), \quad \nu = 0;$$

$$a_{2m+1,1} = (-1)^m i a_0, \quad b_{2m+1,1}(x) = (-1)^m i \left(r_0(x) - \frac{\lambda}{x^\nu} \right), \quad \nu \neq 0;$$

$$a_{2m+1-k,k+1} = (-1)^m i a_k, \quad b_{2m+1-k,k+1}(x) = (-1)^m i r_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$a_{k,k} = k - \frac{1}{2}, \quad a_{m+1+k,m+1+k} = k - \nu - m - \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$a_{m+1,m+1} = \frac{i a_m}{2b_m} - \frac{\nu}{2}, \quad b_{m+1,m+1}(x) = \frac{i}{2}(a_m + r_m(x)) \left(\frac{1}{b_m} + s_m(x) \right) - \frac{i a_m}{2b_m};$$

$$a_{m+1,m} = a_{m+2,m+1} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \left(\frac{(-1)^m}{b_m} \right)^{1/2} b_{m-1};$$

$$b_{m+1,m}(x) = b_{m+2,m+1}(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \left([b_{m-1} + s_{m-1}(x)] \right.$$

$$\left. \times \left[(-1)^m \left(\frac{1}{b_m} + s_m(x) \right) \right]^{1/2} - \left[\frac{(-1)^m}{b_m} \right]^{1/2} b_{m-1} \right);$$

$$a_{2m+1-k,k} = a_{2m+2-k,k+1} = (-1)^{m+1} b_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m-1,$$

$$b_{2m+1-k,k}(x) = b_{2m+2-k,k+1}(x) = (-1)^{m+1} s_{k-1}(x), \quad k = 1, \dots, m-1.$$

В дальнейшем нам понадобится характеристический многочлен матрицы A . Найдем явный вид этого многочлена (для $n = 2m$ и $n = 2m + 1$).

Пусть

$$\det(A - zE) = \begin{cases} \mathfrak{F}_n(z, \nu), & \text{если } \nu \neq 0; \\ \mathfrak{F}_n(z, 0) - \lambda, & \text{если } \nu = 0. \end{cases}$$

Вычисления показывают, что

$$\mathfrak{F}_2(z, \nu) = \frac{1}{a_1} \left(a_0 + a_1 \left[\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right] + 2ib_0 \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \right),$$

$$\mathfrak{F}_3(z, \nu) = \frac{i}{2b_1} \left(a_0 + a_1 \left[\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right] + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \left(b_0 + b_1 \left[\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right] \right) \right).$$

Далее, несложные, но громоздкие вычисления с использованием метода математической индукции показывают, что при $m = 1, 2, \dots$ полиномы $\mathfrak{F}_n(z, \nu)$ определяются следующими равенствами:

$$\mathfrak{F}_{2m}(z, \nu) = \frac{1}{a_m} \left(a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \left(b_0 + \sum_{k=1}^{m-1} b_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] \right) \right),$$

$$\mathfrak{F}_{2m+1}(z, \nu) = \frac{i}{2b_m} \left(a_m \mathfrak{F}_{2m}(z, \nu) + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) b_m \prod_{j=0}^{m-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] \right).$$

§ 2. Случай аналитических коэффициентов

В этом параграфе сначала рассмотрим случай, когда $I := (0, 1]$. Пусть $\nu \leq 0$, ν – целое число. Предположим, что коэффициенты $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_m$ квазидифференциального выражения l_n , порожденного матрицей F_n , удовлетворяют условию А и, кроме того, выполняется

УСЛОВИЕ С ($I = (0, 1]$). *Функции $r_k(z)$ и $s_k(z)$ из условия В представляются в виде сходящихся при $|z| \leq x_0$ (≤ 1) степенных рядов*

$$r_k(z) := \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(k)} z^j, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \text{если } n = 2m \quad \text{или} \quad n = 2m + 1;$$

$$s_k(z) := \sum_{j=1}^{+\infty} b_j^{(k)} z^j, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad \text{если } n = 2m,$$

$$k = 0, 1, \dots, m, \quad \text{если } n = 2m + 1.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть элементы матрицы F_n удовлетворяют условиям **A** и **C**, и пусть l_n – квазидифференциальное выражение, порожденное матрицей F_n . Тогда максимальное число линейно независимых решений уравнения (1), принадлежащих пространству $\mathcal{L}_2(I)$, равно

- 1) при $\nu < 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_n(z, \nu)$, лежащих в области $\operatorname{Re} z > 0$, и не зависит от λ ;
- 2) при $\nu = 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_n(z, 0) - \lambda$, лежащих в области $\operatorname{Re} z > 0$, и если $n = 2m$, то $n_+ = n_- = m$, если же $n = 2m + 1$, то $n_+ = m$, $n_- = m + 1$.

При этом в случае $\nu < 0$ спектр любого самосопряженного расширения оператора L_0 дискретный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из списков формул, приведенных выше в § 1 для элементов матрицы-функции $B(x)$, и условия **C** как в случае $n = 2m$, так и в случае $n = 2m + 1$ непосредственно следует, что эта матрица-функция представляется сходящимся при $|z| \leq x_0$ (≤ 1) степенным рядом

$$B(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j B_j,$$

где B_j – постоянные матрицы. Следовательно, система дифференциальных уравнений (4) в комплексной области с коэффициентами, удовлетворяющими условиям **A** и **C**, является системой с единственной регулярной особой точкой при $x = 0$. Поэтому, применяя соответствующие результаты для решений систем дифференциальных уравнений такого типа (см. [12; гл. XV, § 11, замечание 2 к теореме 2]), получаем, что фундаментальная матрица решений системы (4) имеет вид

$$\Phi(x) = P(x) \begin{pmatrix} x^{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x^{z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x^{z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m$ – сходящийся при $|x| \leq x_0$ (< 1) степенной ряд, матрица $P_0 = C$, $\det(C) \neq 0$, C – матрица преобразования матрицы A к жордановой форме; если матрица A имеет жорданову форму, то $C = E$. Числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ – характеристические числа матрицы A , т.е. корни уравнения $\mathfrak{F}_n(z, \nu) = 0$, если $\nu < 0$, и $\mathfrak{F}_n(z, 0) - \lambda = 0$, если $\nu = 0$, расположенные в порядке $\operatorname{Re} z_1 \geq \operatorname{Re} z_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} z_n$; а q_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i < j$, – многочлены от $\ln x$ степени не выше $g - 1$, где g – максимальное количество характеристических чисел z_i , отличающихся между собой на целое число.

Далее, используя представление (5) и метод Фробениуса (см., например, [13; гл. IV, § 8], [14; гл. XVI]), можно показать, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений такую, что для каждого решения из этой системы справедливо соотношение

$$y(x) = x^{z-1/2} (\ln x)^s (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +0. \quad (6)$$

Другое доказательство последнего утверждения мы приведем в следующем параграфе (см. доказательство теоремы 5), поэтому здесь подробности опускаем.

Функции вида (6) принадлежат пространству $\mathcal{L}_2(0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{x_0} |x^{2z-1}(\ln x)^{2s}| dx < \infty,$$

а это выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z > 0$.

Далее, для доказательства п. 2) заметим, что для полинома $\mathfrak{F}_n(z, 0) - \lambda$ справедливо равенство

$$\overline{\mathfrak{F}_n(-\bar{z}, 0) - \bar{\lambda}} = \mathfrak{F}_n(z, 0) - \bar{\lambda}.$$

Отсюда для дефектных чисел легко вывести неравенство $n_+ + n_- \leq n$. Учитывая оценки для n_+ и n_- (см. теорему 1), получаем, что если $n = 2m$, то $n_+ = n_- = m$, если же $n = 2m + 1$, то $n_+ = m, n_- = m + 1$.

Таким образом, доказаны пп. 1) и 2).

Как мы уже отмечали во введении, дефектное число n_+ (n_-) оператора L_0 равно максимальному числу линейно независимых решений уравнения (1) при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ ($\operatorname{Im} \lambda < 0$), принадлежащих пространству $\mathcal{L}_2(I)$. Таким образом, в случае $\nu < 0$ (ν – целое число) согласно п. 1) дефектные числа оператора L_0 равны и, следовательно, оператор L_0 имеет самосопряженные расширения. Используя равенства (6) и (5), можно показать, что функция Грина любого самосопряженного расширения оператора L_0 является ядром Гильберта–Шмидта и мероморфной функцией от λ . Из этого следует дискретность спектра любого самосопряженного расширения. Теорема 3 доказана.

Пусть теперь $I := [1, +\infty)$, $\nu \geq 0$, ν – целое число. Предположим, что коэффициенты $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_m$ квазидифференциального выражения l_n , порожденного матрицей F_n , удовлетворяют условию А для этого случая (см. §1), при этом условие С имеет вид:

УСЛОВИЕ С ($I = [1, +\infty)$). Функции $r_k(z)$ и $s_k(z)$ из условия В представляются в виде сходящихся при $|z| \geq x_0$ (≥ 1) степенных рядов

$$r_k(z) := \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(k)} z^{-j}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \text{если } n = 2m \text{ или } n = 2m + 1;$$

$$s_k(z) := \sum_{j=1}^{+\infty} b_j^{(k)} z^{-j}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad \text{если } n = 2m,$$

$$k = 0, 1, \dots, m, \quad \text{если } n = 2m + 1.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть элементы матрицы F_n удовлетворяют условиям А и С, и пусть l_n – квазидифференциальное выражение, порожденное матрицей F_n . Тогда максимальное число линейно независимых решений уравнения (1), принадлежащих пространству $\mathcal{L}_2(I)$, равно

- 1) при $\nu > 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_n(z, \nu)$, лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$, и не зависит от λ ;

2) при $\nu = 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}_n(z, 0) - \lambda$, лежащих в области $\operatorname{Re} z < 0$, и если $n = 2m$, то $n_+ = n_- = m$, если $n = 2m+1$, то $n_+ = m$, $n_- = m+1$ ¹. При этом в случае $\nu > 0$ спектр любого самосопряженного расширения оператора L_0 дискретный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что если выполняются условия А и С, то в данном случае система (4) является системой с регулярной особой точкой в $+\infty$. Далее, с помощью стандартной замены $x = 1/\xi$ доказательство справедливости теоремы 4 сводится к теореме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что теорема 2 является частным случаем теоремы 4. Мы предполагаем, что С. А. Орлов доказывал эту теорему именно способом, изложенным нами выше, однако подробные публикации нам неизвестны.

§ 3. Случай неаналитических коэффициентов

В этом параграфе мы будем опираться на следующую лемму.

ЛЕММА 1 (см. [13; гл. III, задача 35]). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$U' = AU + R(t)U, \quad (7)$$

где матрица A постоянна, жорданова форма матрицы A имеет жордановы клетки J_k , $k \geq 1$, и максимальное число строк для всех клеток J_k , $k \geq 1$, равно $r+1$. Предположим, что

$$\int_1^\infty t^r \|R(t)\| dt < \infty. \quad (8)$$

Пусть z – характеристический корень A , и пусть уравнение $y' = Ay$ имеет решения вида

$$e^{zt} t^k c + O(e^{zt} t^{k-1}),$$

где c – постоянный вектор. Тогда уравнение (7) имеет решение φ такое, что

$$\varphi(t) = e^{zt} t^k (c + o(1)), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Рассмотрим сначала случай $I := [1, +\infty)$, $\nu \geq 0$ (необязательно целое) и преобразуем систему дифференциальных уравнений (4), полагая $x = e^t$. Тогда система (4) преобразуется к виду (7), где $U(t) = \mathbf{Y}(e^t)$, а $R(t) = B(e^t)$.

Пусть z – характеристический корень матрицы A кратности r_0 . Первая координата системы дифференциальных уравнений $U'(t) = AU(t)$ удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами, поэтому эта система имеет решения вида

$$e^{zt} t^k c + O(e^{zt} t^{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots, r_0 - 1,$$

c – постоянный вектор.

Кроме того, в рассматриваемом случае система (7) также построена по одному скалярному дифференциальному уравнению. Легко заметить, что поэтому

¹Эта часть утверждения в формулировке теоремы 2 работы [11] содержит ошибку, исправленную здесь.

каждому характеристическому корню матрицы A будет соответствовать только одна клетка в ее жордановой форме. Следовательно, если максимальная размерность жордановой клетки, как и в лемме 1, равна $r + 1$, то $r + 1$ – это кратность характеристического корня матрицы A наибольшей кратности.

Пусть для матрицы $R(t)$ выполняется условие (7), тогда, применяя лемму 1, находим, что эта система имеет решения вида

$$\varphi(t) = e^{zt} t^k (c + o(1)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, r_0 - 1, \quad r_0 \leq r + 1.$$

Возвращаясь к переменной x и учитывая преобразование $\mathbf{y} = D\mathbf{Y}$, получаем, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из функций вида

$$y(x) = cx^{z-1/2} (\ln x)^k (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, r_0 - 1, \quad r_0 \leq r + 1, \quad (9)$$

где z – характеристический корень матрицы A , c – ненулевое число.

Таким образом, в силу условия (7), если матрица $B(x)$ такова, что

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{(\ln x)^r}{x} \|B(x)\| dx < \infty,$$

где $x_0 = e^{t_0}$, то система дифференциальных уравнений (4) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из функций вида (9).

Легко заметить, что последнее условие в терминах функций $r_k(x)$ и $s_k(x)$ переформулируется следующим образом.

УСЛОВИЕ D ($I = [1, +\infty)$). Если $n = 2m$, то

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} |r_k(x)| \frac{(\ln x)^r}{x} dx < +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m, \\ \int_{x_0}^{\infty} |s_k(x)| \frac{(\ln x)^r}{x} dx < +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \end{aligned}$$

и функция $s_{m-1}(x)$ ограничена при $x \geq x_0$ (≥ 1).

Если $n = 2m + 1$, то функции $r_0, r_1, \dots, r_m, s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$ такие же, как и в случае $n = 2m$, а функция $s_m(x)$ ограничена при $x \geq x_0$ (≥ 1) и

$$\int_{x_0}^{\infty} |s_m(x)| \frac{(\ln x)^r}{x} dx < +\infty.$$

Итак, мы полностью доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\nu \geq 0$ и элементы матрицы F_n удовлетворяют условиям A и D в этом случае. Предположим, что $z_1, z_2, \dots, z_q, z_{q+1}, \dots, z_{q+j}$ – все различные характеристические корни матрицы A , причем $z_1, z_2, \dots, z_q$ – одно-кратные корни, при $1 \leq p \leq j$ кратность корня z_{q+p} равна r_p и $\sum_{p=1}^j r_p + q = n$, $\max_{1 \leq p \leq j} r_p = r + 1$. Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $y_k(x)$ такую, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} y_k(x) &= cx^{z_k-1/2} (1 + o(1)), & k &= 1, 2, \dots, q, \\ y_{k+i}(x) &= cx^{z_{q+p}-1/2} (\ln x)^i (1 + o(1)), & k &= q + r_1 + \dots + r_{p-1}, \\ & & i &= 0, 1, \dots, r_p - 1. \end{aligned}$$

Далее, рассуждая так же, как и в конце доказательства теоремы 3 § 2, получаем результаты о дефектных числах оператора L_0 и характере его спектра, т.е. справедлива

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполняются условия теоремы 5. Тогда справедливы все утверждения теоремы 4.

Пусть теперь $I := (0, 1]$, $\nu \leq 0$ (необязательно целое). Проводя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, и производя в системе (4) замену $x = e^{-t}$ ($x \rightarrow +0$ при $t \rightarrow +\infty$), получаем, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из функций вида

$$y(x) = cx^{z-1/2}(-\ln x)^k(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +0, \quad k = 0, 1, \dots, r_0 - 1, \quad r_0 \leq r + 1,$$

где z – характеристический корень матрицы A , c – ненулевое число.

Условие D на коэффициенты дифференциального уравнения (1) в данном случае имеет следующий вид:

УСЛОВИЕ D ($I = (0, 1]$). Если $n = 2m$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} |r_k(x)| \frac{|\ln x|^r}{x} dx &< +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m, \\ \int_0^{x_0} |s_k(x)| \frac{|\ln x|^r}{x} dx &< +\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

и функция $s_{m-1}(x)$ ограничена при $0 < x \leq x_0$ (≤ 1).

Если $n = 2m + 1$, то функции $r_0, r_1, \dots, r_m, s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$ такие же, как и в случае $n = 2m$, а функция $s_m(x)$ ограничена при $0 < x \leq x_0$ (≤ 1) и

$$\int_0^{x_0} |s_m(x)| \frac{|\ln x|^r}{x} dx < +\infty.$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\nu \leq 0$ и элементы матрицы F_n удовлетворяют условиям A и D в этом случае. Предположим, что $z_1, z_2, \dots, z_q, z_{q+1}, \dots, z_{q+j}$ – все различные характеристические корни матрицы A , причем $z_1, z_2, \dots, z_q$ – однократные корни, при $1 \leq p \leq j$ кратность корня z_{q+p} равна r_p и $\sum_{p=1}^j r_p + q = n$, $\max_{1 \leq p \leq j} r_p = r + 1$. Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $y_k(x)$ такую, что при $x \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} y_k(x) &= cx^{z_k-1/2}(1 + o(1)), & k &= 1, 2, \dots, q, \\ y_{k+i}(x) &= cx^{z_{q+p}-1/2}(-\ln x)^i(1 + o(1)), & k &= q + r_1 + \dots + r_{p-1}, \\ & & i &= 0, 1, \dots, r_p - 1. \end{aligned}$$

Применяя теорему 7, легко доказать, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $l_{2m}[y] = (x^p a(x)y^{(m)})^{(m)}$, где $p \in [1, 2m)$, $a(x)$ – интегрируемая вещественная функция на отрезке $[0, 1]$ и $|a(x)| \geq m > 0$ для всех $x \in [0, 1]$. Тогда

- 1) если p – не целое число и функция $a(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{|a(x) - a|}{x} dx < \infty,$$

где a – некоторое ненулевое число, то уравнение $l_{2m}y = \lambda y$ имеет фундаментальную систему решений $y_k(x)$ такую, что при $x \rightarrow +0$

$$y_k = \begin{cases} x^{k-1}(1 + o(1)), & k = 1, 2, \dots, m; \\ x^{k-p-1}(1 + o(1)), & k = m+1, m+2, \dots, 2m; \end{cases}$$

- 2) если же p – целое число, а функция $a(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{|a(x) - a|}{x} |\ln x| dx < \infty,$$

где a – некоторое ненулевое число, то уравнение $l_{2m}y = \lambda y$ имеет фундаментальную систему решений $y_k(x)$ такую, что при $p \in [1, m]$ и $x \rightarrow +0$

$$y_k = \begin{cases} x^{k-1}(1 + o(1)), & k = 1, 2, \dots, m; \\ x^{k-p-1} \ln x (1 + o(1)), & k = m+1, m+2, \dots, m+p; \\ x^{k-p-1}(1 + o(1)), & k = m+p+1, m+p+2, \dots, 2m, \end{cases}$$

а при $p \in [m+1, 2m-1]$ и $x \rightarrow +0$

$$y_k = \begin{cases} x^{k-1}(1 + o(1)), & k = 1, 2, \dots, m; \\ x^{k-p-1}(1 + o(1)), & k = m+1, m+2, \dots, p; \\ x^{k-p-1} \ln x (1 + o(1)), & k = p+1, p+2, \dots, 2m. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполняются условия теоремы 7. Тогда справедливы все утверждения теоремы 3.

Очевидным следствием теоремы 8 является известный результат:

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть дифференциальное выражение $l_{2m}[y]$ такое же, как и в следствии 1. Тогда дефектное число n_+ оператора L_0 определяется по формуле

$$n_+ = \begin{cases} 2m, & \text{если } p \in \left[1, m + \frac{1}{2}\right); \\ 3m - \left[p + \frac{1}{2}\right], & \text{если } p \in \left[m + \frac{1}{2}, 2m\right). \end{cases}$$

Применяя результаты следствий 1 и 2, можно определить индекс дефекта некоторых дифференциальных операторов с двумя сингулярными концами; в частности, получить новые доказательства теорем о дефектных числах операторов типа Лежандра (см. [9; гл. 7]).

§ 4. Индекс дефекта одночленного иррегулярного дифференциального оператора четного порядка

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное выражение произвольного порядка $2m$, $m = 1, 2, \dots$,

$$l_{2m}[y](x) = (x^p a(x) y^{(m)})^{(m)}(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (10)$$

где $p \in \{1, \dots, 2m - 1\}$, а вещественная достаточное число раз дифференцируемая функция $a(x)$ отлична от нуля при всех $x \in [-1, 1]$.

Пусть $L_0^{(p)}$ – минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением l_{2m} в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(I)$, а $n_+^{(p)}(n_-^{(p)})$ – дефектные числа оператора $L_0^{(p)}$ в верхней (нижней) открытой комплексной полуплоскости. Очевидно, что $n_+^{(p)} = n_-^{(p)}$, обозначим символом $n^{(p)}$ их общее значение.

Данный параграф посвящен определению числа $n^{(p)}$, а именно, здесь мы доказываем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9. *При $p = 1, 2, \dots, 2m - 1$ справедлива формула*

$$n^{(p)} = \begin{cases} 2m + p, & \text{если } p = 1, 2, \dots, m; \\ 4m - p, & \text{если } p = m + 1, m + 2, \dots, 2m - 1. \end{cases}$$

Перечислим основные понятия и факты, используемые в доказательстве теоремы 9.

Согласно общему определению (см. введение) квазипроизводные заданной функции $f(x) \in C^\infty(-1, 1)$ для выражения l_{2m} определяются по формуле

$$f^{[l]}(x) = \begin{cases} f^{(l)}(x), & \text{если } l = 0, 1, \dots, m - 1; \\ (x^p a(x) f^{(m)})^{(l-m)}(x), & \text{если } l = m, m + 1, \dots, 2m - 1. \end{cases}$$

Несложно доказать, что квазипроизводные любой функции $f(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ обладают следующими свойствами:

- в случае $p \in \{1, 2, \dots, m\}$
 - 1) $f^{[l]}(0) = 0$ и $f^{[l]}(x) = O(x^{p+m-l})$ при $x \rightarrow 0$, если $l = m, m + 1, \dots, p + m - 1$;
 - 2) для произвольных $2m - p$ комплексных чисел b_l при $l = 0, 1, \dots, m - 1$ и $l = m + p, m + p + 1, \dots, 2m - 1$ можно найти функцию $f(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ такую, что $f^{[l]}(0) = b_l$ для указанных значений индекса l ;
- в случае $p \in \{m + 1, m + 2, \dots, 2m - 1\}$
 - 1') $f^{[l]}(0) = 0$ и $f^{[l]}(x) = O(x^{p+m-l})$ при $x \rightarrow 0$, если $l = m, m + 1, \dots, 2m - 1$;
 - 2') для произвольных m комплексных чисел b_l при $l = 0, 1, \dots, m - 1$ можно найти функцию $f(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ такую, что $f^{[l]}(0) = b_l$ для указанных значений индекса l .

Рассмотрим два вспомогательных дифференциальных выражения

$$\begin{aligned} l_{2m,-}[f](x) &= (-1)^m (x^p a(x) f^{(m)})^{(m)}(x), & x \in (-1, 0), \\ l_{2m,+}[f](x) &= (-1)^m (x^p a(x) f^{(m)})^{(m)}(x), & x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Зафиксируем комплексное число λ , $\text{Im } \lambda \neq 0$, и рассмотрим дифференциальные уравнения

$$l_{2m,+}[y](x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \quad (11)$$

$$l_{2m,-}[y](x) = \lambda y(x), \quad x \in (-1, 0). \quad (12)$$

Обозначим символом N_p дефектное подпространство симметрического оператора $L_0^{(p)}$, отвечающее числу $\bar{\lambda}$, а $N_{p,-}$ и $N_{p,+}$ – дефектные подпространства вспомогательных симметрических минимальных операторов $L_{0,-}^{(p)}$ и $L_{0,+}^{(p)}$, порожденных дифференциальными выражениями $l_{2m,-}[f](x)$ в $\mathcal{L}_2(-1, 0)$ и $l_{2m,+}[f](x)$ в $\mathcal{L}_2(0, 1)$ соответственно, отвечающие указанному числу $\bar{\lambda}$. Дефектные числа операторов, порожденных выражениями $l_{2m,-}$ и $l_{2m,+}$, $\dim N_{p,-}$ и $\dim N_{p,+}$ – определяются максимальным числом линейно независимых решений уравнений (12) и (11), принадлежащих пространству $\mathcal{L}_2(-1, 0)$ и $\mathcal{L}_2(0, 1)$ соответственно, и формулы для их вычисления приведены в следствии 2.

Для $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ определим билинейную форму $[f, g](x)$ для любых двух функций f и g , имеющих абсолютно непрерывные производные всех порядков до $(2m-1)$ -го порядка включительно в некоторой окрестности точки x , формулой

$$[f, g](x) = \sum_{j=1}^{2m} (-1)^{j+1} f^{[2m-j]}(x) \bar{g}^{[j-1]}(x).$$

Отметим, что эта билинейная форма возникает в известном тождестве Лагранжа для дифференциального выражения l_{2m} .

Символами $[f, g](-0)$ и $[f, g](+0)$ обозначим

$$[f, g](-0) = \lim_{x \rightarrow -0} [f, g](x), \quad [f, g](+0) = \lim_{x \rightarrow +0} [f, g](x),$$

если указанные пределы существуют.

Справедлива следующая

ЛЕММА 2. Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $[-1, 1]$. Тогда

- 1) при $p \in \{1, 2, \dots, t\}$ уравнение (11) имеет фундаментальную систему решений y_k , $k = 1, 2, \dots, 2t$, все элементы которой принадлежат пространству $\mathcal{L}_2(0, 1)$ и для которых значения $[f, y_k](+0)$ вычисляются по формуле

$$[f, y_k](+0) = \begin{cases} \alpha_k f^{[2m-k]}(0), & \text{если } k = 1, 2, \dots, t-p; \\ 0, & \text{если } k = t-p+1, t-p+2, \dots, t; \\ \alpha_k f^{[2m-k]}(0), & \text{если } k = t+1, t+2, \dots, 2t; \end{cases}$$

- 2) при $p \in \{t+1, t+2, \dots, 2t-1\}$ уравнение (11) имеет фундаментальную систему решений y_k , $k = 1, 2, \dots, 2t$, $3t-p$ элементов $y_1, y_2, \dots, y_t, y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{2t}$ которой принадлежат пространству $\mathcal{L}_2(0, 1)$ и для которых значения $[f, y_k](+0)$ вычисляются по формулам

$$[f, y_k](+0) = \begin{cases} \beta_k f^{[2m-k]}(0), & \text{если } k = p+1, p+2, \dots, 2t; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь α_k , $k \in \{1, 2, \dots, 2m\} \setminus \{m - p + 1, m - p + 2, \dots, m\}$, и β_k , $k \in \{p + 1, p + 2, \dots, 2m\}$, – ненулевые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительные сведения о структуре базиса пространства $N_{p,+}$ содержатся в следствии 1. Для вычисления указанных в лемме 2 пределов $[f, y_k](+0)$ требуется уточнение асимптотических формул, приведенных в этом следствии. Если дополнительно предположить, что функция $a(x)$ представляется сходящимся степенным рядом в окрестности нуля, то в формулах (5) содержится полная информация о фундаментальной системе решений y_k , $k = 1, 2, \dots, 2m$, в том числе и о базисе пространства $N_{p,+}$. Анализ формул (5) и свойства 1), 2), 1'), 2') квазипроизводных функций f , перечисленные выше, показывают, что в пределах $[f, y(\cdot, \lambda)](+0)$ параметр λ отсутствует. Если же $a(x)$ является только достаточное число раз дифференцируемой функцией, то справедливость последнего утверждения следует из метода последовательных приближений, используемого при доказательстве леммы 1 и этих же свойств квазипроизводных. Из вышесказанного вытекает, что указанные пределы равны пределам $[f, y(\cdot, 0)](+0)$. Теперь доказательство леммы 2 можно завершить, если для вычисления искомых пределов воспользоваться формулой

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + \int_x^1 \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{c_m + c_{m+1}t + \dots + c_{2m-1}t^{m-1}}{t^p a(t)} dt$$

общего решения уравнения (11) при $\lambda = 0$.

Отметим, что заменой $x \mapsto -x$ уравнение (12) сводится к уравнению вида (11), поэтому в пространстве $N_{p,-}$ существует базис $\tilde{y}_k(x)$, элементы которого обладают свойствами, перечисленными в лемме 2.

Символами $y_+(x)$ и $y_-(x)$ обозначим сужение функции $y(x)$, заданной при $x \in [-1, 1]$ на $[0, 1]$ и $[-1, 0]$ соответственно.

Справедлива следующая

ЛЕММА 3 (см. [10]). *При любом натуральном p дефектное подпространство N_p оператора $L_0^{(p)}$ совпадает с линейным многообразием, состоящим из функций $y(x) \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$, обладающих тремя свойствами:*

- 1) $y_-(x) \in N_{p,-}$, $y_+(x) \in N_{p,+}$;
- 2) для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ существуют односторонние пределы $[f, y](-0)$ и $[f, y](+0)$;
- 3) в точке $x = 0$ для любой $f(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ выполняется условие сопряжения $[f, y](-0) = [f, y](+0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Схема доказательства этой теоремы одинакова как для случая $p = 1, 2, \dots, m$, так и для случая $p = m + 1, m + 2, \dots, 2m - 1$ и повторяет рассуждения, приведенные в работе [10], для первого случая. Итак, пусть $p = m + 1, m + 2, \dots, 2m - 1$. Множество функций из $\mathcal{L}_2(-1, 1)$, обладающих свойством 1) леммы 3, есть совокупность функций $y(x)$, заданных

на интервале $(-1, 1)$, для которых справедливы представления

$$\begin{aligned} y_-(x) &= \sum_{k=1}^m d_k \tilde{y}_k(x) + \sum_{k=p+1}^{2m} d_k \tilde{y}_k(x), & x \in (-1, 0), \\ y_+(x) &= \sum_{k=1}^m c_k y_k(x) + \sum_{k=p+1}^{2m} c_k y_k(x), & x \in (0, 1), \end{aligned} \quad (13)$$

с произвольными комплексными коэффициентами $c_k, d_k, k = 1, 2, \dots, m, p+1, p+2, \dots, 2m$, где $\tilde{y}_k(x)$ и $y_k(x)$ – базисы пространств $N_{p,-}$ и $N_{p,+}$, обладающие свойствами, перечисленными в лемме 2.

В силу леммы 2, формулы (13) и линейности формы $[f, g](x)$ получаем, что для каждой функции $y(x)$ и любой функции $f(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} [f, y_-](-0) &= \sum_{k=p+1}^{2m} d_k \tilde{\beta}_k f^{[2m-k]}(0), \\ [f, y_+](+0) &= \sum_{k=p+1}^{2m} c_k \beta_k f^{[2m-k]}(0), \end{aligned}$$

где β_k и $\tilde{\beta}_k$ – ненулевые числа.

Выделим из множества функций $y(x)$ совокупность таких, которые дополнительно обладают свойством 3) леммы 3. Выполнение этого условия для функции $y(x)$ с произвольной функцией $f(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ в силу свойства 2') для квазипроизводных равносильно системе $2m - p$ ограничений

$$\beta_k c_k = \tilde{\beta}_k d_k, \quad k = p+1, p+2, \dots, 2m, \quad (14)$$

на $6m - 2p$ коэффициентов $c_k, d_k, k = 1, 2, \dots, m, p+1, p+2, \dots, 2m$, присутствующих в представлениях (13).

Таким образом, по лемме 3 дефектное подпространство N_p оператора $L_0^{(p)}$ есть линейное многообразие функций $y(x)$, допускающих представление (13) с коэффициентами $c_k, d_k, k = 1, 2, \dots, m, p+1, p+2, \dots, 2m$, которые связаны соотношениями (14), а в остальном произвольны. Размерность этого подпространства равна количеству тех из перечисленных $6m - 2p$ коэффициентов, которые при этих условиях могут принимать произвольные значения.

В соотношении (14)

- отсутствуют коэффициенты c_k, d_k при $k = 1, 2, \dots, m$, следовательно, эти $2m$ коэффициентов произвольны;
- среди коэффициентов c_k, d_k при $k = p+1, p+2, \dots, 2m$ произвольны только $2m - p$ коэффициентов.

Следовательно, общее число рассматриваемых коэффициентов, принимающих произвольные значения, равно $2m + 2m - p = 4m - p$, а значит, в данном случае дефектное число $n^{(p)}$ оператора $L_0^{(p)}$ определяется по формуле $n^{(p)} = 4m - p$.

Таким образом, теорема 9 доказана.

Список литературы

- [1] W. N. Everitt, L. Marcus, *Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators*, Math. Surveys Monogr., **61**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [2] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Физматлит, М., 1969.
- [3] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1966.
- [4] W. N. Everitt, A. Zettl, "Generalized symmetric ordinary differential expression. I: The general theory", *Nieuw Arch. Wisk.* (3), **27**:3 (1979), 363–397.
- [5] С. А. Орлов, "Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов", *Докл. АН СССР*, **92**:3 (1953), 483–486.
- [6] Ф. А. Неймарк, "Об индексе дефекта дифференциального оператора", *УМН*, **17**:4 (1962), 157–163.
- [7] R. B. Paris, A. D. Wood, "On the $\mathcal{L}_2(I)$ nature of solutions of n -th order symmetric differential operator and McLeod's conjecture", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **90**:3–4 (1981), 209–236.
- [8] R. B. Paris, A. D. Wood, *Asymptotics of high order differential equations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **129**, Longman, Harlow; Wiley, New York, 1986.
- [9] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [10] Ю. В. Орочко, "Индексы дефекта одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка, вырождающегося внутри интервала", *Матем. сб.*, **196**:5 (2005), 53–82.
- [11] К. А. Мирзоев, "О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов", *Докл. РАН*, **380**:5 (2001), 591–595.
- [12] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Гостехиздат, М., 1953.
- [13] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958.
- [14] Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ОНТИ, Харьков, 1939.

И. Н. Долгих (I. N. Dolgikh)

Поморский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: dolgih.irina@pomorsu.ru

Поступила в редакцию
01.09.2005

К. А. Мирзоев (K. A. Mirzoev)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: akm10@yandex.ru