Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Асадуллин, Ф. Х. Мукминов, О классах единственности для нестационарной системы уравнений Стокса в неограниченных областях, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 3, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 05:57:04

УДК 517.9

Н. М. Асадуллин, Ф. Х. Мукминов

О классах единственности для нестационарной системы уравнений Стокса в неограниченных областях

Рассматривается задача для нестационарной системы уравнений Стокса в неограниченных областях с условием прилипания на границе. Для областей с некомпактными границами выделены классы единственности этой задачи, зависящие от геометрии области. Они формулируются в виде ограничений на “рост” скоростей при $|x| \rightarrow \infty$.

Библиография: 9 названий.

Для внешней области и широкого семейства областей с некомпактной границей рассматривается первая смешанная задача для нестационарной системы Стокса. Выделены классы единственности для этой задачи, содержащие, в частности, ограниченные функции.

1. В цилиндре $D^T = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область, рассматривается следующая задача

$$\mathbf{u}_t = \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (t, x) \in D^T, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(0, x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{f} \in L_{2,\text{loc}}(\overline{D^T})$, а начальная функция φ , принадлежащая пространству $L_{2,\text{loc}}(\overline{\Omega})$, удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \nabla g \, dx = 0 \quad (3)$$

при любой гладкой функции g , финитной в $\overline{\Omega}$. (Как обычно, запись $f \in L_{2,\text{loc}}(Q)$ означает принадлежность $f \in L_2(K)$ для любого компакта $K \subset Q$; Q — произвольное измеримое множество.) Отметим, что, вообще говоря, постановка задачи (1)–(3) неполная. В работе [3] показано, что если, например, область Ω — однополостный гиперболоид, следует также задать поток через его поперечные сечения

$$\int_S \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} \, dS = \tilde{f}(t), \quad \tilde{f}(t) \in L_2(0, T). \quad (4)$$

Для простоты мы ограничиваемся рассмотрением областей, имеющих, как и однополостный гиперболоид, ровно два выхода на бесконечность.

Второй автор пользовался финансовой поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-0273).

Для некоторых вопросов теории линейных дифференциальных уравнений важную роль играют классы единственности, содержащие, в частности, ограниченные функции. Примером такого класса является класс Тэклинда [8] для уравнения теплопроводности и соответствующее обобщение его на случай второй (первой) смешанной задачи для параболического уравнения (см. [2], [7]). Для системы (1), вообще говоря, класс единственности, содержащий ограниченные функции, должен определяться условиями как на скорости, так и на давление. В самом деле, пара $\mathbf{u}(t, x) = -f(t)\mathbf{c}$, $p(t, x) = f'(t)\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$, $f(0) = 0$, является решением задачи Коши для однородной системы уравнений (1). Поэтому интересующий нас класс единственности должен содержать ограничение на рост давления, чтобы исключить приведенное решение. Легко построить аналогичный пример и для внешней задачи, взяв принадлежащее $\mathbf{W}_2^{0,1}(D^T)$ решение следующей задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \Delta \mathbf{v} - \nabla q, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (t, x) \in D^T, \\ \mathbf{v}|_{x \in \partial \Omega} &= -f(t)\mathbf{c}, \quad \mathbf{v}(0, x) = 0, \end{aligned}$$

и положив $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Другой вывод из приведенного примера состоит в том, что если функция f не дифференцируема, то градиент давления будет являться обобщенной функцией, что несколько затрудняет формулировку накладываемых на него требований. В частности, в работе [6] приводится класс единственности для внешней задачи, выделяемый некоторым условием на осредненное давление. Здесь мы приведем этот результат в несколько иной формулировке для области в пространстве произвольной размерности $n \geq 2$.

Всюду в работе рассматриваются области с липшицевыми границами. А именно, предполагается, что для каждой точки границы области найдется такая ее окрестность, что пересечение границы с окрестностью в местной системе координат представляется графиком липшицевой функции. При этом соответствующий кусок границы находится по одну сторону от графика.

Пусть B_r — шар радиуса r с центром в начале координат, $\Omega(r) = \Omega \cap B_r$, $D^T(r) = (0, T) \times \Omega(r)$. Через $\mathring{\mathbf{W}}_2^{0,1}(D^T(r))$ будем обозначать пополнение множества $C_0^\infty(D^T)$ гладких финитных в D^T вектор-функций по норме

$$\|\mathbf{u}\|_{0,1}^2 = \int_{D^T(r)} (\mathbf{u}^2 + |\nabla_x \mathbf{u}|^2) dx dt.$$

Будем использовать также следующие обозначения.

$$\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad |\nabla \mathbf{u}|^2 = \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}.$$

Пусть Ω — область, внешняя по отношению к некоторой ограниченной области в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Обобщенным решением внешней задачи (1)–(3) назовем соленоидальную ($\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$) вектор-функцию $\mathbf{u}$, принадлежащую $\mathring{\mathbf{W}}_2^{0,1}(D^T(r))$ при всех достаточно больших r , и удовлетворяющую тождеству

$$\int_{D^T} (-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_t + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dx dt = \int_{\Omega} \varphi \cdot \mathbf{v}(0, x) dx \quad (5)$$

для всех соленоидальных вектор-функций $\mathbf{v} \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$, $D_a^b \equiv (a, b) \times \Omega$. В этом определении не участвует давление, но оно может быть восстановлено следующим образом. Подставляя в (5) пробные функции вида $\int_t^T \mathbf{v}(\tau, x) d\tau$, для первообразной от скоростей $\mathbf{U}(t, x) = \int_0^t \mathbf{u}(\tau, x) d\tau$ легко устанавливаем тождество

$$\int_{D^T} \nabla \mathbf{U} : \nabla \mathbf{v} dx dt = \int_{D^T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx dt$$

при тех же пробных функциях $\mathbf{v}$, что и выше;

$$\mathbf{F}(t, x) \equiv \int_0^t \mathbf{f}(\tau, x) d\tau + \varphi(x) - \mathbf{u}(t, x).$$

Следовательно, по лемме 2 настоящей работы при почти всех $t \in (0, T)$ вектор $\mathbf{U}(t, x)$ вместе с некоторым давлением $P(t, x)$ является решением почти всюду стационарной системы Стокса

$$-\Delta \mathbf{U} = -\nabla P + \mathbf{F}(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad x \in \Omega.$$

При этом $\nabla P \in \mathbf{L}_{2, \text{loc}}(\Omega)$. Очевидно, давление P определяется с точностью до произвольной функции переменной t , т.е. фактически имеется целый класс давлений с равными градиентами. Любую такую функцию P будем называть первообразной от давления, что соответствует действительности, так как если пара $\mathbf{u}, p$ является классическим решением задачи (1)–(3), то давления $P(t, x)$ и $\int_0^t p(\tau, x) d\tau$ отличаются лишь на функцию времени и имеют равные пространственные градиенты. Таким образом, первообразная от давления, в полном соответствии с приведенным выше примером неединственности, имеет регулярный градиент. Этот факт послужил нам мотивировкой для рассмотрения в случае области с некомпактной границей вместо задачи (1)–(4) ее проинтегрированного варианта.

ТЕОРЕМА 1. Пусть область Ω в $\mathbb{R}^n$ имеет компактную липшицеву границу. Пусть $\mathbf{u}$ – обобщенное решение однородной задачи (1), (2) с $\mathbf{f} \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, и P – первообразная от давления. Если существует непрерывная монотонно неубывающая функция h с расходящимся интегралом $\int_0^\infty dr/h(r)$ такая, что для всех $r \geq \operatorname{diam} \partial\Omega$

$$\int_0^T \int_{\Omega(r)} \mathbf{u}^2(t, x) dx \leq \exp(rh(r)),$$

и первообразная от давления удовлетворяет при некотором $z \geq \operatorname{diam} \partial\Omega$ условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-n} \|\nabla P(t)\|_{B_r \setminus B_z}^2 = 0 \quad \text{при н.в.} \quad t \in (0, T),$$

то $\mathbf{u} \equiv 0$.

Доказательство теоремы 1 проводится так же, как и для соответствующего утверждения в работе [6] ($n = 3$) и поэтому опускается. Надо только “трехмерную” лемму 1 этой работы заменить ее n -мерным аналогом – леммой 2 настоящей работы.

Для задачи (1)–(4) в области с некомпактной границей известен класс единственности (см. [5]), формулируемый в терминах только скоростей. С нашей точки зрения этот класс единственности, содержащий, в частности, ограниченные функции, несколько неестественен, так как там накладывается требование $T = \infty$ и формулировка дается в терминах преобразования Фурье–Лапласа от скоростей.

Целью настоящей работы является выделение класса единственности для задачи (1)–(4) в области с некомпактной границей.

Пусть, для простоты изложения, область Ω , как и в работе [5], имеет два выхода на бесконечность, расположенные вдоль оси Ox_1 . Предполагается, что множества $\Omega_a^b = \{x \in \Omega : a < x_1 < b\}$ ограничены при всех $a < b$. Далее значения $a = -\infty$ и $b = \infty$ в обозначении Ω_a^b будут опускаться. Пусть $l(r)$, $r > 0$, – абсолютно непрерывная монотонно неубывающая функция такая, что $l'(r) \leq 1 - 1/\theta$ при $r > a$, где a и θ – некоторые числа, большие 1. Предположим еще, что при $r \geq a$ открытые множества $\omega(r) = \Omega_{r-l(r)}^r$ связны и удовлетворяют следующему условию. Известно [1], [9], что для каждой ограниченной области Q уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = g, \quad x \in Q, \quad g \in L_2(Q), \quad \int_Q g \, dx = 0, \quad (6)$$

имеет решение $\mathbf{v} \in \mathring{W}_2^1(Q)$, удовлетворяющее оценке

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_Q \leq d(Q) \|g\|_Q.$$

Условие заключается в том, что постоянную d в этом неравенстве можно выбрать единой для каждой области $\omega(r)$, $r \geq a$,

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{\omega(r)} \leq d \|g\|_{\omega(r)}.$$

Ради краткости, такое семейство областей $\omega(r)$ будем называть div -ограниченным.

Как следует из результатов работы [1] (см. пункт 6), это условие выполнено, в частности, если области $\omega(r)$, $r \geq a$, равномерно звездны относительно некоторых шаров $B(r)$, т.е. отношения $\operatorname{diam} \omega(r) / \operatorname{diam} B(r)$ ограничены постоянной. Если область Ω такова, что для нее

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < x_1^\alpha, x_1 > 1\}$$

при некотором $\alpha \in (0, 1)$, то, очевидно, области $\omega(r)$, $r \geq a$, равномерно звездны при достаточно большом a , если выбрать $l(r) = r^\alpha$. Поэтому такая область удовлетворяет нашему условию.

Нам понадобится еще один пример div -ограниченного семейства областей, вытекающий из результатов той же работы [1]. А именно, для каждой ограниченной области Q с липшицевой границей найдется возрастающая последовательность подобластей с липшицевыми границами $\bar{Q}_i \subset Q_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, такая, что $\bigcup_{i=1}^\infty Q^i = Q$, и выполнены неравенства

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{Q_i} \leq d_1 \|g\|_{Q_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Через $\overset{\circ}{V}_2^1(D_a^b(r))$, $D_a^b(r) = (a, b) \times \Omega_{-r}^r$, обозначим пополнение множества $C_0^\infty(D_{a-1}^{b+1})$ гладких финитных в D_{a-1}^{b+1} векторов по норме

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{v},r}^2 = \int_{D_a^b(r)} \mathbf{u}_t^2 dx dt + \max_{t \in [a,b]} \int_{\Omega_{-r}^r} |\nabla \mathbf{u}(t, x)|^2 dx.$$

Через $\overset{\circ}{SV}(D^T)$ обозначим пополнение множества соленоидальных векторов из линейала $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$ по норме $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{v}} \equiv \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{v},\infty}$.

Сначала мы определим решение задачи (1)–(4) в предположении $\tilde{f} = 0$. Общий случай будет рассмотрен в пункте 4.

Пусть $\mathbf{F}(t, x) = \int_0^t \mathbf{f}(\tau, x) d\tau + \varphi(x)$. Обобщенным решением задачи (1)–(4)

с $\tilde{f} = 0$ назовем вектор $\mathbf{u}(t, x)$, если его первообразная $\mathbf{U}(t, x) = \int_0^t \mathbf{u}(\tau, x) d\tau$

соленоидальна, при каждом $r > 0$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}_2^1(D_0^T(r))$, имеет нулевой поток через сечения $S_r = \{x \in \Omega : x_1 = r\}$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{D^T} (\mathbf{U}_t \cdot \boldsymbol{\eta} + \nabla \mathbf{U} : \nabla \boldsymbol{\eta}) dx dt = \int_{D^T} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dx dt \quad (8)$$

при любой соленоидальной вектор-функции $\boldsymbol{\eta} \in C_0^\infty(D^T)$. Отметим, что классическое решение задачи (1)–(4), принадлежащее соответствующему пространству, будет, очевидно, являться и обобщенным решением этой задачи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть область Ω удовлетворяет описанным выше условиям и $\mathbf{u}(t, x)$ – обобщенное решение задачи (1)–(4) с однородными данными $\mathbf{f} \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\tilde{f} \equiv 0$. Положим

$$h(b, r) = \int_0^T \int_{\Omega_b^r} \mathbf{u}^2 dx dt + \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_b^r} |\nabla \mathbf{U}|^2(t, x) dx. \quad (9)$$

Существует зависящее только от d и θ число $\beta > 0$ такое, что если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(0, r_k) \exp\left(-\int_a^{r_k} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) = 0 \quad (10)$$

для некоторой последовательности $r_k \rightarrow \infty$, то величина $h(0, \infty)$ конечна. Если же условие вида (10) выполнено вдоль каждого рукава (со своей функцией $l(r)$), то $\mathbf{u} \equiv 0$.

Таким образом, теорема 2 выделяет широкий класс единственности, зависящий от геометрии области с некомпактной границей. Отметим, что аналогичный класс единственности в случае первой смешанной задачи для параболического уравнения был выделен в работе [7].

Интересным является вопрос, насколько ограничение “роста скоростей” вида (10) близко к максимально допустимому, при превышении которого появляются примеры неединственности. Нетрудно ответить на него в случае первой смешанной

задачи для параболического уравнения в областях с некомпактными границами. А именно, имеется широкое семейство областей, для которых класс единственности теклиндовского типа (задаваемый неравенством из теоремы 1) из работы [2] поглощает тот, который выделен в статье [7] условием вида (10). С другой стороны, если область Ω достаточно быстро сужается на бесконечности, то класс единственности из работы [7] становится шире, чем предложенный в статье [2]. Наша гипотеза состоит в том, что для задачи (1)–(4) ситуация иная: по-видимому, в широком классе областей класс единственности, выделяемый условием вида (10), близок к предельному. Однако нам не удалось пока подтвердить этот факт примерами неединственности.

В том случае, когда $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_2(D^T)$, методом Галёркина (см., например, [4]) нетрудно доказать существование единственного соленоидального вектора $\mathbf{V} \in \mathring{\mathbf{S}}\mathbf{V}(D^T)$, $\mathbf{V}(0, x) = 0$, удовлетворяющего (8). Для него справедливо неравенство

$$\|\mathbf{V}\|_{\mathbf{v}} \leq 2\|\mathbf{F}\|. \quad (11)$$

Здесь и далее через $\|f\|$ будем обозначать норму функции f из пространства $L_2(Q)$, где Q – “естественная область определения” этой функции. В пункте 4 приводятся более широкие условия на данные, при которых доказано существование решения задачи (1)–(4), принадлежащего выделенному классу единственности.

2. В этом пункте для обобщенного решения задачи (1)–(4) будет выведено неравенство энергетического типа.

Пусть непрерывная функция $\mu(r)$ равна нулю при $r > 1$, единице при $r < 0$ и линейна в оставшемся интервале. Функция $\xi(x, r) = \mu(1 + (x_1 - r)/l(r))$ непостоянна лишь в слое $\pi(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, r - l(r) < x_1 < r\}$ и

$$\nabla \xi = \left(\frac{-1}{l(r)}, 0, \dots, 0 \right), \quad x \in \pi(r), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{l(r)} + \frac{(x_1 - r)}{l^2(r)} l'(r) \geq \frac{1}{\theta l(r)}, \quad x \in \pi(r). \quad (13)$$

Пусть соленоидальный вектор $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}(0, x) = 0$, – удовлетворяет тождеству (8), и при всех $t \in (0, T)$, $r > 0$ конечна величина

$$H(t, r) = \int_0^t \int_{\Omega} \xi \mathbf{V}_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \xi |\nabla \mathbf{V}(t, x)|^2 dx.$$

Пусть величина $\tilde{h}(R) = \sup_{t \in [0, T]} H(t, R)$ конечна при некотором $R > a$. Предположим также, что поток вектора $\mathbf{V}$ через сечения S_r равен нулю.

ЛЕММА 1 (основная). Пусть функция $\mathbf{F}(t, x)$, принадлежащая $\mathbf{L}_{2, \text{loc}}(\overline{D}^T)$, равна нулю при $x_1 \leq R$. Найдется число $\beta > 1$, зависящее только от d и θ , такое, что при всех $t \in [0, T]$, $r \in [a, R]$ справедливо неравенство

$$H(t, r) \leq C \tilde{h}(R) \exp \left(- \int_r^R \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)} \right). \quad (14)$$

Постоянная C зависит только от T и $l(a)$.

Основным этапом доказательства является установление неравенства

$$H(t, r) \leq \beta(l(r))H_r(t, r) + \frac{1}{l(r)} \int_0^t H_r(\tau, r) d\tau, \quad (15)$$

справедливого для всех $t \in [0, T]$ и $r \in [a, R]$. При этом понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\Omega)$, и соленоидальный вектор $\mathbf{u}(x) \in \mathring{\mathbf{W}}_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}) dx = 0$$

при любом соленоидальном векторе $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Тогда $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_{2,\text{loc}}^2(\Omega)$ и найдется давление $p \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ такое, что почти всюду в Ω справедлива система уравнений

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (16)$$

Доказательство леммы 2 при $n = 3$, по-существу, имеется в [4]; см. также лемму 1 из [6]. Доказательство, приведенное в последней работе, нетрудно сделать пригодным при всех $n \geq 2$. Для этого вместо симметрического оператора rot следует использовать пару формально сопряженных операторов A и B . Оператор A отображает множество $\mathbf{M}(\Omega)$ гладких функций со значениями в пространстве косимметрических матриц порядка n в множество $\mathbf{W}(\Omega)$ гладких вектор-функций по формуле

$$(A\mathbf{m})_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} m_{jk}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \mathbf{m}(x) \in \mathbf{M}(\Omega).$$

Другой оператор $B: \mathbf{W}(\Omega) \rightarrow \mathbf{M}(\Omega)$ определяется формулами

$$(B\mathbf{w})_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_j} w_k - \frac{\partial}{\partial x_k} w_j, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

В трехмерном случае пространство косимметрических матриц отождествляется с $\mathbb{R}^3$ по правилу $u_1 = m_{23}$, $u_2 = -m_{13}$, $u_3 = m_{12}$, и тогда $A\mathbf{m} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$, $B\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$.

Легко видеть, что выполнены обычные свойства “дивергенция ротора равна нулю” и “ротор градиента равен нулю”

$$\operatorname{div}(A\mathbf{m}) = 0, \quad B(\nabla f) = 0, \quad \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega), \quad f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Более того, выполнено известное равенство

$$AB\mathbf{w} = -\Delta \mathbf{w} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{w}.$$

После названных изменений доказательство “трехмерной” леммы 1 из работы [6] становится пригодным для леммы 2.

Перейдем к установлению неравенства (15).

Зафиксируем произвольное число $t_0 \in (2\varepsilon, T - 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta(t)$ — гладкая неотрицательная четная функция с носителем $\text{supp } \delta \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ такая, что $\int \delta(t) dt = 1$. Подставив в (8) пробную функцию $\boldsymbol{\eta}(t, x) = \delta(t_0 - t)\mathbf{v}(x)$, получим тождество

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}_t(t_0) \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{U}(t_0) : \nabla \mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}(t_0) \cdot \mathbf{v} dx,$$

в котором использованы обозначения $\mathbf{U} = \mathbf{V} * \delta$, $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{F} * \delta$; $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ — произвольный соленоидальный вектор. Следовательно, вектор $\mathbf{U}(t_0)$ является обобщенным решением стационарной системы Стокса с правой частью $\mathbf{f} = \boldsymbol{\Psi}(t_0) - \mathbf{U}_t(t_0)$. По лемме 2 он принадлежит $\mathbf{W}_{2,\text{loc}}^2(\Omega)$ и вместе с некоторым давлением $Q \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ удовлетворяет почти всюду в Ω системе уравнений

$$\mathbf{U}_t(t_0) - \Delta \mathbf{U}(t_0) = \boldsymbol{\Psi}(t_0) - \nabla Q, \quad \text{div } \mathbf{U}(t_0) = 0.$$

Из последней вытекает справедливость тождества

$$\int_{\Omega} (\mathbf{U}_t(t_0) \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{U}(t_0) : \nabla \mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Psi}(t_0) \cdot \mathbf{v} + Q \text{div } \mathbf{v}) dx \quad (17)$$

при любом векторе $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Поскольку давление Q из уравнений Стокса определяется с точностью до произвольной постоянной, мы будем считать, что при некотором фиксированном $r > 0$ выполнено равенство $\int_{\omega(r)} Q(x) dx = 0$.

Более точно, пусть ω_i — такие подобласти области $\omega(r)$, сходящиеся к $\omega(r)$ при $i \rightarrow \infty$, что для них существует единая постоянная d_1 в неравенствах вида (7), и $c_i = |\omega_i|^{-1} \int_{\omega_i} Q dx$. Пусть $\mathbf{v}^i \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\omega_{i+1})$ — решения уравнения

$$\text{div } \mathbf{v}^i = (Q - c_i)\chi(x; \omega_i)$$

(χ — характеристическая функция), подчиняющиеся оценке

$$\|\nabla \mathbf{v}^i\|_{\omega_{i+1}} \leq d_1 \|Q - c_i\|_{\omega_i}. \quad (18)$$

Подставив в (17) $\mathbf{v} = \mathbf{v}^i$ будем иметь оценку

$$\|Q - c_i\|_{\omega_i}^2 \leq (\|\boldsymbol{\Psi}(t_0)\|_{\omega(r)} + \|\mathbf{U}_t(t_0)\|_{\omega(r)}) \|\mathbf{v}^i\|_{\omega_{i+1}} + \|\nabla \mathbf{U}(t_0)\|_{\omega(r)} \|\nabla \mathbf{v}^i\|_{\omega_{i+1}}.$$

Воспользовавшись неравенствами Фридрихса и (18), получим

$$\|Q - c_i\|_{\omega_i}^2 \leq C_1(1 + l(r))d_1(\|\boldsymbol{\Psi}(t_0)\|_{\omega(r)} + \|\mathbf{U}_t(t_0)\|_{\omega(r)} + \|\nabla \mathbf{U}(t_0)\|_{\omega(r)})\|Q - c_i\|_{\omega_i}.$$

Таким образом, можно считать, что ограниченная в $L_2(\omega(r))$ последовательность $(Q - c_i)\chi(x, \omega_i)$ имеет слабый предел, который мы и обозначаем через Q . Так как $Q \in L_2(\omega(r))$, и величина $\tilde{h}(R)$ конечна, то тождество (17) справедливо также и для функции $\mathbf{v} = \xi(x)\mathbf{U}_t(t_0)$. Учитывая тот факт, что $\mathbf{F}(t, x) = 0$ при $x_1 < R$, будем иметь после подстановки этой пробной функции в (17)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\xi |\mathbf{U}_t(t_0)|^2 + \xi \nabla \mathbf{U}(t_0) : \nabla \mathbf{U}_t(t_0)) dx \\ &= \int_{\omega(r)} (-\mathbf{U}_t(t_0) \cdot \nabla \mathbf{U}(t_0) \cdot \nabla \xi + Q \mathbf{U}_t(t_0) \cdot \nabla \xi) dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь использовано обозначение

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \xi = \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}.$$

Оценим правую часть в (19), используя соотношение (12):

$$\left| \int_{\omega(r)} \mathbf{U}_t(t_0) \cdot \nabla \mathbf{U}(t_0) \cdot \nabla \xi dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\omega(r)} \left(|\mathbf{U}_t(t_0)|^2 + \frac{|\nabla \mathbf{U}(t_0)|^2}{l^2(r)} \right) dx.$$

Для оценки другого интеграла рассмотрим решение уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial U_1(t_0, x)}{\partial t}, \quad x \in \omega(r), \quad (20)$$

принадлежащее $\overset{\circ}{W}_2^1(\omega(r))$ и удовлетворяющее неравенству

$$\|\nabla \mathbf{w}\| \leq d \|U_{1,t}(t_0)\|_{\omega(r)}.$$

Условие разрешимости уравнения (20) выполнено, так как вектор $\mathbf{V}$ имеет нулевой поток через сечения S_r , что влечет за собой равенство нулю и потока вектора $\mathbf{U}_t(t_0)$:

$$\int_{S_r} U_{1,t}(t_0, x) dS = \int_{S_r} \mathbf{U}_t(t_0) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \text{для п.в. } r.$$

По неравенству Фридрикса

$$\|\mathbf{w}\|_{\omega(r)} \leq bl(r) \|\nabla \mathbf{w}\|_{\omega(r)} \leq bdl(r) \|\mathbf{U}_t(t_0)\|_{\omega(r)},$$

b — абсолютная постоянная. Пользуясь тождеством (17), можем записать

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega(r)} Q \mathbf{U}_t(t_0) \cdot \nabla \xi dx \right| &= \frac{1}{l(r)} \left| \int_{\omega(r)} Q \operatorname{div} \mathbf{w} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{l(r)} \int_{\omega(r)} (\mathbf{U}_t(t_0) \cdot \mathbf{w} + \nabla \mathbf{U}(t_0) : \nabla \mathbf{w}) dx \right| \\ &\leq bd \|\mathbf{U}_t(t_0)\|_{\omega(r)}^2 + \frac{d \|\nabla \mathbf{U}(t_0)\|_{\omega(r)} \|\mathbf{U}_t(t_0)\|_{\omega(r)}}{l(r)} \\ &\leq \left(bd + \frac{d}{2} \right) \|\mathbf{U}_t(t_0)\|_{\omega(r)}^2 + \frac{d \|\nabla \mathbf{U}(t_0)\|_{\omega(r)}^2}{2l^2(r)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi(|\mathbf{U}_t(t_0)|^2 + \nabla \mathbf{U}(t_0) : \nabla \mathbf{U}_t(t_0)) dx \\ \leq (1 + d + bd) \left(\|\mathbf{U}_t(t_0)\|_{\omega(r)}^2 + \frac{\|\nabla \mathbf{U}(t_0)\|_{\omega(r)}^2}{2l^2(r)} \right). \end{aligned}$$

Выберем числа t, s из интервала $(2\varepsilon, T - 2\varepsilon)$ и проинтегрируем последнее по $t_0 \in (s, t)$. Получим

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\Omega} \xi|\mathbf{U}_t|^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \xi|\nabla \mathbf{U}(t)|^2 dx \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \xi|\nabla \mathbf{U}(s)|^2 dx + (1 + d + bd) \left(\int_s^t \int_{\omega(r)} \left(\mathbf{U}_t^2 + \frac{|\nabla \mathbf{U}|^2}{2l^2(r)} \right) dx d\tau \right). \end{aligned}$$

Переходя в последнем к пределу по δ -образной последовательности $\delta_k(t)$, $k \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\Omega} \xi|\mathbf{V}_t|^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \xi|\nabla \mathbf{V}(t)|^2 dx \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \xi|\nabla \mathbf{V}(s)|^2 dx + (1 + d + bd) \left(\int_s^t \int_{\omega(r)} \left(\mathbf{V}_t^2 + \frac{|\nabla \mathbf{V}|^2}{2l^2(r)} \right) dx d\tau \right). \end{aligned}$$

Наконец, предельный переход $s \rightarrow 0$ дает неравенство

$$H(t, r) \leq \tilde{\beta} \int_0^t \int_{\omega(r)} \left(\mathbf{V}_t^2 + \frac{|\nabla \mathbf{V}|^2}{2l^2(r)} \right) dx d\tau, \quad (21)$$

где $\tilde{\beta}$ зависит только от d . Заметим, что ввиду (13)

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\omega(r)} \mathbf{V}_t^2 dx d\tau \leq \theta \frac{\partial H(t, r)}{\partial r}, \\ \int_0^t \int_{\omega(r)} |\nabla \mathbf{V}|^2 dx d\tau \leq 2\theta l(r) \int_0^t \frac{\partial H(\tau, r)}{\partial r} d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому из (21) следует (15).

Сделаем в (15) замену переменной $r \rightarrow s$, где функция $s(r)$ является решением задачи Коши: $s' = 1/\beta l(r)$, $s(a) = 0$. Для функции $G(t, s) = H(t, r(s))$, с учетом монотонного роста функции $l(r)$, будем иметь неравенство

$$G(t, s) \leq G_s(t, s) + \int_0^t G_s(\tau, s) d\tau / l^2(a).$$

Интегрирование по s и отбрасывание отрицательных слагаемых в правой части дает соотношение

$$\int_0^s G(t, \rho) d\rho \leq G(t, s) + \int_0^t G(\tau, s) d\tau / l^2(a).$$

После $2n$ -кратного интегрирования приходим к неравенству

$$\int_0^s \frac{(s-\rho)^{2n-1}}{(2n-1)!} G(t, \rho) d\rho \leq (1 + \mathbf{I})^{2n} G,$$

где через $\mathbf{I}$ обозначен оператор

$$\mathbf{I}G = \int_0^t G(\tau, s) ds / l^2(a).$$

Поскольку $G(t, s) = H(t, r) \leq \tilde{h}(R)$ при $t \in [0, T]$, $r \in [a, R]$, то

$$(1 + \mathbf{I})^{2n} G \leq \tilde{h}(R) C_{2n}^n (1 + \mathbf{I}(1) + \mathbf{I}^2(1) + \dots) = \tilde{h}(R) C_{2n}^n \exp\left(\frac{T}{l^2(a)}\right).$$

С другой стороны, ввиду неубывания функции $G(t, s)$ по переменной s

$$\int_0^{s_1} \frac{(s_1 - \rho)^{2n-1}}{(2n-1)!} G(t, \rho) d\rho \geq G(t, s) \int_s^{s_1} \frac{(s_1 - \rho)^{2n-1}}{(2n-1)!} d\rho = \frac{(s_1 - s)^{2n}}{2n!} G(t, s).$$

Следовательно,

$$G(t, s) \leq c_2(l(a), T) \tilde{h}(r) \frac{2n!}{(s_1 - s)^{2n}} C_{2n}^n.$$

Применив формулу Стирлинга, получим

$$G(t, s) \leq c_3 \tilde{h}(R) \left(\frac{4n}{e(s_1 - s)}\right)^{2n}.$$

Положим $n = \left\lceil \frac{s_1 - s}{4} \right\rceil \geq \frac{s_1 - s}{4} - 1$. Будем иметь

$$G(t, s) \leq c_4 \tilde{h}(R) \exp\left(-\frac{s_1 - s}{2}\right).$$

При $s_1 = s(R)$, перейдя к переменной r , получим неравенство (14). Лемма 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Применим лемму 1 к вектору $\mathbf{V} = \mathbf{U}$, предполагая сначала, что $\tilde{h}(r) < \infty$ при некотором $r > 0$. Пользуясь (10), перейдем в (14) к пределу по последовательности $R = r_k$, $k \rightarrow \infty$. Получим $H(t, r) = 0$. Ввиду произвольности $r > a$, отсюда следует, что $\mathbf{U} \equiv \mathbf{V} = 0$, а также $\mathbf{u} = 0$. Отметим, что в приведенных рассуждениях вместо (10) было использовано, вообще говоря, более слабое условие

$$\lim_{r_k \rightarrow \infty} \tilde{h}(r_k) \exp\left(-\int_a^{r_k} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) = 0. \quad (10')$$

Сведем общий случай к рассмотренному, взяв срезку $\zeta \mathbf{U}$ с некоторой функцией $\zeta(x_1)$ и ликвидировав возникшую в уравнениях неоднородность вычитанием подходящей функции.

Вектор $\mathbf{U}$, по определению обобщенного решения задачи (1)–(4), удовлетворяет однородному тождеству (8), $\mathbf{F} = 0$. Переходя, при необходимости, к первообразной, можно считать, что функции $\mathbf{U}_t(t)$, $\nabla \mathbf{U}(t)$ непрерывны по t в норме $\mathbf{L}_2(K)$ для любого компакта $K \subset \bar{\Omega}$. Тогда, аналогично тому как это сделано в пункте 2, устанавливаем, что вектор $\mathbf{U}$ вместе с некоторым давлением Q является решением почти всюду системы уравнений $\mathbf{U}_t = \Delta \mathbf{U} - \nabla Q$. При этом $\Delta \mathbf{U}(t), \nabla Q(t) \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\Omega)$, и $Q(t) \in \mathbf{L}_{2,\text{loc}}(\bar{\Omega})$.

Пусть $\zeta(x_1)$ – гладкая срезающая функция, равная нулю при $x_1 < -b$, единице при $x_1 > 1 - b$; b – достаточно большое положительное число. Положим $\tilde{\mathbf{V}} = \zeta \mathbf{U} - \mathbf{w}$, $\tilde{Q} = \zeta Q$. Вектор $\mathbf{w}(t, x)$ подбирается так, чтобы вектор $\tilde{\mathbf{V}}$ был соленоидальным:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \mathbf{U} \cdot \nabla \zeta, \quad x \in \omega = \{x \in \Omega : -b < x_1 < 1 - b\}. \quad (22)$$

Условие разрешимости $\int_{\omega} \mathbf{U} \cdot \nabla \zeta \, dx = 0$ выполнено, так как вектор $\mathbf{U}$ имеет нулевой поток через сечения S_r . Поскольку ω – область с липшицевой границей и $\mathbf{U} \cdot \nabla \zeta \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\omega)$, то (см. [1]) существует решение уравнения (22), принадлежащее $\mathring{\mathbf{W}}_2^2(\Omega)$ при каждом $t \in [0, T]$. Так как оно определяется линейным оператором $\mathbf{w} = \mathbf{R}(\mathbf{U} \cdot \nabla \zeta)$ (см. [1]) и функция $\mathbf{U}_t(t)$ непрерывна по t в $\mathbf{L}_2(\omega)$, то $\mathbf{w}_t \in \mathbf{L}_2(\omega)$. Далее считаем вектор $\mathbf{w}$ продолженным нулем вне ω .

Установим уравнения, которым удовлетворяют новые скорости и давление

$$\tilde{\mathbf{V}}_t - \Delta \tilde{\mathbf{V}} + \nabla \tilde{Q} = -2\nabla \zeta \cdot \nabla \mathbf{U} - \mathbf{U} \Delta \zeta + Q \nabla \zeta + \Delta \mathbf{w} - \mathbf{w}_t. \quad (23)$$

Правую часть в (23) обозначим через $\mathbf{F}$. Она принадлежит $\mathbf{L}_2(D^T)$. Поэтому, согласно пункту 2, найдется соленоидальный вектор $\mathbf{W} \in \mathring{\mathbf{S}}\mathbf{V}(D^T)$, $\mathbf{W}(0, x) = 0$, удовлетворяющий тождеству (8). Легко проследить, что вектор $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{W}$ соленоидален, удовлетворяет тождеству (8) с $\mathbf{F} = 0$ и для него конечны величины $\tilde{h}(r)$ при каждом $r > 0$. Более того, останется выполненным условие (9'). По предыдущему устанавливаем, что $\mathbf{Z} = 0$, т.е. $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}$. Таким образом, для вектора $\mathbf{U}$ конечна величина $h(0, \infty)$, что доказывает первое утверждение теоремы.

Аналогично, из условия вида (10) вдоль другого рукава, получаем конечность величины $h(-\infty, 0)$. Тогда для вектора $\mathbf{U}$ конечны величины $\tilde{h}(r)$ при каждом $r > 0$, что, как было установлено выше, приводит к равенству $\mathbf{u} = 0$. Теорема 2 доказана.

4. В этом пункте приводятся условия существования решения задачи (1)–(4), принадлежащего выделяемому теоремой 2 классу единственности.

Рассмотрим функцию $\mathbf{w} \in \mathring{\mathbf{W}}_{2,\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям

$$\int_{S_r} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS = 1, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad (24)$$

и тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = 0 \quad (25)$$

для любой соленоидальной вектор-функции $\boldsymbol{\eta} \in C_0^\infty(\Omega)$. Об условиях существования такой функции, удовлетворяющей дополнительно некоторым интегральным оценкам, будет сказано ниже, в пункте 5.

Очевидно, что при условиях, наложенных на данные задачи (1)–(4) и вектор $\boldsymbol{w}$, следующий вектор

$$\boldsymbol{F}(t, x) = \int_0^t \boldsymbol{f}(\tau, x) d\tau + \boldsymbol{\varphi}(x) - \tilde{f}(t)\boldsymbol{w}(x)$$

принадлежит $L_{2,\text{loc}}(\overline{D}^T)$. Обобщенным решением задачи (1)–(4) назовем такой вектор $\boldsymbol{u}(t, x)$, что его первообразная $\boldsymbol{U}(t, x) = \int_0^t \boldsymbol{u}(\tau, x) d\tau$ имеет вид $\boldsymbol{U}(t, x) = \boldsymbol{V}(t, x) + \left(\int_0^t \tilde{f}(\tau) d\tau \right) \boldsymbol{w}(x)$, где соленоидальный вектор $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}(0, x) = 0$, при каждом $r > 0$ принадлежит пространству $\mathring{\boldsymbol{V}}_2^1(D_0^T(r))$, имеет нулевой поток через сечения S_r и удовлетворяет интегральному тождеству (8). Такое определение корректно, так как не зависит от выбора функции $\boldsymbol{w}$.

В следующем утверждении $\beta = (1 + d + bd)\theta$ – постоянная из леммы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть область Ω удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 2. Пусть для функции $\boldsymbol{F}(t, x)$ конечны интегралы

$$\int_0^T \int_{\Omega^a} \boldsymbol{F}^2 dx dt$$

и

$$\int_0^T \int_{\Omega_a} \exp\left(-\int_a^{x_1} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) \boldsymbol{F}^2 dx dt. \quad (26)$$

Тогда существует единственный соленоидальный вектор $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}(0, x) = 0$, принадлежащий пространствам $\mathring{\boldsymbol{V}}_2^1(D^T(r))$, $r > 0$, для которого конечны интегралы $\tilde{h}(r)$, $r > 0$, справедливо тождество (8) и выполнено условие (10') с некоторой возрастающей последовательностью $r_k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r_1 = a$, а остальные члены последовательности выберем так, чтобы

$$r_{k+1} = l(r_k) + r_k. \quad (27)$$

Пусть $\boldsymbol{F}^1(t, x) = \chi(x_1; -\infty, a)\boldsymbol{F}$, χ – характеристическая функция интервала $(-\infty, a)$, и $\boldsymbol{F}^k = \chi(x_1; r_{k-1}, r_k)\boldsymbol{F}$, $k = 2, 3, \dots$. Так как $\boldsymbol{F}^k \in L_2(D^T)$, то как отмечалось во введении, существуют соленоидальные векторы $\boldsymbol{V}^k$, $\boldsymbol{V}^k(0, x) = 0$, удовлетворяющие тождеству (8) с $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^k$, принадлежащие пространству $\mathring{S}\boldsymbol{V}(D^T)$ и подчиняющиеся оценкам

$$\|\boldsymbol{V}^k\|_{\boldsymbol{v}} \leq 2\|\boldsymbol{F}^k\|.$$

Докажем, что сумма $\sum_{k=1}^\infty \boldsymbol{V}^k$ сходится в каждом из пространств $\mathring{\boldsymbol{V}}_2^1(D^T(r))$, $r > 0$, и определяет вектор, удовлетворяющий описанным в теореме 3 требованиям.

По функциям $\mathbf{V}^k$ определим, как в пункте 2, функции $H_k(t, r)$ и $\tilde{h}_k(r)$. Для каждого $k = 3, 4, \dots$ функции $\mathbf{F}^k$ равны нулю при $x \leq r_{k-1}$, следовательно, векторы $\mathbf{V}^k$ удовлетворяют условиям основной леммы. Справедливы неравенства вида (14)

$$H_k(t, r) \leq c \tilde{h}_k(R) \exp\left(-\int_r^R \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right), \quad a < r < R < r_{k-1}.$$

Очевидно, $\tilde{h}_k(R) \leq 4\|\mathbf{F}^k\|^2$, $H_k(t, r) \leq 4\|\mathbf{F}^k\|^2$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^{\infty} H_{k+1}(t, r_i) &\leq \sum_{k=i}^{\infty} 4c\|\mathbf{F}^{k+1}\|^2 \exp\left(-\int_{r_i}^{r_k} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) \\ &= 4c \exp\left(\int_a^{r_i} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) \sum_{k=i}^{\infty} \|\mathbf{F}^{k+1}\|^2 \exp\left(-\int_a^{r_k} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right). \end{aligned}$$

По построению последовательности r_k имеем

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{d\rho}{l(\rho)} \leq \frac{r_{k+1} - r_k}{l(r_k)} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^{\infty} H_{k+1}(t, r_i) &\leq c_1(l(a), T, \beta) \exp\left(\int_a^{r_i} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) \sum_{k=i}^{\infty} \|\mathbf{F}^{k+1}\|^2 \exp\left(-\int_a^{r_{k+1}} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) \\ &\leq c_1 \exp\left(\int_a^{r_i} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) \int_0^T \int_{\Omega_{r_i}} \mathbf{F}^2 \exp\left(-\int_a^{x_1} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right) dx dt. \end{aligned}$$

Это вместе с условием конечности интеграла (26) влечет соотношение

$$\sum_{k=i}^{\infty} H_{k+1}(t, r_i) = \varepsilon_i \exp\left(\int_a^{r_i} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right), \quad (28)$$

где ε_i — стремящаяся к нулю числовая последовательность.

Далее,

$$\sum_{k=1}^i H_k(t, r_i) \leq \sum_{k=1}^i 4\|\mathbf{F}^k\|^2 = 4 \int_0^T \int_{\Omega_{r_i}} \mathbf{F}^2 dx dt.$$

Отсюда, как показано ниже, вытекает соотношение

$$\sum_{k=1}^i H_k(t, r_i) = \delta_i \exp\left(\int_a^{r_i} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right), \quad \delta_i \rightarrow 0. \quad (29)$$

ЛЕММА 3. Пусть $\lambda(r)$ – монотонно стремящаяся к бесконечности при $r \rightarrow \infty$ функция, равная 1 при $r \in (-\infty, a]$, и $p(r) \in L_1(-\infty, \infty)$ – неотрицательная функция.

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda^{-1}(r) \int_{-\infty}^r \lambda(\rho) p(\rho) d\rho = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\lambda^{-1}(r) \int_{-\infty}^r \lambda(\rho) p(\rho) d\rho \leq \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(r)} \int_{-\infty}^{\tau} p(\rho) d\rho + \int_{\tau}^r p(\rho) d\rho.$$

Для завершения доказательства леммы 3 достаточно выбрать стремящуюся к бесконечности функцию $\tau(r)$ такую, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\tau(r))}{\lambda(r)} = 0.$$

Чтобы получить (29), мы полагаем

$$\lambda(r) = \exp\left(\int_a^r \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right), \quad r > a, \quad p(r) = \int_0^T \int_{S_r} \mathbf{F}^2(t, (r, x')) dx' dt,$$

и применяем лемму 3. Из соотношений (28), (29) следует, что функция $\mathbf{V} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{V}^k$ принадлежит пространствам $\mathring{\mathbf{V}}_2^1(\mathbf{D}^T(r))$, $r > 0$, удовлетворяет тождеству (8) и для нее справедливы неравенства

$$H(t, r_i) \leq (\varepsilon_i + \delta_i) \exp\left(\int_a^{r_i} \frac{d\rho}{2\beta l(\rho)}\right), \quad i = 1, 2, \dots,$$

обеспечивающие принадлежность функции $\mathbf{V}$ классу единственности (10'). Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть область Ω удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 2 по правому рукаву, и аналогичным условиям с функцией l_- по левому рукаву. Пусть функции $\mathbf{f}$, φ , $\mathbf{w}$ удовлетворяют условию конечности интегралов вида (26) вдоль каждого рукава области Ω , и, кроме того, $\tilde{f}(t) \in L_2(0, T)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4), принадлежащее классу единственности, выделяемому условием вида (10') вдоль каждого рукава; в последнем $\tilde{h}(r)$ вычисляется по функции $\mathbf{U}$.

5. В этом пункте решается вопрос о существовании функции $\mathbf{w}$, удовлетворяющей условиям (24), тождеству (25), такой, что для нее конечны интегралы вида (26). Ради краткости будем использовать термин “задача (24), (25)”, хотя, вообще говоря, существует много функций, удовлетворяющих условиям (24), (25).

ТЕОРЕМА 4. Пусть область Ω удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 2 по правому рукаву, и аналогичным условиям с функцией l_- по левому рукаву. Пусть существует вектор-функция $\mathbf{f} \in \mathring{\mathbf{W}}_{2,\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ с единичным потоком через сечения S_r , удовлетворяющая условию конечности интегралов

$$\int_{\Omega_a} |\nabla \mathbf{f}|^2 \exp\left(-\int_a^{x_1} \frac{d\rho}{bl(\rho)}\right) dx + \int_{\Omega_{-a}} |\nabla \mathbf{f}|^2 \exp\left(-\int_{x_1}^{-a} \frac{d\rho}{bl_{-}(\rho)}\right) dx < \infty \quad (30)$$

с некоторым числом $b > 2\beta$ (β — из леммы 1). Тогда найдется решение задачи (24), (25), удовлетворяющее условию вида (30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим сначала соленоидальный вектор $\mathbf{v}(x)$, удовлетворяющий тем же условиям, что и $\mathbf{f}(x)$.

Положим $r_1 = a$; остальные r_k , $r = 2, 3, \dots$, находятся из условий $r_{k+1} - l(r_{k+1}) = r_k$. Аналогично строится последовательность ρ_k : $\rho_1 = a$, $\rho_{k+1} - l_{-}(\rho_{k+1}) = \rho_k$, $k = 2, 3, \dots$. Функцию $\mathbf{v}^0 \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega_{-a}^a)$ выберем из решений уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^0 = \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad x \in \Omega_{-a}^a.$$

Условие разрешимости этого уравнения выполнено ввиду постоянства потока вектора $\mathbf{f}$ через сечения S_r :

$$\int_{\Omega_{-a}^a} \operatorname{div} \mathbf{f} dx = \int_{S_a} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dx - \int_{S_{-a}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dx = 1 - 1 = 0.$$

Векторы $\mathbf{v}^k \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\omega(r_{k+1}))$, $k = 1, 2, \dots$, являются решениями уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^k = \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad x \in \omega(r_{k+1}).$$

Векторы $\mathbf{v}^{-k}$, $k = -1, -2, \dots$, удовлетворяют аналогичным уравнениям в областях $\omega_{-k-1} = \Omega_{-\rho_{k+1}}^{-\rho_k}$. Каждый раз выбираются решения, удовлетворяющие неравенствам вида (7), так что справедливы оценки:

$$\|\nabla \mathbf{v}^i\|_{\omega_i} \leq d \|\operatorname{div} \mathbf{f}\|_{\omega_i}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где использованы обозначения $\omega_0 = \Omega_{-a}^a$, $\omega_k = \omega(r_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что вектор $\mathbf{v} = \mathbf{f} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}^i$, где функции $\mathbf{v}^i$ считаются продолженными нулем за пределы своих областей определения, соленоидален, принадлежит пространству $\mathring{\mathbf{W}}_{2,\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условию вида (30).

Решение задачи (24), (25) будем искать в виде $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, где вектор $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{W}}_{2,\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ имеет нулевой поток через сечения S_r

$$\int_{S_a} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

и удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{v}) : \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = 0 \quad (31)$$

при любом соленоидальном векторе $\boldsymbol{\eta} \in C_0^\infty(\Omega)$.

Обозначим через $\mathring{\mathbf{H}}(\Omega)$ пополнение множества гладких соленоидальных финитных в Ω функций по норме $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx$.

Чтобы построить решение уравнения (31), рассмотрим матричные функции $\mathbf{f}^i = \chi(\omega_i; r_{i-1}, r_i) \nabla \mathbf{v}$, где числа r_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определяются следующим образом: $-r_0 = r_1 = a$. Остальные вычисляются из индукционного соотношения (27) при положительных i и равенства $r_{i-1} = -l_-(-r_i) + r_i$ при отрицательных i . Векторы $\mathbf{u}^i \in \mathring{\mathbf{H}}(\Omega)$ найдем из уравнений

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^i + \mathbf{f}^i) : \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = 0.$$

Они подчиняются оценкам

$$\|\nabla \mathbf{u}^i\| \leq \|\mathbf{f}^i\|.$$

Введем обозначение $H(r) = \int_{\Omega} \xi |\nabla \mathbf{u}^k|^2 \, dx$ при некотором фиксированном $k > 0$; здесь $\xi(x, r)$ — функция из пункта 2. Очевидно, $H(r) \leq \|\mathbf{f}^k\|^2$ при всех $r > 0$.

ЛЕММА 4. *Существует зависящая только от чисел d и θ постоянная $\mu \in [0, \beta]$ такая, что при всех $r \in [a, r_k]$ справедливо неравенство*

$$H(r) \leq C(l(a)) \exp\left(-\int_r^{r_k} \frac{d\rho}{2\mu l(\rho)}\right) \|\mathbf{f}^k\|^2. \quad (32)$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в основной лемме, и поэтому опускается. Приведем лишь промежуточное неравенство, аналогичное (15):

$$H(r) \leq \mu H_r(r) l(r).$$

Далее, как и в доказательстве теоремы 3, при помощи неравенства (32) и условия (30), записанного для функции $\mathbf{v}$, доказывается, что сумма $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^i$ сходится в пространстве $\mathring{\mathbf{W}}_{2,\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ к некоторой функции, удовлетворяющей неравенству вида (30). Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4 утверждает существование решения задачи (24), (25) с конечным интегралом

$$\int_{\Omega_a} |\nabla \mathbf{w}|^2 \exp\left(-\int_a^{x_1} \frac{d\rho}{bl(\rho)}\right) dx,$$

который имеет вид, отличный от (26). Однако, для широкого класса областей выполнено соотношение

$$\sup_{r \geq a} \nu^{-1}(r) \exp\left(-\int_a^{x_1} \frac{d\rho}{2bl(\rho)}\right) < \infty, \quad (33)$$

в котором $\nu(r)$ обозначает модуль первого собственного значения оператора Лапласа в сечении S_r с условием Дирихле на границе. Например, для областей Ω , у которых

$$\Omega_a = \{|x'| < x_1^\alpha, x_1 > a > 0\}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

очевидно, что $\nu(r) = c(\alpha)r^{-2\alpha}$, и мы выбираем $l(r) = r^\alpha$, так что (33) тривиально.

Пользуясь (33), устанавливаем конечность интеграла

$$\int_{\Omega_a} \nu^{-1}(x_1) |\nabla w|^2 \exp\left(-\int_a^{x_1} \frac{d\rho}{2bl(\rho)}\right) dx.$$

Последнее, ввиду неравенства Фридрихса $\nu(r) \|f\|_{S_r}^2 \leq \|\nabla f\|_{S_r}^2$, обеспечивает справедливость (26).

6. Для полноты изложения докажем здесь утверждение о div-ограниченности приведенных во введении примеров семейств областей.

Отметим прежде всего, что так как отношение $\|\nabla u\|/\|\operatorname{div} u\|$ не меняется при преобразовании $x \rightarrow rx$, то семейство подобных областей div-ограничено.

В работе [1] предложен оператор

$$u(x) = R_r f = r^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \int_1^\infty h((y+t(x-y))/r) t^{n-1} dt ry,$$

где h – произвольная гладкая неотрицательная функция с носителем в шаре B_1 такая, что $\int h dx = 1$. Там доказано, что если носитель функции $f \in L_2(Q)$ лежит в области Q , звездной относительно шара B_R , и $\int_Q f dx = 0$, то $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$, $\operatorname{supp} u \subset Q$, $\operatorname{div} u = f$ и $\sup\{\|\nabla u\|/\|f\| : f \in L_2(Q)\} = d(Q, r) < \infty$. Пусть $R = \sup\{|x| : x \in Q\}$. Очевидно, $d(Q, r) \leq d(B_R, r) \equiv g(R, r)$. Легко видеть, что если $\tilde{f}(x) = f(rx)$, то

$$\frac{\|R_r f\|}{\|f\|} = \frac{\|R_1 \tilde{f}\|}{\|\tilde{f}\|}.$$

Отсюда следует однородность функции $g(R, r) = g(R/r, 1)$. Так как $g(R, 1) = \sup\{\|\nabla R_1 f\|/\|f\|, f \in L_2(B_R)\}$ – неубывающая функция, то тем самым доказана div-ограниченность семейства равномерно звездных областей.

Покажем теперь, как для области Q с липшицевой границей построить div-ограниченное семейство вложенных подобластей, исчерпывающих область Q .

Пусть Q_0 – подобласть области Q , имеющая гладкую границу, лежащую в ε -окрестности границы ∂Q , $\varepsilon > 0$. Так как Q – область с липшицевой границей, то

разность $Q \setminus Q_0$ при достаточно малом ε можно покрыть конечным числом “параллелепипедов” $Q_i, Q_i \cap Q_0 \neq \emptyset, i = 1, \dots, m$, имеющих в местной системе координат вид

$$Q_i = \{x : |x_j| < \delta/3L, j = 1, \dots, n-1, -\delta < x_n < f_i(x')\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь число $\delta(\varepsilon) > 0, f_i$ – некоторые липшицевы функции с постоянной Липшица L , удовлетворяющие неравенствам $\delta/3 < f_i(x') < \delta, i = 1, \dots, m$. Легко видеть, что тогда области $Q_i^k = \{x \in Q_i : x_n < f_i(x') - 1/k\}$ равномерно звездны при натуральных числах $k > 3/\delta, i = 1, \dots, m$, так что они вместе с Q_0 образуют div-ограниченное семейство.

Докажем, что области

$$\Omega_k = Q_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^m Q_i^k \right), \quad k > 3/\delta,$$

также образуют div-ограниченное семейство. Зафиксируем $k > 3/\delta$. Пусть χ_0, χ_i – характеристические функции множеств $Q_0, Q_i^k, i = 1, \dots, m$. Положим

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m \chi_i(x), \quad \varphi_i = \chi_i/\varphi, \quad i = 0, \dots, m.$$

Пусть $\psi_i(x)$ – некоторые неотрицательные функции с носителями, лежащими в множествах $Q_0 \cap Q_i^k, i = 1, \dots, m$, такие, что $\int \psi_i dx = 1$.

Возьмем произвольную функцию $f \in L_2(\Omega_k), \int_{\Omega_k} f dx = 0$, и рассмотрим уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^i = f\varphi_i - c_i\psi_i, \quad x \in Q_i^k, \quad i = 1, \dots, m,$$

в которых c_i находятся из условия разрешимости $c_i = \int_Q f\varphi_i dx$. Эти уравнения имеют решения $\mathbf{u}^i \in \mathring{W}_2^1(Q_i^k)$, подчиняющиеся оценкам

$$\|\nabla \mathbf{u}^i\| \leq d\|f\varphi_i - c_i\psi_i\| \leq d\|f\|(1 + \|\varphi_i\|\|\psi_i\|).$$

Ввиду условия

$$\sum_{i=0}^m \int_Q f\varphi_i dx = 0,$$

уравнение $\operatorname{div} \mathbf{u}^0 = f\varphi_0 + \sum_{i=1}^m c_i\psi_i$ также имеет решение, удовлетворяющее оценке

$$\|\nabla \mathbf{u}^0\| \leq d\|f\varphi_0 + \sum_{i=1}^m c_i\psi_i\| \leq d\|f\|\left(1 + \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|\|\psi_i\|\right).$$

Очевидно, вектор $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^m \mathbf{u}^i$ принадлежит $\mathring{W}_2^1(\Omega_k)$, является решением уравнения $\operatorname{div} \mathbf{u} = f$ и подчиняется оценке $\|\nabla \mathbf{u}\|_{\Omega_k} \leq cd\|f\|$ с постоянной c , которую можно выбрать не зависящей от k .

Список литературы

1. *Боговский М. Е.* Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Труды семинара С. Л. Соболева. № 1. Новосибирск: Наука, 1980. С. 5–40.
2. *Гущин А. К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1982. Т. 119. С. 451–508.
3. *Heurwood J. G.* On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math. 1976. V. 138. P. 61–102.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О начально-краевой задаче для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами // Труды МИАН. 1983. Т. 159. С. 37–40.
6. *Мукминов Ф. Х.* О равномерной стабилизации решений внешней задачи для уравнений Навье–Стокса // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 41–68.
7. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // УМН. 1976. Т. 31. С. 142–166.
8. *Tacklind S.* Sur les classes quasianalytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique // Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis. Ser. 4. 1936. V. 10. № 3.
9. *Borchers W., Sohr H.* The equations $\operatorname{div} \mathbf{u} = f$ and $\operatorname{rot} \mathbf{v} = g$ with homogeneous Dirichlet boundary condition // Hokkaido Math. J. 1990. V. 19. P. 67–87.

Башкирский государственный университет, Уфа

E-mail: root@bgua.bashkiria.su; yavdat@bgua.bashkiria.su

Поступила в редакцию

30.01.1995