Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Эстеров, Индексы 1-форм, индексы пересечения и многогранники Ньютона, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 7, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:35:05

УДК 515.164.322+514.172.45

А. И. Эстеров**Индексы 1-форм, индексы пересечения
и многогранники Ньютона**

В работе индексы пересечения аналитических множеств некоторого типа (результантных циклов) выражаются через многогранники Ньютона определяющих их наборов функций при условии, что главные части функций находятся в общем положении. Частными случаями результатных циклов являются полные пересечения и множества падения ранга матриц. Частными случаями индексов пересечения таких множеств являются индекс особенности векторного поля Пуанкаре–Хопфа и его обобщения на случай многообразий с особенностями – индекс набора ростков 1-форм на изолированной особенности полного пересечения Гусейн–Заде–Эбелинга и вычет Сувы набора ростков сечений векторного расслоения. В качестве следствия получается также известная формула Кушниренко–Ока для числа Милнора ростка отображения в терминах многогранников Ньютона компонент. Приведено также обобщение известных фактов о равенстве упомянутых инвариантов особенностей размерностям некоторых локальных колец.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе индексы пересечения аналитических множеств некоторого типа (результантные циклы, см. определение 13) выражаются через многогранники Ньютона определяющих их наборов функций при условии, что главные части функций находятся в общем положении. Частными случаями результатных циклов являются полные пересечения и множества падения ранга матриц. Частными случаями индексов пересечения таких множеств являются индекс особенности векторного поля Пуанкаре–Хопфа, индекс набора ростков 1-форм на изолированной особенности полного пересечения Гусейн–Заде–Эбелинга [1], [2] и вычет Сувы набора сечений расслоения в изолированной точке их линейной зависимости [3]. В качестве следствия получается известная формула для числа Милнора ростка отображения (в случае функции – [4], [5], в случае отображения – [6]). При этом в доказательствах используется только техника гладких торических многообразий, примененная к задачам о многогранниках Ньютона А. Г. Хованским. Также в теореме 1 приведено обобщение известных фактов о равенстве упомянутых инвариантов особенностей размерностям некоторых локальных колец [7], [1]–[3], [8], [9].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00762) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1972.2003.1).

Работа состоит из следующих частей. В §2 сформулированы следствия основных результатов работы для некоторых известных инвариантов особенностей. В §3 определяется топологический аналог групп формальных алгебраических циклов многообразий над $\mathbb{C}$, с помощью которого удобнее будет проводить некоторые вычисления с индексами пересечений (подробности в [10]). В §4 приводятся некоторые необходимые для дальнейшего соотношения для смешанных объемов многогранников и определяется смешанный объем пар многогранников (определение 7 и лемма 3). В §§5, 6 вводятся необходимые обозначения и одновременно напоминаются в удобной нам форме и общности некоторые факты о многогранниках и торических многообразиях из работ Хованского [11], [12] и Данилова [13].

В §7 индексы пересечения дивизоров на некомпактных торических многообразиях вычисляются в терминах многогранников Ньютона (теорема 3) методом деформации уравнений, подобным примененному Д. Н. Бернштейном в [14]. В §8 определяются результатные циклы и объясняется их связь с индексами Гусейн-Заде–Эбелинга. В §9 индексы пересечения результатных циклов представляются как индексы пересечения дивизоров на некомпактных торических многообразиях (теорема 4). Применение к этому случаю теоремы 3 дает основные результаты работы – выражение в терминах многогранников Ньютона индекса пересечения результатных циклов (теорема 5) и индекса Гусейн-Заде–Эбелинга 1-формы на изолированной особенности полного пересечения (утверждение 6). Кроме того, строится торическое разрешение особенностей результатного цикла (теорема 6).

Автор благодарен своему научному руководителю С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

§ 2. Приложения

Через $\mathbb{C}^n$ обозначается n -мерное комплексное пространство с системой координат $(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{Z}^n$ отождествляется с множеством мономов от $x_1, \dots, x_n$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^n$ – положительный октант. Для упрощения обозначений мы не будем различать векторное пространство $\mathbb{R}^n$ с естественной системой координат $(z_1, \dots, z_n)$ и двойственное к нему. Для $I \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим через A^I пересечение множества $A \subset \mathbb{R}^n$ с координатной плоскостью $\{z_i = 0, i \notin I\}$.

В этом параграфе все вершины рассматриваемых в $\mathbb{R}^n$ многогранников содержатся в $\mathbb{Z}^n$. Опорную грань многогранника $N \subset \mathbb{R}^n$ относительно коектора $\gamma \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать N^γ , пусть $N(\gamma)$ – значение γ на точках этой грани, ∂N – объединение ограниченных граней многогранника (его диаграмма Ньютона), N^* – множество примитивных коекторов, опорных к ограниченным гиперграням многогранника, $\text{Vol}(\cdot, \dots, \cdot)$ – смешанный объем многогранников, $N_1 + N_2$ – сумма Минковского многогранников N_1 и N_2 (эти определения напоминаются в §4). Множество многочленов (соответственно множество ростков голоморфных функций) на $\mathbb{C}^n$ со степенями мономов (разложения в степенной ряд) из $N \cap \mathbb{Z}^n$ будем обозначать $\mathbb{C}[N]$ (соответственно $\mathbb{C}\{N\}$). Сумму тех мономов элемента $f \in \mathbb{C}[N]$ (соответственно $\mathbb{C}\{N\}$), которые соответствуют целым точкам множества $A \subset \mathbb{R}^n$, обозначим $f|_A$, многочлен $f|_{\partial N}$ назовем *главной частью* f (относительно многогранника N).

Многогранником Ньютона ростка функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ называется минимальный многогранник N с областью определения опорной функции $\mathbb{R}_+^n$ такой, что $f \in \mathbb{C}\{N\}$. Для функции $f \in \mathbb{C}\{N\}$ с главной частью общего положения многогранник Ньютона совпадает с N , поэтому результаты этой работы (например, следствия 1–3) можно рассматривать как вычисление инвариантов особенностей в терминах многогранников Ньютона определяющих их функций.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $v_i \in \mathbb{C}\{N_i\}$, $i = 1, \dots, n$, где $N_i \subset \mathbb{R}_+^n$ – многогранники и множества $\mathbb{R}_+^n \setminus N_i$ ограничены. Тогда в случае общего положения главных частей функций v_i индекс векторного поля $(v_1, \dots, v_n)$ в нуле корректно определен и равен

$$(n-1)! \sum_{\gamma \in (N_2 + \dots + N_n)^*} N_1(\gamma) \text{Vol}(N_2^\gamma, \dots, N_n^\gamma),$$

а в случае произвольных главных частей индекс не меньше указанного выражения (или не определен). Общее положение означает, что для любого ковектора $\gamma \in \mathbb{R}^n$ с положительными компонентами множество $\{v_1|_{N_1^\gamma} = \dots = v_n|_{N_n^\gamma} = 0\}$ содержится в объединении координатных плоскостей.

Это частный случай утверждения 3 (нужно в обозначениях утверждения 3 положить $\Delta_i = \mathbb{R}_+^n$, $\tilde{\Delta}_i = N_i$, $s_i = f_i$). Заметим, что отсюда следует формула Кушниренко [4] для числа Милнора особой точки голоморфной функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Напомним определения других инвариантов особенностей, которые в настоящей работе выражаются в терминах многогранников Ньютона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $w^{i,j}$, $i = 1, \dots, I_j$, – сечения ростка векторного расслоения ранга $k_j \geq I_j$ на ростке $(\mathbb{C}^n, 0)$, $j = 1, \dots, J$, $n = \sum_j (k_j - I_j + 1)$, и только в нуле для каждого j набор $w^{i,j}$, $i = 1, \dots, I_j$, линейно зависим. Тогда, если зафиксировать тривиализации ростков расслоений, эти сечения $w^{i,j} = (w_1^{i,j}, \dots, w_{k_j}^{i,j})$ определяют отображение сферы S^{2n-1} малого радиуса вокруг нуля в $\mathbb{C}^n$ в многообразие $\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j} \setminus \Sigma$, где $\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j}$ – пространство наборов матриц размеров $I_j \times k_j$, а подмножество Σ состоит из наборов вырожденных матриц. Из соображений размерности $H_{2n-1}(\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j} \setminus \Sigma) = \mathbb{Z}$.

Индексом Гусейн-Заде–Эбелинга набора сечений

$$((w^{1,1}, \dots, w^{I_1,1}), \dots, (w^{1,J}, \dots, w^{I_J,J}))$$

в начале координат назовем образ фундаментального цикла сферы S^{2n-1} в гомологиях $H_{2n-1}(\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j} \setminus \Sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в обозначениях этого определения $I_1 = 1$ и $w^{1,1} = \dots = w^{I_1,1} = 0$ – полное пересечение, то вместо отображения

$$((w^{1,1}, \dots, w^{I_1,1}), \dots, (w^{1,J}, \dots, w^{I_J,J}))$$

сферы S^{2n-1} в пространство наборов невырожденных матриц можно рассматривать отображение

$$((w^{1,2}, \dots, w^{I_2,2}), \dots, (w^{1,J}, \dots, w^{I_J,J}))$$

зацепления особенности $\{w^{1,1} = \dots = w^{I_1,1} = 0\}$. Частным случаем при $k_1 = 1$, $J = 2$ является вычет Сувы [3] набора сечений $(w^{1,2}, \dots, w^{I_2,2})$ векторного расслоения на ростке полного пересечения $w^{1,1} = \dots = w^{I_1,1} = 0$.

Еще один важный частный случай определения 1 – индекс Гусейн-Заде–Эбелинга набора 1-форм на изолированной особенности полного пересечения (см. [2], в случае одной 1-формы – [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f_1, \dots, f_k$ – ростки голоморфных функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$ и $f_1 = \dots = f_k = 0$ – изолированная особенность полного пересечения, т.е. 1-формы $df_1, \dots, df_k$ линейно независимы в точках множества

$$\{f_1 = \dots = f_k = 0\} \setminus \{0\}.$$

Пусть $\omega_{i,j}$, $i = 1, \dots, I_j$, $j = 1, \dots, J$, $I_j \leq n$, $\sum_j (n - I_j + 1) = n - k$, – ростки голоморфных 1-форм на $(\mathbb{C}^n, 0)$ и для любой точки $x \in \{f_1 = \dots = f_k = 0\} \setminus \{0\}$ найдется номер j такой, что ограничения $\omega_{i,j}$, $i = 1, \dots, I_j$, на $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ линейно независимы в x .

Индексом Гусейн-Заде–Эбелинга набора 1-форм $\omega_{i,j}$ на изолированной особенности полного пересечения $f_1 = \dots = f_k = 0$ назовем индекс Гусейн-Заде–Эбелинга набора сечений

$$((\omega_{1,1}, \dots, \omega_{I_1,1}, df_1, \dots, df_k), \dots, (\omega_{1,J}, \dots, \omega_{I_J,J}, df_1, \dots, df_k), (f_1), \dots, (f_k)).$$

Следующие формулы выражают индексы Гусейн-Заде–Эбелинга в терминах многогранников Ньютона.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в обозначениях определения 1 $w_k^{i,j} \in \mathbb{C}\{N_k^j\}$, где $N_k^j \subset \mathbb{R}_+^n$ – многогранники и множества $\mathbb{R}_+^n \setminus N_k^j$ ограничены. Тогда в случае общего положения главных частей функций $w_k^{i,j}$ индекс Гусейн-Заде–Эбелинга набора сечений $w^{i,j}$ в нуле корректно определен и равен

$$(n-1)! \sum_{\gamma \in \left(\sum_{j,k} N_k^j\right)^*} \sum_{\substack{1 \leq s_1^1 < \dots < s_{k_1-I_1+1}^1 \leq k_1 \\ \dots \dots \dots \\ 1 \leq s_1^J < \dots < s_{k_J-I_J+1}^J \leq k_J}} N_{s_1^1}^1(\gamma) \text{Vol}((N_{s_2^1}^1)^\gamma, \dots, (N_{s_{k_J-I_J+1}^J}^J)^\gamma),$$

а в случае произвольных главных частей индекс не меньше указанного выражения.

Доказательство следует из леммы 10 и п. 2) теоремы 5. Пункт 1) этой теоремы дает ответ более сложного вида в случае, когда многогранники Ньютона функций $w_k^{i,j}$ зависят от i .

Для выражения индексов 1-форм в терминах многогранников Ньютона нужны следующие определения. Пусть $N_0 \subset \mathbb{R}_+^n$ – целочисленный многогранник, обозначим через $\mathbb{C}_{\otimes T^*}\{N_0\}$ множество ростков 1-форм $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ на $(\mathbb{C}^n, 0)$ таких, что $\omega_i x_i \in \mathbb{C}\{N_0\}$. Для множества $A \subset N_0$ и 1-формы $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i \in \mathbb{C}_{\otimes T^*}\{N_0\}$ определим 1-форму $\omega|_A = \sum_{i=1}^n (\omega|_A)_i dx_i$ равенствами $(\omega|_A)_i x_i = (\omega_i x_i)|_A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Главной частью 1-формы $\omega \in \mathbb{C}_{\otimes T^*}\{N_0\}$ относительно N_0 называется 1-форма с полиномиальными компонентами

$$\omega|_{\partial N_0} \in \mathbb{C}_{\otimes T^*}[\partial N_0]$$

$(\partial N_0$ – объединение ограниченных граней многогранника N_0). *Многогранником Ньютона ростка 1-формы $\omega \in \mathbb{C}_{\otimes T^*}\{\mathbb{R}_+^n\}$ на $(\mathbb{C}^n, 0)$ назовем минимальный многогранник N'_0 с областью определения опорной функции $\mathbb{R}_+^n$ такой, что $\omega \in \mathbb{C}_{\otimes T^*}\{N'_0\}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что для любого многогранника $N_0 \subset \mathbb{R}_+^n$ дифференциал ростка функции из $\mathbb{C}\{N_0\}$ содержится в $\mathbb{C}_{\otimes T^*}\{N_0\}$, т.е. многогранник Ньютона функции равен многограннику Ньютона ее дифференциала. Кроме того, многогранник Ньютона 1-формы сохраняется при мономимальных отображениях (многогранник Ньютона обратного образа 1-формы при мономимальном отображении равен образу многогранника Ньютона 1-формы при соответствующем линейном отображении).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $N, N_1, \dots, N_k \subset \mathbb{R}_+^n$ – целочисленные многогранники с областью определения опорной функции $\mathbb{R}_+^n$. Набор, состоящий из 1-формы $\omega \in \mathbb{C}_{\otimes T^*}\{N\}$ и k функций $f_i \in \mathbb{C}\{N_i\}$, $i = 1, \dots, k$, на $(\mathbb{C}^n, 0)$, назовем *набором с невырожденными главными частями*, если для любого ковектора $\gamma \in \mathbb{R}^n$ с положительными компонентами нуль является неособым значением отображения $(f_1|_{N_1^\gamma}, \dots, f_k|_{N_k^\gamma}) : (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ и ограничение 1-формы $\omega|_{N^\gamma}$ на $\{f_1|_{N_1^\gamma} = \dots = f_k|_{N_k^\gamma} = 0\} \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ не имеет нулей.

Очевидно, выполнение этого условия действительно зависит только от главных частей $\omega, f_1, \dots, f_k$.

Чтобы выразить индекс Гусейн-Заде–Эбелинга 1-формы на изолированной особенности полного пересечения в терминах многогранников Ньютона компонент 1-формы и уравнений полного пересечения, нужны следующие обозначения. Для многогранников $N_0, \dots, N_k \subset \mathbb{R}_+^m$ определим линейную функцию

$$\text{Vol}_{N_0, \dots, N_k} : \mathbb{R}[[s_0, \dots, s_k]] \rightarrow \mathbb{R}$$

равенствами $\text{Vol}_{N_0, \dots, N_k} \prod_{j=1}^m s_{i_j} = \text{Vol}(N_{i_1}, \dots, N_{i_m})$ и $\text{Vol}_{N_0, \dots, N_k} = 0$ на мономах степени, отличной от m . Обозначим через $\text{res}_{\text{eg}}(N_0, \dots, N_k)$ сумму

$$\sum_{\gamma \in (N_0 + \dots + N_k)^*} (m-1)! N_k(\gamma) \text{Vol}_{N_0^\gamma, \dots, N_k^\gamma} \left(\frac{s_1 \cdots s_{k-1}}{(s_0+1) \cdots (s_k+1)} \right),$$

а через $\mu'(N_0, \dots, N_k)$ – сумму

$$\sum_{\gamma \in (N_0 + \dots + N_k)^*} (m-1)! N_k(\gamma) \text{Vol}_{N_0^\gamma, \dots, N_k^\gamma} \left(\frac{s_0 \cdots s_{k-1}}{(s_0+1) \cdots (s_k+1)} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f_i \in \mathbb{C}\{N_i\}$, $\omega \in \mathbb{C}_{\otimes T^*}\{N_0\}$, где $N_i \in \mathbb{R}_+^n$ – многогранники и множества $\mathbb{R}_+^n \setminus N_i$, $i = 0, \dots, k$, ограничены. Тогда в случае невырожденности (определение 4) главных частей функций f_i и 1-формы ω индекс Гусейн-Заде–Эбелинга ω на полном пересечении $f_1 = \dots = f_k = 0$ в нуле корректно определен и равен

$$(-1)^{n-k} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} \text{res}_{\text{eg}}(N_0^I, \dots, N_k^I),$$

а в случае произвольных главных частей индекс не меньше указанного выражения. Также в случае невырожденности главных частей радиальный индекс

Гусейн-Заде–Эбелинга 1-формы ω на $f_1 = \dots = f_k = 0$ в нуле (определение в [15]) существует и равен

$$(-1)^{n-k-1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} \mu'(N_0^I, \dots, N_k^I) + (-1)^{n-k}.$$

Первая часть следствия 3 – частный случай утверждения 6 (там дан ответ более сложного вида для 1-формы с произвольными многогранниками Ньютона компонент; в данном случае этот ответ упрощается с помощью леммы 2). Вторая часть следует из первой индукцией по k ввиду того, что индекс ω на $f_1 = \dots = f_k = 0$ равен сумме радиальных индексов ω на $f_1 = \dots = f_k = 0$ и df_k на $f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$. Частным случаем второй части следствия 3 является формула Ока [6] для числа Милнора изолированной особенности полного пересечения, так как радиальный индекс дифференциала dg на $f_1 = \dots = f_k = 0$ равен числу Милнора отображения $(f_1, \dots, f_k, g)$.

Все упомянутые инварианты особенностей можно выразить как размерности некоторых локальных колец (индекс Пуанкаре–Хопфа [7], индекс Гусейн-Заде–Эбелинга [1], [2], вычет Сувы [3], число Милнора отображения [8], [9]). Обобщением этих фактов является следующая теорема, выражающая в этих терминах индекс Гусейн-Заде–Эбелинга набора сечений ростков векторных расслоений. Пусть $w^{i,j}$, $i = 1, \dots, I_j$, – сечения ростка векторного расслоения ранга $k_j \geq I_j$ на ростке $(\mathbb{C}^n, 0)$, $j = 1, \dots, J$, $n = \sum_j (k_j - I_j + 1)$. Тогда, если зафиксировать тривиализации ростков расслоений, эти сечения $w^{i,j} = (w_1^{i,j}, \dots, w_{k_j}^{i,j})$ определяют ростки матриц $(w^{i,j})$, $j = 1, \dots, J$, с голоморфными коэффициентами на $(\mathbb{C}^n, 0)$.

ТЕОРЕМА 1. *Индекс Гусейн-Заде–Эбелинга набора сечений*

$$((w^{1,1}, \dots, w^{I_1,1}), \dots, (w^{1,J}, \dots, w^{I_J,J}))$$

ростков векторных расслоений рангов k_j на $(\mathbb{C}^n, 0)$ равен размерности кольца $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}/\mathcal{I}$, где $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$ – кольцо ростков голоморфных функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$, а $\mathcal{I}$ – идеал, порожденный всеми максимальными минорами матриц $(w^{i,j})$, $j = 1, \dots, J$. Равенство также подразумевает, что левая и правая части корректно определены одновременно (в частности, только при $n = \sum_j (k_j - I_j + 1)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим набор матриц $(w^{i,j})$, $j = 1, \dots, J$, с голоморфными коэффициентами как росток отображения W из $(\mathbb{C}^n, 0)$ в пространство наборов матриц $\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j}$. Искомый индекс равен индексу пересечения образа W и множества наборов вырожденных матриц Σ в пространстве $\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j}$. Этот индекс пересечения равен индексу пересечения графика W и множества $\mathbb{C}^n \times \Sigma$ в пространстве $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j}$. График – росток гладкого многообразия, а $\mathbb{C}^n \times \Sigma$ является пространством Коэна–Маколея (как произведение детерминантных многообразий, которые являются пространствами Коэна–Маколея [16; теорема 3.1]). Поэтому индекс их пересечения равен размерности тензорного произведения их локальных колец [10; гл. 7].

Интересно было бы получить следствие 2 методами работы [4], используя выражение индекса Гусейн-Заде–Эбелинга через размерность локальной алгебры.

§ 3. Индексы пересечения

Пусть M – гладкое ориентированное многообразие размерности m (может быть, некомпактное).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Топологическим циклом на M назовем пару $\alpha = (K, k)$, где K – замкнутое подмножество M , $k \in H_j(K^*, *; \mathbb{Z}) = H^{m-j}(M, M \setminus K; \mathbb{Z})$ (пара $(K^*, *)$ – одноточечная компактификация K по модулю добавленной точки). Для цикла α введем обозначения: $\dim \alpha = j$ (размерность α), $|\alpha| = K$ (носитель α), $\vec{\alpha} = k$.*

Определим сложение “+” и пересечение (умножение) “ $\cap$ ” циклов по правилу

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &= |\alpha| \cup |\beta|, & \overrightarrow{\alpha + \beta} &= \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \\ |\alpha \cap \beta| &= |\alpha| \cap |\beta|, & \overrightarrow{\alpha \cap \beta} &= \vec{\alpha} \smile \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Обозначим через $C(M) = \bigoplus_{j=0}^m C_j(M)$ и $C^c(M) = \bigoplus_{j=0}^m C_j^c(M)$ градуированное полукольцо топологических циклов на M и идеал циклов с компактными носителями (градуировка – размерность циклов, нуль – $\mathbb{O} = (\emptyset, 0)$, единица – $\mathbb{I} = (M, [M])$). Отображению гладких ориентированных многообразий $f: M \rightarrow N$ соответствуют естественные отображения $f^*: C(N) \rightarrow C(M)$, $f_*: C^c(M) \rightarrow C^c(N)$ (если f собственное, то $f_*: C(M) \rightarrow C(N)$).

Если многообразие M комплексное, то j -мерному комплексно аналитическому множеству $X \subset M$ соответствует цикл $(X, [X]) \in C_{2j}(M)$, где $[X] \in H_{2j}(X^*, \text{Sing } X \cup *; \mathbb{Z}) = H_{2j}(X^*, *; \mathbb{Z})$, который будем также обозначать $[X]$. Для сечения $s: M \rightarrow E$ векторного расслоения $E \rightarrow M$ через $[s]$ обозначим цикл $[\text{Im } s] \cap [\text{Im } M_0] \subset C(M) \subset C(E)$, где M_0 – нулевое сечение (это локализация класса Эйлера).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем *индексом* и обозначим через ind отображение

$$\text{pt}_*: C^c(M) \rightarrow C^c(*) = \mathbb{Z},$$

где $\text{pt}: M \rightarrow *$ – отображение в точку.

Для ростка m -мерного расслоения на $(\mathbb{C}^m, 0)$ и ростка его сечения s с изолированным нулем в нуле число $\text{ind}[s]$ – индекс векторного поля s . Для ростков аналитических множеств A и B дополнительной размерности $\text{ind}[A] \cap [B]$ – индекс пересечения A и B .

Аналогично можно определить относительные топологические циклы, ростки топологических циклов и действия над ними. Мы будем использовать этот топологический вариант теории пересечений вместо стандартного алгебро-геометрического (описанного, например, в [10]), чтобы избежать некоторых технических трудностей, связанных с необходимостью рассматривать на некомпактных многообразиях несобственные пересечения (т.е. пересечения коразмерности, меньшей, чем сумма коразмерностей “множителей”).

§ 4. Многогранники и объемы

Рациональный конус

$$\text{Cone}(a_1, \dots, a_m) \subset \mathbb{R}^n,$$

порожденный набором $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^n$, — это множество $\{q_1 a_1 + \dots + q_m a_m \mid q_i \in \mathbb{R}, q_i \geq 0\}$. Его грани — конусы, порожденные поднаборами. Простой конус — это конус, порожденный частью целочисленного базиса. Веер — конечное множество конусов с вершиной такое, что

- 1) грань каждого конуса из веера также принадлежит вееру,
- 2) конусы пересекаются по общим граням.

Веер, состоящий из конуса C и всех его граней, будем обозначать через $\text{Fan}(C)$, носитель веера Γ — через $|\Gamma|$, звезду конуса $\Sigma \in \Gamma$ — через $\text{Star } \Sigma$. Все упоминающиеся в дальнейшем веера предполагаются простыми (т.е. состоящими из простых конусов), если не оговорено обратное.

Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ — множество, заданное конечным количеством линейных неоднородных неравенств (и равенств). Все упоминающиеся в дальнейшем многогранники предполагаются выпуклыми и целочисленными (т.е. с вершинами в целых точках), если не оговорено обратное. Объединение всех ограниченных граней многогранника Δ называется его *диаграммой* и обозначается $\partial\Delta$. Сумма Минковского многогранников есть многогранник $\Sigma_1 + \Sigma_2 = \{x + y \mid x \in \Sigma_1, y \in \Sigma_2\} \subset \mathbb{R}^n$.

Опорной для ковектора $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^*$ называется максимальная грань Σ^γ (если такая существует) многогранника Σ , на которой γ принимает минимальное значение (как линейная функция на Σ). Множество примитивных ковекторов, опорных к ограниченным гиперграням многогранника Σ , будем обозначать Σ^* . *Опорной функцией для многогранника* Σ называется функция

$$\Sigma(\cdot): (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad \Sigma(\gamma) = \min_{a \in \Sigma} \gamma(a).$$

Областью ее определения назовем множество точек, в которых ее значение конечно. Веер называется *совместимым с данным многогранником*, если и только если на каждом его конусе опорная функция линейна, а вне его носителя не определена. Назовем многогранники *совместимыми*, если области определения их опорных функций совпадают.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ есть выделенная форма объема, в которой объем единичного куба равен 1. Назовем ее *целочисленным объемом* и обозначим через $V_n(A)$ целочисленный объем многогранника A . В каждом рациональном векторном подпространстве $L \subset \mathbb{R}^n$ определена форма объема, в которой параллелепипед, образованный базисом решетки $\mathbb{Z}^n \cap L \subset L$, имеет единичный объем. Эту форму объема также будем называть целочисленным объемом. Смешанный объем — симметричная функция от n многогранников $A_1, \dots, A_n$, инвариантная относительно их параллельных переносов и мультилинейная относительно суммы Минковского:

$$\text{Vol}(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{n!} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} V_n \left(\sum_{i \in I} A_i \right).$$

Если многогранники $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ содержатся в параллельных k -мерных плоскостях, то также корректно определен $\text{Vol}(A_1, \dots, A_k)$.

Следующая теорема – основной пример связи алгебраической геометрии с геометрией целочисленных многогранников.

ТЕОРЕМА 2 [14], [11]. Пусть $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченные целочисленные многогранники, $f_i \in \mathbb{C}[A_i]$ – многочлены Лорана с коэффициентами общего положения. Тогда $\{f_1 = \dots = f_k = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ – гладкое многообразие и его эйлерова характеристика равна

$$n! \operatorname{Vol}_{A_1, \dots, A_k} \left(\frac{s_1 \cdots s_k}{(s_1 + 1) \cdots (s_k + 1)} \right),$$

где линейная функция $\operatorname{Vol}_{A_1, \dots, A_k} : \mathbb{C}[[s_0, \dots, s_k]] \rightarrow \mathbb{C}$ определяется равенствами $\operatorname{Vol}_{A_1, \dots, A_k} \prod_{j=1}^n s_{i_j} = \operatorname{Vol}(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})$ и $\operatorname{Vol}_{A_1, \dots, A_k} = 0$ на мономах степени, отличной от n . В частности, при $k = n$ количество точек в множестве $\{f_1 = \dots = f_n = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ равно $n! \operatorname{Vol}(A_1, \dots, A_n)$.

Доказательство приведено в [11]. Можно также доказать это утверждение при $k = n$ одновременно со следствием 4 индукцией по размерности аналогично [14] элементарными методами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Под эйлеровой характеристикой в настоящей работе понимается аддитивная эйлерова характеристика – альтернированная сумма размерностей гомологий одноточечной компактификации по модулю бесконечности.

Дальше понадобятся следующие соотношения для смешанных объемов.

ЛЕММА 1. Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – рациональное k -мерное векторное подпространство, $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/L$ – естественная проекция,

$$A_1, \dots, A_k \subset L, \quad B_1, \dots, B_{n-k} \subset \mathbb{R}^n$$

– ограниченные многогранники, тогда

$$\begin{aligned} & \operatorname{Vol}(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_{n-k}) \\ &= \frac{k! (n-k)!}{n!} \operatorname{Vol}(A_1, \dots, A_k) \operatorname{Vol}(\pi(B_1), \dots, \pi(B_{n-k})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлены Лорана общего положения

$$f_i \in \mathbb{C}[A_i], \quad i = 1, \dots, k, \quad g_j \in \mathbb{C}[B_j], \quad j = 1, \dots, n-k.$$

В подходящей системе координат $(z_1, \dots, z_n)$, полученной мономиальной заменой, многочлены f_i зависят только от $z_1, \dots, z_k$. Множество $\{f_1 = \dots = f_k = g_1 = \dots = g_{n-k} = 0\}$ состоит из точек вида $(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$, где

$$\begin{aligned} & (z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}) \in \{f_1 = \dots = f_k = 0\}, \\ & (z_{k+1}^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \{g_1|_{z_1=z_1^{(0)}, \dots, z_k=z_k^{(0)}}, \dots, g_{n-k}|_{z_1=z_1^{(0)}, \dots, z_k=z_k^{(0)}}\}. \end{aligned}$$

Но по теореме 2 множество $\{f_1 = \dots = f_k = g_1 = \dots = g_{n-k} = 0\}$ состоит из $n! \operatorname{Vol}(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_{n-k})$ точек, множество $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ состоит из $k! \operatorname{Vol}(A_1, \dots, A_k)$ точек, а $\{g_1|_{z_1=z_1^{(0)}, \dots, z_k=z_k^{(0)}}, \dots, g_{n-k}|_{z_1=z_1^{(0)}, \dots, z_k=z_k^{(0)}}\}$ для любой точки $(z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}) \in \{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ состоит из $(n-k)! \operatorname{Vol}(\pi(B_1), \dots, \pi(B_{n-k}))$ точек (так как $\pi(B_j)$ – многогранник Ньютона многочлена $g_j|_{z_1=z_1^{(0)}, \dots, z_k=z_k^{(0)}}$).

ЛЕММА 2. Пусть $A_0, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченные многогранники, A – выпуклая оболочка

$$A_0 \times (0, \dots, 0) \cup A_1 \times (1, 0, \dots, 0) \cup \dots \cup A_k \times (0, \dots, 0, 1) \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k.$$

Тогда

$$\text{Vol}(A_0, \dots, A_{d-1}, \underbrace{A, \dots, A}_{n+k-d}) = (-1)^{n-d} \frac{n!}{(n+k)!} \text{Vol}_{A_0, \dots, A_k} \left(\frac{s_0 \cdots s_{d-1}}{(s_0+1) \cdots (s_k+1)} \right),$$

где линейная функция $\text{Vol}_{A_0, \dots, A_k} : \mathbb{C}[[s_0, \dots, s_k]] \rightarrow \mathbb{C}$ определяется равенствами $\text{Vol}_{A_0, \dots, A_k} \prod_{j=1}^n s_{i_j} = \text{Vol}(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})$ и $\text{Vol}_{A_0, \dots, A_k} = 0$ на мономах степени, отличной от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d \geq n$, то левая часть равенства вычисляется по лемме 1 и утверждение очевидно. Выберем многочлены Лорана общего положения $g_1 \in \mathbb{C}[A_0], \dots, g_d \in \mathbb{C}[A_{d-1}], f_{i,j} \in \mathbb{C}[A_i], i = 0, \dots, k, j = 1, \dots, n+k-d$, от переменных $z_1, \dots, z_n$. Рассмотрим множество

$$M = \{z \mid g_1(z) = \dots = g_d(z) = 0, \text{rk}(f_{i,j}(z)) < \max = k+1\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n.$$

Так как многочлены Лорана в общем положении, то M состоит из конечного количества точек и в каждой его точке $\text{rk}(f_{i,j}) = k$. Вычисляя $\text{rk}(f_{i,j})$ по строкам и по столбцам, с помощью теоремы 2 получаем, что количество точек в M равно соответственно левой и правой части требуемого равенства.

1) Количество точек M равно количеству общих нулей многочленов Лорана $g_1, \dots, g_d, f_{0,j} + \mu_1 f_{1,j} + \dots + \mu_k f_{k,j} \in \mathbb{C}[A], j = 1, \dots, n+k-d$, от переменных $z_1, \dots, z_n, \mu_1, \dots, \mu_k$, которое по теореме 2 равно

$$(n+k)! \text{Vol}(A_{k+1}, \dots, A_{k+d}, \underbrace{A, \dots, A}_{n+k-d}).$$

2) Обозначим через N множество

$$\{g_1 = \dots = g_d = 0, \lambda_1 f_{i,1} + \dots + \lambda_{n+k-d} f_{i,n+k-d} = 0, i = 0, \dots, k\},$$

содержащееся в $\{g_1 = \dots = g_d = 0\} \times \mathbb{CP}^{n+k-d-1}$, где $(\lambda_1 : \dots : \lambda_{n+k-d})$ – однородные координаты в $\mathbb{CP}^{n+k-d-1}$, и рассмотрим естественную проекцию $p: N \rightarrow \{g_1 = \dots = g_d = 0\}$. Если $x \in M \subset \{g_1 = \dots = g_d = 0\}$, то $p^{(-1)}(x) = \mathbb{CP}^{n-d-1}$, а если $x \in \{g_1 = \dots = g_d = 0\} \setminus M$, то $p^{(-1)}(x) = \mathbb{CP}^{n-d-2}$, поэтому количество точек в M равно $\chi(N) - (n-d-1)\chi\{g_1 = \dots = g_d = 0\}$, где χ – эйлерова характеристика. С помощью теоремы 2 с учетом аддитивности эйлеровой характеристики легко получить, что эйлерова характеристика N равна

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-d} n! \text{Vol}_{A_0, \dots, A_k} \left(\frac{s_0 \cdots s_{d-1}}{(s_0+1) \cdots (s_k+1)} \right) \\ & + (n-d-1) n! \text{Vol}_{A_0, \dots, A_k} \left(\frac{s_0 \cdots s_{d-1}}{(s_0+1) \cdots (s_{d-1}+1)} \right), \end{aligned}$$

поэтому количество точек в M равно

$$(-1)^{n-d} n! \text{Vol}_{A_0, \dots, A_k} \left(\frac{s_0 \cdots s_{d-1}}{(s_0+1) \cdots (s_k+1)} \right).$$

Далее понадобится следующий “относительный” вариант многогранников, объема и смешанного объема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Парой многогранников $(\Delta, \tilde{\Delta})$ назовем такие многогранники $\tilde{\Delta} \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n$, что множество $\Delta \setminus \tilde{\Delta}$ ограничено. Объемом $V_n(\Delta, \tilde{\Delta})$ пары $(\Delta, \tilde{\Delta})$ назовем объем множества $\Delta \setminus \tilde{\Delta}$.*

Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – пары многогранников с областью определения опорных функций Γ , не лежащей в гиперплоскости. Определим смешанный объем пар многогранников $(\Delta_i, \tilde{\Delta}_i)$ формулой

$$\begin{aligned} \text{Vol}_\Gamma(\Delta_1, \tilde{\Delta}_1; \dots; \Delta_n, \tilde{\Delta}_n) &= \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in (\sum_i \Delta_i + \tilde{\Delta}_i)^*} \sum_{k=1}^n (\tilde{\Delta}_k(\gamma) - \Delta_k(\gamma)) \\ &\times \text{Vol}((\Delta_1)^\gamma, \dots, (\Delta_{k-1})^\gamma, (\tilde{\Delta}_{k+1})^\gamma, \dots, (\tilde{\Delta}_n)^\gamma). \end{aligned}$$

Суммой пар многогранников $(\Delta_1, \tilde{\Delta}_1)$, $(\Delta_2, \tilde{\Delta}_2)$ назовем пару $(\Delta_1 + \Delta_2, \tilde{\Delta}_1 + \tilde{\Delta}_2)$.

Смешанный объем пар многогранников удовлетворяет естественным свойствам, например:

ЛЕММА 3. 1) *Смешанный объем пар линеен по каждому из аргументов.*

2) *Смешанный объем пар симметричен по всем аргументам.*

3) *Смешанный объем n экземпляров одной и той же пары равен ее объему.*

4) *Смешанный объем пар – поляризация объема пары (как функции на полугруппе пар многогранников):*

$$\text{Vol}_\Gamma(\Delta_1, \tilde{\Delta}_1; \dots; \Delta_n, \tilde{\Delta}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} V_n \left(\sum_{i \in I} (\Delta_i, \tilde{\Delta}_i) \right).$$

5) *Выполняется равенство*

$$\text{Vol}_\Gamma(\Delta_1, \Delta'_1; \dots; \Delta_n, \Delta'_n) + \text{Vol}_\Gamma(\Delta'_1, \Delta''_1; \dots; \Delta'_n, \Delta''_n) = \text{Vol}_\Gamma(\Delta_1, \Delta''_1; \dots; \Delta_n, \Delta''_n).$$

6) *Пусть H – такое полупространство, что все множества $\Delta_i \setminus H$ ограничены и содержат $\Delta_i \setminus \tilde{\Delta}_i$ (такое H всегда существует). Тогда*

$$\text{Vol}_\Gamma(\Delta_1, \tilde{\Delta}_1; \dots; \Delta_n, \tilde{\Delta}_n) = \text{Vol}(\Delta_1 \setminus H, \dots, \Delta_n \setminus H) - \text{Vol}(\tilde{\Delta}_1 \setminus H, \dots, \tilde{\Delta}_n \setminus H),$$

где в правой части стоят смешанные объемы выпуклых многогранников. В частности, если все Δ_i ограничены, то

$$\text{Vol}_{(\mathbb{R}^n)^*}(\Delta_1, \tilde{\Delta}_1; \dots; \Delta_n, \tilde{\Delta}_n) = \text{Vol}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) - \text{Vol}(\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно провести прямым вычислением (довольно длинным для п. 2)), но связь с торическими многообразиями позволяет его упростить. Пункты 1) и 2) следуют из теоремы 3 и свойств индекса пересечения (линейности и симметричности). Пункт 3) очевиден из определений. Пункт 4) следует из первых трех по определению поляризации – нужно согласно 3) подставить в определение поляризации смешанные объемы вместо объемов, раскрыть скобки в соответствии с 1) и привести слагаемые с учетом 2). Пункт 5)

следует из 4) и из аддитивности объема. Пункт 6) следует из 5) при $\Delta'_i = \tilde{\Delta}_i$, $\Delta''_i = \Delta_i \cap H = \tilde{\Delta}_i \cap H$ и того факта, что согласно 4) смешанный объем пар (Δ'_i, Δ''_i) равен смешанному объему многогранников $\Delta'_i \setminus \Delta''_i$, если $\Delta'_i \setminus \Delta''_i$ выпуклые.

В частности, получаем известный способ вычислять обычный смешанный объем индукцией по размерности.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – ограниченные многогранники, $*$ $\in \Delta_1$. Тогда

$$\text{Vol}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in (\Delta_2 + \dots + \Delta_n)^*} ((\gamma, *) - \Delta_1(\gamma)) \text{Vol}(\Delta_2^\gamma, \dots, \Delta_n^\gamma).$$

§ 5. Гладкие торические многообразия

По каждому простому вееру Γ в $\mathbb{R}^n$ можно построить n -мерное гладкое торическое многообразие $\mathbb{T}^\Gamma$ (конструкция и ее свойства описаны в [13]). Орбиту, соответствующую конусу $\Sigma \in \Gamma$, будем обозначать $\mathbb{T}^{\{\Sigma\}}$. Для простого веера Γ в $\mathbb{R}^n$ целочисленные функции на $|\Gamma| \cap \mathbb{Z}^n$, ограничение которых на каждый конус линейно, образуют группу по сложению, и фактор этой группы по подгруппе линейных функций естественно изоморфен $\text{Pic } \mathbb{T}^\Gamma$ (доказательство в [13]). Выбор линейной функции ϕ из класса, соответствующего данному линейному расслоению $\mathcal{J}$, соответствует выбору тривиализации на большом торе $\Gamma(\mathbb{T}^n, \mathcal{J}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}^n, \mathcal{O}) = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}]$ (такая тривиализация всегда существует, так как $\text{Pic } \mathbb{T}^n = 0$). Через $\Gamma(M, \mathcal{J})$ здесь и далее обозначается группа глобальных алгебраических (аналитических) сечений расслоения $\mathcal{J}$.

Если носитель веера Γ выпуклый, а функция ϕ выпукла вверх (и, следовательно, является опорной функцией некоторого многогранника), то $\mathcal{J}$ порождается глобальными сечениями и его сечение с замыкания любой орбиты многообразия $\mathbb{T}^\Gamma$ продолжается до глобального. В этом случае группа сечений описывается следующим образом.

Для целочисленного многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathbb{C}[\Delta]$ аддитивную подгруппу группового кольца $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, порожденную целыми точками Δ . Пусть Γ – совместимый с Δ простой веер в $(\mathbb{R}^n)^*$ (имеющий выпуклый носитель), $\mathbb{T}^\Gamma$ – соответствующее гладкое торическое многообразие, $\mathcal{J}_\Delta$ – соответствующее (выпуклой вверх) опорной функции многогранника Δ линейное расслоение на $\mathbb{T}^\Gamma$ с фиксированной тривиализацией ограничения на большой тор. Тогда группа глобальных сечений $\mathcal{J}_\Delta$ естественно изоморфна $\mathbb{C}[\Delta]$. Этот естественный изоморфизм также обозначим через $\mathcal{J}_\Delta: \mathbb{C}[\Delta] \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}^\Gamma, \mathcal{J}_\Delta)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – целочисленные многогранники, Γ в $(\mathbb{R}^n)^*$ – совместимый с ними простой веер, $s_i \in \mathcal{J}_{\Delta_i} \mathbb{C}[\Delta_i]$ – сечения расслоений на $\mathbb{T}^\Gamma$, соответствующих Δ_i . Тогда $\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n]$ не зависит от выбора Γ .

Далее индексы пересечений такого вида будут использоваться без указания торического многообразия, на котором рассматриваются линейные расслоения.

У рассмотренных полиномиальных объектов есть аналитические аналоги. Максимальное компактное объединение орбит торического многообразия $\mathbb{T}^\Gamma$ назовем *компактной частью* $\mathbb{T}^\Gamma$ и обозначим через $\mathbb{T}_c^\Gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Группа $\mathbb{C}\{\Delta\}$ – это группа сумм $\sum_{a \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n} c_a x^a$ (с бесконечным, вообще говоря, количеством ненулевых слагаемых), образы частичных сумм которых при изоморфизме $\mathcal{J}_\Delta: \mathbb{C}[\Delta] \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}^\Gamma, \mathcal{J}_\Delta)$ равномерно сходятся в окрестности компактной части $\mathbb{T}_c^\Gamma \subset \mathbb{T}^\Gamma$, где простой веер Γ совместим с Δ . Соответствующую многограннику Δ тривиализацию группы ростков аналитических сечений линейного расслоения $\mathcal{J}_\Delta$ на $(\mathbb{T}^\Gamma, \mathbb{T}_c^\Gamma)$ будем также обозначать $\mathcal{J}_\Delta: \mathbb{C}\{\Delta\} \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}^\Gamma, \mathcal{J}_\Delta)$.

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора веера Γ . Далее многообразие $\mathbb{T}^\Gamma$ будем рассматривать как росток $(\mathbb{T}^\Gamma, \mathbb{T}_c^\Gamma)$, группу $\mathcal{J}_\Delta \mathbb{C}\{\Delta\}$ – как группу ростков сечений ростка линейного расслоения $\mathcal{J}_\Delta$ на $(\mathbb{T}^\Gamma, \mathbb{T}_c^\Gamma)$. При этом для компактных торических многообразий (т.е. для полных вееров и ограниченных многогранников) $\mathbb{T}^\Gamma = \mathbb{T}_c^\Gamma$ и $\mathbb{C}\{\Delta\} = \mathbb{C}[\Delta]$.

Укажем в удобной нам форме несколько очевидных фактов о характеристических классах линейных расслоений на торических многообразиях.

ЛЕММА 4. Пусть целочисленные многогранники $\tilde{\Delta} \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n$ совместимы с простым веером $\tilde{\Gamma}$ в $(\mathbb{R}^n)^*$. Пусть $\tilde{s} \in \mathcal{J}_{\tilde{\Delta}} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}\}$ и $s = \mathcal{J}_\Delta \mathcal{J}_{\tilde{\Delta}}^{-1} \tilde{s} \in \mathcal{J}_\Delta \mathbb{C}\{\Delta\}$ – сечения соответствующих линейных расслоений на $\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}}$. Тогда

$$[s] = [\tilde{s}] + \sum_{\gamma \in (\sum_i \Delta_i + \sum_i \tilde{\Delta}_i)^*} (\tilde{\Delta}(\gamma) - \Delta(\gamma)) [\mathbb{T}^{\text{Star Con}(\gamma)}].$$

ЛЕММА 5. Пусть Δ – многогранник, совместимый с простым веером Γ , соответствующее ему линейное расслоение $\mathcal{J}_\Delta$ тривиально (т.е. Δ – конус, двойственный к $|\Gamma|$) и $s \in \mathcal{J}_\Delta \mathbb{C}\{\Delta\}$. Тогда $\text{ind } \alpha \cap [s] = 0$ для любого одномерного цикла $\alpha \in C_1(\mathbb{T}_c^\Gamma)$.

Рассмотрим теперь несколько многогранников $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_k$, совместимых с простым веером $\tilde{\Gamma}$, и ростки сечений $\tilde{s}_i \in \mathcal{J}_{\tilde{\Delta}_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Следующая лемма вытекает из теоремы 2.

ЛЕММА 6. Пусть $\Theta \in \tilde{\Gamma}$, $\text{codim } \Theta = k$ и замыкание $\mathbb{T}^{\text{Star } \Theta}$ орбиты $\mathbb{T}^{\{\Theta\}}$ компактно. Тогда

$$\text{ind}[\tilde{s}_1] \cap \dots \cap [\tilde{s}_k] \cap [\mathbb{T}^{\text{Star } \Theta}] = k! \text{Vol}(\tilde{\Delta}_1^\Theta, \dots, \tilde{\Delta}_k^\Theta),$$

где Vol – k -мерный смешанный объем, а через $\tilde{\Delta}_i^\Theta$ обозначена грань $\tilde{\Delta}_i^\gamma$ многогранника $\tilde{\Delta}_i$, опорная для ковектора γ из внутренности Θ (или порождающе-го Θ при $k = 1$).

§ 6. Главные части

Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и для любого $s = \sum_{a \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n} c_a x^a \in \mathbb{C}[\Delta]$, где $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – целочисленный многогранник, $c_a \in \mathbb{C}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x^a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, обозначим

$$s|_A = \sum_{a \in A \cap \mathbb{Z}^n} c_a x^a \in \mathbb{C}[\Delta].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $\tilde{\Delta}$ – многогранник и $s \in \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}\}$. Главной частью s относительно $\tilde{\Delta}$ называется полином $s|_{\partial \tilde{\Delta}} \in \mathbb{C}[\partial \tilde{\Delta}]$. (Напомним, что диаграмма Ньютона $\partial \tilde{\Delta}$ – это объединение ограниченных граней многогранника $\tilde{\Delta}$.)

Для данного $s \in \mathbb{C}\{\Delta\}$ *многогранником Ньютона* Δ_s сечения s назовем минимальный совместимый с Δ многогранник $\tilde{\Delta}$ такой, что $s \in \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}\}$. (Напомним, что многогранники называются совместимыми, если области определения их опорных функций совпадают.)

Сформулируем несколько утверждений о сечениях линейных расслоений на торическом многообразии с главными частями общего положения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – целочисленные многогранники с областью определения $\Gamma_0 \subset (\mathbb{R}^n)^*$ опорных функций. Назовем этот набор многогранников *удобным*, если для каждого γ из границы Γ_0 найдется множество $I_\gamma \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что

- 1) $\dim \sum_{i \in I_\gamma} \tilde{\Delta}_i^\gamma \leq |I_\gamma|$,
- 2) $\tilde{\Delta}_i(\gamma) = \Delta_i(\gamma)$ для всех $i \in I_\gamma$.

Назовем его *очень удобным*, если $I_\gamma \subset \{2, \dots, n\}$ при всех $\gamma \neq 0$.

Например, если $\tilde{\Delta}_i \setminus \Delta_i$ ограничены при $i = 2, \dots, n$, то набор многогранников очень удобный.

Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – целочисленные многогранники, $\Gamma_0 \subset (\mathbb{R}^n)^*$ – область определения их опорных функций, $s_i \in \mathbb{C}[\partial \tilde{\Delta}_i] \subset \mathbb{C}[\Delta_i]$. Для конуса Γ_0 обозначим через $\text{Int } \Gamma_0$ и $d\Gamma_0$ внутреннюю часть и границу Γ_0 соответственно. Ковектор $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^*$ назовем *примыкающим* к $\delta \in (\mathbb{R}^n)^*$ относительно многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, если $\Delta^\gamma \subset \Delta^\delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – целочисленные многогранники с областью определения $\Gamma_0 \subset (\mathbb{R}^n)^*$ опорных функций. Назовем $(s_1, \dots, s_n)$ *набором невырожденных главных частей относительно многогранников* Δ_i , $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, n$, если для любого ковектора $\delta \in d\Gamma_0$ и для любого $\gamma \in \text{Int } \Gamma_0$, примыкающего к нему относительно Δ_i , $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, n$, существует множество $I \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что

- 1) полиномы Лорана $s_i|_{\tilde{\Delta}_i^\gamma}$, $i \in I$, не имеют общих нулей на $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$,
- 2) $\tilde{\Delta}_i(\delta) = \Delta_i(\delta)$ для всех $i \in I$.

Назовем набор главных частей *сильно невырожденным*, если $I \subset \{2, \dots, n\}$ при всех $\delta \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Очевидно, что (сильная) невырожденность является условием общего положения на главные части набора $(s_1, \dots, s_n)$, $s_i \in \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$, относительно многогранников $\tilde{\Delta}_i$, когда набор многогранников $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, является (сильно) удобным. Доказательство следует из леммы Сарда (как, например, в [17; гл. II, § 6.2]).

Обозначим через $\tilde{\Sigma}$ множество наборов $(s_1, \dots, s_n)$, $s_i \in \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$, с вырожденными главными частями.

Пусть простой веер Γ совместим с многогранниками Δ_i , $i = 1, \dots, n$. Множество $\{s_1 = \dots = s_n = 0\} \setminus \mathbb{T}_\Gamma^*$ пусто для всех наборов

$$(s_1, \dots, s_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\} \setminus \tilde{\Sigma}$$

(для доказательства нужно рассмотреть торическое разрешение $\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \mathbb{T}^{\Gamma}$ для простого веера $\tilde{\Gamma}$, совместимого с $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, n$). Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если набор многогранников $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, удобный, то $\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n]$ корректно определен и одинаков для всех наборов $(s_1, \dots, s_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\} \setminus \tilde{\Sigma}$.

Также с помощью торического разрешения доказывается

ЛЕММА 7. Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – очень удобный набор многогранников, простой веер Γ в $(\mathbb{R}^n)^*$ совместим с Δ_i , $i = 1, \dots, n$. Пусть набор главных частей сечений $s_i \in \mathcal{S}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$ относительно $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, n$, сильно невырожден. Тогда

- 1) $\{s_1 = \dots = s_n = 0\} \subset \mathbb{T}_c^{\Gamma}$ и множество $\{s_2 = \dots = s_n = 0\} \setminus \mathbb{T}_c^{\Gamma}$ содержится в большом торе;
- 2) если $\tilde{\Gamma}$ – простой веер в $(\mathbb{R}^n)^*$, совместимый с $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, n$, $\tilde{s}_i \in \mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$ – ростки сечений соответствующих линейных расслоений на $(\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}}, \mathbb{T}_c^{\tilde{\Gamma}})$ такие, что $s_i = \mathcal{S}_{\Delta_i} \mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_i}^{-1} \tilde{s}_i$, то некомпактные замыкания орбит в $\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}}$ (кроме самого $\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}}$) не пересекаются с $\{\tilde{s}_2 = \dots = \tilde{s}_n = 0\}$.

Простейший пример описанных объектов – многогранник Ньютона особой точки функции [12], [5]. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – положительный октант $\mathbb{R}_+^n$, $(\mathbb{T}^{\Gamma}, \mathbb{T}_c^{\Gamma})$ – росток $(\mathbb{C}^n, 0)$, $\mathcal{S}_{\Delta}$ – росток линейного расслоения с естественной тривиализацией на большом торе, росток функции f на $(\mathbb{C}^n, 0)$ – его сечение, тогда Δ_f – многогранник Ньютона особой точки f . Для многогранников $\Delta_i \subset \mathbb{R}_+^n$, $i = 1, \dots, n$, набор (Δ, Δ_i) , $i = 1, \dots, n$, удобен, если с каждой k -мерной координатной плоскостью пересекаются хотя бы k многогранников из $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, и очень удобен, если то же верно для $\Delta_2, \dots, \Delta_n$ при $k < n$.

§ 7. Индексы пересечения на торических многообразиях

Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – удобный набор многогранников, Δ_i совместимы с простым веером Γ в $(\mathbb{R}^n)^*$, $s_i \in \mathcal{S}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$. Если набор главных частей s_i относительно $\tilde{\Delta}_i$ невырожден, то $\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n]$ корректно определен и может быть выражен в терминах многогранников Δ_i , $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, n$. Сначала разберем частный случай.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. 1) Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – сильно удобный набор многогранников с областью определения опорных функций $\Gamma_0 \subset (\mathbb{R}^n)^*$, $s_i \in \mathcal{S}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$ и расслоение $\mathcal{S}_{\Delta_1}$ тривиально (т.е. Δ_1 – двойственный конус к Γ_0). Если набор главных частей s_i относительно $\tilde{\Delta}_i$ сильно невырожден, то

$$\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n] = (n-1)! \sum_{\gamma \in (\tilde{\Delta}_2 + \dots + \tilde{\Delta}_n)^*} (\tilde{\Delta}_1(\gamma) - \Delta_1(\gamma)) \text{Vol}(\tilde{\Delta}_2^{\gamma}, \dots, \tilde{\Delta}_n^{\gamma}).$$

2) В случае произвольного набора главных частей индекс не меньше указанного выражения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) достаточно доказать в случае, когда набор главных частей s_i относительно $\tilde{\Delta}_i$ в общем положении, тогда по лемме 7 то же будет верно для всех сильно невырожденных наборов главных частей. Для доказательства рассмотрим простой веер $\tilde{\Gamma}$ в $(\mathbb{R}^n)^*$, совместимый с $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, и представим $[s_i]$ по лемме 4 в виде

$$[\tilde{s}_i] + \sum_{\gamma - \text{примитивный}, \text{Con}(\gamma) \in \tilde{\Gamma}} (\tilde{\Delta}_i(\gamma) - \Delta_i(\gamma)) [\mathbb{T}^{\text{Star Con}(\gamma)}],$$

где $\tilde{s}_i \in \mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$ – ростки сечений соответствующих линейных расслоений на $(\mathbb{T}_c^{\tilde{\Gamma}}, \mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}})$ такие, что $s_i = \mathcal{S}_{\Delta} \mathcal{S}_{\tilde{\Delta}}^{-1} \tilde{s}_i$.

Обозначим

$$\begin{aligned} t_c^i &= \sum_{\gamma - \text{примитивный}, \gamma \in \text{Int } \Gamma_0} (\tilde{\Delta}_i(\gamma) - \Delta_i(\gamma)) [\mathbb{T}^{\text{Star Con}(\gamma)}], \\ t_o^i &= \sum_{\gamma - \text{примитивный}, \gamma \in d\Gamma_0} (\tilde{\Delta}_i(\gamma) - \Delta_i(\gamma)) [\mathbb{T}^{\text{Star Con}(\gamma)}]. \end{aligned}$$

По лемме 7, 1) носитель цикла $[s_2] \cap \dots \cap [\widehat{s_j}] \cap \dots \cap [s_n] \cap t_o^j$ содержится в компактной части торического многообразия. Очевидно, носитель $[s_2] \cap \dots \cap [\widehat{s_j}] \cap \dots \cap [s_n] \cap t_c^j$ также содержится в компактной части торического многообразия. Поэтому $\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [\widehat{s_j}] \cap \dots \cap [s_n] \cap (t_o^j + t_c^j) = 0$ при $j = 2, \dots, n$ по лемме 5. Отсюда следует, что

$$\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n] = \text{ind}[s_1] \cap [\tilde{s}_2] \cap \dots \cap [\tilde{s}_n] = \text{ind } t_c^1 \cap [\tilde{s}_2] \cap \dots \cap [\tilde{s}_n]$$

(по лемме 7, 2)). Полученное выражение вычисляется с помощью леммы 6.

Доказательство п. 2) следует из того, что по лемме 8 в обозначениях доказательства п. 1) в случае произвольных главных частей $\text{ind}[\tilde{s}_1] \cap \dots \cap [\tilde{s}_n] \geq 0$.

ЛЕММА 8. Пусть $\Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – набор совместимых многогранников, $s_i \in \mathcal{S}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\Delta_i\}$ и $\{s_1 = \dots = s_n = 0\}$ компактно, тогда

$$\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n] \geq 0.$$

Доказательство леммы легко получить, рассмотрев шевеления данных пар многогранников аналогично доказательству утверждения 4.

Теперь обобщим вычисление индекса пересечения из утверждения 3 на случай произвольного удобного набора многогранников. Для этого дадим следующее определение (напомним, что совместимыми называются многогранники, у которых совпадают области определения опорных функций).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Шевелением данной совместимой пары многогранников $\tilde{\Delta} \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n$ назовем любую пару многогранников $\tilde{\Delta}' \subset \Delta' = \Delta \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$ такую, что $\tilde{\Delta}' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \tilde{\Delta}$ и проекция $\Delta' \setminus \tilde{\Delta}'$ на $\mathbb{R}^1$ ограничена.

Очевидно, $\tilde{\Delta}'$ и Δ' совместимы. Например, простейшее шевеление – минимальная выпуклая оболочка $(\tilde{\Delta} \times \{0\}) \cup (\Delta \times \{1\})$ и совместимый с ней многогранник $\Delta \times \mathbb{R}_+^1$. Из определений вытекает

ЛЕММА 9. *Шевеление удобного набора многогранников с областью определения опорных функций Γ_0 будет сильно удобным, если в начало набора добавить пару многогранников $\Gamma_0^* \times (\mathbb{R}_+^1 + 1) \subset \Gamma_0^* \times \mathbb{R}_+^1$, где Γ_0^* – двойственный конус к Γ_0 .*

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – удобный набор многогранников, $s_i \in \mathcal{J}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$. Если набор главных частей s_i относительно $\tilde{\Delta}_i$ невырожден, то*

$$\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n] = \sum_{\gamma \in (\tilde{\Delta}'_1 + \dots + \tilde{\Delta}'_n)^*} n! (\gamma, E) \text{Vol}((\tilde{\Delta}'_1)^\gamma, \dots, (\tilde{\Delta}'_n)^\gamma),$$

где $\tilde{\Delta}'_i \subset \Delta'_i \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$ – целочисленные шевеления пар многогранников $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i$, $E = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$. Если в тех же условиях набор главных частей вырожден, то индекс не меньше указанного выражения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в утверждении 3, достаточно рассмотреть случай главных частей общего положения. Пусть Γ – простой веер, совместимый с $\Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{I}$ – (единственный) веер, совместимый с $\mathbb{R}_+^1 \subset \mathbb{R}^1$, тогда $\mathbb{T}^{\Gamma \oplus \mathbb{I}} = \mathbb{T}^\Gamma \times \mathbb{C}$, $\mathbb{T}_c^{\Gamma \oplus \mathbb{I}} = \mathbb{T}_c^\Gamma \times \{0\}$, $\mathbb{C}[\Delta'_i] = \mathbb{C}[\Delta_i \times \mathbb{R}_+^1] = \mathbb{C}[\Delta] \otimes \mathbb{C}[\varepsilon]$, где ε – параметр на $\mathbb{T}^1 = \mathbb{C}$, поднятие которого на $\mathbb{T}^{\Gamma \oplus \mathbb{I}}$ также обозначим через ε . При этом $[\varepsilon] = [\mathbb{T}^\Gamma] \in C_n(\mathbb{T}^{\Gamma \oplus \mathbb{I}})$, так как $[\varepsilon] = \{[0]\} \in C_0(\mathbb{C})$.

Выберем $s'_i \in \mathcal{J}_{\Delta'_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}'_i\}$ такие, что $(\mathcal{J}_{\Delta'_i}^{-1} s'_i)|_{\tilde{\Delta}_i} = \mathcal{J}_{\Delta_i}^{-1} s_i$ и набор $\varepsilon, s'_1, \dots, s'_n$ имеет невырожденный набор главных частей относительно $(\mathbb{R}_+^1 + 1), \Delta'_1, \dots, \Delta'_n$. Это возможно для s_i с главными частями общего положения, так как малый образ множества вырожденных наборов главных частей $\varepsilon, s'_1, \dots, s'_n$ при естественной проекции $\prod_{i=1}^n \mathbb{C}[\partial \tilde{\Delta}'_i] \times \mathbb{C}[\mathbb{R}_+^1 + 1] \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{C}[\partial \tilde{\Delta}_i]$ имеет меру нуль (если бы малый образ множества был плотен, то и само множество было бы плотно; напомним, что малый образ множества M – максимальное множество, прообраз которого содержится в M).

Так как

$$\begin{aligned} \text{ind}[\varepsilon] \cap [s'_1] \cap \dots \cap [s'_n] &= \text{ind}[\mathbb{T}^\Gamma] \cap [s'_1] \cap \dots \cap [s'_n] = \text{ind}[s'_1|_{\mathbb{T}^\Gamma} \cap \dots \cap [s'_n|_{\mathbb{T}^\Gamma}]] \\ &= \text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n], \end{aligned}$$

то для доказательства осталось вычислить $\text{ind}[\varepsilon] \cap [s'_1] \cap \dots \cap [s'_n]$ с помощью утверждения 3 (это можно сделать по лемме 9).

Идея такого применения шевелений не новая – она применялась в первых работах по связи кратностей и многогранников Ньютона (например, в [14]). Теперь сформулируем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, – такой набор многогранников с областью определения опорных функций Γ_0 , что $\Delta_i \setminus \tilde{\Delta}_i$ ограничены, и пусть $s_i \in \mathcal{J}_{\Delta_i} \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$. Если набор главных частей s_i относительно $\tilde{\Delta}_i$ невырожден, то

$$\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n] = n! \text{Vol}_{\Gamma_0}(\Delta_1, \tilde{\Delta}_1; \dots; \Delta_n, \tilde{\Delta}_n),$$

где Vol_{Γ_0} – смешанный объем пар многогранников (определение 7). Если в тех же условиях набор главных частей вырожден, то индекс не меньше указанного выражения.

2) Если в условиях первого пункта $\tilde{\Delta}_i = \tilde{\Delta}$, $\Delta_i = \Delta$ при $i = 1, \dots, n$, то

$$\text{ind}[s_1] \cap \dots \cap [s_n] = n! V_n(\Delta \setminus \tilde{\Delta}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 2) очевидно следует из 1). Пункт 1) следует из утверждения 4, примененного к некоторым специальным шевелениям данных пар многогранников. А именно рассмотрим выпуклые оболочки множеств $(\tilde{\Delta}_i \times \{0\}) \cup (\Delta_i \times \{a_i\}) \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$, $a_i \in \mathbb{N}$, которые обозначим через $\tilde{\Delta}'_i$, и назовем длинными те их ограниченные грани, которые пересекаются и с $\tilde{\Delta}_i \times \{0\}$, и с $\Delta_i \times \{a_i\}$. Множество опорных ковекторов к длинным граням многогранника $\tilde{\Delta}'_i$ – график однородной кусочно линейной функции на области определения опорной функции $\tilde{\Delta}_i$. Эта функция равна нулю на границе области определения и больше нуля на внутренности. Поэтому можно выбрать последовательность $a_i \gg a_{i-1}$ возрастающей настолько быстро, чтобы опорные ковекторы длинных граней многогранников $\tilde{\Delta}'_i$ были попарно различны для разных i . Применяя лемму 1 к каждому слагаемому ответа, который дает утверждение 4 для набора шевелений вида $\tilde{\Delta}'_i \subset \Delta'_i = (\Delta_i \times \mathbb{R}^1_+)$, получаем, что $(\gamma, E) \text{Vol}((\tilde{\Delta}'_1)^\gamma, \dots, (\tilde{\Delta}'_n)^\gamma)$ равно

$$n(\tilde{\Delta}_i(\gamma) - \Delta_i(\gamma)) \text{Vol}(\Delta_1^\gamma, \dots, \Delta_{i-1}^\gamma, \tilde{\Delta}_{i+1}^\gamma, \dots, \tilde{\Delta}_n^\gamma),$$

если $(\tilde{\Delta}'_i)^\gamma$ – длинная грань для некоторого i , и равно нулю в остальных случаях.

§ 8. Результирующие циклы

Рассмотрим конечные множества $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^n$, $i \in I$, и выберем совместимый с многогранниками $\text{Span } \Sigma_i$ простой веер Γ . На компактном многообразии $\mathbb{T}^\Gamma$ рассмотрим линейные расслоения $\mathcal{S}_{\text{Span } \Sigma_i}$, их тривиализации

$$\mathcal{S}_{\text{Span } \Sigma_i} : \mathbb{C}[\text{Span } \Sigma_i] \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}_{\text{Span } \Sigma_i})$$

и подпространства $\mathbb{C}[\Sigma_i] \subset \mathbb{C}[\text{Span } \Sigma_i]$, порожденные образующими $\mathbb{C}[\text{Span } \Sigma_i]$, соответствующими точкам из Σ_i . Пусть s – тавтологическое сечение расслоения $\pi_0^* \bigoplus_{i \in I} \mathcal{S}_{\text{Span } \Sigma_i}$ на произведении $\mathbb{T}^\Gamma \times \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[\Sigma_i]$, заданное условием $s|_{\mathbb{T}^\Gamma \times \sum_{i \in I} a_i} = \sum_{i \in I} \mathcal{S}_{\text{Span } \Sigma_i} a_i$ при любых $a_i \in \mathbb{C}[\Sigma_i]$, $i \in I$ (π_0 и π_1 – проекции $\mathbb{T}^\Gamma \times \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[\Sigma_i]$ на множители).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Обозначим через $R(\{\Sigma_i\}_{i \in I})$ цикл

$$(\pi_1)_*[s] \in C\left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[\Sigma_i]\right).$$

Его прообраз при любом отображении f в $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[\Sigma_i]$ будем называть *результантным циклом, заданным отображением f* .

Цикл $R(\{\Sigma_i\}_{i \in I})$ не зависит от выбора простого веера, так как любые два веера можно подразбить до общего простого и рассмотренное выше тавтологическое сечение естественно относительно перехода к торическому многообразию,

заданному подразбиению веера. Пересечение результатных циклов

$$\begin{aligned} f^*R(\{\Sigma_i\}_{i \in I}), \quad \Sigma_i \subset \mathbb{Z}^n, \quad f: M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[\Sigma_i], \\ g^*R(\{\Sigma_j\}_{j \in J}), \quad \Sigma_j \subset \mathbb{Z}^m, \quad g: M \rightarrow \bigoplus_{j \in J} \mathbb{C}[\Sigma_j], \end{aligned}$$

на многообразии M – результатный цикл

$$(f \oplus g)^*R(\{\Sigma_k\}_{k \in I \sqcup J}), \quad \Sigma_k \subset \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m, \quad f \oplus g: M \rightarrow \bigoplus_{k \in I \sqcup J} \mathbb{C}[\Sigma_k].$$

В дальнейшем понадобится следующее выражение для индекса нульмерного результатного цикла (или нульмерного пересечения результатных циклов).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть f в обозначениях определения 13 – росток отображения из $(\mathbb{C}^m, 0)$ в $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[\Sigma_i]$. Тогда

$$f^*R(\{\Sigma_i\}_{i \in I}) = (\text{id} \times f)^*[s],$$

где $(\text{id} \times f)$ – росток отображения из $(\mathbb{T}^\Gamma \times \mathbb{C}^m, \mathbb{T}^\Gamma \times \{0\})$ в $\mathbb{T}^\Gamma \times \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}[\Sigma_i]$. В частности, при $m = n$

$$\text{ind } f^*R(\{\Sigma_i\}_{i \in I}) = \text{ind}(\text{id} \times f)^*[s]$$

и обе части равенства определены одновременно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если носитель ростка $f^*R(\{\Sigma_i\}_{i \in I})$ – точка, то носитель $\bigcap_{i=1}^{n+k} (\text{id} \times f)^*[s_i]$ – компакт (не обязательно нульмерный).

Доказательство утверждения следует из естественных свойств топологических циклов.

Наиболее интересен для нас следующий частный случай результатного цикла. Пусть $\Delta_m \subset \mathbb{Z}^{m-1}$ – множество вершин целочисленного симплекса минимального положительного объема. Тогда $\mathbb{C}[\Delta_m]^{\oplus k}$ – пространство $(k \times m)$ -матриц и $R(\underbrace{\Delta_m, \dots, \Delta_m}_k) = [\Sigma_{k \times m}]$ – фундаментальный цикл множества вырожденных матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Детерминантным циклом, заданным матрицей Ω , назовем цикл $\Omega^*([\Sigma_{k \times m}])$, где Ω – $(k \times m)$ -матрица голоморфных функций на гладком многообразии M (т.е. голоморфное отображение из M в $\mathbb{C}[\Delta_m]^{\oplus k}$).

Носитель цикла $\Omega^*([\Sigma_{k \times m}])$ – множество точек, в которых ранг матрицы Ω меньше максимального.

Следующая очевидная лемма представляет индекс Гусейн-Заде–Эбелинга набора ростков сечений векторных расслоений (определение 1) как индекс пересечения детерминантных циклов.

ЛЕММА 10. Пусть $w^{i,j}$, $i = 1, \dots, I_j$, – сечения ростка векторного расслоения ранга k_j на ростке $(\mathbb{C}^n, 0)$, $j = 1, \dots, J$, $\sum_j (k_j - I_j + 1) = n$, и только в нуле для каждого j набор $w^{i,j}$, $i = 1, \dots, I_j$, линейно зависим. Зафиксируем

тривиализации ростков расслоений. Тогда индекс Гусейн-Заде–Эбелинга набора ростков сечений $w_{i,j}$ равен индексу пересечения детерминантных циклов

$$\left(\begin{matrix} w^{1,j} \\ \vdots \\ w^{I_j,j} \end{matrix} \right)^* ([\Sigma_{k_j} \times I_j]), \quad j = 1, \dots, J.$$

§ 9. Индекс пересечения результатных циклов

Напомним, что через $\mathbb{C}^n$ обозначается n -мерное комплексное пространство с системой координат $(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{Z}^n$ везде отождествляется с множеством мономов от $x_1, \dots, x_n$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^n$ – положительный октант. Для упрощения обозначений мы не будем различать векторное пространство $\mathbb{R}^n$ с естественной системой координат и двойственное к нему.

Индексы нульмерных результатных циклов (и, следовательно, нульмерных пересечений результатных циклов), заданных функциями с главными частями общего положения, вычисляются в терминах многогранников Ньютона следующим образом. Пусть дан росток результатного цикла $\bar{f}^*R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$, где $\bar{f}: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^I \mathbb{C}[\Sigma_i]$, $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \dots, I$. Обозначим через $Z = \{z_1, \dots, z_M\}$ множество пар вида (i, a) , где $a \in \Sigma_i$. В $\bigoplus_{i=1}^I \mathbb{C}[\Sigma_i]$ существует естественная система координат, занумерованных множеством Z . В этой системе координат $\bar{f} = (f_{z_1}, \dots, f_{z_M})$. Пусть $f_z \in \mathbb{C}\{N_z\} \subset \mathbb{C}\{\mathbb{R}_+^n\}$, где $N_z \subset \mathbb{R}_+^n$ – целочисленные многогранники. Рассмотрим целочисленные многогранники $\Delta_i = \text{Span } \Sigma_i \times \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^n$ и содержащиеся в них многогранники $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i$, которые являются выпуклыми оболочками множеств

$$\bigcup_{z=(i,a) \in Z} \{a\} \times N_z \subset \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^n.$$

В группе $\mathbb{C}\{\Delta_i\} = \mathbb{C}[\text{Span } \Sigma_i] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\mathbb{R}_+^n\}$ рассмотрим элементы

$$F_i = \sum_{a \in \Sigma_i} a \otimes f_{(i,a)}, \quad i = 1, \dots, I.$$

Очевидно, $F_i \in \mathbb{C}\{\tilde{\Delta}_i\}$. Следующая теорема сводит индексы пересечений результатных циклов к индексам пересечений дивизоров на торических многообразиях.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (в предыдущих условиях) $n = I - N$ и набор многогранников $\tilde{\Delta}_i \subset \Delta_i$ удобный.

1) Невырожденность набора главных частей F_i относительно $\tilde{\Delta}_i$ (в смысле определения 11) – условие общего положения на главные части f_z относительно N_z , $z \in Z$.

2) Для набора F_i с невырожденными главными частями относительно $\tilde{\Delta}_i$ цикл $\bar{f}^*R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$ нульмерный, его индекс корректно определен и равен $\text{ind } \bigcap_{i=1}^I [\mathcal{J}_{\Delta_i} F_i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) очевиден. Выберем простой веер Γ , совместимый с многогранником $\text{Span } \Sigma_i$, $i \in I$. Рассмотрим торическое многообразие $\mathbb{C}^n \times \mathbb{T}^\Gamma$, соответствующее вееру Γ , умноженному на положительный октант (он совместим с многогранниками Δ_i), тогда $\mathcal{J}_{\Delta_i} F_i$ – сечения расслоений $\mathcal{J}_{\Delta_i}$ на нем. Пусть s – тавтологическое сечение на $\prod_{i=1}^I \mathbb{C}[\Sigma_i] \times \mathbb{T}^\Gamma$, тогда $\bigcap_{i=1}^I [\mathcal{J}_{\Delta_i} F_i] = (\bar{f} \times \text{id})^*[s]$. Теперь п. 2) доказывается применением утверждения 5.

ТЕОРЕМА 5. 1) Пусть в условиях теоремы 4 главные части f_z относительно N_z , $z \in Z$, находятся в общем положении (в смысле п. 1) теоремы 4) и множества $\mathbb{R}_+^n \setminus N_{(i,a)}$ ограничены, когда a – вершина $\text{Span } \Sigma_i$. Тогда

$$\text{ind } \bar{f}^* R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I) = I! \text{Vol}_{\Gamma_0}(\Delta_1, \tilde{\Delta}_1; \dots; \Delta_I, \tilde{\Delta}_I),$$

где Γ_0 – область определения опорных функций многогранников Δ_i , $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, I$, а Vol_{Γ_0} – смешанный объем пар многогранников (определение 7).

2) Пусть в условиях п. 1) для каждого $i = 1, \dots, I$ многогранники $N_{(i,a)}$, $a \in \Sigma_i \cap \mathbb{Z}^N$, одинаковы и равны N_i , причем множества $\mathbb{R}_+^n \setminus N_i$ ограничены. Тогда $\text{ind } \bar{f}^* R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$ равен

$$(n-1)! N! \sum_{\substack{\{j_1, \dots, j_n\} \sqcup \{i_1, \dots, i_N\} = \{1, \dots, I\} \\ j_1 \leq \dots \leq j_n}} \text{Vol}(\text{Span } \Sigma_{i_1}, \dots, \text{Span } \Sigma_{i_N}) \\ \times \sum_{\gamma \in (N_{j_2} + \dots + N_{j_n})^*} N_{j_1}(\gamma) \text{Vol}((N_{j_2})^\gamma, \dots, (N_{j_n})^\gamma).$$

3) Пусть в условиях п. 1) все Σ_i , $i = 1, \dots, I$, одинаковы и равны Σ , для каждого $a \in \Sigma$ все многогранники $N_{i,a}$ одинаковы и равны N_a и для всех вершин a многогранника $\text{Span } \Sigma$ множества $\mathbb{R}_+^n \setminus N_a$ ограничены, тогда все $\tilde{\Delta}_i = \tilde{\Delta}$ одинаковы, все $\Delta_i = \Delta$ одинаковы и $\text{ind } \bar{f}^* R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I) = I! \text{Vol}(\Delta \setminus \tilde{\Delta})$.

Если в условиях каждого из трех пунктов набор главных частей вырожден, то индекс не меньше соответствующего выражения (если существует).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1) и 3) получаются применением теорем 3 и 4. Пункт 2) следует из 1) и определения смешанного объема пар многогранников, так как $\tilde{\Delta}_i = \text{Span } \Sigma_i \times N_i$.

Выведем из теоремы 4 формулу для индекса Гусейн-Заде – Эбелинга 1-формы на изолированной особенности полного пересечения (определение 2) в терминах многогранников Ньютона компонент 1-формы и уравнений полного пересечения (непосредственное применение теоремы 5 дает формулу, в которой участвуют также многогранники Ньютона частных производных уравнений полного пересечения). Введем необходимые обозначения. Пусть $N_i, M_j \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$, – целочисленные многогранники и множества $\mathbb{R}_+^n \setminus N_i$ и $\mathbb{R}_+^n \setminus M_j$ ограничены. Пусть $\Delta_j \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k$ – выпуклая оболочка $(M'_j \times \{(0, \dots, 0)\}) \cup (N_1 \times \{(1, 0, \dots, 0)\}) \cup \dots \cup (N_k \times \{(0, \dots, 0, 1)\})$, где M'_j – многогранник M_j , сдвинутый на 1 в (положительном) направлении j -й координаты в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{res}_{\text{eg}}(N_1, \dots, N_k; M_1, \dots, M_n)$ сумму

$$\sum_{\gamma \in (N_2 + \dots + N_k + \Delta_1 + \dots + \Delta_n)^*} (n+k-1)! N_1(\gamma) \text{Vol}(N_2^\gamma, \dots, N_k^\gamma, \Delta_1^\gamma, \dots, \Delta_n^\gamma).$$

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$, тогда для любого многогранника $N \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через N^I пересечение N с координатной плоскостью $\{z_i = 0, i \notin I\}$, где $(z_1, \dots, z_n)$ – координаты в $\mathbb{R}^n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $f_i \in \mathbb{C}\{N_i\}$, $w_j \in \mathbb{C}\{M_j\}$, тогда индекс Гусейн-Заде–Эбелинга 1-формы $w_1 dx_1 + \dots + w_n dx_n$ на изолированной особенности полного пересечения $f_1 = \dots = f_k = 0$ корректно определен при главных частях f_i и w_j относительно N_i и M_j общего положения и равен

$$\sum_{I=\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{n-m} \text{res}_{\text{eg}}(N_1^I, \dots, N_k^I; M_{i_1}^I, \dots, M_{i_m}^I).$$

В тех же условиях для произвольного набора главных частей индекс не меньше указанного выражения.

Общее положение главных частей означает, что для любого ковектора $\gamma \in \text{Int } \mathbb{R}_+^n$ нуль – неособое значение отображения

$$(f_1|_{N_1^\gamma}, \dots, f_k|_{N_k^\gamma}): (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \rightarrow \mathbb{C}^k,$$

ограничение 1-формы $w_1|_{M_1^\gamma} dx_1 + \dots + w_n|_{M_n^\gamma} dx_n$ на $\{f_1|_{N_1^\gamma} = \dots = f_k|_{N_k^\gamma} = 0\}$ не имеет нулей вне координатного креста и то же верно для ограничения функций $f_1, \dots, f_k$ и 1-формы $w_1 dx_1 + \dots + w_n dx_n$ на каждую координатную плоскость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение для индекса получается применением леммы 10, теоремы 4 и утверждения 3 к слагаемым из правой части равенства

$$\begin{aligned} & \text{ind}(w_1 dx_1 + \dots + w_n dx_n)|_{\{f_1 = \dots = f_k = 0\}} \\ &= \sum_{I=\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{n-m} \text{res}_{\text{eg}}(f_1|_{N_1^I}, \dots, f_k|_{N_k^I}; w_{i_1}|_{M_{i_1}^I}, \dots, w_{i_m}|_{M_{i_m}^I}). \end{aligned}$$

В этом равенстве $\text{ind}(w_1 dx_1 + \dots + w_n dx_n)|_{\{f_1 = \dots = f_k = 0\}}$ – индекс Гусейн-Заде–Эбелинга 1-формы $w_1 dx_1 + \dots + w_n dx_n$ на изолированной особенности полного пересечения $f_1 = \dots = f_n = 0$, а $\text{res}_{\text{eg}}(g_1, \dots, g_k; w_1, \dots, w_m)$ для ростков функций $g_1, \dots, g_k$, $w_1, \dots, w_m$ от переменных $y_1, \dots, y_m$ – вычет Сувы набора сечений $(y_1 w_1, \dots, y_m w_m)$, $\left(y_1 \frac{\partial g_i}{\partial y_1}, \dots, y_m \frac{\partial g_i}{\partial y_m}\right)$, $i = 1, \dots, k$, ростка m -мерного векторного расслоения на ростке полного пересечения $\{g_1 = \dots = g_k = 0\}$ (см. замечание 1). Оценку индекса Гусейн-Заде–Эбелинга 1-формы для произвольных главных частей можно получить из того, что этот индекс – частный случай индекса нульмерного результирующего цикла (лемма 10) и поэтому в случае произвольных главных частей не меньше, чем в случае главных частей общего положения.

У ростка результирующего цикла, заданного функциями с главными частями общего положения, существует торическое разрешение особенностей, обобщающее конструкции, использованные для вычисления индекса нульмерного результирующего цикла в терминах многогранников Ньютона. Пусть в условиях теоремы 4 $n < I - N$, Γ – простой веер, совместимый с многогранниками

$\text{Span } \Sigma_i$, $\tilde{\Gamma}$ – подразбиение суммы $\Gamma \oplus \text{Fan}(\mathbb{R}_+^n)$, совместимое с многогранниками $\tilde{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, I$, $p^{\tilde{\Gamma}}$ – композиция естественных проекций

$$(\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}}, \mathbb{T}_c^{\tilde{\Gamma}}) \rightarrow (\mathbb{T}^{\Gamma \oplus \text{Fan}(\mathbb{R}_+^n)}, \mathbb{T}_c^{\Gamma \oplus \text{Fan}(\mathbb{R}_+^n)}) = \mathbb{T}^{\Gamma} \times (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0).$$

ТЕОРЕМА 6. Для f_z с главными частями относительно N_z , $z \in Z$, общего положения $[\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_1} F_1] \cap \dots \cap [\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_I} F_I] \in C(\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}})$ является фундаментальным циклом гладкого многообразия, а $\tilde{f}^* R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$ является его образом при проективном морфизме $p^{\tilde{\Gamma}}$. Общее положение главных частей означает, что для любого ковектора $\gamma \in (\mathbb{R}^N)^* \times \text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$ нуль – неособое значение отображения $(F_1|_{\tilde{\Delta}_1}, \dots, F_I|_{\tilde{\Delta}_I}): (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+N} \rightarrow \mathbb{C}^I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Здесь фактически построено разрешение $\tilde{f}^* R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$ в смысле Хиронаки. В случае полного пересечения эта теорема превращается в обычную конструкцию торического разрешения [12], [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Сарда для главных частей f_z , $z \in Z$, общего положения орбиты $\mathbb{T}^{\tilde{\Gamma}}$ и дивизоры $\{\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_i} F_i = 0\}$, $i = 1, \dots, I$, пересекаются трансверсально в каждой точке множества $\mathbb{T}_c^{\tilde{\Gamma}} \cap \bigcap_i \{\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_i} F_i = 0\}$ (подробности в [17; гл. II, § 6.2]), и поэтому $\bigcap_i [\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_i} F_i]$ – фундаментальный цикл гладкого многообразия. Равенство $\tilde{f}^* R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I) = p_*^{\tilde{\Gamma}}([\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_1} F_1] \cap \dots \cap [\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}_I} F_I])$ следует из элементарных свойств топологических циклов.

Список литературы

- [1] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, “Indices of 1-forms on an isolated complete intersection singularity”, *Moscow Math. J.*, **3**:2 (2003), 439–455.
- [2] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, “Indices of vector fields or 1-forms and characteristic numbers”, *Bull. London Math. Soc.*, **37**:5 (2005), 747–754.
- [3] T. Suwa, “Residues of Chern classes on singular varieties”, *Franco-Japanese singularities* (CIRM, Marseille–Luminy, France, September 9–13, 2002), Sémin. Congr., **10**, Soc. Math. France, Paris, 2005, 265–285.
- [4] A. G. Kouchnirenko, “Polyèdres de Newton et nombres de Milnor”, *Invent. Math.*, **32**:1 (1976), 1–31.
- [5] A. N. Varchenko, “Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram”, *Invent. Math.*, **37**:3 (1976), 253–262.
- [6] M. Oka, “Principal zeta-function of non-degenerate complete intersection singularity”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **37**:1 (1990), 11–32.
- [7] В. П. Паламонов, “О кратности голоморфного отображения”, *Функц. анализ и его прилож.*, **1**:3 (1967), 54–65.
- [8] Д. Т. Ле, “Вычисление числа Милнора изолированной особенности полного пересечения”, *Функц. анализ и его прилож.*, **8**:2 (1974), 45–49.
- [9] G.-M. Greuel, “Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten”, *Math. Ann.*, **214**:3 (1975), 235–266.
- [10] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.
- [11] А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и род полных пересечений”, *Функц. анализ и его прилож.*, **12**:1 (1978), 51–61.
- [12] А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и торические многообразия”, *Функц. анализ и его прилож.*, **11**:4 (1977), 56–64.

- [13] В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2 (1978), 85–134.
- [14] Д. Н. Бернштейн, “Число корней системы уравнений”, *Функц. анализ и его прилож.*, **9**:3 (1975), 1–4.
- [15] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, J. Seade, *Homological index for 1-forms and a Milnor number for isolated singularities*, [arXiv:math.AG/0307239](https://arxiv.org/abs/math/0307239).
- [16] M. Hochster, “Grassmanians and their Schubert subvarieties are arithmetically Cohen–Macaulay”, *J. Algebra*, **25**:1 (1973), 40–57.
- [17] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. II, Наука, М., 1984.

А. И. Эстеров (A. I. Èsterov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: esterov@mail.ru

Поступила в редакцию

23.07.2004 и 02.03.2006