Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Возмущение многочленов Якоби и кусочно гипергеометрические ортогональные системы, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 11, 51–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 05:47:13

УДК 512.763

Ю. А. Неретин

Возмущение многочленов Якоби и кусочно гипергеометрические ортогональные системы

Мы строим неполную ортогональную систему функций на луче $[0, \infty]$, зависящую от трех вещественных параметров α, β, θ . Элементы системы являются кусочно гипергеометрическими функциями с особенностью в точке $x = 1$. При $\theta = 0$ наши функции заануляются на промежутке $[1, \infty)$ и система сводится к многочленам Якоби $P_n^{\alpha, \beta}$ на отрезке $[0, 1]$. В общем случае наши функции могут рассматриваться как интерпретация выражений $P_{n+\theta}^{\alpha, \beta}$. Эти функции оказываются собственными функциями одной экзотической краевой задачи Штурма–Лиувилля для гипергеометрического дифференциального оператора. Мы находим спектральную меру для этой задачи.

Библиография: 27 названий.

§ 1. Результаты работы

Результаты статьи сформулированы в пп. 1.1–1.5. Далее в пп. 1.6–1.9 мы обсуждаем, с какими иными математическими сюжетами связано (или может быть связано) обнаруженное явление.

1.1. Многочлены Якоби. Предварительные сведения. Напомним, что многочлены Якоби $P_n^{\alpha, \beta}$ – это многочлены на отрезке $[-1, 1]$, ортогональные относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(y) \overline{g(y)} (1-y)^\alpha (1+y)^\beta dy, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \quad (1.1)$$

Эти многочлены задаются явными формулами (см. [1; 10.8(16)]):

$$P_n^{\alpha, \beta}(y) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} F \left[\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix}; \frac{1-y}{2} \right] \quad (1.2)$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)n!} F \left[\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \beta + 1 \end{matrix}; \frac{1+y}{2} \right] \quad (1.3)$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)n!} \left(\frac{1-y}{2} \right)^{-\alpha} F \left[\begin{matrix} n + \beta + 1, -\alpha - n \\ \beta + 1 \end{matrix}; \frac{1-y}{2} \right]. \quad (1.4)$$

Здесь $F = {}_2F_1$ обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса

$$F \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right] = F \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right] := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} x^j,$$

а $(a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1)$ – символ Похгаммера.

Работа выполнена при поддержке грантом NWO-047.017.015.

Выражения (1.2), (1.3) являются многочленами, так как $(-n)_k = 0$ при $k > n$. Последнее выражение (1.4) имеет вид ряда, но оно может быть получено из (1.3) преобразованием (см. [2; (2.1.22–23)])

$$F[a, b; c; x] = (1-x)^{c-a-b} F[c-a, c-b; c; x]. \quad (1.5)$$

Нормы многочленов Якоби по отношению к скалярному произведению (1.1) равны

$$\|P_n^{\alpha, \beta}\|^2 = \langle P_n^{\alpha, \beta}, P_n^{\alpha, \beta} \rangle = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \quad (1.6)$$

Многочлены Якоби являются собственными функциями дифференциального оператора

$$D := (1-y^2) \frac{d^2}{dy^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)y] \frac{d}{dy}, \quad (1.7)$$

а именно,

$$DP_n^{\alpha, \beta} = -n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{\alpha, \beta}.$$

1.2. Кусочно гипергеометрические ортогональные системы. Фиксируем комплексное θ такое, что

$$0 \leq \operatorname{Re} \theta < 1. \quad (1.8)$$

Фиксируем также $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условиям

$$-1 < \operatorname{Re} \alpha < 1, \quad \alpha \neq 0, \quad \operatorname{Re} \beta > -1. \quad (1.9)$$

Рассмотрим пространство функций на полупрямой $x > 0$, снабженное билинейным скалярным произведением

$$\{f, g\} = \int_0^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha x^\beta dx + \frac{\sin(\alpha+\theta)\pi}{\sin \theta \pi} \int_1^\infty f(x)g(x)(x-1)^\alpha x^\beta dx. \quad (1.10)$$

Через $H(x)$ мы обозначим функцию Хевисайда

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Пусть параметр $p \in \mathbb{C}$ пробегает множество

$$p - \theta \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Re}(2p + \alpha + \beta + 1) > 0, \quad 1 + p + \alpha \neq 0. \quad (1.11)$$

Определим кусочно гипергеометрические функции $\Phi_p(x)$ на полупрямой $[0, \infty)$ формулой

$$\begin{aligned} \Phi_p(x) = & \frac{\Gamma(2p + \alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\beta + 1)} F \left[\begin{matrix} -p, p + \alpha + \beta + 1 \\ \beta + 1 \end{matrix}; x \right] H(1-x) \\ & + \frac{\Gamma(1+p+\alpha)}{\Gamma(-p)} F \left[\begin{matrix} p + \alpha + 1, p + \alpha + \beta + 1 \\ 2p + \alpha + \beta + 2 \end{matrix}; \frac{1}{x} \right] x^{-\alpha-\beta-p-1} H(x-1). \end{aligned} \quad (1.12)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функции Φ_p ортогональны по отношению к симметричной билинейной форме (1.10):*

$$\{\Phi_p, \Phi_q\} = 0 \quad \text{при } p \neq q, \quad (1.13)$$

и

$$\{\Phi_p, \Phi_p\} = \frac{\Gamma^2(2p + \alpha + \beta + 2)\Gamma(1 + p + \alpha)\Gamma(p + 1)}{(2p + \alpha + \beta + 1)\Gamma(p + \beta + 1)\Gamma(p + \alpha + \beta + 1)}. \quad (1.14)$$

Мы введем также эрмитово скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}(1-x)^\alpha x^\beta dx + \frac{\sin(\alpha + \theta)\pi}{\sin \theta \pi} \int_1^\infty f(x)\overline{g(x)}(x-1)^\alpha x^\beta dx, \quad (1.15)$$

где надо положить $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и

$$0 \leq \theta < 1, \quad -1 < \alpha < 1, \quad \beta > -1, \quad 2p + \alpha + \beta + 1 > 0.$$

По нашей теореме функции Φ_p ортогональны по отношению к скалярному произведению (1.15). Если множитель $\sin(\alpha + \theta)\pi / \sin(\alpha\pi)$ положителен, то и наше скалярное произведение тоже положительно определено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система Φ_p не является базисом в нашем гильбертовом пространстве.

1.3. Сравнение с многочленами Якоби. Покажем, что наша конструкция сводится к многочленам Якоби в случае $\theta = 0$.

Во-первых, положим $x = (1 + y)/2$ в формулах (1.1), (1.3). Первое слагаемое в (1.12) становится многочленом Якоби. Второе слагаемое в (1.12) становится нулем, так как оно содержит множитель $\Gamma(-p)^{-1}$, обращающийся в нуль при $p = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, для целого p

$$\Phi_p(x) = \frac{\Gamma(2p + \alpha + \beta)\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p + \beta + 1)} P_p^{\alpha, \beta}(2x - 1)H(1 - x).$$

Поэтому при $\theta = 0$ наши соотношения ортогональности становятся соотношениями ортогональности для многочленов Якоби.

1.4. Сингулярная граничная задача. Рассмотрим гильбертово пространство со скалярным произведением (1.15).

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D := x(x - 1)\frac{d^2}{dx^2} + (\beta + 1 - (\alpha + \beta + 2)x)\frac{d}{dx}. \quad (1.16)$$

Функции Φ_p удовлетворяют уравнению

$$D\Phi_p = -p(p + \alpha + \beta + 1)\Phi_p \quad (1.17)$$

на обоих промежутках $(0, 1)$, $(1, \infty)$. А именно, на этих промежутках функция Φ_p совпадает с разными куммеровскими решениями одного и того же гипергеометрического уравнения (см. формулы [2; 2.9(1), (13)]).

Напомним, что $-1 < \alpha < 1$. Пусть дополнительно $\alpha \neq 0$.¹ Мы определим некоторое пространство $\mathcal{E}$ функций на $[0, \infty)$. Его элементы – функции $f(x)$, гладкие вне особых точек $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$; в особых точках $f(x)$ удовлетворяет следующим граничным условиям (странным элементом задачи является условие б) – его самосопряженность не совсем очевидна).

- а) *Условие в точке $x = 0$.* Функция f является гладкой в нуле.
 б) *Условие в точке $x = 1$.* Существуют функции $u(x)$, $v(x)$, гладкие в $x = 1$, такие, что

$$f(x) = \begin{cases} u(x) + v(x)(1-x)^{-\alpha}, & x < 1, \\ \frac{\sin \theta \pi}{\sin(\alpha + \theta)\pi} u(x) + v(x)(x-1)^{-\alpha}, & x > 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

- в) *Условие в точке $x = \infty$.* Существует функция $w(y)$, гладкая в нуле, такая, что

$$f(x) = w\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\alpha-\beta-r-1} \quad \text{для больших } x,$$

где r – минимальное возможное значение p .

ТЕОРЕМА 2. *Выполнены следующие утверждения:*

- а) $\Phi_p \in \mathcal{E}$;
 б) для $f, g \in \mathcal{E}$ выполнено

$$\{Df, g\} = \{f, Dg\}.$$

Очевидно, это влечет соотношения ортогональности для $p \neq q$. Действительно,

$$\{D\Phi_p, \Phi_q\} = \{\Phi_p, D\Phi_q\} = -p(p + \alpha + \beta + 1)\{\Phi_p, \Phi_q\} = -q(q + \alpha + \beta + 1)\{\Phi_p, \Phi_q\}$$

и, следовательно², $\{\Phi_p, \Phi_q\} = 0$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство со скалярным произведением (1.15). Очевидно, $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор D существенно самосопряжен на $\mathcal{E}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. а) Мы можем заменить граничное условие в точке $x = \infty$ на условие: $f(x) = 0$ для больших x . То есть необходимости в нашей сложной формулировке краевого условия здесь нет.

б) Если $\beta \geq 1$, то мы можем заменить наше условие в $x = 0$ на условие: $f(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля. Но при $\beta < 1$ последний упрощенный вариант дает симметричный, но не самосопряженный оператор.³ Возможные

¹Мы хотим избежать рассмотрения логарифмических асимптотик в точке $x = 1$.

²При наших условиях на параметры совпадение $p(p + \alpha + \beta + 1)$ и $q(q + \alpha + \beta + 1)$ влечет $p = q$.

³Обсуждение разницы между симметричностью и самосопряженностью есть в любом учебнике функционального анализа (см., например, [3]).

самосопряженные условия нумеруются точками $\lambda : \mu$ вещественной проективной прямой; они могут быть записаны в виде

$$f(x) = A(\lambda + \mu x^{-\beta}) + x\varphi(x) + x^{-\beta+1}\psi(x),$$

где φ, ψ – функции, гладкие около точки нуль, а A – комплексное число. Наше условие, приведенное выше, соответствует $\mu = 0$. То есть требование “гладкости в нуле” не означает отсутствия условий, оно скрывает в себе условие на асимптотику.

1.5. Разложение по собственным функциям. Наша ортогональная система не полна, и это должно означать наличие у оператора D непрерывного спектра. В этом случае обычное разложение функции в ряд по многочленам Якоби должно быть заменено на разложение по собственным функциям оператора D в духе Г. Вейля и Титчмарша (см. [3; гл. XIII]).

Для $s \in \mathbb{R}$ мы определим функцию $\Psi_s(x)$ на $[0, \infty)$, заданную формулой

$$\begin{aligned} \Psi_s(x) = & F\left[\frac{\alpha+\beta+1}{2} + is, \frac{\alpha+\beta+1}{2} - is; \beta+1; x\right] H(1-x) \\ & + \frac{2\Gamma(\beta+1)}{\sin(\theta+\alpha)\pi} \cdot \operatorname{Re}\left\{ \frac{\Gamma(-2is) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \theta - is\right)\pi}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2} - is\right)\Gamma\left(\frac{-\alpha+\beta+1}{2} - is\right)} \right. \\ & \left. \times F\left[\frac{\alpha+\beta+1}{2} + is, \frac{\alpha-\beta+1}{2} + is; \frac{1}{1+2is}; \frac{1}{x}\right] x^{-(\alpha+\beta+1)/2-is} \right\} H(x-1). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Очевидно,

$$\Psi_s(x) = \Psi_{-s}(x).$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Оба слагаемых Ψ_s являются решениями уравнения

$$Df = -\left(\frac{1}{4}(\alpha + \beta + 1)^2 + s^2\right)f. \quad (1.20)$$

Действительно, первое слагаемое – такое же, как и выше, мы лишь подставляем $p = -(\alpha + \beta + 1)/2 + is$ в (1.12). Гипергеометрическая функция во втором слагаемом является куммеровским решением уравнения (1.20). Коэффициенты оператора D вещественны, поэтому комплексно сопряженная функция является решением того же уравнения.

2) Функции $\Psi_s(x)$ удовлетворяют граничному условию в $x = 1$.

3) Функции Φ_p с $p - \theta \in \mathbb{Z}$ – это все собственные функции, лежащие в L^2 , для краевой задачи, сформулированной выше. А функции $\Psi_s(x)$ – это все остальные обобщенные собственные функции для той же краевой задачи (см. ниже § 4).

Эти три замечания легко влекут явную формулу меры Планшереля для оператора D .

Рассмотрим гильбертово пространство V , элементы которого – $(a(p), F(s))$, где $a(p)$ – последовательность (p пробегает то же множество, что и выше),

а $F(s)$ – функция на полупрямой $s > 0$; скалярное произведение задается формулой

$$[(a, F); (b, G)] = \sum_p \frac{a(p)\overline{b(p)}}{\langle \Phi_p, \Phi_p \rangle} + \frac{\sin \theta \pi \sin(\theta + \alpha) \pi}{4\pi \Gamma(\beta + 1)^2} \times \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta+1}{2} - is) \Gamma(\frac{-\alpha+\beta+1}{2} - is)}{\Gamma(2is) \cos(\frac{\alpha+\beta}{2} + \theta - is) \pi} \right|^2 F(s) \overline{G(s)} ds. \quad (1.21)$$

Определим оператор $U: f \rightarrow (a(p), F(s))$ из $\mathcal{H}$ в V по формуле

$$\begin{aligned} a(p) &= \langle f, \Phi_p \rangle_{\mathcal{H}}, \\ F(s) &= \langle f, \Psi_s \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. *Оператор $U: \mathcal{H} \rightarrow V$ является унитарным обратимым оператором.*

В частности, эта теорема влечет формулу обращения

$$U^{-1} = U^*. \quad (1.22)$$

1.6. Обсуждение: сдвиг номера n для классических ортогональных базисов. Итак, мы видим, что для многочленов Якоби $P_n^{\alpha, \beta}$ существует возмущенная неполиномиальная ортогональная система, полученная сдвигом номера n на вещественное число θ . Похожие возмущения известны для ряда других классических ортогональных систем. В настоящее время общая картина выглядит довольно путанно. Вкратце перечислим, что известно.

- а) *Система Мейкснера.* Возмущенные системы были обнаружены Виленкиным и Климыком в [4] (см. также [5] и более подробно в [6]).
- б) *Система Лагерра,* подробное обсуждение см. в [7].
- с) *Система Мейкснера–Поллачека,* см. [8].
- д) *Непрерывные двойственные многочлены Хана,* конструкция (неполная) получена в [9].

Во всех перечисленных случаях возмущенные системы являются ортогональными *базисами*, нумеруемые числами вида $n + \theta$, где n пробегает $\mathbb{Z}$.

Все эти возмущения получаются следующим образом. Почти все классические ортогональные гипергеометрические системы⁴ возникают естественным образом при детальном разборе представлений группы $SL_2(\mathbb{R})$ со старшим весом и младшим весом. Повторяя те же ходы с представлениями основной и дополнительной серий, мы получаем возмущенные системы⁵.

Все основные формулы, существующие для классических ортогональных многочленов (см. списки в [1], [10], [11]), “выживают” и для возмущенных систем; это подтверждает нетривиальность обсуждаемого явления. Более того, теоретико-представленческая интерпретация позволяет легко такие формулы писать.

⁴Или все. Единственное возможное исключение – многочлены Вильсона (автору не известно, встречаются ли они в этом контексте).

⁵Для системы Хана группа $SL_2(\mathbb{R})$ не дает достаточного числа параметров, но данный прием все равно работает как эвристический.

Отметим, что первые три из перечисленных систем могут быть частично⁶ построены с помощью очень простых ходов.

а) Фиксируем вещественные параметры h, σ, t . Рассмотрим два ортонормированных базиса

$$e_k(z) = z^n, \quad f_n(z) = \left(\frac{z \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{z \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right)^n (z \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^{-h+i\sigma} (z^{-1} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^{-1+h+i\sigma}$$

в пространстве L^2 на окружности $|z| = 1$. Разлагая один базис по другому, мы получаем матрицу, строки которой ортогональны в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$. Эти строки и образуют систему типа Мейкснера.

б), в) Рассмотрим ортонормированный базис в L^2 на прямой, состоящий из функций вида

$$f_n(x) = (1 + ix)^{-n-1+h+i\sigma} (1 - ix)^{n-h+i\sigma},$$

где n пробегает $\mathbb{Z}$. Переходя к преобразованию Фурье, мы получаем кусочную ${}_1F_1$ гипергеометрическую лаггерро-подобную систему.

Рассматривая преобразование Меллина $f_n(x) \mapsto (F_n^+(t), F_n^-(t))$,

$$F_n^+(t) = \int_0^\infty f_n(x) x^{it-1} dx, \quad F_n^-(t) = \int_0^\infty f_n(-x) x^{it-1} dx,$$

тех же функций, мы получаем систему типа Мейкснера–Поллачека; она оказывается ортонормированным базисом в пространстве $\mathbb{C}^2$ -значных функций на $\mathbb{R}$.

д) Система типа Хана получается из тех же функций f_n с помощью двустороннего индексного гипергеометрического преобразования, введенного в [9].⁷

Автор в данный момент не видит ни теоретико-представленческой интерпретации, ни “простых ходов”, связанных с возмущенными системами Якоби.⁸

ЗАМЕЧАНИЕ. В нашем случае ортогональная система не полна. Для этого факта есть следующее эвристическое (но не вполне надежное) объяснение. При попытке заменить $n \rightarrow n + \theta$ с $n \in \mathbb{Z}$ в соотношениях ортогональности (1.6) мы при любых значениях α, β получаем знаконеопределенное выражение.

1.7. Обсуждение: многоконтурные краевые задачи. Краевые задачи для системы контуров с переклейкой асимптотик, кажется, не являются общеизвестными. Объясним, как они возникают естественным образом.

Сначала рассмотрим модельный пример – уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \lambda f(x, y), \quad (1.23)$$

⁶Частично, потому что такие базисы образуют “серии”, имитирующие “серии представлений”. Увидеть конструкции, имитирующие “дополнительные серии”, без теории представлений затруднительно.

⁷При этом опять получается система $\mathbb{C}^2$ -значных функций. Вообще есть интересный вопрос о существовании теории векторнозначных и матричнозначных специальных функций. Два примера только что названы.

⁸Спектр у оператора D такой же, как у тензорного произведения представления $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ основной серии и представления дискретной серии. Возможно, что это совпадение не случайно: быть может наш оператор связан с (1.26).

где λ – некоторая постоянная. Уравнение (1.23) похоже на уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right) f(x, y) = \lambda f(x, y),$$

и мы проимитируем обычное радиальное разделение переменных для оператора Лапласа.

Пусть f – гладкая функция на плоскости с компактным носителем. Для $r > 0$ положим

$$g(r, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(re^t, re^{-t}) e^{-it\mu} d\mu. \quad (1.24)$$

Соответственно,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{xy}, \mu) \left(\frac{x}{y} \right)^{i\mu/2} d\mu.$$

Уравнение (1.23) теперь принимает вид

$$\mathcal{D}g = \lambda g, \quad (1.25)$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mu^2}{r^2} \right).$$

При фиксированном μ мы получаем задачу Штурма–Лиувилля для оператора D .

Далее, при фиксированном $\mu \neq 0$ функция $g(r, \mu)$ имеет асимптотику

$$g(r, \mu) \sim Ar^{i\mu} + Br^{-i\mu}, \quad r \rightarrow +0,$$

где

$$A = \frac{\pi}{2} \Gamma(-i\mu/2) f(0, 0) + \int_0^{\infty} (f(x, 0) - f(0, 0) e^{-x^2}) x^{-i\mu-1} dx,$$

а B задается аналогичным выражением.

В интегральном преобразовании (1.24) задействованы лишь значения функции f в квадранте $x \geq 0, y \geq 0$. Поэтому рассмотрим функции $f(-x, y)$, $f(-x, -y)$, $f(x, -y)$ и построим по ним еще три функции (1.24). В итоге мы получаем четыре функции, в которых асимптотики устроены как на рис. 1, с). В двух случаях, однако, в уравнении (1.25) происходит замена $\lambda \mapsto -\lambda$. Но того же результата можно добиться и заменой переменной $r \mapsto ir$ в операторе Бесселя $\mathcal{D}$. То есть теперь во всех четырех случаях оператор $\mathcal{D}$ будет одним и тем же, но аргумент r будет лежать на разных контурах.

В итоге мы получаем задачу следующего типа (см. рис. 1, /, d)): есть бесселевский оператор $\mathcal{D}$, определенный на четверках функций, каждая из которых определена на своем контуре, а асимптотики этих функций в нуле удовлетворяют определенным условиям.

Отметим, что мы действовали вполне стандартным способом. А именно, наше уравнение инвариантно относительно группы Γ гиперболических поворотов $(x, y) \mapsto (xe^t, ye^{-t})$ плоскости (см. рис. 1, а)). И мы просто использовали эту

Рис. 1

инвариантность для разделения переменных. Однако множество орбит общего положения группы Γ на $\mathbb{R}^2$ не связно и состоит из четырех компонент (см. рис. 1, b)). Это и приводит к четырехконтурной задаче.

Более интересный пример – задача о спектральном разложении $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ -инвариантного оператора Лапласа на торе $|z| = 1$, $|u| = 1$,

$$\begin{aligned} \Delta = & -(z - u)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial u} + \frac{1}{u} (\tilde{\theta}u + \tilde{\tau}z)(z - u) \frac{\partial}{\partial z} \\ & + \frac{1}{z} (\theta z + \tau u)(u - z) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{zu} (\tilde{\theta}u + \tilde{\tau}z)(\theta z + \tau u). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Оператор самосопряжен в L^2 на торе⁹ в случае

$$\mathrm{Re}(\theta + \tau) = 1, \quad \mathrm{Im} \theta = \mathrm{Im} \tau, \quad \mathrm{Re}(\tilde{\theta} + \tilde{\tau}) = 1, \quad \mathrm{Im} \tilde{\theta} = \mathrm{Im} \tilde{\tau}.$$

Этот оператор – интересный, сложный и недостаточно понятый объект, рассматривавшийся в ряде работ (см. [12], [13], [9], [7]). Здесь мы обсудим лишь некоторые детали, которых в этих работах нет.

Группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ действует на окружности мёбиусовскими преобразованиями и соответственно действует на торе как на произведении окружностей. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу в $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ и, так же как и в предыдущем примере, разделим переменные с помощью этой подгруппы.

⁹Есть еще несколько случаев самосопряженности в других функциональных пространствах.

Есть три возможности:

- а) $\Gamma = K$ – подгруппа, состоящая из вращений окружности;
- б) $\Gamma = P$ – параболическая подгруппа, т.е. однопараметрическая подгруппа, имеющая одну неподвижную точку на окружности;
- в) $\Gamma = H$ – гиперболическая подгруппа, т.е. однопараметрическая подгруппа, имеющая две неподвижных точки на окружности.

Разделение переменных, соответствующее этим группам, сводится соответственно к разложению в ряд Фурье, преобразованию Фурье, преобразованию Меллина (окружность является также вещественной проективной прямой, так что эти преобразования определены).

В итоге мы получаем три варианта, изображенные на рис. 2 (мы обычным образом изображаем тор в виде квадрата).

Многочисленные нестандартные краевые задачи такого типа,¹⁰ в том числе многомерные, естественным образом возникают в некоммутативном гармоническом анализе (по-видимому, сюжет восходит к [15]). Фактически, они мало изучены: ряд одномерных задач для уравнения Лежандра был исследован Молчановым [16], [13], [17], [18] и Фаро [19] для получения формулы Планшереля на псевдоримановых симметрических пространствах ранга 1 (этот класс пространств включает, в частности, многомерные гиперboloиды).

ЗАМЕЧАНИЕ. Перечисленные выше примеры заставляют думать, что естественные граничные условия для многомерных многоконтурных задач устроены примерно следующим образом. Пространство всех функций рассматривается как модуль над пространством гладких функций, а область определения дифференциального оператора состоит из функций, содержащихся в фиксированном (явно заданном) конечно порожденном подмодуле нашего модуля. Возможность эффективного решения подобных спектральных задач выглядит проблематично, но не очевидно, что существующие сейчас обходные варианты более просты.

1.8. Обсуждение. Степень жесткости нашей задачи. Есть два классических варианта разложения гипергеометрического дифференциального оператора по собственным функциям. Один случай дает разложение по многочленам Якоби. Другой дает индексное гипергеометрическое преобразование Вейля–Олевского

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(b+c)} \times \int_0^\infty f(x) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b+is, b-is \\ b+c \end{matrix}; -x \right] x^{b+c-1} (1+x)^{b+c-1} dx. \quad (1.27)$$

Напомним (см., например, [3; гл. XIII]), что это преобразование является унитарным оператором

$$L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx) \rightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+, \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2\right).$$

¹⁰В трактате Миллера [14] содержится список всевозможных разделений переменных для нескольких классических уравнений в частных производных. Некоторые из этих вариантов приводят к многоконтурным задачам, хотя в книге это и не отмечается.

Рис. 2

- a) Диагональ тора – особая линия для оператора Δ . Орбиты группы K – окружности, параллельные диагонали. Множество орбит – окружность, но одна из точек этой окружности выделена.
- b) При разделении переменных мы получаем гипергеометрический дифференциальный оператор на контуре $\text{Im } x = 1/2$ (или на $|x| = 1$).
- c) Группа P имеет одну неподвижную точку на торе (на нашей картинке – угловая точка). Множество орбит общего положения состоит из двух компонент.
- d) Разделение переменных дает вырожденный гипергеометрический (иногда бесселевский) дифференциальный оператор на паре контуров из 0 в ∞ . Диагональ тора соответствует нулю, граница квадрата – бесконечности.
- e) Группа H имеет четыре неподвижные точки на торе. Множество орбит общего положения состоит из шести компонент.
- f) Разделение переменных дает гипергеометрический дифференциальный оператор о шести контурах. Его особые точки соответствуют диагонали тора и фигурам **H**, **I** на рис. e).

Более естественно видеть в этом три контура $(\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ и $\mathbb{C}^2$ -значные функции на каждом из контуров.

Унитарность автоматически влечет формулу обращения (1.22). Это преобразование – интересный сам по себе объект, имеющий разнообразные приложения в гармоническом анализе и теории спецфункций (см. [20], [5], [21], [22]). Есть третий вариант этого преобразования, недавно полученный в [9], он соответствует контуру, изображенному на рис. 2, б).

Теорема 4 может быть истолкована как еще один, правда несколько странный и, возможно, сложноватый аналог разложения по многочленам Якоби. Понятно также (в частности, из обсуждения в п. 1.7), что есть и иные аналоги, имеющие естественное происхождение.

С другой стороны, мы можем взять набор контуров $(0, 1)$, $(1, \infty)$, $(\infty, 0)$, на $\mathbb{C}$ с произвольными кратностями, после чего возникает большая (и даже слишком большая) свобода ставить граничные условия в духе (1.18).

В качестве модельного примера рассмотрим тот же оператор D , определенный в $L^2(0, 1)$ по отношению к тому же весу $x^\beta(1-x)^\alpha$. Если $\alpha > 1$, $\beta > 1$, то пространство $\mathcal{D}(0, 1)$ гладких функций на $(0, 1)$ с компактным носителем является областью существенной самосопряженности. Если

$$-1 < \beta < 1, \quad -1 < \alpha < 1,$$

то индексы дефекта оператора D в $\mathcal{D}(0, 1)$ равны $(2, 2)$. А именно, оказывается, что оба решения уравнения $Df = \lambda f$ лежат в L^2 для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Фиксируем $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Введем краевые условия

$$\begin{aligned} f(x) &= A \left[1 - \mu \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\beta} \right] + x\varphi_0(x) + x^{-\beta+1}\psi_0(x) && \text{вблизи } x = 0, \\ f(x) &= B \left[1 + \nu \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} (1-x)^{-\alpha} \right] + x\varphi_1(x) + (1-x)^{-\alpha+1}\psi_1(x) && \text{вблизи } x = 1, \end{aligned}$$

где φ_0, ψ_0 являются гладкими около $x = 0$, а φ_1, ψ_1 – около $x = 1$. Тогда спектр является дискретным, причем $\lambda = -p(\alpha + \beta + 1 + p)$ является точкой спектра, если

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\beta + p + 1)\Gamma(-p - \alpha)} + \frac{\lambda}{\Gamma(p + 1)\Gamma(-\alpha - \beta - p)} \\ &= \frac{\mu}{\Gamma(-p)\Gamma(p + \alpha + \beta + 1)} + \frac{\mu\nu}{\Gamma(-\beta - p)\Gamma(\alpha + p + 1)}. \end{aligned}$$

Уравнение выглядит забавно, но едва ли оно разрешимо в явном виде.

Во всяком случае, не любые выборы граничных условий оказываются равноправными.

1.9. Обсуждение. Попытка извлечь следствия. Обозначим

$$\xi_\mu = (1-x)^\mu H(1-x), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Приравнивая¹¹

$$\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle = [U\xi_\mu, U\xi_\nu],$$

¹¹Мы имитируем предложенный Коурвиндером простой вывод бета-интеграла Де Бранжа–Вильсона (см., например, [22]).

мы получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
 & \pi^{-3} \sin \theta \pi \sin(\theta + \alpha) \pi \\
 & \times \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2} + is\right) \Gamma\left(\frac{-\alpha+\beta+1}{2} + is\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2} + \theta + is\right) \Gamma\left(\frac{-\alpha-\beta+1}{2} - \theta + is\right)}{\Gamma(2is) \Gamma\left(\mu + \frac{\alpha+\beta+3}{2} + is\right) \Gamma\left(\nu + \frac{\alpha+\beta+3}{2} + is\right)} \right|^2 ds \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \sin(\theta - \mu) \pi \sin(\theta - \nu) \pi \sum_p (2p + \alpha + \beta + 1) \\
 & \times \Gamma \left[\begin{matrix} p + \alpha + \beta + 1, p + \beta + 1, -\nu + p, -\mu + p \\ p + \alpha + \beta + \mu + 2, p + \alpha + \beta + \nu + 2, p + \alpha + 1, p + 1 \end{matrix} \right] \\
 & = \frac{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + \mu + \nu + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + \mu + \nu + 2) \Gamma(\mu + 1) \Gamma(\nu + 1) \Gamma(\alpha + \mu + 1) \Gamma(\alpha + \nu + 1)}. \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

Это тождество является своего рода бета-интегралом. Непрерывные и дискретные бета-интегралы общеизвестны (см. [23]). Наш интеграл имеет смешанный тип, т.е. в нем присутствует и интеграл, и счетная¹² сумма типа ${}_6F_5$.

При подстановке $\mu = \theta - 1$ в (1.28) ${}_6F_5$ -сумма зануляется, и мы получаем следующий бета-интеграл, полученный в [22]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{\prod_{i=1}^3 \Gamma(a_k + is)}{\Gamma(2is) \Gamma(b + is)} \right|^2 ds = \frac{\Gamma(b - a_1 - a_2 - a_3) \prod_{1 \leq k < l \leq 3} \Gamma(a_k + a_l)}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(b - a_k)}.$$

Подставляя $\theta = 0$, мы зануляем интегральный член и получаем известную формулу суммирования типа ${}_5F_4$. Фактически, это знаменитая ${}_5H_5$ -формула Дуголла (см., например, [24])

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{\alpha + n}{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j + \alpha + n) \Gamma(a_j - \alpha - n)} = \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3)}{\prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(a_j + a_k - 1)},$$

в которой один параметр “убит” подстановкой $a_1 = \alpha$.

Забавно, что сама по себе формула Дуголла не мажорируется. По-видимому, это свидетельствует о том, что в нашей конструкции должен быть еще один параметр (или параметры).

1.10. Структура статьи. В §§ 2, 3 мы даем два доказательства соотношений ортогональности. В § 3 мы также обсуждаем нашу краевую задачу. В § 4 мы получаем спектральное разложение оператора D .

Автор благодарен В. Ф. Молчанову за обсуждение затронутого предмета.

§ 2. Вычисление

Мы используем обозначение

$$\Gamma \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_k \\ b_1, \dots, b_l \end{matrix} \right] := \frac{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_k)}{\Gamma(b_1) \cdots \Gamma(b_l)}.$$

¹² Аналитическое продолжение бета-интегралов по параметрам может давать конечное число дополнительных слагаемых в левой части за счет вычетов. Наш интеграл к такому типу не относится.

2.1. Преобразование Меллина. Для функции f , определенной на полу-прямой $x > 0$, ее преобразование Меллина определяется по формуле

$$\mathfrak{M}f(s) = \int_0^\infty f(x)x^s \frac{dx}{x}. \quad (2.1)$$

Во всех случаях, рассматриваемых ниже, этот интеграл сходится в некоторой полосе $\sigma < \operatorname{Re} s < \tau$. Формула обращения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathfrak{M}f(s)x^{-s} ds,$$

где интегрирование ведется по любому контуру, лежащему в полосе $\sigma < \operatorname{Re} s < \tau$.

Мультипликативная свертка $f * g$ определяется формулой

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(x)g\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dx}{x}. \quad (2.2)$$

Преобразование Меллина переводит свертку в произведение

$$\mathfrak{M}[f * g](s) = \mathfrak{M}f(s) \cdot \mathfrak{M}g(s) \quad (2.3)$$

(если $\mathfrak{M}f(s)$, $\mathfrak{M}g(s)$ определены в общей полосе).

2.2. Путь доказательства ортогональности. Мы выписываем две явных функции $\mathcal{K}_1(s)$, $\mathcal{K}_2(s)$ и вычисляем их обратные преобразования Меллина K_1 , K_2 . Далее, мы выписываем тождество

$$K_1 * K_2(1) = \mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2](1)$$

и обнаруживаем, что оно совпадает с соотношениями ортогональности для Φ_p и Φ_q .

Ниже, в п. 2.7, мы пытаемся объяснить происхождение функций K_1 , K_2 . Собственно вычисление на формальном уровне без оглядки на его корректность (применимость теоремы о свертке, сходимости интегралов...) проводится в п. 2.3, далее в пп. 2.4–2.6 мы отслеживаем пропущенные детали.

2.3. Вычисление свертки. Мы используем следующий интеграл типа Барнса [25; 8.4.49.1]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \Gamma \left[\begin{matrix} c, 1-b \\ a \end{matrix} \right] \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} s, a-s \\ s+1-b, c-s \end{matrix} \right] x^{-s} ds \\ &= F \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] H(1-x) + x^{-a} \Gamma \left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c-a, 1+a-b \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} a, 1+a-c \\ 1+a-b \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] H(x-1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(здесь $x > 0$). Подынтегральное выражение имеет две серии полюсов

$$s = 0, -1, -2, \dots, \quad s = a, a+1, \dots$$

Интегрирование ведется по произвольному контуру, лежащему в полосе $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a$ (такой контур разделяет две серии полюсов). Условие сходимости интеграла: $\operatorname{Re}(c-a-b) > -1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ссылка на таблицы интегралов не обязательна, это тождество легко доказывается с помощью метода Барнса – разложением по полюсам (см., например, [26], [27]).

Теперь рассмотрим две функции $\mathcal{K}_1(s)$, $\mathcal{K}_2(s)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(s) &:= \Gamma \left[\begin{matrix} \beta + 1, p + \alpha + 1 \\ \beta + p + 1 \end{matrix} \right] \cdot \Gamma \left[\begin{matrix} s, \beta + p + 1 - s \\ s + p + \alpha + 1, \beta + 1 - s \end{matrix} \right], \\ \mathcal{K}_2(s) &:= \Gamma \left[\begin{matrix} 2q + \alpha + \beta + 2, -\alpha - q \\ q + \alpha + \beta + 1 \end{matrix} \right] \cdot \Gamma \left[\begin{matrix} s + \alpha + q, \beta + 1 - s \\ s, q + \beta + 2 - s \end{matrix} \right].\end{aligned}$$

Мы полагаем, что $p - \theta$, $q - \theta \in \mathbb{Z}$. С помощью формулы (2.4) мы вычисляем их обратные преобразования Меллина

$$\begin{aligned}K_1(x) &= F \left[\begin{matrix} p + \beta + 1, -p - \alpha \\ \beta + 1 \end{matrix} ; x \right] H(1 - x) \\ &\quad + x^{-\beta - p - 1} \Gamma \left[\begin{matrix} \beta + 1, p + \alpha + 1 \\ -p, 2p + \alpha + \beta + 2 \end{matrix} \right] \cdot F \left[\begin{matrix} \beta + p + 1, p + 1 \\ 2p + \alpha + \beta + 2 \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] H(x - 1), \\ K_2(x) &= x^{q + \alpha} F \left[\begin{matrix} q + \alpha + \beta + 1, q + \alpha + 1 \\ 2q + \alpha + \beta + 2 \end{matrix} ; x \right] H(1 - x) \\ &\quad + x^{-\beta - 1} \Gamma \left[\begin{matrix} 2q + \alpha + \beta + 2, -\alpha - q \\ q + 1, \beta + 1 \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} q + \alpha + \beta + 1, -q \\ \beta + 1 \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] H(x - 1).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Теперь мы пишем тождество

$$K_1 * K_2(1) = \mathfrak{M}^{-1}[\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2](1).$$

Умножая обе его части на

$$\Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2, q + 1 \\ \beta + 1, -\alpha - q \end{matrix} \right],\tag{2.6}$$

получаем

$$\begin{aligned}&\Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2, \overline{q + 1} \\ \beta + 1, \overline{-\alpha - q} \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} 2q + \alpha + \beta + 2, \overline{-\alpha - q} \\ \overline{q + 1}, \beta + 1 \end{matrix} \right] \\ &\quad \times \int_0^1 F \left[\begin{matrix} p + \beta + 1, -p - \alpha \\ \beta + 1 \end{matrix} ; x \right] x^{\beta + 1} F \left[\begin{matrix} q + \alpha + \beta + 1, -q \\ \beta + 1 \end{matrix} ; x \right] \frac{dx}{x}\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&+ \Gamma \left[\begin{matrix} \overline{2p + \alpha + \beta + 2}, q + 1 \\ \overline{\beta + 1}, -\alpha - q \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} \overline{\beta + 1}, p + \alpha + 1 \\ -p, \overline{2p + \alpha + \beta + 2} \end{matrix} \right] \\ &\quad \times \int_1^\infty x^{-\beta - p - 1} F \left[\begin{matrix} \beta + p + 1, p + 1 \\ 2p + \alpha + \beta + 2 \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] \\ &\quad \times x^{-q - \alpha} F \left[\begin{matrix} q + \alpha + \beta + 1, q + \alpha + 1 \\ 2q + \alpha + \beta + 2 \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] \frac{dx}{x}\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2, q + 1 \\ \beta + 1, -\alpha - q \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} \beta + 1 \\ \beta + p + 1 \end{matrix} \right] \\
&\quad \times \Gamma \left[\begin{matrix} 2q + \alpha + \beta + 2, -\alpha - q \\ q + \alpha + \beta + 1 \end{matrix} \right] \\
&\quad \times \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \beta + p + 1 - s \\ s + p + \alpha + 1, \beta + 1 - s \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s + \alpha + q, \beta + 1 - s \\ s, q + \beta + 2 - s \end{matrix} \right] ds. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обведенные Γ -множители (в числе 16 штук) намеренно не сокращены. Один из решающих элементов вычисления – сокращения в строке (2.9). Но процедура замены целых параметров m, n на сдвинутые вещественные параметры $m + \theta, n + \theta$ из п. 2.7 гарантирует это сокращение.

Нам надо идентифицировать это равенство с соотношением ортогональности для Φ_p и Φ_q , т.е. с

$$\begin{aligned}
&\Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2 \\ \beta + 1 \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} 2q + \alpha + \beta + 2 \\ \beta + 1 \end{matrix} \right] \\
&\quad \times \int_0^1 F \left[\begin{matrix} p + \alpha + \beta + 1, -p \\ \beta + 1 \end{matrix} ; x \right] F \left[\begin{matrix} q + \alpha + \beta + 1, -q \\ \beta + 1 \end{matrix} ; x \right] x^\beta (1-x)^\alpha dx \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{\sin(\alpha + \theta)\pi}{\sin \theta\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1 + p + \alpha, 1 + q + \alpha \\ -p, -q \end{matrix} \right] \\
&\quad \times \int_1^\infty F \left[\begin{matrix} p + \alpha + \beta + 1, p + \alpha + 1 \\ 2p + \alpha + \beta + 2 \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] F \left[\begin{matrix} q + \alpha + \beta + 1, q + \alpha + 1 \\ 2q + \alpha + \beta + 2 \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] \\
&\quad \times x^{-2\alpha - \beta - p - q - 2} (x - 1)^\alpha dx \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\delta_{p-q,0}}{2p + \alpha + \beta + 1} \Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2, 2p + \alpha + \beta + 2, 1 + p + \alpha, p + 1 \\ p + \beta + 1, p + \alpha + \beta + 1 \end{matrix} \right], \quad (2.12)$$

где $\delta_{p-q,0}$ – символ Кронекера.

Теперь мы построчно отождествим (2.7)–(2.9) и (2.10)–(2.12).

1) *Слагаемое (2.7) равно слагаемому (2.10)*. Мы преобразуем первый F -множитель подынтегрального выражения по формуле (1.5).

2) *Слагаемое (2.8) равно слагаемому (2.11)*. Сначала мы преобразуем первый F -множитель подынтегрального выражения по (1.5). Далее мы применяем формулу отражения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ к гамма-произведению в (2.8),

$$\Gamma \left[\begin{matrix} q + 1, p + \alpha + 1 \\ -\alpha - q, -p \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(1 + \alpha + q)\Gamma(1 + \alpha + p)\sin(1 + \alpha + q)\pi}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)\sin(1 + q)\pi}.$$

Потом мы используем, что $n := q - \theta \in \mathbb{Z}$, и преобразуем выражение

$$\frac{\sin(1 + \alpha + q)\pi}{\sin(1 + q)\pi} = \frac{\sin(1 + \alpha + n + \theta)\pi}{\sin(1 + n + \theta)\pi} = \frac{(-1)^{n+1}\sin(\alpha + \theta)\pi}{(-1)^{n+1}\sin(\theta)\pi}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теперь Γ -множители в (2.7), (2.8) приобретают форму

$$\text{const} \cdot u(p)u(q), \quad \text{const} \cdot v(p)v(q)$$

с константами, не зависящими от p, q . Это необходимо для того, чтобы тождество (2.7)–(2.9) могло быть истолковано как соотношение ортогональности однотипных функций Φ_p, Φ_q . Конечно, это было достигнуто домножением тождества на Γ -множитель (2.6). Но возможность такого домножения априори не очевидна, и, насколько я могу судить, заранее не предсказывается.

3) (2.9) равно (2.12). Мы применяем следующий интеграл типа Барнса:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} a+s, b-s \\ c+s, d-s \end{matrix} \right] ds = \Gamma \left[\begin{matrix} a+b, c+d-a-b-1 \\ c+d-1, c-a, d-b \end{matrix} \right]$$

(см. [25; 2.2.1.3¹³]) и получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} \beta+1+p-s, \alpha+q+s \\ 1+p+\alpha+s, q+\beta+2-s \end{matrix} \right] ds \\ &= \Gamma \left[\begin{matrix} \alpha+\beta+p+q+1, 1 \\ \alpha+\beta+p+q+2, q-p+1, p-q+1 \end{matrix} \right] \\ &= \frac{1}{(\alpha+\beta+p+q+1)\Gamma(q-p+1)\Gamma(p-q+1)} \\ &= \frac{1}{(\alpha+\beta+p+q+1)} \frac{\sin(q-p)\pi}{\pi(q-p)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Но $q-p \in \mathbb{Z}$, поэтому правая часть обращается в нуль, если $p \neq q$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это место, завершающее вычисление, на первый взгляд может показаться загадочным. Но при точке зрения, изложенной ниже в п. 2.7, оно почти предсказуемо (а каким иным способом обычные многочлены Якоби могли бы оказаться ортогональными?).

2.4. Сходимость интегралов.

ЛЕММА. Если выполнены условия (1.9), (1.11), то интеграл

$$\int_0^1 \Phi_p(x)^2 x^\beta (1-x)^\alpha dx + \frac{\sin(\alpha+\theta)\pi}{\sin(\theta\pi)} \int_1^\infty \Phi_p(x)^2 x^\beta (x-1)^\alpha dx \quad (2.14)$$

сходится абсолютно.

Ввиду

$$|\Phi_p(x)\Phi_q(x)| \leq \frac{1}{2}(|\Phi_p(x)|^2 + |\Phi_q(x)|^2)$$

наша лемма влечет также абсолютную сходимость

$$\int_0^1 \Phi_p(x)\Phi_q(x)x^\beta(1-x)^\alpha dx + \frac{\sin(\alpha+\theta)\pi}{\sin(\theta\pi)} \int_1^\infty \Phi_p(x)\Phi_q(x)x^\beta(x-1)^\alpha dx. \quad (2.15)$$

¹³Это равенство – частный случай (2.4). Мы подставляем $x=1$ в (2.4) и применяем формулу суммирования Гаусса для $F[a, b; c; 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для прослеживания асимптотик мы используем одно из куммеровских соотношений (см. [2; 2.10(1)])

$$F\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F\left[\begin{matrix} a, b \\ a+b-c+1 \end{matrix}; 1-z\right] + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F\left[\begin{matrix} c-a, c-b \\ c-a-b+1 \end{matrix}; 1-z\right]. \quad (2.16)$$

Функция Φ_p является гладкой в $x = 0$, и поэтому интеграл сходится в нуле при $\operatorname{Re} \beta > -1$.

Формула (2.16) дает следующую асимптотику для Φ_p при $x \rightarrow 1 - 0$:

$$C_1 + C_2(1-x)^{-\alpha}. \quad (2.17)$$

При $\operatorname{Re} \alpha > 0$ мы получаем $\Phi_p \sim (1-x)^{-\alpha}$, поэтому $\operatorname{Re} \alpha < 1$ – условие сходимости (2.14). Если $\operatorname{Re} \alpha < 0$, то функция Φ_p имеет конечный предел в $1 + 0$, поэтому $\operatorname{Re} \alpha > -1$ – условие сходимости (2.14).

Рассматривая правый предел в $x = 1$, мы получаем те же ограничения на α .

Очевидно,

$$\Phi_p(x) \sim x^{-\alpha-\beta-p-1}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Поэтому $\operatorname{Re}(2p + \alpha + \beta + 1) > 0$ – условие сходимости. Мы также должны запретить возможный полюс в (1.12), что дает $\alpha + p + 1 \neq 0$.

Обозначим $m = p - \theta$, $n = q - \theta$.

ЛЕММА. Для фиксированных m, n интеграл (2.15) зависит голоморфно от α, β, θ в разрешенной области значений параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой данной точки $(\alpha_0, \beta_0, \theta_0)$ сходимость интеграла является равномерной в ее достаточно малой окрестности (потому что наши асимптотики равномерны). Остается сослаться на теорему Мореры (если интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то функция голоморфна).

2.5. Ограничения на параметры, необходимые для нашего вычисления. Во-первых, мы используем преобразование Меллина, а поэтому наши функции K_1, K_2 должны быть локально интегрируемы. Единственной точкой разрыва является точка $x = 1$. Мы имеем следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} K_1(x) &\sim A_1 + A_2^\pm (1-x)^{-\alpha}, & x \rightarrow 1 \pm 0, \\ K_2(x) &\sim B_1 + B_2^\pm (x-1)^\alpha, & x \rightarrow 1 \pm 0. \end{aligned}$$

Это влечет $|\operatorname{Re} \alpha| < 1$.

Во-вторых, мы используем теорему о свертке для преобразования Меллина.

Преобразование Меллина (2.1) функции K_1 абсолютно сходится в полосе

$$0 < \operatorname{Re} s < \beta + p + 1.$$

Преобразование Меллина функции K_2 абсолютно сходится в полосе

$$-\alpha - q < \operatorname{Re} s < \beta + 1.$$

Мы можем применить теорему о свертке (2.3), если выполнены следующие условия:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \beta + p + 1, \\ 0 < \beta + \alpha + q + 1 \end{array} \right\} \quad - \text{ непустота полос,}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \beta + 1, \\ 0 < p + q + \alpha + \beta + 1 \end{array} \right\} \quad - \text{ непустота пересечения полос.}$$

Эта область непуста, однако она меньше области сходимости интеграла (2.14). Но условия ортогональности (1.13), (1.14) имеют голоморфные левые и правые части. Поэтому они верны во всей области сходимости.

2.6. Ограничения на θ . Ограничения (1.8) не использовались в доказательстве. В действительности, θ определена с точностью до сдвига $\theta \mapsto \theta + 1$. Этот сдвиг сохраняет ортогональную систему Φ_p , но меняет нумерацию базисных элементов.

2.7. Комментарий. Происхождение вычисления. Теперь объясним, откуда взялись наши функции K_1, K_2 .

Соотношения ортогональности для многочленов Якоби $P_n^{\alpha, \beta}$ общеизвестны, но не очевидны. Попытаемся получить их, используя технику барнсовских интегралов (см. [27]).

Задача состоит в вычислении интеграла

$$\int_0^1 {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta \\ \beta + 1 \end{matrix}; x \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -m, m + \alpha + \beta \\ \beta + 1 \end{matrix}; x \right] x^\beta (1-x)^\alpha dx. \quad (2.18)$$

Рассмотрим функции

$$L_1(x) = (1-x)^\alpha {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -m, m + \alpha + \beta \\ \beta + 1 \end{matrix}; x \right] H(1-x),$$

$$L_2(x) = x^{-\beta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta \\ \beta + 1 \end{matrix}; \frac{1}{x} \right] H(x-1) + r(x)H(x-1), \quad (2.19)$$

где функция $r(x)$ пока произвольна, но нам предстоит ее выбрать.

Наш интеграл (2.18) является сверткой $L_1 * L_2(x)$ в точке $x = 1$. Мы хотим вычислить ее, используя преобразование Меллина.

Преобразование Меллина функции L_1 равно (см. [25; 8.4.49.1])

$$\mathfrak{M}L_1(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} \beta + 1, \alpha + m + 1 \\ \beta + m + 1 \end{matrix} \right] \cdot \Gamma \left[\begin{matrix} s, \beta + m + 1 - s \\ \alpha + m + 1 + s, \beta + 1 - s \end{matrix} \right].$$

Далее мы находим функцию вида (2.19) в таблице обратных преобразований Меллина (см. [25; 8.4.49.1]).¹⁴

¹⁴На самом деле, таблицы интегралов здесь не являются необходимыми, поскольку нам надо написать барнсовский интеграл, определяющий гипергеометрическую функцию на $[0, 1]$, а как это делать, известно.

Мы можем положить

$$\mathfrak{M}L_2(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} 2n + \alpha + \beta + 2, -\alpha - n \\ n + \alpha + \beta + 1 \end{matrix} \right] \cdot \Gamma \left[\begin{matrix} \alpha + n + s, \beta + 1 - s \\ s, n + \beta + 2 - s \end{matrix} \right],$$

и после этого желаемое вычисление может быть проделано.

Теперь мы заменяем $m \mapsto m + \theta$, $n \mapsto n + \theta$ и повторяем вычисление.

2.8. Комментарии. Вычисление отдельных слагаемых (2.10), (2.11).

Соотношения ортогональности содержат сумму интегралов по двум промежуткам. Интересно вычислить интеграл по каждому из промежутков в отдельности.

Пусть $p, q \in \mathbb{C}$. Вычислим

$$X := \int_0^1 \Phi_p(x) \Phi_q(x) x^\beta (1-x)^\alpha dx, \quad Y := \int_1^\infty \Phi_p(x) \Phi_q(x) x^\beta (x-1)^\alpha dx.$$

Обозначим

$$a(p, q) := \frac{1}{p + q + \alpha + \beta + 1} \Gamma[2p + \alpha + \beta + 2, 2q + \alpha + \beta + 2],$$

$$b(p, q) := \Gamma \left[\begin{matrix} q + 1, p + \alpha + 1 \\ p + \beta + 1, q + \alpha + \beta + 1 \end{matrix} \right].$$

Мы пишем уравнение (2.7)–(2.9) и такое же уравнение с переставленными p, q :

$$X + \frac{\sin(\alpha + q)\pi}{\sin q\pi} Y = a(p, q) b(p, q) \frac{\sin(q - p)\pi}{(q - p)\pi},$$

$$X + \frac{\sin(\alpha + p)\pi}{\sin p\pi} Y = a(p, q) b(q, p) \frac{\sin(q - p)\pi}{(q - p)\pi}.$$

Получается линейная система уравнений от X, Y . Определитель системы равен

$$\frac{\sin(\alpha + p)\pi}{\sin p\pi} - \frac{\sin(\alpha + q)\pi}{\sin q\pi} = \frac{\sin \alpha \pi \sin(q - p)\pi}{\sin p\pi \sin q\pi}.$$

Поэтому

$$Y = a(p, q) \frac{\sin p\pi \sin q\pi}{\pi(q - p) \sin \alpha \pi} [b(q, p) - b(p, q)], \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} X &= a(p, q) \frac{\sin p\pi \sin q\pi}{\pi(q - p) \sin \alpha \pi} \left[\frac{\sin(\alpha + p)\pi}{\sin p\pi} b(p, q) - \frac{\sin(\alpha + q)\pi}{\sin q\pi} b(q, p) \right] \\ &= \frac{\pi a(p, q)}{(q - p) \sin \alpha \pi} \left[\frac{1}{\Gamma[p + \beta + 1, q + \alpha + \beta + 1, -q, -p - \alpha]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma[q + \beta + 1, p + \alpha + \beta + 1, -p, -q - \alpha]} \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

§ 3. Краевая задача

В этом параграфе $\alpha \neq 0$.

3.1. Симметричность краевой задачи. Доказательство теоремы 2.

Мы рассматриваем гипергеометрический дифференциальный оператор D , заданный формулой (1.16), и краевую задачу для D , определенную в п. 1.4. Мы хотим доказать тождество

$$\{Df, g\} = \{f, Dg\}, \quad f, g \in \mathcal{E}. \quad (3.1)$$

Пусть

$$H = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}$$

– некоторый дифференциальный оператор на $[a, b]$, формально симметричный по отношению к весу $\mu(x)$, т.е. для гладких f, g , равных нулю около концов промежутка,

$$\int_a^b Hf(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot Hg(x) dx.$$

Равносильно, $(a\mu)' = b\mu$. Поэтому для общих f, g мы имеем

$$\int_a^b Hf(x) \cdot g(x) dx - \int_a^b f(x) \cdot Hg(x) dx = \left\{ \{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)\}a(x)\mu(x) \right\} \Big|_a^b. \quad (3.2)$$

Применим это тождество к оператору D и отрезку $[a, b] = [0, 1 - \varepsilon]$. Пусть на отрезке $[1 - h, 1]$ мы имеем разложение

$$f(x) = u(x) + (1 - x)^{-\alpha}v(x), \quad g(x) = \tilde{u}(x) + (1 - x)^{-\alpha}\tilde{v}(x)$$

с гладкими $u(x), v(x)$. Тогда поправочное слагаемое (3.2) равно

$$\left\{ \det \begin{pmatrix} u'(x) + (1 - x)^{-\alpha}v'(x) - \alpha(1 - x)^{-\alpha-1}v(x) & u(x) + (1 - x)^{-\alpha}v(x) \\ \tilde{u}'(x) + (1 - x)^{-\alpha}\tilde{v}'(x) - \alpha(1 - x)^{-\alpha-1}\tilde{v}(x) & \tilde{u}(x) + (1 - x)^{-\alpha}\tilde{v}(x) \end{pmatrix} \right. \\ \left. \times x^{\beta+1}(1 - x)^{\alpha+1} \right\} \Big|_{x=1-\varepsilon}. \quad (3.3)$$

Последний множитель дает степень $\varepsilon^{\alpha+1}$. Напомним, что $-1 < \alpha < 1$. Слагаемые определителя имеют порядки

$$1, \quad \varepsilon^{-\alpha}, \quad \varepsilon^{-2\alpha}, \quad \varepsilon^{-\alpha-1}, \quad \varepsilon^{-2\alpha-1}.$$

Но слагаемое с порядком $\varepsilon^{-2\alpha-1}$ в разложении детерминанта на самом деле равно

$$\det \begin{pmatrix} -\alpha v(x) & v(x) \\ -\alpha \tilde{v}(x) & \tilde{v}(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Поэтому старший член разложения определителя имеет порядок $\varepsilon^{-\alpha-1}$ и только он дает ненулевой вклад в предел поправочного слагаемого при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} (Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)) x^\beta (x-1)^\alpha dx = u(1)\tilde{v}(1) - v(1)\tilde{u}(1). \quad (3.4)$$

При $x > 1$ мы имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin \theta \pi}{\sin(\alpha + \theta)\pi} u(x) + (1 - x)^{-\alpha} v(x), \\ g(x) &= \frac{\sin \theta \pi}{\sin(\alpha + \theta)\pi} \tilde{u}(x) + (1 - x)^{-\alpha} \tilde{v}(x). \end{aligned}$$

Тем же способом получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\sin(\alpha + \theta)\pi}{\sin \theta \pi} \int_{1+\varepsilon}^{\infty} (Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)) x^{\beta} (x - 1)^{\alpha} dx \\ = -u(1)\tilde{v}(1) + v(1)\tilde{u}(1). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство тождества (3.1).

3.2. Проверка краевых условий для Φ_p . Покажем, что $\Phi_p(x)$ удовлетворяет краевому условию в $x = 1$. Это делается прямым вычислением. Вот его детали.

Нам нужны выражения для Φ_p вида

$$\Phi_p(x) = \begin{cases} A_1(p; x) + B_1(p; x)(1 - x)^{-\alpha}, & x < 1, \\ A_2(p, x) + B_2(p, x)(x - 1)^{-\alpha}, & x > 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Мы хотим разложить Φ_p в степенной ряд в $x = 1$ на полуинтервалах $(1 - \varepsilon, 1]$, $[1, 1 + \varepsilon)$.

Используя формулу (2.16) на левом полуинтервале, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_p(x) &= \Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2 \\ \beta + 1 \end{matrix} \right] \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} \beta + 1, -\alpha \\ p + \beta + 1, -p - \alpha \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} -p, p + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; 1 - x \right] \right. \\ &\quad \left. + \Gamma \left[\begin{matrix} \beta + 1, \alpha \\ -p, p + \alpha + \beta + 1 \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} p + \beta + 1, -p - \alpha \\ 1 - \alpha \end{matrix} ; 1 - x \right] (1 - x)^{-\alpha} \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

при $x < 1$.

Теперь, используя тождество

$$\begin{aligned} F \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; \frac{1}{x} \right] &= \Gamma \left[\begin{matrix} c, c - a - b \\ c - a, c - b \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} a, a + 1 - c \\ a + b + 1 - c \end{matrix} ; 1 - x \right] x^a \\ &\quad + \Gamma \left[\begin{matrix} c, a + b - c \\ a, b \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} c - b, 1 - b \\ c + 1 - a - b \end{matrix} ; 1 - x \right] x^a (x - 1)^{c - a - b} \quad (3.7) \end{aligned}$$

(эта формула – видоизмененный вариант [2; 1.10(4)]), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_p(x) &= \Gamma [p + \alpha + 1, -p] \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2, -\alpha \\ p + 1, p + \beta + 1 \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} p + \alpha + \beta + 1, -p \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; 1 - x \right] \right. \\ &\quad \left. + \Gamma \left[\begin{matrix} 2p + \alpha + \beta + 2, \alpha \\ p + \alpha + \beta + 1, p + \alpha + 1 \end{matrix} \right] F \left[\begin{matrix} p + \beta + 1, -p - \alpha \\ 1 - \alpha \end{matrix} ; 1 - x \right] (x - 1)^{-\alpha} \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

при $x > 1$.

Выражения (3.6), (3.8) – это желаемые разложения (3.5). Легко видеть, что

$$B_1(p, x) = B_2(p, x), \quad A_1(p, x)/A_2(p, x) = \frac{\sin(p + \alpha)\pi}{\sin p\pi}.$$

Далее,

$$\frac{\sin(p + \alpha)\pi}{\sin p\pi} = \frac{\sin(\theta + \alpha)\pi}{\sin \theta\pi}, \quad (3.9)$$

что влечет наши краевые условия.

ЗАМЕЧАНИЕ (оно будет важно ниже в п. 4.2). Свойство (3.9) выполнено тогда и только тогда, когда $p - \theta \in \mathbb{Z}$. Действительно, разность между левой и правой частью равна

$$\frac{\sin \alpha\pi \sin(\theta - p)\pi}{\sin p\pi \sin \theta\pi}.$$

3.3. Другое доказательство соотношений ортогональности. В случае $p \neq q$ соотношения ортогональности следуют из свойства симметричности оператора (3.1).

Вычислим

$$X := \int_0^1 \Phi_p(x) \Phi_q(x) x^\beta (1 - x)^\alpha dx.$$

Сохраним обозначения (3.5). В силу формулы (3.4)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} D\Phi_p(x) \cdot \Phi_q(x) x^\beta (1 - x)^\alpha dx - \int_0^{1-\varepsilon} \Phi_p(x) \cdot D\Phi_q(x) x^\beta (1 - x)^\alpha dx \right\} \\ = A(p, 1)B(q, 1) - A(q, 1)B(p, 1). \end{aligned}$$

Постоянные $A(p, 1)$ и т.п. являются Γ -коэффициентами в (3.6) и (3.8). Итак, правая часть тождества нам известна.

Так как Φ_p являются формальными собственными функциями (см. (1.17)), левая часть тождества равна

$$[-p(p + \alpha + \beta + 1) + q(q + \alpha + \beta + 1)] \cdot X = (q - p)(q + p + \alpha + \beta + 1)X.$$

После несложных сокращений мы получаем (2.21).

Точно так же может быть получено выражение (2.20) для интеграла по отрезку $[1, \infty]$.

Теперь мы можем проверить соотношения ортогональности прямым вычислением, правда опять длинноватым.

§ 4. Спектральная мера

Мы хотим получить спектральную меру для оператора D в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, используя технику Г. Вейля–Титчмарша (см. [3]).

Чтобы избежать логарифмических асимптотик, положим $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

4.1. Собственные функции сопряженного оператора. Обсудим оператор D^* , сопряженный к D .

Обозначим через $\text{Dom}(A)$ область определения линейного оператора A . Напомним, что $f \in \mathcal{H}$ содержится в $\text{Dom}(D^*)$, если существует функция $h \in \mathcal{H}$ такая, что для всех $g \in \text{Dom}(D)$ выполнено

$$\langle f, Dg \rangle = \langle h, g \rangle.$$

В этом случае мы полагаем $h = D^*f$.

Так как D симметричен, мы имеем

$$\text{Dom}(D^*) \supset \text{Dom}(D) = \mathcal{E}.$$

Описание $\text{Dom}(D^*)$ не является важным вопросом. На самом деле нужно лишь описание собственных функций D^* .

ЛЕММА. Пусть Ξ – собственная функция D^* . Тогда Ξ удовлетворяет краевым условиям [a\)](#), [b\)](#) в $x = 0$ и $x = 1$ из п. [1.4](#).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие в $x = 0$. Пусть $D^*\Xi = \lambda\Xi$. Представим λ как

$$\lambda = -p(p + \alpha + \beta + 1). \quad (4.1)$$

Гипергеометрическое уравнение $Df = \lambda f$ имеет два решения около $x = 0$. Если β не является неотрицательным целым числом, то они задаются как

$$S_1 = \Phi_p(x) = F \left[\begin{matrix} -p, p + \alpha + \beta + 1 \\ \beta + 1 \end{matrix}; x \right], \quad (4.2)$$

$$S_2 = x^{-\beta} F \left[\begin{matrix} -\beta - p, \alpha + p + 1 \\ 1 - \beta \end{matrix}; x \right]. \quad (4.3)$$

Если $\beta \geq 1$, то второе решение не содержится в $\mathcal{H}$ и утверждение очевидно.¹⁵

Пусть $-1 < \beta < 1$. Пусть $f \in \mathcal{E}$, т.е. f является гладкой около $x = 0$. Разложим нашу собственную функцию Ξ как

$$\Xi = u(x) + x^{-\beta}v(x), \quad u(x), v(x) \in C^\infty$$

(на самом деле, $u(x)$ и $v(x)$ – это гипергеометрические функции [\(4.2\)](#), [\(4.3\)](#), с точностью до числовых множителей). Если Ξ содержится в $\text{Dom}(D^*)$, то

$$\langle Df, \Xi \rangle - \langle f, D^*\Xi \rangle = 0. \quad (4.4)$$

Повторяя вычисления п. [3.1](#), мы получаем, что разность равна

$$f(0)v(0).$$

Так как f произвольна, то $v(0) = 0$. Но $v(x) = \text{const} \cdot F[-\beta - p, \alpha + p + 1; 1 - \beta; x]$, поэтому $\text{const} = 0$.

¹⁵Для целого $\beta > 0$ это тоже верно.

Условие в $x = 1$. Доказательство аналогично. Априори мы знаем, что

$$\Xi(x) = \begin{cases} u_-(x) + v_-(x)(1-x)^{-\alpha}, & x < 1, \\ u_+(x) + v_+(x)(x-1)^{-\alpha}, & x > 1. \end{cases}$$

В действительности, $u_{\pm}$ и $v_{\pm}$ являются гипергеометрическими функциями из правых частей равенств (3.6), (3.8) с точностью до числовых множителей.

Пусть $f \in \mathcal{E}$, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} a(x) + b(x)(1-x)^{-\alpha}, & x < 1, \\ \frac{\sin \theta \pi}{\sin(\alpha + \theta)\pi} a(x) + b(x)(x-1)^{\alpha}, & x > 1, \end{cases}$$

где $a(x)$, $b(x)$ являются гладкими около $x = 1$.

Если $\Xi \in \text{Dom}(D^*)$, то условие (4.4) выполнено. Повторяя рассуждения п. 3.1, мы получаем, что (4.4) равно

$$(a(1)v_-(1) - b(1)u_-(1)) - \frac{\sin(\alpha + \theta)\pi}{\sin \theta \pi} \left(\frac{\sin \theta \pi}{\sin(\alpha + \theta)\pi} a(1)v_+(1) - b(1)u_+(1) \right).$$

Это должно быть равно нулю для всех $a(1)$, $b(1)$ и, следовательно,

$$v_-(1) = v_+(1), \quad u_+(1) = \frac{\sin \theta \pi}{\sin(\alpha + \theta)\pi} u_-(1).$$

Но априори мы знаем функции $v_{\pm}$, $u_{\pm}$ с точностью до числовых множителей, что влечет наше утверждение.

4.2. Собственные функции D^* , лежащие в L^2 .

ЛЕММА. Если $\Xi \in \mathcal{H}$ – собственная функция D^* , то $\Xi = \Phi_q$ с $q \in \theta + \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – собственное значение, пусть p задано формулой (4.1) с $\text{Re } p > -(\alpha + \beta + 1)/2$.

В силу краевого условия в нуле мы имеем

$$\Xi = \text{const} \cdot F[-p, p + \alpha + \beta + 1; \beta + 1; x] \quad (4.5)$$

при $x < 1$.

Только одно решение уравнения $Df = \lambda f$ содержится в L^2 вблизи бесконечности и оно равно

$$\text{const} \cdot F[p + \alpha + 1, p + \alpha + \beta + 1; 2p + \alpha + \beta + 2; 1/x] x^{-\alpha - \beta - p - 1}$$

на $[1, \infty]$. Таким образом, на обоих интервалах наша собственная функция Ξ совпадает с Φ_p с точностью до числовых множителей. Условие склейки есть (3.9). В силу последнего замечания из п. 3.2 $p - \theta \in \mathbb{Z}$.

Если

$$\text{Re } p = -\frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad (4.6)$$

то собственных функций, лежащих в L^2 на бесконечности, нет.

4.3. Самосопряженность. В силу предыдущей леммы уравнение $D^*f = \pm if$ не имеет решений в $\mathcal{H}$. Это влечет существенную самосопряженность оператора D .

4.4. Спектр. Собственные числа $\lambda = -p(p + \alpha + \beta + 1)$, соответствующие функциям Φ_p , образуют дискретный спектр. Остальной спектр лежит на полупрямой (4.6), т.е. $\lambda \geq (\alpha + \beta + 1)^2/4$.

Действительно, во всех остальных случаях есть в точности одно L^2 -решение $S_0(x)$ дифференциального уравнения $Df = \lambda f$ около нуля и в точности одно L^2 -решение $S_\infty(x)$ вблизи бесконечности. Поэтому мы можем написать функцию Грина, как это объяснено в [3].

4.5. Почти L^2 -собственные функции. Пусть

$$p = -\frac{\alpha + \beta + 1}{2} + is, \quad s \in \mathbb{R},$$

и λ задается (4.1).

ЛЕММА. Функции Ψ_s , заданные (1.19), являются единственными почти L^2 -решениями уравнения $D\Psi = \lambda\Psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Около $x = 0$ такое решение имеет вид (4.5).

Мы пишем следующий базис $\Lambda(s, x)$, $\Lambda(-s, x)$ в пространстве решений уравнения $Df = \lambda f$,

$$\Lambda(s, x) = F\left[\frac{\alpha+\beta+1}{2} + is, \frac{\alpha-\beta+1}{2} + is; \frac{1}{x}\right]_{1+2is} x^{-(\alpha+\beta+1)/2-is}. \quad (4.7)$$

В обоих случаях мы получаем почти L^2 -решения. Теперь мы должны удовлетворить краевому условию в $x = 1$. С этой целью мы разлагаем три решения – (4.5) и $\Lambda(\pm s; x)$ – вблизи точки $x = 1$. Остается написать условия склейки в $x = 1$. Вычисление довольно длинно, оно сводится к использованию формулы дополнения для Γ -функции и элементарной тригонометрии. Мы это вычисление опускаем.

Формула для спектральной меры следует из явных асимптотик для почти L^2 -решений на ∞ , что объясняется в [3].

Список литературы

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. Т. 2. *Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1. *Гипергеометрические функции. Функции Лежандра*, Наука, М., 1965.
- [3] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Спектральная теория*, Мир, М., 1966.
- [4] Н. Я. Виленкин, А. У. Климык, “Представления группы $SU(1,1)$ и функции Кравчука–Мейкснера”, *Докл. АН УССР*, 1988, № 6, 12–16.

- [5] N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions. I: Simplest Lie groups, special functions and integral transforms*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **72**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [6] W. Groenevelt, E. Koelink, “Meixner functions and polynomials related to Lie algebra representations”, *J. Phys. A*, **35**:1 (2002), 65–85.
- [7] W. Groenevelt, “Laguerre functions and representations of $\mathfrak{su}(1,1)$ ”, *Indag. Math. (N.S.)*, **14** (2003), 329–352; [arXiv:math.CA/0302342](https://arxiv.org/abs/math.CA/0302342).
- [8] Yu. A. Neretin, *Perturbations of some classical hypergeometric orthogonal systems*, Addendum to preprint version of [9], [arXiv:math.CA/0309445](https://arxiv.org/abs/math.CA/0309445).
- [9] Ю. А. Неретин, “Некоторые непрерывные аналоги разложения по многочленам Якоби и векторнозначные ортогональные базисы”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:2 (2005), 31–46.
- [10] R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report № 94-05, Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, 1994; <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html>.
- [11] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, С. К. Суслов, *Классические ортогональные многочлены дискретной переменной*, Наука, М., 1985; дополненный английский перевод: A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, S. K. Suslov, *Classical orthogonal polynomials of discrete variable*, Springer, Berlin, 1991.
- [12] L. Pukanszky, “On the Kronecker products of irreducible unitary representations of the 2×2 real unimodular group. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 116–152.
- [13] В. Ф. Молчанов, “Тензорные произведения представлений трехмерной группы Лоренца”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43** (1979), 860–891.
- [14] W. Miller, Jr., *Symmetry and separation of variables*, Adisson-Wesley, Reading, MA, 1977; русский перевод: У. Миллер, мл., *Симметрия и разделение переменных*, Мир, М., 1981.
- [15] A. Tengstrand, “Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature”, *Math. Scand.*, **8** (1960), 201–218.
- [16] В. Ф. Молчанов, “Аналог формулы Планшереля для гиперboloидов”, *Докл. АН СССР*, **183** (1968), 288–291.
- [17] В. Ф. Молчанов, “Формула Планшереля для псевдоримановых симметрических пространств ранга 1”, *Докл. АН СССР*, **290**:3 (1986), 545–549.
- [18] В. Ф. Молчанов, “Гармонический анализ на однородных пространствах”, *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. направл. Некоммутативный гармонический анализ-2*, **59**, ВИНТИ, М., 1990, 5–144.
- [19] J. Faraut, “Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **58**:4 (1979), 369–444.
- [20] T. H. Koornwinder, “Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups”, *Special functions: group theoretical aspects and applications*, eds. R. Askey, T. Koornwinder, W. Schempp, Reidel, Dordrecht, 1984, 1–85.
- [21] Ю. А. Неретин, “Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах”, *Матем. сб.*, **192**:3 (2001), 83–114.
- [22] Ю. А. Неретин, “Бета-интегралы и конечные ортогональные системы многочленов Вильсона”, *Матем. сб.*, **193**:7 (2002), 131–148.
- [23] R. Askey, “Beta integrals and the associated orthogonal polynomials”, *Number theory* (Madras, 1987), Lecture Notes in Math., **1395**, Springer, Berlin, 1989, 84–121.
- [24] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [25] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Т. 3. Дополнительные главы*, Наука, М., 1986.

- [26] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [27] О. И. Маричев, *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул)*, Наука и техника, Минск, 1978; английский перевод: O. I. Marichev, *Handbook of integral transforms of higher transcendental functions*, Wiley, New York, 1983.

Ю. А. Неретин (Yu. A. Neretin)

Институт теоретической и экспериментальной физики,

г. Москва;

University of Vienna

E-mail: neretin@mccme.ru

Поступила в редакцию

07.09.2005 и 22.03.2006