Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Карагулян, Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 3, 55–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:31:10

УДК 517.51

Г. А. Карагулян

Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье

Получена новая интегральная оценка для прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье.

Главным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. Для любых $f \in L \log L(\mathbf{T}^2)$ и $\delta > 0$ существует множество $E_{\delta, f} \in \mathbf{T}^2$, $|E_{\delta, f}| > (2\pi)^2 - \delta$, такое, что

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{E_{\delta, f}} \exp \left[\frac{c_1 \delta |S_{N, M}(x, y, f)|}{\|f\|_{L \log L(\mathbf{T}^2)}} \right]^{1/2} dx dy \leq C_2, \quad N, M = 1, 2, \dots, \\ 2) \quad & \lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_{E_{\delta, f}} [\exp(|S_{N, M}(x, y, f) - f(x, y)|)^{1/2} - 1] dx dy = 0. \end{aligned}$$

Из этой теоремы следуют оценки почти всюду для прямоугольных сумм двойных рядов Фурье, а также сходимость в L^p на множествах большой меры.

Библиография: 9 названий.

1. Введение

Пусть

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} c_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_1 x_1 + \dots + n_m x_m$, — ряд Фурье функции $f \in L^1(\mathbf{T}^m)$. Обозначим

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, f) = \sum_{|n_j| \leq N_j} c_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{N} = (N_1, \dots, N_m). \quad (2)$$

Далее, пусть

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \varphi(0) = 0, \quad (3)$$

— непрерывно возрастающая функция. Будем рассматривать следующую задачу.

ЗАДАЧА. Для каких φ можно сказать, что для любой $f \in L \log^{m-1} L(\mathbf{T}^m)$ ($f \neq 0$) и числа $\delta > 0$ существует множество $E_{\delta, f} \in \mathbf{T}^m$ (зависящее от δ и σ), $|E_{\delta, f}| > (2\pi)^m - \delta$, такое, что

$$\int_{E_{\delta, f}} \varphi \left(\gamma_{\delta} \frac{S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, f)}{\|f\|_{L \log^{m-1} L}} \right) d\mathbf{x} < c \quad \text{для любых } \mathbf{N} \in \mathbb{N}^m, \quad (4)$$

где

$$\|f\|_{L \log^{m-1} L} = \inf \left\{ z \in \mathbb{R}^+ : \int_{\mathbf{T}^m} \frac{|f|}{z} \left(\log^+ \frac{|f|}{z} \right)^{m-1} dz \leq 1 \right\}$$

и $c > 0$ некоторое абсолютное постоянное?

Из работ Л. В. Жижиашвили [9], С. В. Конягина [5] и Р. Д. Гецадзе [2] следует, что $L \log^{m-1} L(\mathbf{T}^m)$ является точным классом функций, для которых прямоугольные частные суммы (2) ряда Фурье (1) сходятся по мере. Этот факт обосновывает рассмотрение класса $L \log^{m-1} L$ в нашей задаче.

Выясним какие следствия можно получить в случае эффективного решения этой задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если утверждение задачи имеет место для некоторого φ , удовлетворяющего (3), и*

$$\varphi(ab) \leq r(a)\varphi(b) \quad \text{при} \quad b > 0, \quad 0 < a < a_1, \quad (5)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} r(a) = 0, \quad r(a) > 0, \quad (6)$$

тогда для любых $f \in L \log^{m-1} L(\mathbf{T}^m)$ и $\delta > 0$ существует множество $E_{\delta, f} \subset \mathbf{T}^m$, $|E_{\delta, f}| > (2\pi)^m - \delta$, такое, что

$$\lim_{\min N_i \rightarrow \infty} \int_{E_{\delta, f}} \varphi(|S_N(x, f) - f(x)|) dx = 0. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем выбрать множество $G_{\delta, f} \subset \mathbf{T}^m$ такое, что

$$|G_{\delta, f}| > (2\pi)^m - \delta/2, \quad (8)$$

на котором $f(x)$ непрерывна. Можно выбрать также тригонометрический полином P_k , $k = 1, 2, \dots$, такой, что

$$\|P_k - f\|_{L^\infty(G_{\delta, f})} \leq \varepsilon_k / \gamma_{\delta_k}, \quad (9)$$

$$\|P_k - f\|_{L \log^{m-1} L(\mathbf{T}^m)} \leq \varepsilon_k / 2, \quad (10)$$

где γ_δ взято из (4), $\varepsilon_k > 0$ и $\delta_k > 0$ — некоторые числа такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \delta/2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k / \gamma_{\delta_k} = 0. \quad (11)$$

Из утверждения задачи, учитывая (10), можно выбрать множества $E_{k, f} \subset \mathbf{T}^m$, $k = 1, 2, \dots$, так, что

$$|E_{k, f}| > (2\pi)^m - \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\int_{E_{k, f}} \varphi \left(\frac{\gamma_{\delta_k} (2|S_N(x, f - P_k)|)}{\varepsilon_k} \right) dx \leq c, \quad N \in \mathbb{N}^m. \quad (13)$$

Обозначив $E_{\delta,f} = (\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,f}) \cap G_{\delta,f}$, из (8), (11) и (12) получим $|E_{\delta,f}| > (2\pi)^m - \delta$. Далее, для некоторого $A_k > 0$ имеем $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, P_k) = P_k(\mathbf{x})$, если $N_i > A_k$, $i = 1, 2, \dots, m$ (см. (2)), отсюда в силу (5), (6), (9) и (13)

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\min N_i \rightarrow \infty} \int_{E_{\delta,f}} \varphi(|S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, f) - f(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} \\
&= \limsup_{\min N_i \rightarrow \infty} \int_{E_{\delta,f}} \varphi(|S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, f - P_k) - (f(\mathbf{x}) - P_k(\mathbf{x}))|) d\mathbf{x} \\
&\leq \limsup_{\min N_i \rightarrow \infty} r(\varepsilon_k / \gamma_{\delta_k}) \int_{E_{k,f}} \varphi\left(\gamma_{\delta_k} \frac{|S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, f - P_k) - (f(\mathbf{x}) - P_k(\mathbf{x}))|}{\varepsilon_k}\right) d\mathbf{x} \\
&\leq r(\varepsilon_k / \gamma_{\delta_k}) \limsup_{\min N_i \rightarrow \infty} \int_{E_{k,f} \cap G_{\delta,f}} \left(\varphi\left(\frac{\gamma_{\delta_k} 2 |S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, f - P_k)|}{\varepsilon_k}\right) \right. \\
&\quad \left. + \varphi\left(\frac{2\gamma_{\delta_k} |f(\mathbf{x}) - P_k(\mathbf{x})|}{\varepsilon_k}\right) \right) d\mathbf{x} \\
&\leq r(\varepsilon_k / \gamma_{\delta_k}) (c + \varphi(2)).
\end{aligned}$$

Отсюда же, с учетом (6) и (11), следует (7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть для φ с условием (3) справедливо утверждение задачи. Тогда если $f \in L \log^{m-1} L(\mathbf{T}^m)$, то

1) для любой последовательности $n_k \rightarrow \infty$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$S_{n_{k_1}, \dots, n_{k_m}}(\mathbf{x}, f) = o(\omega_{k_1, \dots, k_m}) \quad \text{н.в. при} \quad \min k_i \rightarrow \infty,$$

если

$$\sum_{k_1, \dots, k_m} (\varphi(\omega_{k_1, \dots, k_m}))^{-1} < \infty \quad (\omega_{k_1, \dots, k_m} > 0);$$

2) для любой последовательности $\mathbf{N}^{(k)} = (N_1^{(k)}, \dots, N_m^{(k)}) \in \mathbf{N}^m$, $k = 1, 2, \dots$, $\min N_i^{(k)} \rightarrow \infty$, имеем

$$S_{\mathbf{N}^{(k)}}(\mathbf{x}, f) = o(\omega_k) \quad \text{н.в. при} \quad k \rightarrow \infty, \quad (14)$$

если

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi(\omega_k)]^{-1} < \infty \quad (\omega_k > 0). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать только вторую часть. Первую можно доказывать аналогичным образом. Возьмем полином $P(\mathbf{x})$ с $\|f - P\|_{L \log^{m-1} L} < \varepsilon$. По утверждению задачи существует множество $E = E_{\delta, \varepsilon, f} \in \mathbf{T}^m$ такое, что

$$|E_{\delta, \varepsilon, f}| > (2\pi)^m - \delta, \quad (16)$$

$$\int_{E_{\delta, \varepsilon, f}} \varphi\left(\frac{\gamma_{\delta} |S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, f - P)|}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} \leq c, \quad \mathbf{N} \in \mathbb{N}^m. \quad (17)$$

Имеем $S_{N_k}(x, f) = S_{N_k}(x, f - P)$ если $k > A$. Обозначив

$$B_k = \{x \in E : |S_{N_k}(x, f)| > \varepsilon \omega_k / \gamma_\delta\} = \{x \in E : |S_{N_k}(x, f - P)| > \varepsilon \omega_k / \gamma_\delta\},$$

$k > A$. Из (17) получим $|B_k| \leq c/\varphi(\omega_k)$, $k = 1, 2, \dots$, следовательно, в силу (15), $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leq \infty$. Отсюда получим

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{N_k}(x, f)}{\omega_k} \leq \varepsilon / \gamma_\delta \quad \text{п.в.} \quad x \in E = E_{\delta, \varepsilon, f}.$$

Так как ε и δ произвольные, отсюда легко следует (14).

В работе рассматриваются одномерные и двумерные случаи задачи.

2. Одномерный случай

Для любой $f \in L^1(\mathbf{T})$ обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x| > \varepsilon} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t) dt, \\ Mf(x) &= \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt, \end{aligned}$$

где $I \subset \mathbf{T}$ — некоторый интервал. Неравенство

$$|\{x \in \mathbf{T} : |f(t)| > t, Mf(x) < s\}| \leq C_1 \exp\left(-C_2 \frac{t}{s}\right) \quad (18)$$

доказано Хантом в [4] (здесь и внизу через c_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать абсолютные константы).

Мы покажем что следующую теорему легко можно получить из неравенства (18).

ТЕОРЕМА 1. Для любой $f \in L^1(\mathbf{T})$ ($f \not\equiv 0$) и $\delta > 0$ существует множество $E_{\delta, f} \subset \mathbf{T}$, $|E_{\delta, f}| > 2\pi - \delta$, и

$$1) \quad \int_{E_{\delta, f}} \exp\left(c_1 \delta \frac{|S_N(x, f)|}{\|f\|_{L^1(\mathbf{T})}}\right) dx \leq c_2, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E_{\delta, f}} [\exp(|S_N(x, f) - f(x)|) - 1] dx = 0. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varphi(t) = \exp t - 1$ имеем

$$\varphi(ab) \leq a\varphi(t), \quad \text{если } 0 < a < 1, t > 0.$$

Отсюда, в силу предложения 1, (20) немедленно следует из (19). Для доказательства (19) мы будем использовать формулу

$$S_N(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} \frac{f(t) \sin N(t-x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt + O(1), \quad N = 1, 2, \dots$$

(см. [8, т. 1, с. 87]). Имеем

$$|S_N(x, f)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbf{T}} \frac{f(t) \sin Nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbf{T}} \frac{f(t) \cos Nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt \right| + c_3.$$

Следовательно, ввиду (18),

$$\begin{aligned} & |\{x \in \mathbf{T} : |S_N(x, f)| > t, Mf(x) < s\}| \\ & \leq |\{x \in \mathbf{T} : |\widetilde{f(x) \sin Nx}| > t/2, Mf(x) < s\}| \\ & \quad \cup \{x \in \mathbf{T} : |\widetilde{f(x) \cos Nx}| > t/2, Mf(x) < s\}| \\ & \leq c_2 \exp\left(-c_4 \frac{t}{s}\right), \end{aligned}$$

если $t > c_5$. Отсюда, введя обозначение $E_{\delta, f} = \{Mf(x) < s\}$ ($\delta = c_6/s$), имеем (19).

Из неравенства (20) получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой $f \in L_1(\mathbf{T})$ и $\delta > 0$ существует множество $E_{\delta, f} \subset \mathbf{T}$, $|E_{\delta, f}| > 2\pi - \delta$, такое, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x, f) - f(x)\|_{L^p(E_{\delta, f})} = 0 \quad \text{для любого } p > 1.$$

Из предложения 2, с учетом (19), получаем

СЛЕДСТВИЕ 2 (Осколков [6]). Для любых $f \in L_1(\mathbf{T})$ и последовательности $n_k \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \dots$, имеем

$$S_{n_k}(x, f) = o(\log k) \quad \text{n.в.}$$

Осколков [6] доказал также, что для быстро растущих n_k эту оценку нельзя улучшить на $o(\omega(k))$, если $\omega(t) = o(\log t)$ при $t \rightarrow \infty$. Из этого следует, что в (19) $\exp t$ нельзя заменить на $\varphi(t)$, $\log \varphi(t) = o(t)$. Это показывает, что оценка (19) точна.

3. Двумерный случай

Для любой $f \in L_1(\mathbf{T}^2)$ определим

$$\begin{aligned} H_1 f(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t, y) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x| > \varepsilon} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t, y) dt, \\ H_2 f(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} \operatorname{ctg}\left(\frac{s-y}{2}\right) f(x, s) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|s-y| > \varepsilon} \operatorname{ctg}\left(\frac{s-y}{2}\right) f(x, s) ds, \\ M_1 f(x, y) &= \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t, y)| dt, \\ M_2 f(x, y) &= \sup_{I \ni y} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x, s)| ds, \end{aligned}$$

где $I \subset \mathbf{T}$ – некоторый интервал. Будем рассматривать оператор

$$H_2 H_1 f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbf{T}} \left[\operatorname{ctg} \frac{s-y}{2} \int_{\mathbf{T}} \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} f(t, s) dt \right] ds.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любой $F \in L \log L(\mathbf{T}^2)$, $F(x, y) \geq 0$, и $\delta > 0$ существует множество $E_{\delta, F} \in \mathbf{T}^2$, $|E_{\delta, F}| > (2\pi)^2 - \delta$, такое, что для любой измеримой $f(x, y)$, удовлетворяющей условию*

$$|f(x, y)| \leq F(x, y), \quad (21)$$

имеем

$$\int_{E_{\delta, F}} \exp\left(\frac{c_1 \delta |H_2 H_1 f(x, y)|}{\|F\|_{L \log L(\mathbf{T}^2)}}\right) dx dy \leq c_2. \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Невозможно получить оценку

$$\int_{E_{\delta, F}} \varphi\left(\frac{c_1 \delta |H_2 H_1 f(x, y)|}{\|F\|_{L \log L(\mathbf{T}^2)}}\right) dx dy \leq c \quad (23)$$

вместо (22), для какой-либо φ из (3) и

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(t)}{\sqrt{t}} \geq c_3 > 0, \quad (24)$$

даже если $F(x, y) \equiv 1$.

Действительно, для функции $r(x, y) = \chi_{[0, \pi] \times [0, \pi]}(x, y)$ можно проверить, что

$$|H_2 H_1 r(x, y)| \geq \ln \frac{c}{x - \pi} \ln \frac{c}{y - \pi}, \quad \text{если } \pi < x, y < 2\pi.$$

Отсюда, обозначив $E_\lambda = (\pi + 2^{-\sqrt{\lambda}}, \pi + 2 \cdot 2^{-\sqrt{\lambda}}) \times (\pi + 2^{-\sqrt{\lambda}}, \pi + 2 \cdot 2^{-\sqrt{\lambda}})$, получим $|E_\lambda| = 4^{-\sqrt{\lambda}}$ и $|H_2 H_1 f(x, y)| > c_4 \lambda$ при $(x, y) \in E_\lambda$. Отсюда следует

$$\int_{\mathbf{T}_2} \varphi(|H_2 H_1 r(x, y)|) dx dy = \infty,$$

если (24) имеет место для достаточно большого c_3 . Следовательно, для любого $E \subset \mathbf{T}^2$, $|E| > 0$, имеем

$$\int_{\mathbf{T}^2} ds dt \int_E \varphi(|H_2 H_1 r(t - x, s - y)|) dx dy = +\infty.$$

Следовательно, существует последовательность $(s_n, t_n) \in \mathbf{T}^2$ такая, что

$$\int_E \varphi(|H_2 H_1 r(t_n - x, s_n - y)|) dx dy \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а это противоречит (23).

Для частичных сумм ряда Фурье функции f имеем

$$S_{N,M}(x, y, f) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbf{T}^2} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(t - x) \sin(M + \frac{1}{2})(s - y)}{4 \sin \frac{t-x}{2} \sin \frac{s-y}{2}} f(t, s) dt ds.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} & |S_{N,M}(x, y, f)| \\ & \leq c_5 (|H_2 H_1 f_{N,M}^{(1)}(x, y)| + |H_1 f_{N,M}^{(2)}(x, y)| + |H_2 f_{N,M}^{(3)}(x, y)|) + c_6 \|f\|_{L_1(\mathbf{T}^2)}, \end{aligned} \quad (25)$$

где имеем

$$|f_{N,M}^{(i)}(x, y)| \leq f(x, y), \quad i = 1, 2, 3.$$

Из теоремы 2 и предложения 1, с учетом (18) и (25), легко следует

ТЕОРЕМА 3. *Для любых $f \in L \log L(\mathbf{T}^2)$ и $\delta > 0$, существует множество $E_{\delta, f} \in \mathbf{T}^2$, $|E_{\delta, f}| > (2\pi)^2 - \delta$, такое, что*

$$1) \quad \int_{E_{\delta, f}} \exp \left[\frac{c_1 \delta |S_{N,M}(x, y, f)|}{\|f\|_{L \log L(\mathbf{T}^2)}} \right]^{1/2} dx dy \leq C_2, \quad N, M = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

$$2) \quad \lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_{E_{\delta, f}} [\exp(|S_{N,M}(x, y, f) - f(x, y)|)^{1/2} - 1] dx dy = 0. \quad (27)$$

Из (27) следует

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любых $f \in L \log L(\mathbf{T}^2)$ и $\delta > 0$ существует множество $E_{\delta, f} \in \mathbf{T}^2$, $|E_{\delta, f}| > (2\pi)^2 - \delta$, такое, что*

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \|S_{N,M}(x, y, f) - f(x, y)\|_{L^p(E_{\delta, f})} = 0 \quad \text{при любом } p > 1.$$

Остальные следствия немедленно вытекают из предложения 2 и оценки (26).

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для любой последовательности пар $(N_k, M_k) \in \mathbb{N}^2$, $N_k, M_k \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots$, и для каждой $f \in L \log L(\mathbf{T}^2)$ имеем*

$$S_{N_k, M_k}(x, y, f) = o(\log^2 k) \quad \text{п.в. при } k \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для любой последовательности $N_k \rightarrow \infty$, $N_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$, и для каждой $f \in L \log L(\mathbf{T}^2)$ имеем*

$$S_{N_i, N_j}(x, y, f) = o(\log^2 \max(i, j)) \quad \text{п.в. при } \min(i, j) \rightarrow \infty.$$

В связи с последней оценкой отметим, что Шелин в [7] доказал, что $S_{N,M}(x, y, f) = o(\log(\min(N, M)))$ п.в. для любой функции $f \in L^p(\mathbf{T}^2)$, $p > 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $f(x)$ есть функция, определенная на измеримом множестве E , удовлетворяющая условию

$$\|f\|_{L^p(E)} \leqslant c p^\alpha \quad \text{при любом } p \geqslant 1, \quad (28)$$

где $c > 0$ и $0 < \alpha < 1$ — некоторые постоянные. Имеем

$$\int_E \exp(\gamma |f(x)|)^{1/\alpha} dx \leqslant c_1 + |E|,$$

где $\gamma = \alpha^{1/\alpha}/6c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\exp(t^{1/\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k/\alpha}}{k!}.$$

Отсюда в силу (28) для $\gamma = \alpha^{1/\alpha}/6c$ следует

$$\begin{aligned} \int_E \exp(\gamma |f(x)|)^{1/\alpha} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_E |\gamma f(x)|^{k/\alpha} dx \\ &\leqslant |E| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma^{1/\alpha} c^{1/\alpha}}{\alpha} \right)^k \frac{k^k}{k!} \leqslant c_1 + |E|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь пусть $a(x) \in L^\infty(\mathbf{T})$ есть некоторая функция такая, что

$$\text{supp } a(x) \subset I, \quad \int_I a(x) dx = 0, \quad (29)$$

где $I \subset \mathbf{T}$ — некоторый интервал. Обозначим через $\bar{I}$ интервал, содержащий I , такой, что $|\bar{I}| = 2|I|$ и $\text{centre}(\bar{I}) = \text{centre}(I)$.

ЛЕММА 2. Для любой функции $a(x) \in L^\infty(\mathbf{T})$, удовлетворяющей (29), имеем

$$|\tilde{a}(x)| \leqslant c_1 \frac{|I|^2 \|a\|_\infty}{|\rho(x, I)|^2 + |I|^2} \quad \text{при } x \in \mathbf{T} \setminus \bar{I},$$

где $\rho(x, I)$ — длина меньшей дуги связывающей x с $t_I = \text{centre}(I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathbf{T} \setminus \bar{I}$ есть некоторая точка. Тогда из (29) имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_I \frac{a(t)}{\text{tg} \frac{t-x}{2}} dt \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_I a(t) \left(\text{ctg} \frac{t-x}{2} - \text{ctg} \frac{t_I-x}{2} \right) dt \right| \\ &\leqslant c_1 \|a\|_\infty \int_I \frac{|t-t_I|}{|\rho(x, I)|^2 + |I|^2} dt \leqslant c_1 \frac{|I|^2 \|a\|_\infty}{|\rho(x, I)|^2 + |I|^2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Известно [1, с. 117], что для любой $f \in L^p(\mathbf{T})$, $p > 1$,

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbf{T})} \leq cp \|f\|_{L^p(\mathbf{T})}. \quad (30)$$

Из этого неравенства следует

$$\|a\|_{L^p(\mathbf{T})} \leq cp \|a\|_{\infty}, \quad p > 1,$$

для любой $a \in L^{\infty}(\mathbf{T})$. Отсюда, считая $a(x)$ как функцию из $L^{\infty}[0, 2\pi]$, с учетом неравенства

$$|1/t - \operatorname{ctg} t/2| < c_1, \quad (31)$$

для $a(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a(t)}{t-x} dt$ имеем

$$\|Ha(x)\|_{L^p[0, 2\pi]} \leq c_2 p \|a\|_{\infty}. \quad (32)$$

ЛЕММА 3. Для любой $a(x)$ с $\operatorname{supp} a(x) \subset I$, где $I \subset \mathbf{T}$ есть некоторый интервал,

$$\|\tilde{a}(x)\|_{L^p(\mathbf{T})} \leq cp |I|^{1/p} \|a\|_{\infty}, \quad p > 1. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно предполагать, что $I = (0, \alpha)$, $\alpha < \pi/4$. Тогда из (31) немедленно следует

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(x)\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbf{T}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} a(t) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq c_1 |I| \|a\|_{\infty} + \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{a(t)}{t-x} dt \right|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Замена переменной $t = \alpha t'/\pi$ в интеграле очевидно дает (33) как следствие из (32). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — некоторые функции, определенные на $(a, b] \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющие условию

$$\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^x g(t) dt, \quad \text{если } a < x < b, \quad (34)$$

и $\varphi(t) \geq 0$ — убывающая функция на $(a, b]$. Тогда имеем

$$\int_a^b f(t) \varphi(t) dt \geq \int_a^b g(t) \varphi(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $r(t) = f(t) - g(t)$ и

$$R(x) = \int_a^x r(t) dt.$$

Имеем $R(x) \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \varphi(t) dt - \int_a^b g(t) \varphi(t) dt &= \int_a^b r(t) \varphi(t) dt \\ &= R(b) \varphi(b) - R(a) \varphi(a) - \int_a^b R(t) d\varphi(t) \\ &= R(b) \varphi(b) - \int_a^b R(t) d\varphi(t). \end{aligned}$$

Так как $R(t) \geq 0$, $\varphi(b) \geq 0$ и $\varphi(t)$ убывающая, то получим (34). Лемма доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned} \nu(y) &= \{(t, s) \in \mathbf{T}^2 : s = y\}, \\ \mu(x) &= \{(t, s) \in \mathbf{T}^2 : t = x\}. \end{aligned} \quad (35)$$

ЛЕММА 5. Пусть $F(x, y) \in L \log L(\mathbf{T}^2)$ есть некоторая функция такая, что $F(x, y) \geq 0$ и $\text{supp } F(x, y) \subset \mathbf{T} \times (a, b)$. Тогда существует множество $\Delta_k \subset \mathbf{T} \times (a, b)$, $k = 1, 2, \dots$, такое, что $\Delta_k \cap \nu(y)$ есть интервал или пустое множество для любого $y \in (a, b)$, и для некоторых натуральных λ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, $1 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k \chi_{\Delta_k}(x, y) \right\|_{L^\infty} \leq 2\lambda_n, \quad (36)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\Delta_k| \leq c_1 \|F\|_{L \log L(\mathbf{T}^2)}, \quad (37)$$

причем любая измеримая функция $f(x, y)$ такая, что

$$|f(x, y)| \leq F(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{T}^2, \quad (38)$$

имеет представление

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^f(x, y) \quad \text{п.в.}, \quad (39)$$

где $a_k^f(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$, — измеримые функции со следующими свойствами:

$$\text{supp } a_k^f(x, y) \subset \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (40)$$

$$a_0(x, y) = \int_0^1 f(t, s) dt, \quad \int_{\Delta_k \cap \nu(y)} a_k^f(t, y) dt = 0, \quad y \in (a, b), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (41)$$

$$\|a_k^f\|_{\infty} \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω есть класс интервалов

$$\omega(i, j, y) = [2\pi(i-1)/2^j, 2\pi i/2^j) \times \{y\}, \quad y \in (a, b), \quad i = 1, 2, \dots, 2^j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Определим семейство интервалов $\Omega_m \subset \Omega$, $m = 1, 2, \dots$, зависящее от $F(x, y)$, следующим образом:

$$\Omega = \left\{ \omega \in \Omega : \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} F(t, y) dt > 2^m \text{ при } \omega \subset \nu(y), \right. \\ \left. \frac{1}{|\omega'|} \int_{\omega'} F(t, y) dt \leq 2^m \text{ при } \omega' \supset \omega, \omega' \in \Omega \right\}. \quad (44)$$

Отсюда, обозначив

$$A_m = \bigcup_{\omega \in \Omega_m} \omega, \quad m = 1, 2, \dots \quad (A_0 = \mathbf{T}^2), \quad (45)$$

получим

$$A_m \subset \{(x, y) \in \mathbf{T}^2 : M_1 F(x, y) \geq 2^m\}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

$$A_{m+1} \subset A_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (47)$$

$$|F(x, y)| \leq 2^m \quad \text{для п.в. } x \in \mathbf{T}^2 \times (a, b) \setminus A_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Справедливость (46) и (47) очевидна. По определению (44), (48) очевидно следует из теоремы Лебега [3, с. 23]

$$\lim_{|I| \rightarrow 0, I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt = f(x), \quad \text{если } f \in L^1(\mathbf{T}), \quad (49)$$

где $I \subset \mathbf{T}$ есть некоторый интервал.

Из (44) очевидно имеем, что интервалы класса Ω_m попарно непересекающиеся. Следовательно, для любой $f(x, y)$, удовлетворяющей (38), определение

$$g_m^f(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in \mathbf{T}^2 \times (a, b)_m, \quad m = 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} f(t, y) dt, & \text{если } (x, y) \in \omega, \quad \omega \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{при остальных } (x, y), \end{cases} \quad (50)$$

$$g_0^f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t, y) dt$$

корректно. Следовательно, из (38), (48), (49) и (47) получим

$$|g_m^f(x, y)| \leq 2^m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} g_m^f(x, y) = f(x, y) \quad \text{п.в.}$$

Отсюда, обозначив

$$f_0(x, y) = g_0^f(x, y), \quad f_m(x, y) = g_m^f(x, y) - g_{m-1}^f(x, y), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (51)$$

получим

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x, y) \quad \text{п.в.} \quad \|f_m\|_{\infty} \leq 2^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (52)$$

а также по (47), (50) и (51)

$$\text{supp } f_m \subset A_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (53)$$

Далее, из (44), (50) и (51) вытекает

$$\int_{\omega} f_m(t, y) dt = 0 \quad \text{для любого } \omega \in \Omega_{m-1}, \quad \omega \in \nu(y), \quad m = 1, 2, \dots \quad (54)$$

(предполагается $\Omega_0 = \{\mathbf{T} \times \{y\} : y \in (a, b)\}$). С учетом (43), обозначим

$$\Delta_{i,j,m} = \bigcup_{y \in (a,b), \omega(i,j,y) \in \Omega_{m-1}} \omega(i, j, y), \quad 1 \leq i \leq 2^j, \quad m, j = 1, 2, \dots, \quad (55)$$

$$a_{i,j,m}(x, y) = f_m(x, y) \chi_{\Delta_{i,j,m}}(x, y). \quad (56)$$

Из этих определений следует, что множества $\Delta_{i,j,m}$ и функции $a_{i,j,m}^f$ измеримые и

$$\begin{aligned} \bigcup_{1 \leq i \leq 2^j, j \in \mathbb{N}} \Delta_{i,j,m} &= \Omega_{m-1}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} a_{i,j,m}^f(x, y) &= f_m(x, y) \quad \text{п.в.} \end{aligned}$$

Отсюда, по (52) следует, что

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} a_{i,j,m}^f(x, y) + f_0(x, y), \quad (57)$$

далее, из (52), (56) и (54), обозначив $\lambda_{i,j,m} = 2^{m+1}$, получим

$$|a_{i,j,m}^f(x, y)| \leq \lambda_{i,j,m}, \quad \int_{\Delta_{i,j,m} \cap \nu(y)} a_{i,j,m}^f(x, y) dx = 0, \quad y \in (a, b). \quad (58)$$

Можно определить взаимно однозначное отображение $k = k(i, j, m)$ из $\{(i, j, m) : 1 \leq i \leq 2^j, j, m \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{N}$ такое, чтобы последовательность $\lambda_k (= \lambda_{i,j,m})$ была неубывающей. А также, обозначив $\Delta_k = \Delta_{i,j,m}$, $a_k = a_{i,j,m}$ ($k = k(i, j, m)$), из (57), (56) и (58) получим (39)–(42). Из неравенства [3, с. 19]

$$\int_{\mathbf{T}^2} M_1 F(x, y) dx dy \leq c_2 \|F\|_{L \log L(\mathbf{T})}$$

с учетом (45), (55) и (46), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\Delta_k| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+1} |\{M_1 F(x, y) > 2^m\}| \\ &\leq 2 \int_{\mathbf{T}^2} M_1 F(x, y) dx dy \leq c_1 \|F\|_{L \log L(\mathbf{T}^2)}. \end{aligned}$$

Наконец, (36) очевидно следует из (45), (47) и (55). Лемма доказана.

Скажем, что отображение $\tau: E \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $E \in \mathbb{R}^2$ — измеримое множество, является α -инвариантным, если оно взаимно однозначное из E в $\tau(E)$ и для любого измеримого множества e выполняются условия

- i) $\tau(e)$ измеримо,
- ii) $\tau(e \cap \mu(x)) \subset \mu(x)$ и $\tau(e \cap \mu(x)) = \alpha |e \cap \mu(x)|$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 6. Пусть $\alpha > 0$, $0 < \varepsilon < \pi/4$, — некоторые числа и $W \subset \mathbf{T}$, E, G — измеримые множества такие, что

$$\begin{aligned} G &\subset \mathbf{T} \times (0, \pi/2), \\ E \cap \mu(x) &\subset G \cap \mu(x) \subset (a(x), b(x)) \quad \text{при } x \in W, \\ a(x) - \alpha |E \cap \mu(x)| - \varepsilon &> 0, \quad b(x) + \alpha |E \cap \mu(x)| + \varepsilon < \pi/2, \quad x \in W. \end{aligned}$$

Тогда существуют множества $W' \supset W$, $G' \subset G$, α -инвариантные отображения τ^+ и τ^- , определенные на $\tilde{E} = E \cap (W' \times \mathbf{T})$, такие, что

- 1) $|W'| > |W| - \varepsilon$,
- 2) $\tau^+(\tilde{E}), \tau^-(\tilde{E})$ и G попарно непересекающиеся,
- 3) $\tau^+(\tilde{E}) \cup \tau^-(\tilde{E}) \cup G \subset G' \subset \mathbf{T} \times (0, \pi/2)$,
- 4) $|G' \cap \mu(x)| \leq |G \cap \mu(x)| + 2\alpha |E \cap \mu(x)| + \varepsilon$, $x \in W'$,
- 5) $G' \cap \mu(x) \subset (a(x) - \alpha |E \cap \mu(x)| - \varepsilon, b(x) + \alpha |E \cap \mu(x)| + \varepsilon)$, $x \in W'$,
- 6) $R[\tau^+(x, y), \tau^-(x, y)] \subset G \cap \mu(x)$, $(x, y) \in \tilde{E}$,
- 7) для любой $f \in L^1(\mathbf{T}^2)$, $f \geq 0$, $\text{supp } f \subset \tilde{E}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda f[(\tau^+)^{-1}(x, y)] dy &\leq \alpha \int_0^\lambda f(x, y) dy \\ &\leq \int_0^\lambda f[(\tau^-)^{-1}(x, y)] dy, \quad 0 < \lambda < \pi/2. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Будет доказано также, что если G открытое, то утверждение леммы справедливо при $\varepsilon = 0$ везде в формулировке леммы. Тогда мы будем иметь $W' = W$, $\tilde{E} = E$ и равенство в 4) и 3).

Доказательство леммы 6. Нетрудно проверить, что можно предполагать G открытым. Тогда мы возьмем $\varepsilon = 0$ везде в формулировке леммы. Итак, имеем

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k,$$

где Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, попарно непересекающиеся кубы вида $[a, b) \times [c, d)$. Далее предположим, что утверждение леммы 6 справедливо в случае $E \subset \Delta_{k_0}$ и $\varepsilon = 0$ для некоторого k_0 . Обозначив $E_k = E \cap \Delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, и используя предположенное, последовательно получим множества $G_k \subset \mathbf{T}^2$, $k = 1, 2, \dots$, α -инвариантные функции τ_k^+ , τ_k^- , определенные на E_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что

- 1а) $\tau^+(E_k)$, $\tau^-(E_k)$ и G_{k-1} попарно непересекающиеся,
- 2а) $\tau^+(E_k) \cup \tau^-(E_k) \cup G_{k-1} = G_k$, $k = 1, 2, \dots$ ($G_0 = G$),
- 3а) $G_k \cap \mu(x) \subset (a(x) - \alpha \sum_{i=1}^k |E_i \cap \mu(x)|, b(x) + \alpha \sum_{i=1}^k |E_i \cap \mu(x)|)$, $x \in W$,
- 4а) $R[\tau_k^+(x, y), \tau_k^-(x, y)] \subset G_k \cap \mu(x)$, $x \in W$,
- 5а) для любой $f \in L^1(\mathbf{T}^2)$, $f \geq 0$, $\text{supp } f \subset K_k$,

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda f[\tau_k^+(x, y)] dy &\leq \alpha \int_0^\lambda f(x, y) dy \\ &\leq \int_0^\lambda f[\tau^-(x, y)] dy, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Теперь обозначим

$$G' = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

и определим $\tau^\pm$ на E по

$$\tau^\pm(x, y) = \tau_k^\pm(x, y), \quad \text{если } (x, y) \in E_k.$$

Отсюда, используя 1а)–5а), легко можно проверить условия леммы для определенных нами G и $\tau^\pm$.

Итак, можно предполагать

$$E \subset \Delta_1 = [a_1, a_2) \times [b_1, b_2). \quad (59)$$

Обозначим

$$G_n = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k \quad (60)$$

и определим точки $\tau_n^+(x, y)$, $\tau_n^-(x, y)$ для каждой точки $(x, y) \in \Delta_1$ такие, что

$$\tau_n^\pm(x, y) \in \mu(x) \setminus G_n, \quad (\tau^-(x, y))_1 - 2 \leq b_1, \quad (\tau^+(x, y))_2 \geq b_2, \quad (61)$$

$$|\{R[(x, b_2), \tau_n^\pm(x, y)] \setminus G_n\} \cap \mu(x)| = \alpha |R[(x, y), (x, b_1)] \cap E|, \quad (62)$$

$$|\{R[(x, b_2), \tau_n^\pm(x, y)] \setminus G_n\} \cap \mu(x)| = \alpha |R[(x, y), (x, b_1)] \cap E|. \quad (63)$$

Можно легко проверить корректность этих определений. Также имеем

$$(\tau_n^+(x, y))_2 \leq (\tau_{n+1}^+(x, y))_2, \quad (\tau_n^-(x, y))_2 \geq (\tau_{n+1}^-(x, y))_2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (64)$$

и, следовательно, можно определить

$$\tau^\pm(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^\pm. \quad (65)$$

Для данного интервала $\delta = (\alpha_1, \alpha_2) \cdot (\beta_1, \beta_2) \subset \Delta_1$ обозначим

$$H_n^\pm(\delta) = \{(x, y) : x \in (\alpha_1, \alpha_2), y \in R[\tau_n^\pm(x, \beta_1), \tau_n^\pm(x, \beta_2)]\}, \quad (66)$$

$$H^\pm(\delta) = \{(x, y) : x \in (\alpha_1, \alpha_2), y \in R[\tau^\pm(x, \beta_1), \tau^\pm(x, \beta_2)]\}. \quad (67)$$

Нетрудно проверить, что множества $H_n^\pm(\delta)$ измеримые, а также

$$H_n^\pm(\delta) \subset H_{n+1}^\pm(\delta), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$H^\pm(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^\pm(\delta).$$

Отсюда, $H^\pm$ тоже измеримые.

Из определения $\tau_n^\pm(\delta)$ (см. (61)–(63)) следует

$$\tau_n^\pm(\delta \cap E) = H_n^\pm(\delta) \setminus G_n, \quad |\tau_n^\pm(\delta \cap E \cap \mu(x))| = \alpha |\delta \cap E \cap \mu(x)|, \quad (68)$$

$$\tau^\pm(\delta \cap E) \subset H^\pm(\delta) \setminus G. \quad (69)$$

Отсюда нетрудно получить, что если $(x, y) \in (H^\pm(\delta) \setminus G) \cap \mu(x)$ есть точка плотности для множества $(H^\pm(\delta) \setminus G) \cap \mu(x)$ (на прямой $\mu(x)$), то $(x, y) \in \tau^\pm(\delta \cap E \cap \mu(x))$. Этот факт, с учетом (69), дает

$$|(H^\pm(\delta) \setminus G) \setminus \tau^\pm(\delta \cap E)| = 0, \quad (70)$$

$$|\tau^\pm(\delta \cap E \cap \mu(x))| = |(H^\pm(\delta) \setminus G) \cap \mu(x)|. \quad (71)$$

Чтобы доказать, что $\tau^\pm$ есть α -инвариантное, следует доказать условия i) и ii) (перед леммой 6) для $\tau^\pm$ в случае $e = \delta$. Так как $H^\pm(\delta) \setminus G$ измеримое, то из (69) и (70) следует, что $\tau^\pm(\delta \cap E)$ также измеримое, откуда следует i). Для доказательства ii), по (71) достаточно показать, что

$$|(H^\pm(\delta) \setminus G) \cap \mu(x)| = \alpha |\delta \cap E \cap \mu(x)|, \quad x \in W. \quad (72)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Из (64) и (65), для фиксированного $x \in W$ имеем

$$(\tau^+(x, \beta_1))_2 - \varepsilon < (\tau_n^+(x, \beta_1))_2 \leq (\tau^+(x, \beta_1))_2, \quad n \geq n(\varepsilon),$$

$$(\tau^+(x, \beta_2))_2 - \varepsilon < (\tau_n^+(x, \beta_2))_2 \leq (\tau^+(x, \beta_2))_2, \quad n \geq n(\varepsilon).$$

Отсюда, используя (68), получим

$$|(R[\tau^+(x, \beta_1); \tau^+(x, \beta_2)] \setminus G_n) - \alpha |\delta \cap E \cap \mu(x)|| < 2\varepsilon,$$

и, следовательно, в силу (60), имеем

$$|(R[\tau^+(x, \beta_1); \tau^+(x, \beta_2)] \setminus G) - \alpha|\delta \cap E \cap \mu(x)|| < 2\varepsilon.$$

Отсюда же, так как $\varepsilon > 0$ произвольное, получим

$$|(R[\tau^+(x, \beta_1); \tau^+(x, \beta_2)] \setminus G) - \alpha|\delta \cap E \cap \mu(x)|, \quad x \in W.$$

Далее, в силу (67) имеем (72) для $H^+(\delta)$. То же самое для $H^-(\delta)$ доказывается аналогичным образом.

Из (59)–(65) следует, что $\tau^+(E)$, $\tau^-(E)$ и G попарно непересекающиеся. Обозначив

$$G' = G \cup \tau^+(E) \cup \tau^-(E),$$

можно легко проверить условия 1)–6) леммы. Чтобы показать 7) заметим, что если $f \in L^1(\mathbf{T})$, $f \geq 0$, $\text{supp } f \subset E$, то

$$\int_0^{\pi/2} f[(\tau^+)^{-1}(x, y)] dy = \alpha \int_0^{\pi/2} f(x, y) dy = \int_0^{\pi/2} f[(\tau^-)^{-1}(x, y)] dy, \quad x \in W, \quad (73)$$

так как $\tau^\pm$ есть α -инвариантное. С другой стороны, по определению $\tau^\pm$ имеем, что из

$$M \in \tau^+(E), \quad N \in E, \quad P \in \tau^-(E)$$

следует $(M)^2 \geq (N)^2 \geq (P)^2$, что в месте с (73) дает 7). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Очевидно, можно предполагать

$$\begin{aligned} \text{supp } F &\subset \mathbf{T} \times (\pi/6, \pi/3), \\ \|F\|_{l \log L(\mathbf{T}^2)} &\leq 1. \end{aligned} \quad (74)$$

Применяя лемму 5, найдем множества $\Delta_k \subset \mathbf{T} \times (\pi/6, \pi/3)$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $\Delta_k \cap \nu(y)$ есть интервал или пустое множество для любого $y \in (\pi/6, \pi/3)$. Кроме того, для любой измеримой $f(x, y)$, удовлетворяющей (38), имеем (36), (37), (39)–(42). Обозначим

$$\overline{\Delta}_k = \bigcup_{y \in \mathbf{T}} \overline{\Delta \cap \nu(y)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(см. определение перед леммой 2). Определив

$$b_k^f(x, y) = H_1 a_k^f(x, y) \chi_{\overline{\Delta}_k}(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (75)$$

$$d_k^f(x, y) = H_1 a_k^f(x, y) \chi_{\mathbf{T} \setminus \overline{\Delta}_k}(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (76)$$

из лемм 2 и 3, с учетом (40)–(42), имеем

$$|d_k^f(x, y)| \leq c_1 \frac{\lambda_k |\Delta_k \cap \nu(y)|^2}{|\rho(x, \Delta_k \cap \nu(y))^2 + |\Delta_k \cap \nu(y)|^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (77)$$

$$\|b_k^f(x, y)\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq c_2 p \lambda_k |\Delta_k|^{1/p}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p \geq 1. \quad (78)$$

Фиксируем число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $1/\lambda_{n_0} < \varepsilon$. Тогда, по (37) и (74)

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \lambda_k |\Delta_k| \leq c_3 \quad \left(\frac{1}{\lambda_{n_0}} < \varepsilon \right). \quad (79)$$

Следовательно, так как $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, получим

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\Delta_k| \leq \frac{1}{\lambda_{n_0}} < c_3 \varepsilon.$$

Обозначив

$$G_0 = \bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} \overline{\Delta}_k, \quad (80)$$

имеем

$$G_0 \subset \mathbf{T} \times (\pi/6, \pi/3), \quad (81)$$

$$|G_0| < 2 \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\Delta_k| \leq 2c_3 \varepsilon. \quad (82)$$

Из (79) следует, что для каких-то $W \subset \mathbf{T}$ и $c_5 > 0$

$$|W| > 2\pi - \varepsilon, \quad (83)$$

$$\varepsilon + 2c_5 \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{n_0}} |\overline{\Delta}_k \cap \mu(x)| < \pi/6, \quad x \in W. \quad (84)$$

Обозначив $E_k = \overline{\Delta}_k \cap (W \times \mathbf{T})$, $k = 1, 2, \dots$, и используя лемму 6 последовательно, получим множества $G_k \subset \mathbf{T}^2$, $k > n_0$, $W_k \subset \mathbf{T}$, $k > n_0$ и α_k -инвариантные отображения τ_k^- , τ_k^+ , определенные на $\tilde{E}_k = \overline{\Delta}_k \cap (W_k \times \mathbf{T})$, где

$$\alpha_k = c_5 \frac{\lambda_k}{\lambda_{n_0}}, \quad k > n_0 \quad (85)$$

(будем предполагать $W_{n_0} = W$, $G_{n_0} = G_0$) со следующими свойствами (см. (81)–(84)):

- 1) $W_{k+1} \subset W_k$, $|W_{k+1}| > |W_k| - \varepsilon/2^k$, $k \geq n_0$,
- 2) $\tau_k^+(\tilde{E}_k)$, $\tau_k^-(\tilde{E}_k)$ и G_{k-1} ($k > n_0$) попарно непересекающиеся,
- 3) $\tau_k^+(\tilde{E}_k) \cup \tau_k^-(\tilde{E}_k) \cup G_{k-1} \subset G_k \subset \mathbf{T} \times (0, \pi/2)$,
- 4) $|G_k \cap \mu(x)| \leq |G_{k-1} \cap \mu(x)| + 2\alpha_k |\overline{\Delta}_k \cap \mu(x)| + \varepsilon/2^k$, $x \in W_k$,
- 5) $G_k \cap \mu(x) \subset (\pi/6 - \sum_{k=n_0+1}^k \alpha_k |\overline{\Delta}_k \cap \mu(x)| - \varepsilon \sum_{i=n_0+1}^k 2^{-i}, \pi/3 + \sum_{i=n_0+1}^k \alpha_k |\overline{\Delta}_k \cap \mu(x)| + \varepsilon \sum_{i=n_0+1}^k 2^{-i})$, $x \in W_k$,
- 6) $R[\tau_k^+(x, y); \tau_k^-(x, y)] \subset G_k \cap \mu(x)$, $(x, y) \in \tilde{E}_k$,
- 7) для любой $f \in L^1(\mathbf{T}^2)$, $f \geq 0$, $\text{supp } f \subset \tilde{E}_k$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda f[(\tau_k^+)^{-1}(x, y)] dy &\leq \alpha_k \int_0^\lambda f(x, y) dy \\ &\leq \int_0^\lambda f[(\tau_k^-)^{-1}(x, y)] dy, \quad 0 < \lambda < \pi/2. \end{aligned} \quad (86)$$

Отсюда, обозначив

$$\begin{aligned} W &= \bigcap_{k=n_0}^{\infty} W_k, \\ G &= \left(\bigcup_{k>n_0} G_k \right) \cup (W \times \mathbf{T})^c, \end{aligned} \quad (87)$$

имеем $|W| > 2\pi - \varepsilon$, следовательно, с учетом 4) и 5), получим

$$\begin{aligned} G \cap \mu(x) &\subset (0, \pi/2), \quad x \in W, \\ |G \cap \mu(x)| &\leq |G_0 \cap \mu(x)| + 2 \sum_{k>n_0} \alpha_k |\bar{\Delta}_k \cap \mu(x)| + \varepsilon, \quad x \in W. \end{aligned} \quad (88)$$

Следовательно, по (82), (79) и (85) получится

$$|G| \leq c_6 \varepsilon. \quad (89)$$

Теперь обозначим

$$b^f(x, y) = \sum_{k>n_0} b_k^f(x, y), \quad (90)$$

$$d^f(x, y) = \sum_{k>n_0} d_k^f(x, y). \quad (91)$$

Из (36), (40) и (42) имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_0} a_k^f(x, y) \right\|_{\infty} \leq c_7 \lambda_{n_0} \leq c_7 / \varepsilon.$$

Следовательно, ввиду (31)

$$\left\| H_2 H_1 \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k^f(x, y) \right) \right\|_{L^p(\mathbf{T}^2)} \leq c_8 p^2 / \varepsilon, \quad p \geq 1. \quad (92)$$

С другой стороны, в силу (75), (76), (90) и (91) имеем

$$H_2 H_1 \left(\sum_{k>n_0} a_k^f(x, y) \right) = H_2 b^f(x, y) + H_2 d^f(x, y). \quad (93)$$

Обозначив

$$F_1(x, y) = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\lambda_k |\Delta_k \cap \nu(y)|^2}{|\rho(x, \Delta_k \cap \nu(y))|^2 + |\Delta_k \cap \nu(y)|^2},$$

из (77), (91) и (74) получим

$$\begin{aligned} |d^f(x, y)| &\leq F_1(x, y), \\ \int_{\mathbf{T}^2} F_1(x, y) dx dy &= \sum_{k>n_0} \int_{\mathbf{T}} dy \int_{\mathbf{T}} \frac{\lambda_k |\Delta_k \cap \nu(y)|^2}{|\rho(x, \Delta_k \cap \nu(y))|^2 + |\Delta_k \cap \nu(y)|^2} dx \\ &\leq c_8 \sum_{k>n_0} \lambda_k |\Delta_k| \leq c_9. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство (18), можно выбрать множество $E'_\varepsilon \subset \mathbf{T}^2$ так, что

$$\|H_2 d^f(x, y)\|_{L^p(E'_\varepsilon)} \leq c_{10} p / \varepsilon, \quad (94)$$

$$|E'_\varepsilon| > (2\pi)^2 - \varepsilon. \quad (95)$$

Теперь перейдем к оценке $H_2 b^f(x, y)$. Определим функции

$$b_\pm^f(x, y) = \begin{cases} 1/\alpha_k [b_k^f((\tau_k^+)^{-1}(x, y))]^\pm & \text{при } (x, y) \in \tau_k^+(\tilde{E}_k), \\ 1/\alpha_k [b_k^f((\tau_k^-)^{-1}(x, y))]^\mp & \text{при } (x, y) \in \tau_k^-(\tilde{E}_k), \\ 0 & \text{при остальных } (x, y), \end{cases} \quad (96)$$

где $g^+ = \max(0, g)$, $g^- = \min(0, g)$. Из свойства 6), (86)–(88), используя (96) и лемму 4, для любых $(x, y) \in \mathbf{T}^2 \setminus G$, $y \notin [\pi; \frac{3}{2}\pi]$, можно получить

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k^+(\tilde{E}_k)} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} b_+^f(x, t) dt &\leq \int_{\tilde{E}_k} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} [b_k^f(x, t)]^+ dt, \\ \int_{\tau_k^-(\tilde{E}_k)} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} b_+^f(x, t) dt &\leq \int_{\tilde{E}_k} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} [b_k^f(x, t)]^- dt. \end{aligned}$$

Из этих неравенств, с учетом (96), следует

$$H_2 b_+^f(x, y) \leq H_2 b^f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{T}^2 \setminus G, \quad y \notin [\pi, \frac{3}{2}\pi]. \quad (97)$$

Аналогично, имеем

$$H_2 b^f(x, y) \leq H_2 b_-^f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{T}^2 \setminus G, \quad y \notin [\pi, \frac{3}{2}\pi]. \quad (98)$$

С другой стороны, так как $\operatorname{supp} b^f(x, y) \subset G_0 \subset G$ (см. (75), (80), (90)) из (88) и соотношения $|\operatorname{ctg} \frac{t-y}{2}| < c_{10}$ при $t \in (0, \pi/2)$, $y \in [\pi, 3\pi/2]$ получим

$$|H_2 b^f(x, y)| \leq c_{10} \int_{\mathbf{T}} |b^f(x, t)| dt \quad \text{если } x \in W, \quad y \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]. \quad (99)$$

Из (78) (при $p = 1$), (90) и (79) имеем

$$\int \int_{\mathbf{T}^2} |b^f(x, y)| dx dy \leq c_{11}.$$

Следовательно, для некоторого множества $W' \subset W$ такого, что

$$|W'| > |W| - \varepsilon, \quad (100)$$

будем иметь

$$\int_{\mathbf{T}} |b^f(x, t)| dt \leq c_{11} / \varepsilon, \quad x \in W'.$$

Далее, по (99) получим

$$|H_2 b^f(x, y)| \leq c_{11}/\varepsilon, \quad x \in W', \quad y \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]. \quad (101)$$

Наконец, так как $\tau_k^\pm$ есть α_k -инвариантное, из (96), (78), (85) имеем

$$\begin{aligned} \|H_2 b_\pm^f\|_{L^p(\mathbf{T}^2)}^p &\leq \sum_{k>n_0} \left| \frac{1}{\alpha_k} \right|^p \left(\int_{\tau_k^+(\tilde{E}_k)} |b_k^f((\tau_k^+)^{-1}(x, y))|^p dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_k^-(\tilde{E}_k)} |b_k^f((\tau_k^-)^{-1}(x, y))|^p dx dy \right) \\ &= 2 \sum_{k>n_0} \frac{1}{\alpha_k} \int_{\tilde{E}_k} |b_k^f(x, y)|^p dx dy \leq \sum_{k>n_0} c_{12}^p \frac{\lambda_{n_0}^{p-1} \cdot p^p}{\lambda_k^{p-1}} \lambda_k^p |\Delta_k| \\ &\leq c_{12}^p \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{p-1} \sum_{k>n_0} \lambda_k |\Delta_k| \leq c_{12}^p \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, обозначив

$$E''_\varepsilon = \{(\mathbf{T}^2 \setminus G) \cap (\mathbf{T} \times (\mathbf{T} \setminus [\pi, \frac{3}{2}\pi]))\} \cup \{W' \times [\pi, \frac{3}{2}\pi]\}, \quad (102)$$

легко усмотреть, что из (97), (98) и (101) следует

$$\|H_2 b^f(x, y)\|_{L^p(E''_\varepsilon)} \leq \frac{c_{14}}{\varepsilon} p^2, \quad p \geq 1, \quad (103)$$

а также, ввиду (89), (100) и $|W| > 2\pi - \varepsilon$ имеем

$$|E''_\varepsilon| > (2\pi)^2 - c_{13}\varepsilon. \quad (104)$$

Наконец, неравенства (94), (92) и (103), с учетом леммы 1, дают (22) с

$$E_\varepsilon = E'_\varepsilon \cap E''_\varepsilon$$

(см. (102), (95)). Следует только отметить, что из (95) и (101) имеем

$$|E_\varepsilon| > (2\pi)^2 - c_{14}\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
2. *Гецадзе Р. Д.* О расходимости кратных рядов Фурье // Сообщ. АН Груз.ССР. 1986. Т. 122. №2. С. 269–271.
3. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
4. *Hant R. A.* An estimate of conjugate function // *Studia Math.* 1972. V. 44. №4. P. 371–376.
5. *Конягин С. В.* О перестановках функций и расходимости рядов Фурье по кубам // Труды МИАН. 1989. Т. 189. С. 98–109.
6. *Осколков К. И.* Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Труды МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.
7. *Sjolin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // *Arkiv for mat.* 1971. V. 9. P. 65–90.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
9. *Жижигашвили Л. В.* Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. Тбилиси: Изд-во ун-та, 1983.