Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Кудрявцев, Приближение оператора частного дифференцирования ограниченными операторами на классе функций конечной гладкости, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 3, 75–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:36:37

УДК 517.5

С. Н. Кудрявцев

**Приближение оператора частного
дифференцирования ограниченными операторами
на классе функций конечной гладкости**

В статье установлена слабая асимптотика убывания соответствующей величины в задаче о наилучшей точности приближения на классе функций с заданной мажорантой модулей непрерывности старших производных оператора частного дифференцирования ограниченными операторами, действующими из одного пространства с интегральной нормой в другое.

Библиография: 6 названий.

Введение

В работе рассматривается задача о наилучшем приближении по норме пространства $L_q(I^d)$ оператора частного дифференцирования $\mathcal{D}^\lambda$ ограниченными операторами из $L_s(I^d)$ в $L_q(I^d)$, норма которых не превосходит ρ , на классе $F_p^{l,\omega}(I^d)$, где $F_p^{l,\omega}(I^d)$ состоит из функций, определенных на единичном кубе I^d , обобщенные частные производные до порядка l которых принадлежат $L_p(I^d)$, а модули непрерывности в $L_p(I^d)$ производных порядка l имеют мажоранту ω . Изучается поведение в зависимости от ρ величины наилучшей точности приближения в этой задаче.

Задача о наилучшем приближении на классе $F_p^{l,\omega}(I^d)$ оператора дифференцирования $\mathcal{D}^\lambda$ ограниченными операторами из $L_s(I^d)$ в $L_q(I^d)$ является частным случаем задачи, поставленной в [1], о наилучшем приближении на некотором множестве неограниченного линейного оператора ограниченными. Обзор результатов и список литературы по этой тематике содержится в [2]. Из последних работ приведем [3]–[5]. Отметим, что в [3], [4] приближение дифференциального оператора осуществляется на классе соболевского типа функций многих переменных, определенных во всем пространстве, а в [5] – на классе функций, имеющих на кубе непрерывные частные производные до определенного порядка, с заданной мажорантой модулей непрерывности старших производных. Причем оценки наилучшей точности приближения найдены в ситуации, когда приближение производится ограниченными операторами, переводящими пространство, на котором они определены, в себя.

Полученные в настоящей работе оценки точности приближения в описанной выше задаче обобщают один из результатов, установленных в [5]. При этом применяемая ниже техника вывода интересующих нас оценок существенно отличается от той, которая использована для получения соответствующих соотношений в [3]–[5]. Отметим еще, что подобно тому, как это сделано ниже, автором найдены аналогичные оценки в случае приближения оператора дифференцирования на классе функций Бесова.

Работа состоит из введения и двух параграфов, в первом из которых проведена оценка сверху изучаемой величины, а во втором – оценка снизу.

§ 1. Оценка сверху величины наилучшей точности приближения оператора $\mathcal{D}^\lambda$ ограниченными операторами из $L_s(I^d)$ в $L_q(I^d)$ на классе $F_p^{l,\omega}(I^d)$

1.1. В этом пункте введем некоторые определения и обозначения, а также сформулируем доказанные в [6] вспомогательные утверждения, которые потребуются для доказательства основного результата § 1.

Как обычно, через $\mathbb{Z}_+^d$ будем обозначать множество

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d : \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\},$$

через $\mathbb{Z}_{+l}^d$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначим множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| \leq l\},$$

где $|\lambda| = \sum_{j=1}^d \lambda_j$, а через $\mathbb{Z}_{+l}'^d$ обозначим множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| = l\}.$$

При $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{P}_{l,d}$ обозначим пространство вещественных полиномов степени не выше l от d переменных, т.е. пространство всех функций $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ вида $f(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} a_\lambda x^\lambda$, где $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_d^{\lambda_d}$.

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначается пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in D} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{Z}_+$ через $W_p^l(D)$ обозначается пространство всех функций $f \in L_p(D)$, для которых для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ обобщенная производная $\mathcal{D}^\lambda f = \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|} f}{\mathcal{D}^{\lambda_1} x_1 \dots \mathcal{D}^{\lambda_d} x_d}$ принадлежит $L_p(D)$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(D)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_p(D)}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^d$ фиксируем норму

$$\|x\| = \max_{j=1, \dots, d} |x_j|, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть ω – модуль непрерывности, т.е. ω – непрерывная вещественная функция на $[0, \infty)$ такая, что

$$0 = \omega(0) \leq \omega(\delta) \leq \omega(\delta + \sigma) \leq \omega(\delta) + \omega(\sigma) \quad \text{при } \delta, \sigma \in [0, \infty).$$

Тогда для области $D \subset \mathbb{R}^d$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, и ω через $F_p^{l,\omega}(D)$ обозначим множество функций $f \in W_p^l(D)$, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega(\|h\|)} \|\mathcal{D}^\lambda f(x+h) - \mathcal{D}^\lambda f(x)\|_{L_p(D_h)} \leq 1,$$

где $D_h = \{x \in D : x+th \in D \ \forall t \in [0,1]\}$.

Для $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ и измеримого по Лебегу множества Q , лежащего в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$, мера которого $\text{mes } Q > 0$, обозначим через

$$T_Q^{l,d} : W_1^l(D) \rightarrow \mathcal{P}_{l,d}$$

линейный оператор, определяемый для $f \in W_1^l(D)$ равенством

$$(T_Q^{l,d} f)(x) = \frac{1}{\text{mes } Q} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \frac{1}{\lambda!} \int_Q \mathcal{D}^\lambda f(y) (x-y)^\lambda dy, \quad \lambda! = \lambda_1! \cdots \lambda_d!.$$

Положим также

$$T_Q^{-1,d} f = 0, \quad f \in L_1(Q).$$

В рассматриваемой ситуации наряду с оператором $T_Q^{l,d}$ определим линейный оператор $T_Q^{n,d} : W_1^n(D) \rightarrow \mathcal{P}_{l,d}$, полагая

$$T_Q^{n,d} f = T_Q^{l,d} f + T_Q^{l-1,d} f - T_Q^{l-1,d} T_Q^{l,d} f, \quad f \in W_1^n(D).$$

ЛЕММА 1.1.1. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ и $Q \subset D$ — измеримое по Лебегу множество, для которого $\text{mes } Q > 0$. Тогда для $f \in W_p^l(D)$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ справедливо равенство

$$\mathcal{D}^\lambda T_Q^{n,d} f = T_Q^{n-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f. \quad (1.1.1)$$

Для формулирования теоремы 1.1.2 понадобятся следующие обозначения.

Через $I^d \subset \mathbb{R}^d$ будем обозначать куб

$$I^d = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < x_j < 1, \ j = 1, \dots, d\}.$$

Для $r, d \in \mathbb{N}$ через N_r^d обозначим множество мультииндексов

$$N_r^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq \nu_j \leq r-1, \ j = 1, \dots, d\}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $\nu \in N_{2^k}^d$ определим кубы

$$Q_{k,\nu}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-k}\nu_j < x_j < 2^{-k}(\nu_j + 1), \ j = 1, \dots, d\},$$

$$Q_{k,\nu}'^d = \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-k}(\nu_j + \frac{1}{4}) \leq x_j \leq 2^{-k}(\nu_j + \frac{3}{4}), \ j = 1, \dots, d\},$$

а через $\chi_{k,\nu}^d$ обозначим характеристическую функцию множества $Q_{k,\nu}^d$.

Для $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ определим линейный оператор $U_k^{l,d} : W_1^l(I^d) \rightarrow L_\infty(I^d)$, полагая

$$U_k^{l,d} f = \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} (T_{Q_{k,\nu}^d}^{l,d} f) \cdot \chi_{k,\nu}^d, \quad f \in W_1^l(I^d).$$

ТЕОРЕМА 1.1.2. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ и ω – модуль непрерывности таковы, что при $p < q$ существует константа $c_1(l, d, p, q, \omega) > 0$ такая, что для $\delta \in [0, 1]$ соблюдается неравенство

$$\int_0^1 t^{l-d/p+d/q-1} \omega(\delta t) dt \leq c_1 \omega(\delta). \quad (1.1.2)$$

Тогда существует константа $c_2(l, d, p, q, \omega) > 0$ такая, что для $f \in F_p^{l, \omega}(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\|f - U_k^{l, d} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_2 2^{-k(l-(d/p-d/q)_+)} \omega(2^{-k}), \quad (1.1.3)$$

где, как обычно, $\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau + |\tau|)$.

Существенную роль в доказательстве основного результата §1 играет

ТЕОРЕМА 1.1.3. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq s, q \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$, $\rho > 0$. Тогда существует семейство констант

$$\{c_3(l, d, \lambda, \rho) > 0, l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d, \rho > 0\}$$

такое, что для любого ограниченного измеримого по Лебегу множества $Q \subset \mathbb{R}^d$ и любого $\delta > 0$, для которых существует точка $x^0 \in \mathbb{R}^d$ такая, что $x^0 + \delta I^d \subset Q$, существует линейный оператор

$$P_{Q, \delta, x^0}^{l, d}: L_1(Q) \rightarrow \mathcal{P}_{l, d},$$

обладающий следующими свойствами:

- 1) для любого измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ такого, что

$$\sup_{x \in D} \|x - x^0\| \leq \rho \delta,$$

для $f \in L_s(Q)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda P_{Q, \delta, x^0}^{l, d} f\|_{L_q(Q)} \leq c_3 \delta^{-|\lambda| - d/s + d/q} \|f\|_{L_s(Q)}; \quad (1.1.4)$$

- 2) для $f \in \mathcal{P}_{l, d}$ имеет место равенство

$$P_{Q, \delta, x^0}^{l, d}(f|_Q) = f. \quad (1.1.5)$$

1.2. В этом пункте мы получим оценку, о которой сказано в названии §1. Но прежде напомним постановку интересующей нас задачи.

Как отмечалось выше, задача о приближении линейного оператора частного дифференцирования ограниченными операторами является частным случаем задачи о приближении неограниченного линейного оператора ограниченными, которая формулируется следующим образом.

Пусть X, Y – банаховы пространства, $B(X, Y)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов $V: X \rightarrow Y$ с обычной нормой

$$\|V\|_{B(X, Y)} = \sup_{\{x \in X: \|x\|_X \leq 1\}} \|Vx\|_Y,$$

$A: D(A) \rightarrow Y$ – линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$. Пусть еще множество $K \subset D(A)$ и $\rho > 0$. Требуется описать поведение в зависимости от ρ величины

$$E(A, X, Y, K, \rho) = \inf_{\{V \in B(X, Y): \|V\|_{B(X, Y)} \leq \rho\}} \sup_{x \in K} \|Ax - Vx\|_Y.$$

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q, s \leq \infty$, ω – модуль непрерывности, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$, $\theta = |\lambda| + (d/s - d/q)_+$, $\gamma = l - |\lambda| - (d/p - d/q)_+$. Пусть еще $X = L_s(I^d)$, $Y = L_q(I^d)$, $A = \mathcal{D}^\lambda$, $D(A) = \{f \in L_s(I^d) : \mathcal{D}^\lambda f \in L_q(I^d)\}$, $K = F_p^{l,\omega}(I^d)$, $\theta > 0$ и при $s > p$ имеет место включение

$$t^{l-d/p+d/s-1}\omega(t) \in L_1(I), \quad (1.2.1)$$

а при $q > p$ для $\delta \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 t^{\gamma-1}\omega(\delta t) dt \leq c_1(l - |\lambda|, d, p, q, \omega)\omega(\delta). \quad (1.2.2)$$

Тогда существуют константы $\rho_1(l, d, q, s, \lambda) > 0$ и $c_4(l, d, p, q, s, \omega, \lambda) > 0$ такие, что для $\rho > \rho_1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}(A, X, Y, K, \rho) \leq c_4\rho^{-\gamma/\theta}\omega(\rho^{-1/\theta}). \quad (1.2.3)$$

Доказательство теоремы 1.2.1, по существу, сводится к доказательству леммы 1.2.2.

ЛЕММА 1.2.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Тогда существуют константы $c_5(l, d, p, q, \omega, \lambda) > 0$ и $c_6(l, d, q, s, \lambda) > 0$ такие, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ для операторов $V_{\lambda,k}^{l,d}: L_1(I^d) \rightarrow L_\infty(I^d)$, определяемых равенствами

$$V_{\lambda,k}^{l,d} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} (\mathcal{D}^\lambda S_{k,\nu}^{l,d} f) \chi_{k,\nu}^d,$$

где $S_{k,\nu}^{l,d} = P_{Q,\delta,x^0}^{l,d}$ при $Q = Q_{k,\nu}^d$, $\delta = 2^{-k}$, $x^0 = 2^{-k}\nu$, соблюдаются неравенства

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_5 2^{-k\gamma} \omega(2^{-k}), \quad f \in F_p^{l,\omega}(I^d), \quad (1.2.4)$$

$$\|V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_6 2^{k\theta} \|f\|_{L_s(I^d)}, \quad f \in L_s(I^d). \quad (1.2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы мы проведем при $q \neq \infty$, однако при несущественной корректировке в выкладках оно сохраняет свою силу и при $q = \infty$.

Прежде всего отметим, что в силу неравенства Гёльдера при $s \leq p$ и в силу (1.2.1) при $s > p$ (см. [6]) имеет место включение $F_p^{l,\omega}(I^d) \subset L_s(I^d)$.

Далее, поскольку для $f \in F_p^{l,\omega}(I^d)$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ производная $\mathcal{D}^\lambda f \in F_p^{l-|\lambda|,\omega}(I^d)$, то, принимая во внимание (1.2.2), а также предыдущее замечание, заключаем, что $K \subset D(A)$ (см. теорему 1.1.2) и при $k \in \mathbb{Z}_+$ для $f \in K$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_Y \leq \|\mathcal{D}^\lambda f - U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f\|_Y + \|U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f - V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_Y. \quad (1.2.6)$$

Из (1.1.3) с учетом (1.1.2) и (1.2.2) для $f \in K$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ следует неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f\|_Y \leq c_2 2^{-k\gamma} \omega(2^{-k}). \quad (1.2.7)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (1.2.6), используя (1.1.1), (1.1.5) и (1.1.4), получаем

$$\begin{aligned}
\|U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f - V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_{L_q(I^d)}^q &= \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} \|T_{Q_{k,\nu}^d}^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda S_{k,\nu}^{l,d} f\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}^q \\
&= \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} \|\mathcal{D}^\lambda T_{Q_{k,\nu}^d}^{l,d} f - \mathcal{D}^\lambda S_{k,\nu}^{l,d} f\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}^q \\
&= \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} \|\mathcal{D}^\lambda S_{k,\nu}^{l,d} (T_{Q_{k,\nu}^d}^{l,d} f - f)\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}^q \\
&\leq \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} (c_3 2^{k|\lambda|} \|T_{Q_{k,\nu}^d}^{l,d} f - f\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)})^q \\
&= (c_3 \cdot 2^{k|\lambda|})^q \|f - U_k^{l,d} f\|_{L_q(I^d)}^q.
\end{aligned}$$

Откуда, снова обращаясь к (1.1.3), выводим

$$\|U_k^{l-|\lambda|,d} \mathcal{D}^\lambda f - V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_7 \cdot 2^{-k\gamma} \cdot \omega(2^{-k}), \quad f \in K, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.2.8)$$

Объединяя (1.2.6), (1.2.7) и (1.2.8), приходим к (1.2.4).

Теперь, если $q \geq s$, то, применяя (1.1.4) и неравенство Гёльдера с показателем $s/q \leq 1$, имеем для $f \in L_s(I^d)$:

$$\begin{aligned}
\|V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_{L_q(I^d)}^q &= \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} \|\mathcal{D}^\lambda S_{k,\nu}^{l,d} f\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}^q \\
&\leq \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} (c_3 2^{k(|\lambda|+d/s-d/q)} \|f\|_{L_s(Q_{k,\nu}^d)})^q \\
&\leq (c_3 2^{k(|\lambda|+d/s-d/q)})^q \left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}_{2^k}^d} \|f\|_{L_s(Q_{k,\nu}^d)}^s \right)^{q/s} \\
&= (c_3 2^{k(|\lambda|+d/s-d/q)})^q \|f\|_{L_s(I^d)}^q.
\end{aligned}$$

Откуда вытекает (1.2.5) при $q \geq s$.

Если же $q < s$, то, пользуясь неравенством Гёльдера и соотношением (1.2.5) при $q = s$, находим, что

$$\|V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_{L_q(I^d)} \leq \|V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_{L_s(I^d)} \leq c_6 2^{k|\lambda|} \|f\|_{L_s(I^d)}, \quad f \in L_s(I^d),$$

т. е. (1.2.5) справедливо и при $q < s$.

Чтобы получить (1.2.3), достаточно для $\rho > \rho_1 = c_6$ выбрать $k \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_6 2^{k\theta} \leq \rho < c_6 2^{(k+1)\theta}, \quad (1.2.9)$$

и проверить, пользуясь (1.2.9), (1.2.5) и (1.2.4), что $\|V_{\lambda,k}^{l,d}\|_{B(X,Y)} \leq \rho$ и

$$\sup_{f \in K} \|\mathcal{D}^\lambda f - V_{\lambda,k}^{l,d} f\|_Y \leq c_4 \rho^{-\gamma/\theta} \omega(\rho^{-1/\theta}).$$

§ 2. Оценки снизу величины $\mathbf{E}(\mathcal{D}^\lambda, L_s(I^d), L_q(I^d), F_p^{l,\omega}(I^d), \rho)$

2.1. В этом пункте будет доказано наиболее важное вспомогательное утверждение, необходимое для получения основного результата § 2.

Всюду ниже наряду с обозначениями, применявшимися в § 1, будем использовать также следующие.

Для $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, как обычно, через ℓ_p^n обозначается пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированной в нем нормой

$$\|x\|_{\ell_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \max_{j=1, \dots, n} |x_j|, & p = \infty, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Через ε_i , $i = 1, \dots, n$, обозначим вектор $\varepsilon_i = (0, \dots, 0, 1_i, 0, \dots, 0)$.

Через E будем обозначать тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства основного результата этого пункта, дающего значение величины $\mathbf{E}(A, X, Y, K, \rho)$ при

$$A = E, \quad X = \ell_s^n, \quad Y = \ell_q^n, \quad K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{\ell_p^n} \leq 1\},$$

понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 2.1.1. Пусть $\{a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n\}$ — матрица линейного оператора $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в базисе $\{\varepsilon_i, i = 1, \dots, n\}$. Тогда

$$\|U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} = \max_{i,j=1, \dots, n} |a_{ij}|. \quad (2.1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ux\|_{\ell_\infty^n} &= \left\| \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \varepsilon_i \right\|_{\ell_\infty^n} = \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \left(\|x\|_{\ell_1^n} \max_{j=1, \dots, n} |a_{ij}| \right) = \|x\|_{\ell_1^n} \max_{i=1, \dots, n} \left(\max_{j=1, \dots, n} |a_{ij}| \right) \\ &= \left(\max_{i,j=1, \dots, n} |a_{ij}| \right) \|x\|_{\ell_1^n}. \end{aligned}$$

С другой стороны, если для $1 \leq i_0, j_0 \leq n$ имеет место равенство $|a_{i_0, j_0}| = \max_{i,j=1, \dots, n} |a_{ij}|$, то, учитывая, что $\|\varepsilon_{j_0}\|_{\ell_1^n} = 1$, получаем:

$$\|U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \geq \|U\varepsilon_{j_0}\|_{\ell_\infty^n} = \max_{i=1, \dots, n} |a_{i, j_0}| \geq |a_{i_0, j_0}|.$$

Объединяя сказанное, убеждаемся в справедливости (2.1.1).

ЛЕММА 2.1.2. При любом $n \in \mathbb{N}$ для любой вещественной матрицы $\{b_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ такой, что для каждого $i = 1, \dots, n$ элемент $b_{ii} \leq 0$, существует вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$|\xi_i| = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1.2)$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \xi_i \xi_j \leq 0. \quad (2.1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по индукции относительно n . При $n = 1$ утверждение леммы тривиально. Предположим, что утверждение леммы справедливо при $n = k$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что тогда оно имеет место и при $n = k + 1$.

Пусть $\{b_{ij}, i, j = 1, \dots, k + 1\}$ – вещественная матрица, для которой $b_{ii} \leq 0$, $i = 1, \dots, k + 1$. Исходя из предположения индукции, выберем для матрицы $\{b_{ij}, i, j = 1, \dots, k\}$ вектор $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ так, чтобы выполнялись соотношения (2.1.2) и (2.1.3) при $n = k$. Положим

$$\xi_{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^k (b_{i,k+1} + b_{k+1,i})\xi_i \leq 0, \\ -1, & \text{если } \sum_{i=1}^k (b_{i,k+1} + b_{k+1,i})\xi_i > 0. \end{cases}$$

Тогда для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ соблюдается (2.1.2) при $n = k + 1$ и

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{k+1} b_{ij}\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^k b_{ij}\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^k b_{i,k+1}\xi_i\xi_{k+1} + \sum_{i=1}^k b_{k+1,i}\xi_{k+1}\xi_i + b_{k+1,k+1}\xi_{k+1}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^k b_{ij}\xi_i\xi_j + \xi_{k+1} \left(\sum_{i=1}^k (b_{i,k+1} + b_{k+1,i})\xi_i \right) + b_{k+1,k+1}\xi_{k+1}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

т.е. имеет место (2.1.3) при $n = k + 1$.

ЛЕММА 2.1.3. При любом $n \in \mathbb{N}$ для любого линейного оператора $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, матрица которого $\{b_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ в базисе $\{\varepsilon_i, i = 1, \dots, n\}$ обладает тем свойством, что для каждого $i = 1, \dots, n$ элемент $b_{ii} \leq 0$, справедливо неравенство

$$\|E - T\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \geq n. \quad (2.1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с леммой 2.1.2 возьмем вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что для матрицы $\{b_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ (матрицы оператора T в базисе $\{\varepsilon_i, i = 1, \dots, n\}$) и вектора ξ соблюдаются условия (2.1.2) и (2.1.3). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^n \left(\xi_i^2 - \sum_{j=1}^n b_{ij}\xi_i\xi_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\xi_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}\xi_j \right) \leq \sum_{i=1}^n \left| \xi_i \left(\xi_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}\xi_j \right) \right| = \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot \left| \xi_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}\xi_j \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \xi_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}\xi_j \right| = \|\xi - T\xi\|_{\ell_1^n} = \|(E - T)\xi\|_{\ell_1^n} \\ &\leq \|E - T\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \|\xi\|_{\ell_\infty^n} = \|E - T\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)}. \end{aligned}$$

Обозначая через $\mathcal{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, множество всех линейных операторов $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, с помощью лемм 2.1.1 и 2.1.3 установим справедливость теоремы 2.1.4.

ТЕОРЕМА 2.1.4. *При любом $n \in \mathbb{N}$ и любом $\varepsilon \in I$ имеет место равенство*

$$\min\{\|E - U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \varepsilon\} = (1 - \varepsilon)n. \quad (2.1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in \mathcal{L}_n$ и $\|U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \varepsilon$. Тогда, учитывая (2.1.1), нетрудно видеть, что для оператора $T = (1 - \varepsilon)^{-1}(U - \varepsilon E)$ соблюдены условия леммы 2.1.3. Поэтому, пользуясь оценкой (2.1.4), получаем

$$\begin{aligned} \|E - U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} &= \|E - \varepsilon E + \varepsilon E - U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \\ &= \|(1 - \varepsilon)E - (U - \varepsilon E)\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \\ &= (1 - \varepsilon)\|E - (1 - \varepsilon)^{-1}(U - \varepsilon E)\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \geq (1 - \varepsilon)n. \end{aligned}$$

Кроме того, для оператора $\varepsilon E \in \mathcal{L}_n$ его норма

$$\|\varepsilon E\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} = \varepsilon,$$

а

$$\|E - \varepsilon E\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} = (1 - \varepsilon)n.$$

Сопоставляя сказанное, заключаем, что имеет место (2.1.5).

Из теоремы 2.1.4 вытекает

ТЕОРЕМА 2.1.5. *При любом $n \in \mathbb{N}$ и любом $\varepsilon \in I$ справедливо равенство*

$$\min\{\|E - U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \leq (1 - \varepsilon)n\} = \varepsilon. \quad (2.1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (2.1.5) $E - U$ вместо U , находим

$$\min\{\|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|E - U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \varepsilon\} = (1 - \varepsilon)n. \quad (2.1.7)$$

Равенство (2.1.7) позволяет утверждать, что для любого оператора $U \in \mathcal{L}_n$ такого, что

$$\|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} < (1 - \varepsilon)n,$$

выполняется неравенство

$$\|E - U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} > \varepsilon,$$

ибо если для некоторого $U \in \mathcal{L}_n$, $\|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} < (1 - \varepsilon)n$, имеет место $\|E - U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \varepsilon$, то ввиду (2.1.7) будет $\|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \geq (1 - \varepsilon)n$, что неверно.

Из сказанного следует, что для любого оператора $U \in \mathcal{L}_n$, $\|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \leq (1 - \varepsilon)n$, при любом $k \in \mathbb{N}$ соблюдается неравенство

$$\|E - (1 - k^{-1})U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} > \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что для любого $U \in \mathcal{L}_n$, $\|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \leq (1 - \varepsilon)n$, выполняется неравенство

$$\|E - U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \geq \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая, что для оператора $(1 - \varepsilon)E \in \mathcal{L}_n$ имеют место равенства

$$\|(1 - \varepsilon)E\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} = (1 - \varepsilon)n, \quad \|E - (1 - \varepsilon)E\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} = \varepsilon,$$

следует справедливость (2.1.6).

С использованием теорем 2.1.4 и 2.1.5 может быть доказана

ТЕОРЕМА 2.1.6. При любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in I$, $1 \leq p, q, s \leq \infty$ выполняется равенство

$$\min\{\|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \leq \varepsilon n^{(1/q-1/s)_+}\} = (1-\varepsilon)n^{(1/q-1/p)_+}. \quad (2.1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что для каждого оператора $U \in \mathcal{L}_n$, для которого

$$\|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \leq \varepsilon n^{(1/q-1/s)_+}, \quad (2.1.9)$$

соблюдается неравенство

$$\|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} \geq (1-\varepsilon)n^{(1/q-1/p)_+}. \quad (2.1.10)$$

При этом рассмотрим четыре случая соотношений между p , q и s .

1) $q \leq p, s$.

В этом случае, учитывая, что для вектора $\xi = n^{-1/p} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$ его норма $\|\xi\|_{\ell_p^n} = 1$, для любого оператора $U \in \mathcal{L}_n$, удовлетворяющего условию (2.1.9), имеем:

$$\begin{aligned} \|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} &\geq \|\xi-U\xi\|_{\ell_q^n} \geq \|\xi\|_{\ell_q^n} - \|U\xi\|_{\ell_q^n} \\ &\geq \|\xi\|_{\ell_q^n} - \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \|\xi\|_{\ell_s^n} \geq \|\xi\|_{\ell_q^n} - \varepsilon n^{1/q-1/s} \|\xi\|_{\ell_s^n} \\ &= n^{1/q-1/p} - \varepsilon n^{1/q-1/s} n^{1/s-1/p} = (1-\varepsilon)n^{(1/q-1/p)_+}. \end{aligned}$$

2) $q \geq p, s$.

В этом случае, беря любой из векторов ε_j , $j = 1, \dots, n$, для каждого оператора $U \in \mathcal{L}_n$, удовлетворяющего (2.1.9), получаем:

$$\begin{aligned} \|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} &\geq \|\varepsilon_j-U\varepsilon_j\|_{\ell_q^n} \geq \|\varepsilon_j\|_{\ell_q^n} - \|U\varepsilon_j\|_{\ell_q^n} \\ &\geq \|\varepsilon_j\|_{\ell_q^n} - \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \|\varepsilon_j\|_{\ell_s^n} \geq \|\varepsilon_j\|_{\ell_q^n} - \varepsilon \|\varepsilon_j\|_{\ell_s^n} = 1-\varepsilon, \end{aligned}$$

что совпадает с (2.1.10).

3) $s < q < p$.

В этом случае, пользуясь тем, что для любого оператора $U \in \mathcal{L}_n$, удовлетворяющего условию (2.1.9), соблюдается неравенство

$$\|U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \|E\|_{B(\ell_q^n, \ell_\infty^n)} \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \|E\|_{B(\ell_1^n, \ell_s^n)} \leq \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \leq \varepsilon,$$

закключаем, что

$$\begin{aligned} \min\{\|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \leq \varepsilon n^{(1/q-1/s)_+}\} \\ \geq \min\{\|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Далее, учитывая, что

$$\begin{aligned} \|E-U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} &\leq \|E\|_{B(\ell_q^n, \ell_1^n)} \|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} \|E\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_p^n)} \\ &= n^{1-1/q} \|E-U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} n^{1/p}, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\|E - U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} \geq n^{1/q-1/p-1} \|E - U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)},$$

из (2.1.11) и (2.1.5) получаем

$$\begin{aligned} & \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \leq \varepsilon n^{(1/q-1/s)_+}\} \\ & \geq n^{1/q-1/p-1} \min\{\|E - U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \varepsilon\} \\ & = (1 - \varepsilon) n^{1/q-1/p}, \end{aligned}$$

что эквивалентно (2.1.10).

4) $p < q < s$.

Учитывая, что в рассматриваемом случае для каждого оператора $U \in \mathcal{L}_n$, подчиненного условию (2.1.9), выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} & \leq \|E\|_{B(\ell_q^n, \ell_1^n)} : \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \|E\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_s^n)} \\ & = n^{1-1/q} \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} n^{1/s} \leq n^{1-1/q} \varepsilon n^{1/q-1/s} n^{1/s} = \varepsilon n, \end{aligned}$$

приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} & \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \leq \varepsilon n^{(1/q-1/s)_+}\} \\ & \geq \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \leq \varepsilon n\}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Ввиду того, что

$$\|E - U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} \leq \|E\|_{B(\ell_q^n, \ell_\infty^n)} \|E - U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} \|E\|_{B(\ell_1^n, \ell_p^n)} = \|E - U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)},$$

из (2.1.12), пользуясь (2.1.6), выводим оценку

$$\begin{aligned} & \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} \leq \varepsilon n^{(1/q-1/s)_+}\} \\ & \geq \min\{\|E - U\|_{B(\ell_1^n, \ell_\infty^n)} : U \in \mathcal{L}_n, \|U\|_{B(\ell_\infty^n, \ell_1^n)} \leq \varepsilon n\} = 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

которая совпадает с (2.1.10).

Итак, неравенство (2.1.10) установлено для любого оператора $U \in \mathcal{L}_n$, подчиненного условию (2.1.9). Сопоставляя сказанное с тем, что для оператора $\varepsilon E \in \mathcal{L}_n$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \|\varepsilon E\|_{B(\ell_s^n, \ell_q^n)} & = \varepsilon n^{(1/q-1/s)_+}, \\ \|E - \varepsilon E\|_{B(\ell_p^n, \ell_q^n)} & = (1 - \varepsilon) n^{(1/q-1/p)_+}, \end{aligned}$$

убеждаемся в справедливости (2.1.8).

2.2. В этом пункте будет получен основной результат § 2. Для этого нам понадобятся леммы 2.2.1 и 2.2.2.

ЛЕММА 2.2.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $\varphi \neq 0$ и ее носитель $\text{supp } \varphi \subset I^d$. Пусть еще для $m \in \mathbb{N}$ определены $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^{d,\varphi}$ – линейная оболочка системы функций $\{\varphi(mx - \nu), \nu \in \mathbb{N}_m^d\}$ и $J_m = J_m^{d,\varphi}: \mathbb{R}^{m^d} \rightarrow \mathcal{S}_m^{d,\varphi}$ – линейный оператор, задаваемый равенством

$$J_m \beta = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \beta_\nu \varphi(mx - \nu), \quad \beta = \{\beta_\nu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}_m^d\}.$$

Тогда

- 1) для любого $m \in \mathbb{N}$ система функций $\{\varphi(mx - \nu), \nu \in \mathbb{N}_m^d\}$ линейно независима, и J_m суть линейный изоморфизм $\mathbb{R}^{m^d}$ на $\mathcal{S}_m$;
- 2) для любого $r: 1 \leq r \leq \infty$ существует константа $c_8(r, d, \varphi) > 0$ такая, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}^{m^d}$ справедливо равенство

$$\|J_m \beta\|_{L_r(I^d)} = c_8 m^{-d/r} \|\beta\|_{\ell_r^{m^d}}; \quad (2.2.1)$$

- 3) для любых $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, существует константа $c_9(l, p, d, \varphi) > 0$ такая, что при любом модуле непрерывности ω и любом $m \in \mathbb{N}$ имеет место включение

$$J_m(\{\beta \in \mathbb{R}^{m^d} : \|\beta\|_{\ell_p^{m^d}} \leq c_9 m^{-l+d/p} \omega(m^{-1})\}) \subset F_p^{l,\omega}(I^d). \quad (2.2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы, очевидно, верно.

Чтобы проверить справедливость второго, заметим, что для $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq r < \infty$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda J_m \beta\|_{L_r(I^d)} &= \left(\int_{I^d} \left| \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \beta_\nu \mathcal{D}^\lambda(\varphi(mx - \nu)) \right|^r dx \right)^{1/r} \\ &= \left(\sum_{\mu \in \mathbb{N}_m^d} \int_{m^{-1}(\mu + I^d)} \left| \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \beta_\nu m^{|\lambda|} \mathcal{D}^\lambda \varphi(mx - \nu) \right|^r dx \right)^{1/r} \\ &= m^{|\lambda|} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \int_{m^{-1}(\nu + I^d)} |\beta_\nu \mathcal{D}^\lambda \varphi(mx - \nu)|^r dx \right)^{1/r} \\ &= m^{|\lambda|} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} |\beta_\nu|^r \int_{I^d} |\mathcal{D}^\lambda \varphi(y)|^r m^{-d} dy \right)^{1/r} \\ &= c_{10}(r, \lambda, d, \varphi) m^{|\lambda|-d/r} \|\beta\|_{\ell_r^{m^d}}, \quad \beta = \{\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}_m^d\} \in \mathbb{R}^{m^d}. \end{aligned} \quad (2.2.1')$$

Ясно, что равенство (2.2.1') сохраняет свою силу и при $r = \infty$. Полагая в (2.2.1') $\lambda = 0$, получаем (2.2.1).

Теперь докажем третье утверждение леммы.

Пусть для $\beta = \{\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}_m^d\}$ соблюдается неравенство

$$\|\beta\|_{\ell_p^{m^d}} \leq c_9 m^{-l+d/p} \omega(m^{-1})$$

с константой $c_9(l, p, d, \varphi)$, которую мы выберем ниже. Тогда для $g = J_m \beta$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ в силу (2.2.1') имеем

$$\|\mathcal{D}^\lambda g\|_{L_p(I^d)} \leq c_{10} c_9 m^{-l+|\lambda|} \omega(m^{-1}). \quad (2.2.3)$$

Пользуясь (2.2.3), для $\varkappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\varkappa g(x+h) - \mathcal{D}^\varkappa g(x)\|_{L_p(I_h^d)} &\leq \|\mathcal{D}^\varkappa g(x+h)\|_{L_p(I_h^d)} + \|\mathcal{D}^\varkappa g\|_{L_p(I_h^d)} \\ &\leq 2\|\mathcal{D}^\varkappa g\|_{L_p(I^d)} \leq 2c_{10} c_9 \omega(m^{-1}) \\ &\leq 2c_{10} c_9 \omega(\|h\|) \end{aligned}$$

при $h \in \mathbb{R}^d$, $\|h\| \geq m^{-1}$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\varkappa g(x+h) - \mathcal{D}^\varkappa g(x)\|_{L_p(I_h^d)} &= \left\| \int_0^1 \sum_{j=1}^d \mathcal{D}^{\varkappa+\varepsilon_j} g(x+th) h_j dt \right\|_{L_p(I_h^d)} \\ &\leq \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^d \mathcal{D}^{\varkappa+\varepsilon_j} g(x+th) h_j \right\|_{L_p(I_h^d)} dt \\ &\leq \int_0^1 \sum_{j=1}^d |h_j| \|\mathcal{D}^{\varkappa+\varepsilon_j} g\|_{L_p(I_h^d)} dt \\ &\leq \sum_{j=1}^d |h_j| c_9 c_{10} (\varkappa + \varepsilon_j, \cdot) m \omega(m^{-1}) \\ &\leq c_9 m \omega(m^{-1}) \|h\| \sum_{j=1}^d c_{10} (\varkappa + \varepsilon_j, \cdot) \\ &\leq 2c_9 \omega(\|h\|) \sum_{j=1}^d c_{10} (\varkappa + \varepsilon_j, \cdot) \end{aligned}$$

при $h \in \mathbb{R}^d$, $\|h\| \leq m^{-1}$.

Отсюда видно, что можно выбрать $c_9(l, p, d, \varphi) > 0$ так, чтобы имело место включение (2.2.2).

ЛЕММА 2.2.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $\varphi \neq 0$ и ее носитель $\text{supp } \varphi \subset I^d$. Тогда при любом $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ существуют семейство констант $\{c_{11}(q, \lambda, d, \varphi) > 0, 1 \leq q \leq \infty\}$ и последовательность линейных операторов

$$\pi_m = \pi_m^{\lambda, d, \varphi} : L_1(I^d) \rightarrow \mathcal{S}_m^{d, \varphi}, \quad m \in \mathbb{N}$$

(см. лемму 2.2.1), такие, что

1) при $m \in \mathbb{N}$ для $f \in \mathcal{S}_m$ справедливо равенство

$$\pi_m \mathcal{D}^\lambda f = m^{|\lambda|} f; \quad (2.2.4)$$

2) при $m \in \mathbb{N}$ для $f \in L_q(I^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, выполняется неравенство

$$\|\pi_m f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{11} \|f\|_{L_q(I^d)}. \quad (2.2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко понять, что для функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такой, что $\varphi \neq 0$ и $\text{supp } \varphi \subset I^d$, при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ функция $\mathcal{D}^\lambda \varphi \neq 0$ и ее носитель $\text{supp } \mathcal{D}^\lambda \varphi \subset I^d$. Отсюда ясно, что существует константа $c = c(d, \varphi, \lambda) > 0$ такая, что для функции $\psi = c\mathcal{D}^\lambda \varphi$ соблюдается условие

$$\int_{I^d} \mathcal{D}^\lambda \varphi(x) \psi(x) dx = 1. \quad (2.2.6)$$

Определим тогда для $m \in \mathbb{N}$ линейный оператор

$$\pi_m = \pi_m^{\lambda, d, \varphi}: L_1(I^d) \rightarrow \mathcal{S}_m^{d, \varphi},$$

полагая для $f \in L_1(I^d)$ значение

$$(\pi_m f)(x) = m^d \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \left(\int_{I^d} f(y) \psi(my - \nu) dy \right) \varphi(mx - \nu).$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (2.2.4) для $f \in \mathcal{S}_m$, его достаточно проверить для $f = \varphi(mx - \mu)$ при $\mu \in \mathbb{N}_m^d$. А учитывая, что

$$\text{supp } \mathcal{D}^\lambda \varphi(mx - \mu) \subset m^{-1}(\mu + I^d), \quad \text{supp } \psi(mx - \nu) \subset m^{-1}(\nu + I^d)$$

и

$$m^{-1}(\mu + I^d) \cap m^{-1}(\nu + I^d) = \emptyset$$

при $\mu \neq \nu$, пользуясь (2.2.6), имеем для $\mu \in \mathbb{N}_m^d$:

$$\begin{aligned} & ((\pi_m \mathcal{D}^\lambda)(\varphi(my - \mu)))(x) \\ &= m^d \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \left(\int_{I^d} \mathcal{D}^\lambda(\varphi(my - \mu)) \psi(my - \nu) dy \right) \varphi(mx - \nu) \\ &= m^d \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \left(\int_{I^d} m^{|\lambda|} \mathcal{D}^\lambda \varphi(my - \mu) \psi(my - \nu) dy \right) \varphi(mx - \nu) \\ &= m^d m^{|\lambda|} \left(\int_{m^{-1}(\mu + I^d)} \mathcal{D}^\lambda \varphi(my - \mu) \psi(my - \mu) dy \right) \varphi(mx - \mu) \\ &= m^{|\lambda|} \left(\int_{I^d} \mathcal{D}^\lambda \varphi(z) \psi(z) dz \right) \varphi(mx - \mu) = m^{|\lambda|} \varphi(mx - \mu). \end{aligned}$$

Проверяя (2.2.5) для $f \in L_q(I^d)$ при $1 \leq q < \infty$, получаем

$$\begin{aligned}
\|\pi_m f\|_{L_q(I^d)}^q &= m^{dq} \int_{I^d} \left| \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \left(\int_{I^d} f(y) \psi(my - \nu) dy \right) \varphi(mx - \nu) \right|^q dx \\
&= m^{dq} \sum_{\mu \in \mathbb{N}_m^d} \int_{m^{-1}(\mu + I^d)} \left| \sum_{\nu \in \mathbb{N}_m^d} \left(\int_{I^d} f(y) \psi(my - \nu) dy \right) \varphi(mx - \nu) \right|^q dx \\
&= m^{dq} \sum_{\mu \in \mathbb{N}_m^d} \left(\int_{m^{-1}(\mu + I^d)} |\varphi(mx - \mu)|^q dx \right) \left| \int_{I^d} f(y) \psi(my - \mu) dy \right|^q \\
&= m^{dq-d} \left(\int_{I^d} |\varphi(z)|^q dz \right) \sum_{\mu \in \mathbb{N}_m^d} \left| \int_{m^{-1}(\mu + I^d)} f(y) \psi(my - \mu) dy \right|^q \\
&= m^{dq-d} \left(\int_{I^d} |\varphi(z)|^q dz \right) \\
&\quad \times \sum_{\mu \in \mathbb{N}_m^d} \left(\int_{m^{-1}(\mu + I^d)} |f(y)|^q dy \right) \left(\int_{m^{-1}(\mu + I^d)} |\psi(my - \mu)|^{q'} dy \right)^{q-1} \\
&= m^{dq-d} \left(\int_{I^d} |\varphi(z)|^q dz \right) \\
&\quad \times m^{-d(q-1)} \left(\int_{I^d} |\psi(z)|^{q'} dz \right)^{q-1} \sum_{\mu \in \mathbb{N}_m^d} \int_{m^{-1}(\mu + I^d)} |f(y)|^q dy \\
&= (\|\varphi\|_{L_q(I^d)} \|\psi\|_{L_{q'}(I^d)})^q \int_{I^d} |f(y)|^q dy \\
&= (\|\varphi\|_{L_q(I^d)} \|\psi\|_{L_{q'}(I^d)} \|f\|_{L_q(I^d)})^q, \quad q' = \frac{q}{q-1},
\end{aligned}$$

что влечет (2.2.5).

Аналогично проверяется (2.2.5) при $q = \infty$.

С помощью теоремы 2.1.6, лемм 2.2.1 и 2.2.2 доказывается

ТЕОРЕМА 2.2.3. *В условиях теоремы 1.2.1 существуют константы $c_{12}(d, q, s, \lambda) > 0$ и $c_{13}(l, d, p, q, \lambda) > 0$ такие, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{E}(A, X, Y, K, c_{12}m^\theta) \geq c_{13}m^{-\gamma}\omega(m^{-1}). \quad (2.2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксировав функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, носитель которой $\text{supp } \varphi \subset I^d$, и такую, что $\varphi \neq 0$, построим последовательности подпространств $\mathcal{S}_m^{d, \varphi}$ и операторов $J_m^{d, \varphi}$ и $\pi_m^{\lambda, d, \varphi}$, $m \in \mathbb{N}$, указанные в леммах 2.2.1 и 2.2.2.

Тогда ввиду (2.2.4) для $m \in \mathbb{N}$, $\beta = \{\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}_m^d\}$ имеем

$$m^{|\lambda|} \beta = m^{|\lambda|} (J_m)^{-1} J_m \beta = (J_m)^{-1} m^{|\lambda|} J_m \beta = (J_m)^{-1} \pi_m \mathcal{D}^\lambda J_m \beta.$$

Отсюда в силу (2.2.1) и (2.2.5) для $V \in B(L_s(I^d), L_q(I^d))$ при $m \in \mathbb{N}$ для $\beta \in \mathbb{R}^{m^d}$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \|m^{|\lambda|}\beta - (J_m)^{-1}\pi_m V J_m \beta\|_{\ell_q^{m^d}} &= \|(J_m)^{-1}\pi_m (\mathcal{D}^\lambda J_m \beta - V J_m \beta)\|_{\ell_q^{m^d}} \\ &= \frac{1}{c_8} m^{d/q} \|\pi_m (\mathcal{D}^\lambda J_m \beta - V J_m \beta)\|_{L_q(I^d)} \\ &\leq \frac{c_{11}}{c_8} m^{d/q} \|\mathcal{D}^\lambda J_m \beta - V J_m \beta\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Из условий теоремы, обеспечивающих вложения $F_p^{l,\omega}(I^d) \subset L_s(I^d)$, $\mathcal{D}^\lambda(F_p^{l,\omega}(I^d)) \subset L_q(I^d)$, а также из (2.2.2) и (2.2.8) вытекает, что для $V \in B(L_s(I^d), L_q(I^d))$ при $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\sup\{\|\mathcal{D}^\lambda f - V f\|_{L_q(I^d)} : f \in F_p^{l,\omega}(I^d)\} \\ &\geq \sup\{\|\mathcal{D}^\lambda J_m \beta - V J_m \beta\|_{L_q(I^d)} : \beta \in \mathbb{R}^{m^d}, \\ &\quad \|\beta\|_{\ell_p^{m^d}} \leq c_9 m^{-l+d/p} \omega(m^{-1})\} \\ &\geq \sup\left\{\frac{c_8}{c_{11}} m^{-d/q} \|m^{|\lambda|}\beta - (J_m)^{-1}\pi_m V J_m \beta\|_{\ell_q^{m^d}} : \beta \in \mathbb{R}^{m^d}, \right. \\ &\quad \left. \|\beta\|_{\ell_p^{m^d}} \leq c_9 m^{-l+d/p} \omega(m^{-1})\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{c_8}{c_{11}} m^{-d/q} c_9 m^{-l+d/p} \omega(m^{-1}) \right. \\ &\quad \left. \times m^{|\lambda|} \|\beta - m^{-|\lambda|}(J_m)^{-1}\pi_m V J_m \beta\|_{\ell_q^{m^d}} : \beta \in \mathbb{R}^{m^d}, \|\beta\|_{\ell_p^{m^d}} \leq 1\right\} \\ &= c_{14} m^{-l+|\lambda|+d/p-d/q} \omega(m^{-1}) \\ &\quad \times \|E - m^{-|\lambda|}(J_m)^{-1}\pi_m V J_m\|_{B(\ell_p^{m^d}, \ell_q^{m^d})}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Далее, поскольку для $V \in B(L_s(I^d), L_q(I^d))$ при $m \in \mathbb{N}$ ввиду (2.2.1) и (2.2.5) имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\|m^{-|\lambda|}(J_m)^{-1}\pi_m V J_m\|_{B(\ell_s^{m^d}, \ell_q^{m^d})} \\ &\leq m^{-|\lambda|} \|(J_m)^{-1}\|_{B(\mathcal{S}_m \cap L_q(I^d), \ell_q^{m^d})} \|\pi_m\|_{B(L_q(I^d), L_q(I^d))} \\ &\quad \times \|V\|_{B(L_s(I^d), L_q(I^d))} \|J_m\|_{B(\ell_s^{m^d}, L_s(I^d))} \\ &\leq m^{-|\lambda|} \frac{1}{c_8(q, \cdot)} m^{d/q} c_{11} \|V\|_{B(L_s(I^d), L_q(I^d))} c_8(s, \cdot) m^{-d/s} \\ &= c_{15} m^{-|\lambda|-d/s+d/q} \|V\|_{B(L_s(I^d), L_q(I^d))}, \end{aligned}$$

то при $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 0$ для $V \in B(L_s(I^d), L_q(I^d))$, $\|V\|_{B(L_s(I^d), L_q(I^d))} \leq \rho$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\|E - m^{-|\lambda|}(J_m)^{-1}\pi_m V J_m\|_{B(\ell_p^{m^d}, \ell_q^{m^d})} \\ &\geq \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^{m^d}, \ell_q^{m^d})} : U \in \mathcal{L}_{m^d}, \\ &\quad \|U\|_{B(\ell_s^{m^d}, \ell_q^{m^d})} \leq c_{15} m^{-|\lambda|-d/s+d/q} \rho\}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Объединяя (2.2.9) и (2.2.10), заключаем, что при $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 0$ для любого оператора $V \in B(L_s(I^d), L_q(I^d))$, у которого $\|V\|_{B(L_s(I^d), L_q(I^d))} \leq \rho$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in F_p^{l, \omega}(I^d)} \|\mathcal{D}^\lambda f - Vf\|_{L_q(I^d)} \\ & \geq c_{14} m^{-l+|\lambda|+d/p-d/q} \omega(m^{-1}) \\ & \quad \times \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^{m^d}, \ell_q^{m^d})} : U \in \mathcal{L}_{m^d}, \|U\|_{B(\ell_s^{m^d}, \ell_q^{m^d})} \leq c_{15} m^{-|\lambda|-d/s+d/q} \rho\} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(A, X, Y, K, \rho) \\ & \geq c_{14} m^{-l+|\lambda|+d/p-d/q} \omega(m^{-1}) \\ & \quad \times \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^{m^d}, \ell_q^{m^d})} : U \in \mathcal{L}_{m^d}, \|U\|_{B(\ell_s^{m^d}, \ell_q^{m^d})} \leq c_{15} m^{-|\lambda|-d/s+d/q} \rho\}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\rho = c_{12} m^{|\lambda|+(d/s-d/q)_+}$, где $c_{12} = 1/(2c_{15})$, получаем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(A, X, Y, K, c_{12} m^\theta) \\ & \geq c_{14} m^{-l+|\lambda|+d/p-d/q} \omega(m^{-1}) \\ & \quad \times \min\{\|E - U\|_{B(\ell_p^{m^d}, \ell_q^{m^d})} : U \in \mathcal{L}_{m^d}, \|U\|_{B(\ell_s^{m^d}, \ell_q^{m^d})} \leq \frac{1}{2} m^{d(1/q-1/s)_+}\}. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть последнего неравенства (2.1.8) при $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n = m^d$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(A, X, Y, K, c_{12} m^\theta) & \geq c_{14} m^{-l+|\lambda|+d/p-d/q} \omega(m^{-1}) \frac{1}{2} m^{d(1/q-1/p)_+} \\ & = c_{13} m^{-\gamma} \omega(m^{-1}), \end{aligned}$$

которая совпадает с (2.2.7).

Непосредственным следствием теоремы 2.2.3 является

ТЕОРЕМА 2.2.4. *В условиях теоремы 1.2.1 существуют константы $\rho_2(d, q, s, \lambda) > 0$ и $c_{16}(l, d, p, q, s, \lambda) > 0$ такие, что при $\rho > \rho_2$ соблюдается неравенство*

$$\mathbf{E}(A, X, Y, K, \rho) \geq c_{16} \rho^{-\gamma/\theta} \omega(\rho^{-1/\theta}). \quad (2.2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\rho_2(d, q, s, \lambda) = c_{12}(d, q, s, \lambda)$ и выберем для $\rho > \rho_2$ число $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, так, чтобы выполнялось неравенство:

$$c_{12}(m-1)^\theta < \rho \leq c_{12} m^\theta. \quad (2.2.12)$$

Учитывая, что в силу (2.2.12)

$$\mathbf{E}(A, X, Y, K, \rho) \geq \mathbf{E}(A, X, Y, K, c_{12} m^\theta),$$

и применяя (2.2.7), получаем:

$$\mathbf{E}(A, X, Y, K, \rho) \geq c_{13} m^{-\gamma} \omega(m^{-1}).$$

Отсюда, пользуясь (2.2.12), легко выводим (2.2.11).

Автор благодарит профессора В. М. Тихомирова за внимание к автору и его работе.

Список литературы

1. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 137–148.
2. *Арестов В. В.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные задачи // Матем. заметки. 1968. Т. 40. № 2. С. 269–285.
3. *Тимошин О. А.* О наилучшем приближении дифференцируемых операторов с частными производными // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 78–87.
4. *Тимошин О. А.* Порядки наилучшего приближения дифференцируемых операторов с частными производными // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 115–121.
5. *Кудрявцев С. Н.* Некоторые задачи теории приближений для одного класса функций конечной гладкости // Матем. заметки. 1992. Т. 183. № 2. С. 3–20.
6. *Кудрявцев С. Н.* Восстановление функций вместе с их производными по значениям функций в заданном числе точек // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 6. С. 79–104.

Институт высокопроизводительных
вычислительных систем РАН

Поступила в редакцию
03.05.1995