Общероссийский математический портал

Ю. С. Семенов, О коммутантах неприводимых C -групп, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 3, 93–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:48:15

УДК 512

Ю. С. Семенов

О коммутантах неприводимых С-групп

В работе классифицированы с точностью до изоморфизма неприводимые ориентируемые С-группы в смысле Куликова, коммутант которых является свободной группой ранга 2 или группой Гейзенберга $\mathcal{H}_3$. Доказано также, что коммутант любой группы Кокстера, порожденной одним классом сопряженных элементов, является коммутантом некоторой неприводимой ориентируемой С-группы.

Библиография: 3 названия.

Введение

Эта работа является в некотором плане продолжением статьи Ю. В. Кузьмина “Группы заузленных компактных поверхностей и центральные расширения” [3], в которой было предпринято детальное изучение алгебраических свойств С-групп. По определению *С-группа* – это группа, обладающая копредставлением вида $\langle x_i, i \in I \mid R_\alpha, \alpha \in A \rangle$, в котором каждое определяющее соотношение R_α имеет вид $x_j x_i x_j^{-1} = x_k^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. Нетрудно видеть, что если G – С-группа, то $G/G' \cong \mathbb{Z}^a \times \mathbb{Z}_2^b$. Пара (a, b) называется *типом ориентируемости* С-группы G .

С-группа называется *ориентируемой*, если $b = 0$, и *неориентируемой* в противном случае. С-группа называется *неприводимой*, если она порождается одним классом сопряженности, при этом $G/G' \cong \mathbb{Z}$ в ориентируемом случае и $G/G' \cong \mathbb{Z}_2$ в неориентируемом.

Основным результатом, составляющим содержание §§1, 2 работы, является полная классификация с точностью до изоморфизма неприводимых ориентируемых С-групп с коммутантом – свободной группой F_2 ранга 2 и группой Гейзенберга $\mathcal{H}_3$. В частности, существует ровно три неизоморфные С-группы с коммутантом F_2 . Это группы узлов трилистника и “восьмерки”, а также группа одного из 2-узлов (теорема 3).

В §3 показано, что любая группа Кокстера является (неориентируемой) С-группой. Как следствие этого факта с помощью конструкции ориентируемого С-накрытия, придуманной Ю. В. Кузьминым, получается, что любая знакопеременная группа A_n есть коммутант некоторой неприводимой ориентируемой С-группы. В настоящее время известно, что многие простые конечные группы (кроме $\mathbb{Z}_2$) могут быть коммутантами неприводимых ориентируемых С-групп (например, простые группы вида $PSL_n(q)$ и $PSp_n(q)$ почти для всех n и q), и было бы интересно выяснить, что еще можно включить в этот список.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-0100733) и Международного научного фонда (грант № MDL300).

Обозначения. Пусть G – некоторая группа и φ – ее автоморфизм. Обозначим через $G(\varphi)$ полупрямое произведение $G \rtimes \mathbb{Z}$, в котором $1 \in \mathbb{Z}$ действует на G при помощи автоморфизма φ . Таким образом, $G(\varphi)$ состоит из пар (g, m) , $g \in G$, $m \in \mathbb{Z}$. Произведением пар $(f, m)(g, l)$ будет пара $(f\varphi^m(g), m + l)$. Будем считать, что группа G вложена в $G(\varphi)$ как нормальная подгруппа, состоящая из пар $(g, 0)$, т.е. имеет место следующая точная последовательность

$$1 \rightarrow G \rightarrow G(\varphi) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1. \quad (1.1)$$

Остальные обозначения, как правило, являются общепринятыми или взяты из работы [3].

В заключение автор искренне благодарит Ю. В. Кузьмина и Вик. С. Куликова за полезные обсуждения.

§ 1. Неприводимые ориентируемые С-группы со свободным коммутантом

Пусть F_n – свободная группа конечного ранга n с базисом $\{x_1, \dots, x_n\}$. Для автоморфизма φ из $\text{Aut}(F_n)$ имеет место следующая точная последовательность

$$1 \rightarrow F_n \rightarrow F_n(\varphi) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1. \quad (1.2)$$

Поскольку нас интересуют неприводимые ориентируемые С-группы вида $F_n(\varphi)$ с коммутантом F_n , то естественно рассмотреть только такие группы $F_n(\varphi)$, которые порождаются одним классом сопряженных элементов. Последнее условие оказывается не только необходимым, но и достаточным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задана точная последовательность (1.2). Следующие условия эквивалентны:

- 1) $F_n(\varphi)$ – конечно определенная (к.о.) неприводимая ориентируемая С-группа с коммутантом F_n .
- 2) $F_n(\varphi)$ порождается одним классом сопряженных элементов и $F_n(\varphi)' = F_n$.
- 3) Существует такой элемент $f \in F_n$, что $F_n = \text{gp}\langle af\varphi(a^{-1})f^{-1} \mid a \in F_n \rangle$.
- 4) Существует такой элемент $f \in F_n$, что $H_n(f, \varphi) = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i = f\varphi(x_i)f^{-1}; i = 1, 2, \dots, n \rangle$ – тривиальная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из того, что неприводимая С-группа порождается одним классом сопряженности. Пусть $F_n(\varphi)$ порождается одним классом сопряженности некоторого элемента (f, m) . Очевидно, что m равно ± 1 , и, переходя при необходимости к обратному элементу, мы можем считать, что $m = 1$.

Любой элемент $(b, c) \in F_n(\varphi)$ однозначно представляется в виде $(a, 0)(f, 1)^c$ для некоторого $a \in F_n$. Следовательно, все сопряженные с $(f, 1)$ элементы имеют вид $(a, 0)(f, 1)(a^{-1}, 0) = (af\varphi(a^{-1}), 1)$, где a пробегает F_n .

Докажем следующее несложное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть некоторая группа G порождается одним классом сопряженных элементов Y и $y_0 \in Y$. Тогда $G' = \langle y y_0^{-1} \mid y \in Y \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H = \langle y z^{-1} \mid y, z \in Y \rangle$. Так как Y есть полный класс сопряженных, порождающий G , то $H \triangleleft G$ и факторгруппа G/H циклическая, т.е. имеет место включение $G' \leq H$. С другой стороны, все произведения yz^{-1} , где $y, z \in Y$, лежат в коммутанте, и поэтому $G' = H$. Осталось заметить лишь, что $yz^{-1} = y y_0^{-1} (z y_0^{-1})^{-1}$. Лемма доказана.

Применяя лемму 1 в нашем случае, получаем, что всевозможные элементы вида $(af\varphi(a^{-1}), 1)(f, 1)^{-1} = (af\varphi(a^{-1})f^{-1}, 0)$ порождают коммутант группы $F_n(\varphi)$. Импликация 2) $\implies$ 3) доказана.

Кроме того, если выполнено условие 3), то в силу сказанного выше класс сопряженности элемента $(f, 1) \in F_n(\varphi)$ будет порождать всю группу $F_n(\varphi)$, и при этом $F_n(\varphi)' = F_n$, т.е. из 3) следует 2).

3) $\iff$ 4). Положим $K = \langle af\varphi(a^{-1})f^{-1} \mid a \in F_n \rangle$. K – нормальная подгруппа в F_n , поскольку

$$b(af\varphi(a^{-1})f^{-1})b^{-1} = (ba)f\varphi(b^{-1}a^{-1})f^{-1}(bf\varphi(b^{-1})f^{-1})^{-1} \quad \forall b \in F_n.$$

Рассмотрим группу $H_n(f, \varphi)$. В этой группе выполнены соотношения $a = f\varphi(a)f^{-1}$ для любого $a \in F_n$, что легко доказывается индукцией по длине слова a в свободной группе. Отсюда следует, что нормальное замыкание элементов $x_i^{-1}f\varphi(x_i)f^{-1}$ в F_n совпадает с K , и $K = F_n$ тогда и только тогда, когда группа $H_n(f, \varphi)$ тривиальна.

2) $\implies$ 1). Очевидно, что первая группа гомологий $H_1 F_n(\varphi) \cong F_n(\varphi)/F_n(\varphi)' \cong \mathbb{Z}$. Покажем, что $H_2 F_n(\varphi) = 0$.

Чтобы вычислить $H_2 F_n(\varphi)$, воспользуемся спектральной последовательностью Хохшильда–Серра для расширения (1.2), для которой $E_{p,q}^2 = H_p(\mathbb{Z}, H_q F_n) \Rightarrow H_{p+q} F_n(\varphi)$.

Поскольку F_n и $\mathbb{Z}$ – свободные группы, то при $p, q > 1$ группы $H_p(\mathbb{Z}, -)$ и $H_q(F_n, -)$ тривиальны, и спектральная последовательность вырождается, начиная с члена E^2 . Отсюда вытекает, что $H_2 F_n(\varphi) \cong H_1(\mathbb{Z}, H_1 F_n)$.

Пусть $G = \langle t \rangle$ – бесконечная циклическая группа. Как хорошо известно, для любого $\mathbb{Z}G$ -модуля M $H_1(G, M)$ совпадает с ядром отображения $M \rightarrow M$, являющегося умножением на $t - 1$.

Отождествим $H_1 F_n$ с F_n/F_n' (и с $\mathbb{Z}^n$, выбрав в качестве базиса элементы $x_i F_n'$). При этом действие $1 \in \mathbb{Z}$ на F_n/F_n' совпадает с индуцированным действием на F_n/F_n' автоморфизма φ . Соответствующую φ матрицу из $GL_n(\mathbb{Z})$ будем обозначать $\hat{\varphi}$.

Мы уже знаем, что существует такой элемент $f \in F_n$, что

$$F_n = \langle af\varphi(a^{-1})f^{-1} \mid a \in F_n \rangle.$$

Нетрудно видеть, что тогда линейное отображение $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, задаваемое матрицей $\hat{\varphi} - 1$ (1 – единичная матрица), будет эпиморфно и, следовательно, будет иметь нулевое ядро. Отсюда вытекает тривиальность $H_2 F_n(\varphi)$.

По теореме 1 из [3] $F_n(\varphi)$ будет неприводимой ориентируемой С-группой. Группа $F_n(\varphi)$ будет, очевидно, конечно определенной группой, причем можно ограничиться $n + 1$ порождающим и n соотношениями. Опять же из результатов Ю. В. Кузьмина [3, теорема 3] следует, что $F_n(\varphi)$ будет и к.о. С-группой. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 1 группу $F_n(\varphi)$ можно реализовать как группу дополнения некоторой 2-сферы, заузленной в гомотопической 4-сфере, вследствие теоремы М. Кервера из [1].

Наш следующий шаг – классифицировать с точностью до изоморфизма неприводимые ориентируемые С-группы, описываемые теоремой 1. Ответ дается в терминах группы внешних автоморфизмов $\text{Out}(F_n)$, но прежде докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть G – произвольная группа, а α и β – некоторые ее автоморфизмы. Тогда

1. существует изоморфизм $\Phi_1: G(\alpha) \rightarrow G(\alpha^{-1})$, включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G(\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\ & & \text{id} \parallel & & \Phi_1 \downarrow & & \downarrow (-1) \\ 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G(\alpha^{-1}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 ; \end{array}$$

2. существует изоморфизм $\Phi_2: G(\alpha) \rightarrow G(\beta\alpha\beta^{-1})$, включаемый в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G(\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\ & & \beta \downarrow & & \Phi_2 \downarrow & & \parallel \text{id} \\ 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G(\beta\alpha\beta^{-1}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 ; \end{array}$$

3. расширения $1 \rightarrow G \rightarrow G(\alpha) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow G \rightarrow G(\beta) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$ эквивалентны тогда и только тогда, когда образы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ совпадают в группе внешних автоморфизмов $\text{Out}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве Φ_1 берется отображение, переводящее пару $(g, m) \in G(\alpha)$ в пару $(g, -m) \in G(\alpha^{-1})$, в качестве Φ_2 – отображение, переводящее $(g, m) \in G(\alpha)$ в $(\beta(g), m) \in G(\beta\alpha\beta^{-1})$, и непосредственно проверяется, что Φ_1 и Φ_2 являются изоморфизмами групп.

Докажем утверждение 3. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G(\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \Phi \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G(\beta) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \end{array} \quad (1.3)$$

с тождественными левым и правым вертикальными гомоморфизмами. Φ отображает пару $(1, 1) \in G(\alpha)$ в некоторую пару $(g, 1) \in G(\beta)$. Для любого $x \in G$ имеем в

$G(\alpha) (\alpha(x), 0) = (1, 1)(x, 0)(1, 1)^{-1}$. Применяя Φ к обеим частям этого равенства, получим в $G(\beta)$:

$$(\alpha(x), 0) = (g, 1)(x, 0)(g, 1)^{-1} = (g\beta(x)g^{-1}, 0).$$

Отсюда следует, что $\alpha = i(g) \circ \beta$, где $i(g)$ — это внутренний автоморфизм, соответствующий элементу g . Обратно, если $\alpha = i(g) \circ \beta$ для некоторого $g \in G$, то с точностью до эквивалентности существует только одно расширение $1 \rightarrow G \rightarrow \tilde{G} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$ такое, что при индуцированном гомоморфизме $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Out}(G)$ образ $1 \in \mathbb{Z}$ совпадает с $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Действительно, группа $H^2(\mathbb{Z}, C(G))$, классифицирующая расширения с заданным гомоморфизмом $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Out}(G)$, тривиальна ($C(G)$ обозначает центр группы G). Впрочем, изоморфизм Φ , делающий диаграмму (1.3) коммутативной, легко строится явно, исходя из первой части доказательства утверждения 3. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F_n(\alpha)$ и $F_n(\beta)$ — две неприводимые ориентируемые С-группы, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Группа $F_n(\alpha)$ изоморфна $F_n(\beta)$ тогда и только тогда, когда образ $\bar{\alpha}$ сопряжен с $\bar{\beta}^{\pm 1}$ в группе $\text{Out}(F_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = i(f)\gamma\beta^{\pm 1}\gamma^{-1}$ для некоторых $f \in F_n$ и $\gamma \in \text{Aut}(F_n)$, то по лемме 2 группы $F_n(\alpha)$ и $F_n(\beta)$ изоморфны.

Обратно, пусть $\Phi: F_n(\alpha) \rightarrow F_n(\beta)$ — изоморфизм. Поскольку Φ индуцирует изоморфизм коммутантов и факторгрупп по ним, то коммутативна следующая диаграмма.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & F_n & \longrightarrow & F_n(\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\ & & \Phi_1 \downarrow & & \Phi \downarrow & & \Phi_2 \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & F_n & \longrightarrow & F_n(\beta) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \end{array}$$

Переходя при необходимости от β к $\gamma\beta^\varepsilon\gamma^{-1}$, где $\gamma = \Phi_1^{-1}$ и $\varepsilon = \Phi_2(1) = \pm 1$, можно считать Φ_1 и Φ_2 тождественными отображениями. Для завершения доказательства теоремы остается еще раз применить лемму 2.

Теоремы 1 и 2 легко обобщаются на случай произвольной группы следующим образом.

ТЕОРЕМА 2А. Пусть имеется точная последовательность (1.1).

1. Группа $G(\varphi)$ порождается одним классом сопряженных элементов, и $G(\varphi)' = G$ тогда и только тогда, когда существует $g \in G$ такой, что $G = \text{gp}\langle a\varphi(a^{-1})g^{-1} \mid a \in G \rangle$.

2. Группы $G(\alpha)$ и $G(\beta)$, удовлетворяющие условиям предыдущего пункта, изоморфны тогда и только тогда, когда образ $\bar{\alpha}$ сопряжен с $\bar{\beta}^{\pm 1}$ в группе $\text{Out}(G)$.

Теорема 2 позволяет классифицировать с точностью до изоморфизма неприводимые ориентируемые С-группы, коммутант которых — свободная группа ранга 2.

ТЕОРЕМА 3. *С точностью до изоморфизма существуют ровно три неприводимые ориентируемые С-группы со свободным коммутантом F_2 :*

- 1) $G_1 \cong \langle e, f, g \mid efe^{-1} = g; geg^{-1} = f \rangle$ (группа узла трилистника);
- 2) $G_2 \cong \langle e, f, g, h, j \mid jej^{-1} = f = ege^{-1}; jhj^{-1} = g; che^{-1} = j \rangle$ (группа узла Листинга (“восьмерки”));
- 3) $G_3 \cong \langle e, f, g, h \mid heh^{-1} = f; hfh^{-1} = g = che^{-1} \rangle$ (группа некоторого 2-узла).

При любом $n \geq 3$ существует бесконечно много попарно неизоморфных неприводимых ориентируемых С-групп со свободным коммутантом F_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свободную группу F_2 и некоторый ее автоморфизм φ . Необходимое условие того, чтобы группа $F_2(\varphi)$ была неприводимой ориентируемой С-группой, заключается в следующем: матрицы $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\varphi} - 1$ лежат в $GL_2(\mathbb{Z})$ (это вытекает из доказательства теоремы 1).

Положим $C_{i,j} = \{X \in GL_2(\mathbb{Z}) \mid \text{Tr } X = i; \det X = j\}$. Условие, накладываемое на $\widehat{\varphi}$, влечет четыре возможности:

1. $X \in C_{3,1}$ ($\text{Tr } X = 3; \det X = 1$),
2. $X \in C_{1,1}$ ($\text{Tr } X = 1; \det X = 1$),
3. $X \in C_{1,-1}$ ($\text{Tr } X = 1; \det X = -1$),
4. $X \in C_{-1,-1}$ ($\text{Tr } X = -1; \det X = -1$).

Хорошо известно, что имеется изоморфизм $\text{Out}(F_2) \cong \text{Aut}(F_2/F_2')$, с помощью которого $\text{Out}(F_2)$ отождествляется с $GL_2(\mathbb{Z})$. Заметим, что при отображении $J: X \rightarrow X^{-1}$ множества $C_{3,1}$ и $C_{1,1}$ переходят в себя, а множества $C_{1,-1}$ и $C_{-1,-1}$ переходят друг в друга.

Если мы покажем, что каждое из этих четырех множеств составляет полный класс сопряженных в $GL_2(\mathbb{Z})$, то из теоремы 2 будет следовать, что число неприводимых ориентируемых С-групп вида $F_2(\varphi)$ не более трех (с точностью до изоморфизма). Легко указать такие автоморфизмы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \text{Aut}(F_2)$, что $\widehat{\varphi}_1 \in C_{1,1}$, $\widehat{\varphi}_2 \in C_{3,1}$, $\widehat{\varphi}_3 \in C_{1,-1}$, и что они удовлетворяют условию 4) теоремы 1. Например, $\varphi_1: x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1^{-1}x_2^3$; $\varphi_2: x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1^{-1}x_2$ и $\varphi_3: x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1x_2$ будут такими автоморфизмами, и, значит, первое утверждение теоремы будет доказано.

Достаточно показать, что полными классами сопряженных элементов являются $C_{1,1}$ и $C_{1,-1}$. Действительно, J взаимно однозначно отображает $C_{-1,-1}$ на $C_{1,-1}$, а $T: X \rightarrow X + 1 - C_{1,-1}$ на $C_{3,1}$ (если к двум сопряженным матрицам добавить скалярную, то полученные матрицы по-прежнему будут сопряжены).

ЛЕММА 3. *Любая матрица $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ со следом 1 и определителем 1 сопряжена матрице $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ при помощи некоторой матрицы из $SL_2(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матричное уравнение $XBX^{-1} = A$, где известная матрица $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ принадлежит группе $SL_2(\mathbb{Z})$, матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ и при этом $\det A = a(1-a) - bc = 1$.

Пусть (u_0, v_0) – целочисленное решение уравнения

$$bu^2 + (2a-1)uv - cv^2 = 1. \quad (1.4)$$

Положим $x = bu_0 + (a-1)v_0$, $y = v_0$, $z = -au_0 + cv_0$, $w = u_0$. Тогда матрица X будет искомой матрицей. Действительно,

$$XBX^{-1} = \begin{pmatrix} -yw - xz - yz & x^2 + y^2 + xy \\ -w^2 - z^2 - wz & wy + zx + wx \end{pmatrix}.$$

Покажем, к примеру, что $x^2 + y^2 + xy = b$ (остальная проверка выполняется аналогично). Подставляя выражения для x и y в левую часть, получим

$$x^2 + y^2 + xy = b^2u_0^2 + b(2a-1)u_0v_0 + (a^2 - a + 1)v_0^2 = b(bu_0^2 + (2a-1)u_0v_0 - cv_0^2) = b,$$

поскольку $a^2 - a + 1 = -bc$.

Таким образом, осталось лишь установить, что уравнение (1.4) имеет решение в целых числах. Рассмотрим целочисленную бинарную квадратичную форму $bu^2 + (2a-1)uv - cv^2$. Ее дискриминант Δ равен $(2a-1)^2 + 4bc = -4 \det A + 1 = -3$, следовательно, форма будет примитивной. На множестве примитивных бинарных квадратичных форм заданного дискриминанта Δ действует группа $SL_2(\mathbb{Z})$: форма $F(u, v)$ под действием матрицы $M = \begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix}$ переходит в форму $F(mu + nv, ku + lv)$.

Как известно [2], множество орбит этого действия параметризуется конечной абелевой группой $Cl(\Delta)$. В частности, $Cl(-3) = 1$. Отсюда вытекает, что форму $bu^2 + (2a-1)uv - cv^2$ можно перевести в форму $u^2 + uv + v^2$ с помощью некоторой матрицы из $SL_2(\mathbb{Z})$. Но уравнение $u^2 + uv + v^2 = 1$ имеет очевидное решение $(1, 0)$ и поэтому уравнение (1.4) также разрешимо в целых числах. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Любая матрица $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ со следом 1 и определителем -1 сопряжена матрице $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ при помощи некоторой матрицы из $SL_2(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей лемме, рассмотрим матричное уравнение $XBX^{-1} = A$, где матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ и $\det A = a(1-a) - bc = -1$.

Аналогично рассматривается уравнение

$$cu^2 - (2a-1)uv - bv^2 = 1. \quad (1.5)$$

Любое его целочисленное решение (u_0, v_0) позволяет найти матрицу $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ по формулам $x = u_0$, $y = au_0 + bv_0$, $z = v_0$, $w = cu_0 + (1-a)v_0$. Дискриминант формы $cu^2 - (2a-1)uv - bv^2$ равен 5. Поскольку $Cl(5) = 1$, то любую такую форму можно перевести в форму $u^2 + uv - v^2$ с помощью матрицы из $SL_2(\mathbb{Z})$. Уравнение $u^2 + uv - v^2 = 1$ имеет решение $(1, 0)$ и поэтому уравнение (1.5) будет иметь целочисленное решение. Лемма доказана.

Продолжим доказательство первой части теоремы. Нам остается показать, что группы $F_2(\varphi_i)$ соответственно изоморфны группам G_i ($i = 1, 2, 3$). Для этого достаточно применить процедуру, описанную в теореме 3 из [3], что и позволяет написать С-соотношения для всех трех групп.

Рассмотрим случай $n \geq 3$. Пусть две изоморфные группы $F_n(\alpha)$ и $F_n(\beta)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда либо характеристический многочлен матрицы $\hat{\alpha} \in GL_n(\mathbb{Z})$ $\chi(\hat{\alpha}, t)$ равен $\chi(\hat{\beta}, t)$, либо $\chi(\hat{\alpha}, t) = (-1)^{n-1} \chi(\hat{\beta}, 1/t) t^n$.

Пусть имеется многочлен $P(t) = t^n + c_n t^{n-1} + \dots + c_1 \in \mathbb{Z}[t]$. Потребуем дополнительно, чтобы $|P(0)| = |P(1)| = 1$. При фиксированном n множество $\mathcal{P}_n$ таких многочленов бесконечно (например, для любого $k \in \mathbb{Z}$ многочлены $t^n - k t^{n-1} + (k+1)t - 1$ удовлетворяют наложенному условию). Поставим в соответствие каждому многочлену $P(t) \in \mathcal{P}_n$ автоморфизм $\alpha_P \in \text{Aut } F_n$ следующего вида:

$$\alpha_P(x_i) = x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \alpha_P(x_n) = x_1^{-c_1} \dots x_n^{-c_n}.$$

α_P будет автоморфизмом, поскольку $|c_1| = |P(0)| = 1$. Более того, $F_n(\alpha_P)$ будет неприводимой ориентируемой С-группой с коммутантом F_n по условию 4 теоремы 1 (надо взять f равным 1), так как $|-1 - c_n - \dots - c_1| = |P(1)| = 1$.

Легко видеть, что характеристический многочлен $\chi(\hat{\alpha}_P, t)$ равен $P(t)$. Отсюда и из бесконечности множества $\mathcal{P}_n$ следует утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

§ 2. Неприводимые ориентируемые С-группы с коммутантом – группой Гейзенберга $\mathcal{H}_3$

В качестве следствия теорем, доказанных в предыдущем параграфе, получается полная классификация с точностью до изоморфизма неприводимых ориентируемых С-групп, коммутантом которых является группа Гейзенберга $\mathcal{H}_3 = F_2/\gamma_3 F_2$, где $\gamma_i G$ обозначает i -й член нижнего центрального ряда группы G .

ТЕОРЕМА 4. *С точностью до изоморфизма существует ровно три неприводимые ориентируемые С-группы с коммутантом $\mathcal{H}_3$. Это $\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}_1)$, $\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}_2)$, $\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}_3)$, где автоморфизмы $\tilde{\varphi}_i \in \text{Aut}(\mathcal{H}_3)$ индуцированы автоморфизмами свободной группы F_2 : $\varphi_1: x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1^{-1}x_2^3$; $\varphi_2: x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1^{-1}x_2$ и $\varphi_3: x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1x_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, естественный гомоморфизм $\pi: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}_3)$ является эпиморфизмом (образ $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$ будем обозначать $\tilde{\varphi}$). Отсюда вытекает существование естественного изоморфизма $\text{Out}(F_2) \cong \text{Out}(\mathcal{H}_3)$, в силу которого обе эти группы отождествляются с $GL_2(\mathbb{Z})$. Кроме того, имеет место естественный изоморфизм $F_2/F'_2 \cong \mathcal{H}_3/\mathcal{H}'_3$, и обе эти группы можно отождествить с группой $\mathbb{Z}^2$, как и в доказательстве теоремы 3.

Рассмотрим группу $\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi})$. Она порождается одним классом сопряженных элементов и имеет коммутантом H_3 только в том случае, когда $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi} - 1$ принадлежат $GL_2(\mathbb{Z})$ ($\tilde{\varphi}$ обозначает образ $\tilde{\varphi}$ в $\text{Out}(\mathcal{H}_3) = GL_2(\mathbb{Z})$). Это следует из теоремы 2А. Из той же теоремы и доказательства теоремы 3 вытекает, что с точностью до изоморфизма существуют ровно три такие группы $\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}_1)$, $\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}_2)$, и $\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}_3)$.

Покажем, что все они являются к.о. неприводимыми ориентируемыми С-группами. По теореме 1 [3] достаточно показать, что $H_2\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}) = 0$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ (до конца доказательства теоремы 4 $\tilde{\varphi}$ будет обозначать один из этих трех автоморфизмов).

Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра для расширения $1 \rightarrow \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3(\tilde{\varphi}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$. Она, как и в случае свободной группы, вырождается, начиная с члена E^2 , поскольку группа $\mathbb{Z}$ свободна. $E_{1,1}^2 = H_1(\mathbb{Z}, H_1(\mathcal{H}_3)) = \text{Ker}(\tilde{\varphi} - 1: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2) = 0$. Поэтому $H_2(\mathcal{H}_3(\tilde{\varphi})) \cong H_0(\mathbb{Z}, H_2(\mathcal{H}_3))$.

Исследуем $H_0(\mathbb{Z}, H_2(\mathcal{H}_3))$. По формуле Хопфа

$$H_2(\mathcal{H}_3) = H_2(F_2/\gamma_3 F_2) \cong \gamma_3 F_2/\gamma_4 F_2.$$

В качестве базиса группы $\gamma_3 F_2/\gamma_4 F_2$ возьмем $y_1 = [[x_1, x_2], x_1] \bmod \gamma_4 F_2$, $y_2 = [[x_1, x_2], x_2] \bmod \gamma_4 F_2$ и отождествим $\gamma_3 F_2/\gamma_4 F_2$ с $\mathbb{Z}^2$.

Группа $\text{Out}(\mathcal{H}_3) = GL_2(\mathbb{Z})$ действует на $H_2(\mathcal{H}_3) = \mathbb{Z}^2$ следующим образом: $A \circ X = \det(A) \cdot AX$, где AX — образ $X \in \mathbb{Z}^2$ под действием матрицы $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ при стандартном действии группы $GL_2(\mathbb{Z})$ на $\mathbb{Z}^2$. Это непосредственно следует из коммутаторных тождеств.

В частности, $1 \in \mathbb{Z}$ действует на $H_2(\mathcal{H}_3) = \mathbb{Z}^2$ как умножение слева на матрицу $\det(\hat{\varphi})\hat{\varphi}$. Легко видеть, что если $\hat{\varphi}$ принимает одно из трех указанных выше значений, то матрица $\det(\hat{\varphi})\hat{\varphi} - 1$ принадлежит $GL_2(\mathbb{Z})$. Поэтому $H_0(\mathbb{Z}, H_2(\mathcal{H}_3)) = \text{Coker}\{\det(\hat{\varphi})\hat{\varphi} - 1: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2\} = 0$. Конечная определенность групп вида $\mathcal{H}_3(\hat{\varphi})$ очевидна. Теорема доказана.

§ 3. Неприводимые ориентируемые С-группы и группы Кокстера

Рассмотрим некоторую группу Кокстера. По определению это группа с конечным копредставлением $\langle s \in S \mid (st)^{m(s,t)} = 1, s, t \in S \rangle$, в котором числа $m(s, t) \in \{1, 2, \dots\}$ (допускается также значение ∞ ; в этом случае соответствующее соотношение просто отсутствует) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $m(s, s) = 1 \forall s \in S$;
- 2) $m(s, t) = m(t, s) \geq 2$ при $s \neq t$.

Из 1) вытекает, что $s^2 = 1$. Группа Кокстера G определяется своим графом Кокстера $\Gamma = \Gamma(G)$. Вершины графа Γ находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством S . Вершина s соединена с вершиной t неориентированным ребром с меткой $m(s, t)$, если только $s \neq t$ и $m(s, t) \geq 3$ (обычно вместо ребра с меткой 3 рисуют просто одинарное ребро, а вместо ребра с меткой 4 — двойное).

ЛЕММА 5. *Любая группа Кокстера является неориентируемой С-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в преобразовании определяющих соотношений.

1. Соотношения $s^2 = 1$ перепишем в виде $sss^{-1} = s^{-1}$.
2. Если $m(s, t) = 2k + 1$, $k \geq 1$, то соотношение $(st)^{m(s,t)} = 1$ приводится к виду $(st)^k s(st)^{-k} = t$ по модулю соотношений $s^2 = 1$. В частности, s и t сопряжены в G .
3. Если $m(s, t) = 2k$, $k \geq 1$, то соотношение $(st)^{m(s,t)} = 1$ приводится к виду $s(ts)^{k-1}t(ts)^{1-k}s^{-1} = t$ по модулю соотношений $s^2 = 1$.

Таким образом, группа G имеет также копредставление, определяющие соотношения которого имеют вид $ws w^{-1} = t^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, w — некоторое слово. Нетрудно видеть, что такие группы будут С-группами. Действительно, если, например, $w = uy$, где y — порождающий, и длина u меньше длины w , то вводя новую образующую z и новое соотношение $z = ysy^{-1}$ можно добиться сокращения длины слова w и в конце концов перейти от данного копредставления к С-копредставлению группы G . Лемма доказана.

Пусть G – некоторая группа Кокстера и $\Gamma(G)$ – ее граф. Сотрем в графе Γ все ребра с четными метками, а про все нечетные метки забудем, оставив только сами ребра. Полученный граф $\Gamma_2(G)$ будем называть графом Кокстера группы G , приведенным по модулю 2. Обозначим число его связных компонент $l(G)$.

Группа G как C -группа имеет тип ориентируемости $(0, l(G))$. Действительно, $G/G' \cong (\mathbb{Z}_2)^{l(G)}$, потому что G/G' имеет копредставление

$$\langle s \in S \mid (st)^{m(s,t)} = 1; st = ts, s, t \in S \rangle,$$

и образы s и t в G/G' совпадают тогда и только тогда, когда в графе $\Gamma_2(G)$ вершины s, t лежат в одной компоненте связности. Отсюда вытекает, что группа Кокстера является неприводимой неориентируемой C -группой тогда и только тогда, когда $l(G) = 1$, т.е. граф $\Gamma_2(G)$ связан.

ЛЕММА 6. *Коммутант любой группы Кокстера G со связным графом $\Gamma_2(G)$ (т.е. порождаемой одним классом сопряженных), является коммутантом некоторой неприводимой ориентируемой C -группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 группа G будет неприводимой неориентируемой C -группой. В силу леммы 4 из [3] для такой группы G существует неприводимое ориентируемое C -накрытие G_+^* . Ядро канонического эпиморфизма $G_+^* \rightarrow G$ будет центральной подгруппой в G_+^* (как легко видеть, бесконечной циклической), тривиально пересекающейся с коммутантом $[G_+^*, G_+^*]$. Отсюда вытекает изоморфизм коммутантов $[G_+^*, G_+^*]$ и $[G, G]$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого n знакопеременная группа A_n является коммутантом некоторой неприводимой ориентируемой C -группы.*

В самом деле, симметрическая группа S_n является группой Кокстера с графом Кокстера:

Список литературы

1. Kervaire M. On higher dimensional knots // Diff. and combinat. topology / ed. S. Cairn: Princeton Univ. Press, 1965. P. 105–120.
2. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972.
3. Кузьмин Ю. В. Группы заузленных компактных поверхностей и центральные расширения // Матем. сб. 1996. Т. 187. №2. С. 81–102.

Государственный университет путей сообщения

Поступила в редакцию
22.06.1995