Общероссийский математический портал

Ш. Т. Тетунашвили, О нуль-рядах по тригонометрической системе и по системам Уолша и Хаара, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 3, 103–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 07:46:21

УДК 517.5

Ш. Т. Тетунашвили

О нуль-рядах по тригонометрической системе и по системам Уолша и Хаара

Решены некоторые задачи, связанные с нуль-рядами по тригонометрической системе и по системам Уолша и Хаара.

Библиография: 13 названий.

Введение

Будем рассматривать ряды по тригонометрической системе и по системам Уолша и Хаара.

Через $\{\varphi_n(t)\}$, где $t \in [a, b]$, обозначим одну из выше отмеченных систем.

В случае, когда $\{\varphi_n(t)\}$ – тригонометрическая система, то $[a, b] = [0, 2\pi]$, а когда $\{\varphi_n(t)\}$ – система Уолша или система Хаара, то $[a, b] = [0, 1]$.

Рассмотрим ряд по системе $\{\varphi_n(t)\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t). \quad (0.1)$$

Нуль-рядом по системе $\{\varphi_n(t)\}$ называется ряд (0.1), который почти всюду на $[a, b]$ сходится к нулю, хотя не все его коэффициенты равны нулю.

Первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д. Е. Меньшовым [1]. Первый пример нуль-ряда по системе Уолша построен А. А. Шнейдером [2], а по системе Хаара – Г. Фабером [3].

Отметим, что нуль-ряд не может быть рядом Фурье, поэтому сумма квадратов коэффициентов нуль-ряда расходится.

I. Вопрос о том, существуют ли нуль-ряды (0.1), для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

расходится сколь угодно медленно, решается положительно как для тригонометрической системы (см. [4, с. 841]), так и для систем Уолша (см. [5]) и Хаара (см. [6]).

В данной работе отмеченные результаты усиливаются. Именно, мы докажем теоремы, из которых, в частности, следует, что для любой последовательности чисел $\{q_n\}$ с $0 < q_n \leq 2$ при $n \geq 1$, существуют нуль-ряды как по тригонометрической системе, так и по системе Уолша, для которых ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{q_n}$$

может расходиться сколь угодно медленно.

II. Пусть $G(u)$ — функция, определенная на $[0, +\infty)$, а $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Через $S_n(t)$ обозначим частичные суммы ряда (0.1).

Допустим, что для некоторой положительной постоянной M

$$\int_a^b |S_n(t)| |G(|S_n(t)|)|^{\varepsilon_n} dt \leq M, \quad n = 0, 1, \dots \quad (0.2)$$

Как известно, если $G(u) = u$ и $\varepsilon_n \geq \varepsilon > 0$ при $n \geq 0$, то из (0.2) следует, что ряд (0.1) есть ряд Фурье.

Для тригонометрических рядов Литтлвудом была поставлена следующая проблема (см. [7, с. 5]).

Обязан ли тригонометрический ряд (0.1) быть рядом Фурье, если выполняется соотношение (0.2) с $G(u) = 1$ при $u \in [0, +\infty)$.

Эта проблема имеет отрицательное решение (см. [8]).

В связи с этим возник следующий, более общий вопрос, чем приведенная проблема Литтлвуда.

Существуют ли непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $G(u)$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ такие, что при выполнении соотношения (0.2) следует, что ряд (0.1) есть ряд Фурье?

В данной работе докажем теоремы, из которых, в частности, следует отрицательный ответ на этот вопрос как для тригонометрических рядов, так и для рядов по системам Уолша и Хаара.

III. Пусть для любого $m \geq 0$ $\Omega_m = \{n : 2^m < n \leq 2^{m+1}\}$.

Рассмотрим ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t). \quad (0.3)$$

Хорошо известен следующий результат П. Л. Ульянова (см. [9]).

Пусть $d \geq 1$ — некоторое число. Если для последовательности $\{c_n\}$

$$\max_{n \in \Omega_m} |c_n| \leq d \min_{n \in \Omega_{m-1}} |c_n| \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (0.4)$$

и ряд (0.3) таков, что на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 0$,

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^{q_m} c_n \chi_n(t) \right| = M(t) < \infty$$

при $t \in E$, где q_m — некоторая возрастающая к ∞ последовательность целых чисел, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

П. Л. Ульянову принадлежит также (см. [10]) следующая

ТЕОРЕМА (о единственности для рядов по системе Хаара с монотонными коэффициентами). *Если $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$ при $n \geq 1$ и ряд (0.3) сходится к нулю на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 0$, то существует натуральное число n_0 такое, что $c_n = 0$ при $n \geq n_0$.*

В той же работе П. Л. Ульяновым отмечено (см. [10, с. 73]), что в этой теореме условие монотонности коэффициентов можно ослабить. Например, теорема остается справедливой для рядов (0.3) с коэффициентами, удовлетворяющими более слабому условию, чем (0.4), и доказательство этого утверждения фактически содержится в работе [10].

Мы докажем теоремы о нуль-рядах по системе Хаара, из которых следует, что отмеченные результаты П. Л. Ульянова не могут быть усилены в определенном смысле. Одной из таких теорем является следующая

ТЕОРЕМА. *Для любой последовательности $\{d_m\}$, $d_m \geq 1$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty$, существует нуль-ряд (0.3), коэффициенты которого удовлетворяют соотношениям: $c_n > 0$ при $n \geq 1$ и*

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n \leq d_m \min_{n \in \Omega_{m-1}} c_n \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Материал распределен следующим образом. В § 1 даны обозначения, определения и сформулированы установленные нами теоремы. В § 2 приведены известные результаты и установлены вспомогательные утверждения. В § 3 доказываются теоремы, сформулированные в § 1, и выводятся некоторые следствия этих теорем.

§ 1. Обозначения, определения и формулировки результатов

Пусть $\{r_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ – система Радемахера, где $t \in [0, 1]$,

$$r_n(t) = \text{sign} \sin 2^{n+1} \pi t \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$\{w_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – система Уолша в нумерации Пэли, где $w_1(t) \equiv 1$, и если $n = 1 + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_s}$, $0 \leq m_1 < \dots < m_s$, то

$$w_n(t) = \prod_{j=1}^s r_{m_j}(t);$$

$\{\chi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – система Хаара, где $\chi_1(t) \equiv 1$, и если $n = 2^m + j$, $1 \leq j \leq 2^m$, то

$$\chi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & \text{при } t \in \left(\frac{2j-2}{2^{m+1}}, \frac{2j-1}{2^{m+1}}\right), \\ -\sqrt{2^m} & \text{при } t \in \left(\frac{2j-1}{2^{m+1}}, \frac{2j}{2^{m+1}}\right), \\ 0 & \text{при остальных } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: для любого $m \geq 0$

$$\Omega_m = \{n : 2^m < n \leq 2^{m+1}\};$$

$\omega_0 = \{1\}$, а если $m \geq 1$, то $\omega_m = \{n : p_{m-1} < n \leq p_m\}$, где $p_m = 1 + 4 + \dots + 4^m = \frac{4^{m+1}-1}{3}$.

Пусть $\{d_m\}_{m=0}^\infty$ – любая последовательность положительных чисел с $d_m \uparrow \infty$, а $\Phi(u)$ – любая конечная на $[0, +\infty)$ функция с $\Phi(0) = 0$.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Существует нуль-ряд*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau$$

такой, что $a_n \geq 0$ при $n \geq 1$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\sum_{n \in \omega_m} a_n \right) \right| \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует нуль-ряд по системе Уолша*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t)$$

такой, что $b_n \geq 0$ при $n \geq 1$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\sum_{n \in \Omega_m} b_n \right) \right| \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 3. *Существует нуль-ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t)$$

такой, что $c_n \geq 0$ при $n \geq 1$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\sqrt{2^m} \max_{n \in \Omega_m} c_n \right) \right| \leq 1.$$

Пусть, как и выше, $\{d_m\}$ – любая последовательность положительных чисел с $d_m \uparrow \infty$, а $\delta \in (0, 1)$ – некоторое число. $\Psi(u)$ – любая конечная на $[0, \delta)$, неотрицательная функция со свойством: $\Psi(0) = 0$ и для любых $\alpha \in [0, \delta)$, $\beta \in [0, \delta)$

$$\Psi(\alpha\beta) \leq \Psi(\alpha)\Psi(\beta).$$

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4. *Существует нуль-ряд*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau$$

такой, что $0 \leq a_n < \delta$ при $n \geq 1$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \sum_{n \in \omega_m} \Psi(a_n) \leq 1.$$

В частности, для любого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m \Psi(a_n) \leq d_m.$$

ТЕОРЕМА 5. *Существует нуль-ряд по системе Уолша*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t)$$

такой, что $0 \leq b_n < \delta$ при $n \geq 1$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \sum_{n \in \Omega_m} \Psi(b_n) \leq 1.$$

В частности, для любого $m > 1$

$$\sum_{n=2}^m \Psi(b_n) \leq d_m.$$

Как уже отмечено (см. введение, пункт I), $\{\varphi_n(t)\}$, где $t \in [a, b]$, обозначает либо тригонометрическую систему, либо систему Уолша, либо систему Хаара. В случае, когда $\{\varphi_n(t)\}$ — тригонометрическая система, $[a, b] = [0, 2\pi]$, а в остальных случаях $[a, b] = [0, 1]$; $S_m(t)$ обозначает частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t). \quad (1.1)$$

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\{G_m(u)\}_{m=1}^{\infty}$ — такая последовательность конечных на $[0, +\infty)$, неотрицательных и неубывающих функций, что

$$\sup_{u \geq 0} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} G_m(u) < \infty.$$

Тогда существует нуль-ряд (1.1) такой, что для любого $m \geq 1$

$$\int_a^b |S_m(t)| G_m(|S_m(t)|) dt \leq M,$$

где M — некоторое положительное число.

ТЕОРЕМА 7. Для любой конечной, неотрицательной и неубывающей на $[0, +\infty)$ функции $G(u)$ и для любой последовательности чисел $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m > 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, существует нуль-ряд (1.1) такой, что при $m \geq 1$

$$\int_a^b |S_m(t)| [G(|S_m(t)|)]^{\varepsilon_m} dt \leq M,$$

где M – некоторое положительное число.

Следуя обозначениям работы [9], через A обозначим множество всех последовательностей $\{c_n\}$, для каждой из которых $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$ при $n \geq 1$, а через $\overline{A}$ – множество всех последовательностей $\{c_n\}$, для каждой из которых найдется такое число $d \geq 1$, что выполняется соотношение (0.4).

Далее, пусть $\{l_m\}$ – некоторая последовательность целых чисел с $0 \leq l_m \leq m$ при $m \geq 0$.

Через $A(\{l_m\})$ обозначим множество всех последовательностей $\{c_n\}$, для каждой из которых найдутся целочисленная последовательность $\{k_m\}$ и числа $d \geq 1$ и $q \geq 1$ такие, что если $m \geq q$, то

$$1) 0 \leq k_m \leq l_m$$

и

$$2) \max_{n \in \Omega_m} |c_n| \leq d \min_{n \in \Omega_{m-k_m}} |c_n|.$$

Если для некоторого числа m_0 имеем $l_m = k$ при $m \geq m_0$, то $A(\{l_m\})$ будем обозначать через $A(k)$.

Легко видеть, что

$$A \subset \overline{A} \subset A(1) \subset A(2) \subset \dots \subset A(k) \subset \dots$$

Приведенная во введении (см. пункт II) теорема П. Л. Ульянова о единственности для рядов по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t) \tag{1.2}$$

с монотонными коэффициентами остается справедливой и для рядов (1.2), где

$$\{c_n\} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A(k).$$

Доказательство этого утверждения, как мы уже заметили, фактически содержится в работе [10].

П. Л. Ульяновым был поставлен вопрос (см. [10, с. 73]) о максимальном расширении класса последовательностей $\{c_n\}$ так, чтобы эта теорема оставалась справедливой.

Ясно, что для любой последовательности $\{l_m\}$ с $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = \infty$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A(k) \subset A(\{l_m\}).$$

Следующими теоремами мы показываем, что приведенные выше результаты П. Л. Ульянова не могут быть усилены в определенном смысле.

ТЕОРЕМА 8. Для любой последовательности $\{l_m\}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = \infty$, существует нуль-ряд (1.2) такой, что $c_n > 0$ при $n \geq 1$ и $\{c_n\} \in A(\{l_m\})$.

ТЕОРЕМА 9. Для любой последовательности $\{d_m\}$, $d_m \geq 1$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty$, существует нуль-ряд (1.2) такой, что $c_n > 0$ при $n \geq 1$ и

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n \leq d_m \min_{n \in \Omega_{m-1}} c_n,$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$.

Отметим, что теоремы 8 и 9 были анонсированы нами в работе [13].

§ 2. Известные результаты и вспомогательные утверждения

Пусть $0 < \lambda \leq 2$. Рассмотрим произведения Рисса

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + \lambda \alpha_j \cos 4^j \tau). \quad (2.1)$$

Говорят, что ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau \quad (2.2)$$

представляет произведение (2.1), если для любого $m \geq 0$

$$\prod_{j=0}^m (1 + \lambda \alpha_j \cos 4^j \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{p_m} a_n \cos n\tau, \quad (2.3)$$

где

$$p_m = 1 + 4 + \dots + 4^m = \frac{4^{m+1} - 1}{3}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим произведение

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + \alpha_j r_j(t)). \quad (2.5)$$

Говорят, что ряд по системе Уолша

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t) \quad (2.6)$$

представляет произведение (2.5), если для любого $m \geq 0$

$$\prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)) = \sum_{n=1}^{2^{m+1}} b_n w_n(t). \quad (2.7)$$

Будем говорить, что ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t) \quad (2.8)$$

представляет произведение (2.5), если для любого $m \geq 0$

$$\prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)) = \sum_{n=1}^{2^{m+1}} c_n \chi_n(t). \quad (2.9)$$

Для частичных сумм рядов (2.2), (2.6) и (2.8) введем обозначения

$$S_m(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^m a_n \cos n\tau, \quad \tau \in [0, 2\pi]; \quad (2.10)$$

$$W_m(t) = \sum_{n=1}^m b_n w_n(t), \quad t \in [0, 1]; \quad (2.11)$$

$$H_m(t) = \sum_{n=1}^m c_n \chi_n(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.12)$$

Через S будем обозначать множество всех последовательностей $\{\alpha_j\}$, для каждой из которых выполняются соотношения

- 1) $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 = \infty$,
- 2) $\alpha_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$,
- 3) $0 \leq \alpha_j < \frac{1}{2}$ при $j \geq 0$.

Для тригонометрических нуль-рядов Зигмундом (см. [11]; [12, с. 336]) была доказана теорема, которую мы сформулируем в удобном для нас виде.

ТЕОРЕМА А (Зигмунд). Пусть $\{\alpha_j\} \in S$ и $0 < \lambda \leq 2$.

Тогда ряд (2.2), представляющий произведение (2.1), почти всюду сходится к нулю.

Используя метод доказательства теоремы А, Шнейдер (см. [2]) построил нуль-ряд по системе Уолша. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА В (Шнейдер). Если $\{\alpha_j\} \in S$, то ряд (2.6), представляющий произведение (2.5), почти всюду на $[0, 1]$ сходится к нулю.

Пусть $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность чисел и B — подмножество из $\mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

В дальнейшем, в случае $B = \emptyset$, будем считать, что

$$\prod_{j \in B} \alpha_j = 1.$$

Теперь докажем ряд лемм. Некоторые из них имеют самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha_j \geq 0$ при $j \geq 0$, $0 < \lambda \leq 2$, и тригонометрический ряд (2.2) представляет произведение (2.1). Тогда

- а) все коэффициенты ряда (2.2) неотрицательны;
- б) в случае $\lambda = 2$ для коэффициентов ряда (2.2) выполняются следующие соотношения: при $m \geq 0$ для любого $n \in \omega_m$

$$a_n = 0 \quad \text{или} \quad a_n = 2\alpha_m \prod_{j \in A_n^{(m-1)}} \alpha_j, \quad (2.13)$$

где $A_n^{(m-1)}$ – некоторое, возможно пустое, подмножество из множества $\{0, 1, \dots, m-1\}$, зависящее лишь от m и n . (Если $m = 0$, то $n = 1$. В этом случае считаем, что $A_1^{(-1)} = \emptyset$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия леммы при $m \geq 0$ имеем

$$S_{p_m}(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{p_m} a_n \cos n\tau = \prod_{j=0}^m (1 + \lambda \alpha_j \cos 4^j \tau), \quad (2.14)$$

где $p_m = \frac{4^{m+1}-1}{3}$.

Поскольку $p_m \uparrow \infty$, то пункт а) будет доказан, если покажем, что для любого $m \geq 0$

$$a_n \geq 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq n \leq p_m. \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) докажем методом математической индукции по m .

Пусть $m = 0$. Тогда $p_0 = 1$, и поэтому из (2.14) имеем

$$1 + a_1 \cos \tau = 1 + \lambda \alpha_0 \cos \tau.$$

Отсюда

$$a_1 = \lambda \alpha_0. \quad (2.16)$$

Поэтому

$$a_1 \geq 0, \quad (2.17)$$

т.е. при $m = 0$ соотношение (2.15) выполняется.

Допустим, что (2.15) выполняется для $m \leq k-1$ и покажем, что (2.15) справедливо и для $m = k$.

Из (2.14) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=p_{k-1}+1}^{p_k} a_n \cos n\tau &= S_{p_k}(\tau) - S_{p_{k-1}}(\tau) \\ &= \prod_{j=0}^k (1 + \lambda \alpha_j \cos 4^j \tau) - \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \lambda \alpha_j \cos 4^j \tau) \\ &= \lambda \alpha_k \cos 4^k \tau \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \lambda \alpha_j \cos 4^j \tau), \end{aligned} \quad (2.18)$$

то есть

$$\sum_{n \in \omega_k} a_n \cos n\tau = \lambda \alpha_k \cos 4^k \tau S_{p_{k-1}}(\tau). \quad (2.19)$$

Поэтому

$$\sum_{n \in \omega_k} a_n \cos n\tau = \lambda \alpha_k \cos 4^k \tau \left(1 + \sum_{n=1}^{p_{k-1}} a_n \cos n\tau \right). \quad (2.20)$$

Отсюда

$$\sum_{n \in \omega_k} a_n \cos n\tau = \lambda \alpha_k \cos 4^k \tau + \frac{\lambda \alpha_k}{2} \sum_{n=1}^{p_{k-1}} a_n [\cos(4^k - n)\tau + \cos(4^k + n)\tau]. \quad (2.21)$$

Поскольку $n \in \omega_k$, и $\omega_k = \{p_{k-1} + 1, p_{k-1} + 2, \dots, p_k\}$, то возможны три случая

1) если $p_{k-1} < n < 4^k - p_{k-1}$, то

$$a_n = 0; \quad (2.22)$$

2) если же $n = 4^k$, то

$$a_{4^k} = \lambda \alpha_k, \quad (2.23)$$

3) если $n \neq 4^k$ и $4^k - p_{k-1} \leq n \leq 4^k + p_{k-1} = p_k$, то из (2.21) вытекает, что для этого числа n существует число $q(n)$, $1 \leq q(n) \leq p_{k-1}$, такое, что

$$a_n = \frac{\lambda \alpha_k}{2} a_{q(n)}. \quad (2.24)$$

В силу предположения индукции $a_{q(n)} \geq 0$, поэтому из (2.24) следует, что

$$a_n \geq 0. \quad (2.25)$$

Из соотношений (2.22), (2.23) и (2.25) вытекает справедливость пункта а).

Докажем пункт б). Пусть $m = 0$; тогда $\omega_0 = \{1\}$ и из соотношения (2.16), поскольку $\lambda = 2$, имеем

$$a_1 = 2\alpha_0, \quad (2.26)$$

т.е. соотношение (2.13) при $m = 0$ выполняется.

Для $m \geq 1$ пункт б) докажем также методом математической индукции. Пусть $m = 1$. Тогда

$$\omega_1 = \{n : p_0 < n \leq p_1\} = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Из (2.21) имеем

$$\sum_{n \in \omega_1} a_n \cos n\tau = 2\alpha_1 \cos 4\tau + \alpha_1 a_1 (\cos 3\tau + \cos 5\tau).$$

Отсюда и из (2.26) имеем

$$\sum_{n=2}^5 a_n \cos n\tau = 2\alpha_1 \alpha_0 \cos 3\tau + 2\alpha_1 \cos 4\tau + 2\alpha_1 \alpha_0 5\tau.$$

Отсюда при $m = 1$ следует справедливость пункта б).

Допустим, что (2.13) выполняется при $m \leq k-1$ и покажем его справедливость для $m = k$.

Пусть $n \in \omega_k$. Тогда из соотношений (2.22) и (2.23) имеем:

1) если $p_{k-1} < n < 4^k - p_{k-1}$, то

$$a_n = 0; \quad (2.27)$$

2) если $n = 4^k$, то

$$a_{4^k} = 2\alpha_k; \quad (2.28)$$

3) если $n \neq 4^k$ и $4^k - p_{k-1} \leq n \leq 4^k + p_{k-1} = p_k$, то из (2.24) имеем

$$a_n = \alpha_k a_{q(n)}, \quad (2.29)$$

где $q(n) \in \omega_i$, для некоторого i , $0 \leq i \leq k-1$.

В силу предположения индукции для $a_{q(n)}$ имеем:

$$\text{либо } a_{q(n)} = 0, \quad (2.30)$$

$$\text{либо } a_{q(n)} = 2\alpha_i \prod_{j \in A_{q(n)}^{(i-1)}} \alpha_j, \quad (2.31)$$

где $A_{q(n)}^{(i-1)}$ — некоторое, возможно пустое, подмножество из $\{0, 1, \dots, i-1\}$.

Из (2.29)–(2.31) вытекает, что

$$\text{либо } a_n = 0, \quad (2.32)$$

$$\text{либо } a_n = 2\alpha_k \alpha_i \prod_{j \in A_{q(n)}^{(i-1)}} \alpha_j. \quad (2.33)$$

Поскольку i — некоторое целое число, изменяющееся от нуля до $k-1$, то очевидно, что соотношение (2.33) можно записать в виде

$$a_n = 2\alpha_k \prod_{j \in A_n^{(k-1)}} \alpha_j, \quad (2.34)$$

где $A_n^{(k-1)}$ — некоторое подмножество из $\{0, 1, \dots, k-1\}$.

Из (2.27), (2.28), (2.32) и (2.34) следует справедливость пункта б). Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любого $m \geq 1$ через ω_m^1 будем обозначать множество всех чисел $n \in \omega_m$, для которых определено $A_n^{(m-1)}$. Из доказательства леммы 1 ясно, что ω_m^1 не зависит от выбора последовательности $\{\alpha_j\}$, и если $n \in \omega_m \setminus \omega_m^1$, то $a_n = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha_j \geq 0$ при $j \geq 0$ и ряд (2.6) представляет произведение (2.5). Тогда $b_1 = 1$, а для любого $n \in \Omega_m$, $m = 0, 1, \dots$,

$$b_n = \alpha_m \prod_{j \in B_n^{(m-1)}} \alpha_j, \quad (2.35)$$

где $B_n^{(m-1)}$ – некоторое, возможно пустое, подмножество из множества $\{0, 1, \dots, m-1\}$, зависящее лишь от m и n . (Если $m = 0$, то $n = 2$. В этом случае считаем, что $B_2^{(-1)} = \emptyset$.) В частности, $b_n \geq 0$ для любого $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия леммы для любого $m \geq 0$

$$\prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)) = \sum_{n=1}^{2^{m+1}} b_n w_n(t). \quad (2.36)$$

Отсюда при $m = 0$ имеем

$$1 + \alpha_0 r_0(t) = b_1 w_1(t) + b_2 w_2(t). \quad (2.37)$$

Поскольку $w_1(t) \equiv 1$ и $w_2(t) = r_0(t)$, то из (2.37) имеем

$$b_1 = 1 \quad \text{и} \quad b_2 = \alpha_0, \quad (2.38)$$

т.е. при $m = 0$ соотношение (2.35) выполняется.

Для $m \geq 1$ лемму докажем методом индукции. Из (2.36) имеем

$$\sum_{n=2^{m+1}+1}^{2^{m+1}} b_n w_n(t) = \alpha_m r_m(t) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j r_j(t)). \quad (2.39)$$

Пусть $m = 1$. Тогда из (2.39) имеем

$$b_3 w_3(t) + b_4 w_4(t) = \alpha_1 r_1(t) (1 + \alpha_0 r_0(t)) = \alpha_1 w_3(t) + \alpha_1 \alpha_0 w_4(t).$$

Поэтому $b_3 = \alpha_1$ и $b_4 = \alpha_1 \alpha_0$, т.е. при $m = 1$ соотношение (2.35) выполняется.

Допустим, что лемма справедлива при $m \leq k-1$, и докажем ее для $m = k$.

Из (2.39) при $m = k$ получаем

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} b_n w_n(t) = \alpha_k r_k(t) \sum_{n=1}^{2^k} b_n w_n(t). \quad (2.40)$$

Если $n \in \Omega_k$, то

$$n = 2^k + q, \quad \text{где} \quad 1 \leq q \leq 2^k.$$

В силу определения системы Уолша имеем

$$w_n(t) = r_k(t) w_q(t). \quad (2.41)$$

Из (2.40) и (2.41) ясно, что

$$b_n = \alpha_k b_q. \quad (2.42)$$

Поскольку $1 \leq q \leq 2^k$, то либо $q = 1$, либо $q \in \Omega_i$ для некоторого i , $0 \leq i \leq k-1$. Поэтому, если $q = 1$, то, так как $b_1 = 1$ (см. (2.38)), из (2.42) имеем

$$b_n = \alpha_k. \quad (2.43)$$

Если же $q \in \Omega_i$ для некоторого i , $0 \leq i \leq k-1$, то в силу предположения индукции имеем

$$b_q = \alpha_i \prod_{j \in B_q^{(i-1)}} \alpha_j, \quad (2.44)$$

где $B_q^{(i-1)}$ – некоторое, возможно пустое, подмножество из $\{0, 1, \dots, i-1\}$.

Из (2.42) и (2.44) следует, что

$$b_n = \alpha_k \alpha_i \prod_{j \in B_q^{(i-1)}} \alpha_j. \quad (2.45)$$

Поскольку i – некоторое число от нуля до $k-1$, то очевидно, что соотношение (2.45) можно записать в виде

$$b_n = \alpha_k \prod_{j \in B_n^{(k-1)}} \alpha_j, \quad (2.46)$$

где $B_n^{(k-1)}$ – некоторое подмножество из $\{0, 1, \dots, k-1\}$.

Из (2.38), (2.43) и (2.46) следует справедливость соотношения (2.35).

Лемма 2 доказана.

Для $n = 2^m + k$, где $1 \leq k \leq 2^m$, обозначим

$$\text{supp } \chi_n = \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m} \right).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 3. Пусть $0 \leq \alpha_j < 1$ при $j \geq 0$ и ряд (2.8) представляет произведение (2.5). Тогда $c_1 = 1$, $c_2 = \alpha_0$ и для любого $n \in \Omega_m$ ($m = 1, 2, \dots$)

$$c_n = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j r_j(t)), \quad \text{где } t \in \text{supp } \chi_n. \quad (2.47)$$

В частности,

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n = c_{2^m+1} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j), \quad (2.48)$$

$$\min_{n \in \Omega_m} c_n = c_{2^m} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 - \alpha_j) \quad (2.49)$$

и $c_n \geq 0$ для любого $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия леммы для любого $m \geq 0$ имеем

$$\prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)) = \sum_{n=1}^{2^{m+1}} c_n \chi_n(t). \quad (2.50)$$

При $m = 0$ из (2.50) получаем

$$1 + \alpha_0 r_0(t) = c_1 \chi_1(t) + c_2 \chi_2(t). \quad (2.51)$$

Поскольку $\chi_1(t) \equiv 1$ и $\chi_2(t) = r_0(t)$, то из (2.51) следует

$$c_1 = 1 \quad \text{и} \quad c_2 = \alpha_0. \quad (2.52)$$

Далее, для любого $m \geq 1$ из (2.50) следует, что

$$\sum_{n=2^{m+1}}^{2^{m+1}} c_n \chi_n(t) = \alpha_m r_m(t) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j r_j(t)). \quad (2.53)$$

Из определения систем Хаара и Радемахера имеем

$$r_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{n \in \Omega_m} \chi_n(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

Из (2.53) и (2.54) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^{m+1}}^{2^{m+1}} c_n \chi_n(t) &= \left(\frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j r_j(t)) \right) \chi_{2^{m+1}}(t) \\ &+ \left(\frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j r_j(t)) \right) \chi_{2^{m+2}}(t) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j r_j(t)) \right) \chi_{2^{m+1}}(t). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ясно, что если $t \in \text{supp } \chi_{2^{m+k}}$, где $1 \leq k \leq 2^m$, то для любого фиксированного j , $0 \leq j \leq m-1$,

$$r_j(t) = \text{const},$$

поэтому при $t \in \text{supp } \chi_{2^{m+k}}$, $1 \leq k \leq 2^m$, имеем

$$\prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j r_j(t)) = \text{const}. \quad (2.56)$$

Из (2.55) и (2.56) следует, что справедливо (2.47).

При $t \in \text{supp } \chi_{2^m+1}$ имеем

$$r_j(t) = 1, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad (2.57)$$

при $t \in \text{supp } \chi_{2^{m+1}}$ имеем

$$r_j(t) = -1, \quad 0 \leq j \leq m-1. \quad (2.58)$$

Поэтому, так как $0 \leq \alpha_j < 1$, из (2.55) и (2.57) имеем

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n = c_{2^m+1} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j),$$

а из (2.55) и (2.58) следует, что

$$\min_{n \in \Omega_m} c_n = c_{2^{m+1}} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 - \alpha_j).$$

Лемма 3 доказана.

В дальнейшем, при $m = 0$ будем считать, что

$$\prod_{j=0}^{m-1} \alpha_j = 1.$$

ЛЕММА 4. а) Если тригонометрический ряд (2.2) представляет произведение (2.1), то для любого $m \geq 0$

$$\sum_{n \in \Omega_m} a_n = \lambda \alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \lambda \alpha_j). \quad (2.59)$$

б) Если ряд (2.6) представляет произведение (2.5), то для любого $m \geq 0$

$$\sum_{n \in \Omega_m} b_n = \alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j). \quad (2.60)$$

в) Если ряд (2.8) представляет произведение (2.5), то для любого $m \geq 0$

$$\sqrt{2^m} c_{2^m+1} = \alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j). \quad (2.61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В равенстве (2.18), взяв $\tau = 0$, получаем (2.59), а в соотношениях (2.39) и (2.53), взяв точку $t \in (0, \frac{1}{2^{m+1}})$, получаем (2.60) и (2.61) соответственно.

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $A_n^{(m-1)}$ и $B_n^{(m-1)}$ – множества из лемм 1 и 2. Тогда для любой последовательности $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$ справедливы следующие соотношения

$$\text{а) } \sum_{n \in \omega_m^1} 2\alpha_m \prod_{j \in A_n^{(m-1)}} \alpha_j = 2\alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\alpha_j), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (2.62)$$

$$\text{б) } \sum_{n \in \Omega_m} \alpha_m \prod_{j \in B_n^{(m-1)}} \alpha_j = \alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2.59) для $\lambda = 2$, из (2.13) и из замечания 1 следует (2.62), а соотношение (2.63) следует из (2.35) и (2.60).

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty \in S$ и ряд (2.8) представляет произведение (2.5). Тогда ряд (2.8) есть нуль-ряд по системе Хаара.

Кроме того, для частичных сумм ряда (2.8) имеем $H_p(t) > 0$ для любого $t \in [0, 1]$ и $p \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ряд (2.6) по системе Уолша представляет произведение (2.5), т.е.

$$\sum_{n=0}^{2^{m+1}} b_n w_n(t) = \prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.64)$$

Поскольку $\{\alpha_j\} \in S$, то в силу теоремы В, в частности, имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^{m+1}} b_n w_n(t) = 0, \quad \text{п.в. } t \in [0, 1]. \quad (2.65)$$

В силу условия леммы, для любого $m \geq 0$

$$H_{2^{m+1}}(t) = \sum_{n=1}^{2^{m+1}} c_n \chi_n(t) = \prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)). \quad (2.66)$$

Из (2.64), (2.66) и (2.65) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H_{2^{m+1}}(t) = 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, 1]. \quad (2.67)$$

Так как для любого $t \in [0, 1]$ и $1 \leq k \leq 2^m$ имеем

$$H_{2^m+k}(t) = \{H_{2^m}(t) \text{ либо } H_{2^{m+1}}(t)\}, \quad (2.68)$$

то из (2.68) и (2.67) следует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H_p(t) = 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, 1],$$

т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t)$ есть нуль-ряд.
 Далее, так как $0 \leq \alpha_j < 1/2$, то

$$\prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)) > 0 \quad \text{для } t \in [0, 1]. \quad (2.69)$$

Из (2.69) и (2.66) следует, что

$$H_{2m+1}(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, 1] \quad \text{и } m \geq 0. \quad (2.70)$$

В силу (2.70) и (2.68) имеем

$$H_p(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, 1] \quad \text{и } p \geq 2, \quad (2.71)$$

а поскольку $c_1 = 1$ (см. лемму 3), то (2.71) выполняется и для $p = 1$.

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. *Для любой последовательности положительных чисел $\{d_m\}_{m=0}^{\infty}$, $d_m \uparrow \infty$, и любой конечной на $[0, +\infty)$ функции Φ , $\Phi(0) = 0$, существует последовательность $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty} \in S$ такая, что*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \right) \right| \leq 1. \quad (2.72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом.

Пусть m_0 — некоторое число, для которого

$$d_{m_0} > 2 \left| \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{9}} \right) \right|,$$

а для любого $k \geq 1$ число m_k определим так

$$m_k > m_{k-1},$$

$$d_{m_k} > 2^{k+1} \left| \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{k+9}} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{j+9}} \right) \right) \right| \quad (2.73)$$

(поскольку $d_m \uparrow \infty$, то ясно, что такие m_k существуют).

Теперь определим последовательность $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$:

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq m_k \text{ при } k \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{k+9}}, & \text{если } j = m_k. \end{cases} \quad (2.74)$$

Из (2.74) ясно, что

- 1) $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 = \infty$,
- 2) $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = 0$,
- 3) $0 \leq \alpha_j < 1/2$ при $j \geq 0$, т. е.

$$\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty} \in S. \quad (2.75)$$

Из (2.74) следует, что при $m \geq 0$

$$\alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m_k \text{ при } k \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{k+9}} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{j+9}}\right), & \text{если } m = m_k. \end{cases} \quad (2.76)$$

Поскольку $\Phi(0) = 0$, то из (2.76) следует, что

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j)\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m_k \text{ при } k \geq 0, \\ \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{k+9}} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{j+9}}\right)\right), & \text{если } m = m_k. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Из (2.77) и (2.73) ясно, что

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \left| \Phi\left(\alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j)\right) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d_{m_k}} \left| \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{k+9}} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{j+9}}\right)\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1. \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

Через S_0 обозначим множество всех последовательностей $\{\alpha_j\}$ из S , для каждой из которых $0 < \alpha_j < 1/2$ при $j \geq 0$.

ЛЕММА 8. Для любой последовательности $\{\tau_m\}$, $\tau_m \geq 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = \infty$, существует последовательность $\{\alpha_j\} \in S_0$ такая, что при $m \geq 1$

$$\alpha_m \leq \sqrt[4]{2} \alpha_{m-1}, \quad (2.78)$$

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{1 + \alpha_j}{1 - \alpha_j} < 2^{(1+\tau_m)/4}. \quad (2.79)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим, что если $0 < \alpha_j < 1/2$ при $j \geq 0$, то

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{1 + \alpha_j}{1 - \alpha_j} < 2^{8 \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.80)$$

Действительно, так как $0 < \alpha_j < 1/2$, то при $m \geq 1$

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{1 + \alpha_j}{1 - \alpha_j} = \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{2\alpha_j}{1 - \alpha_j}\right) < \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 4\alpha_j). \quad (2.81)$$

Поскольку при $t > 0$ $\ln(1+t) < t$, то

$$\prod_{j=0}^{m-1} (1 + 4\alpha_j) = e^{\sum_{j=0}^{m-1} \ln(1+4\alpha_j)} < e^{4 \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j} < 2^{8 \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j}. \quad (2.82)$$

Из (2.81) и (2.82) следует (2.80).

Определим последовательность неотрицательных целых чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$: пусть $m_0 = 0$, а для любого $k \geq 1$ число m_k такое, что $m_k > m_{k-1}$ и

$$\min_{m > m_k} \tau_m \geq k. \quad (2.83)$$

Для любого $k \geq 1$ положим

$$\Delta_k = \{m : m_{k-1} < m \leq m_k\}. \quad (2.84)$$

Ясно, что $m_k \uparrow \infty$, поэтому

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (2.85)$$

Далее, пусть для любого $m \in \Delta_k$

$$\tau'_m = k - 1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.86)$$

Из соотношений (2.83)–(2.86) очевидно, что для любого $m \geq 1$

$$\tau'_m \leq \tau_m. \quad (2.87)$$

Теперь построим последовательность $\{\alpha'_m\}_{m=0}^{\infty}$ такую, что

$$\{\alpha'_m\}_{m=0}^{\infty} \in S_0 \quad (2.88)$$

и для любого $m \geq 1$

$$\alpha'_m \leq \sqrt[4]{2} \alpha'_{m-1} \quad (2.89)$$

и

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha'_j \leq 1 + \tau_m. \quad (2.90)$$

Если $0 \leq m \leq m_1$, то

$$\alpha'_m = \frac{1}{2m_1}. \quad (2.91)$$

Для любого $k \geq 2$

$$\alpha'_{m_k} = \frac{1-q}{2m_1 \sqrt[k]{k}}, \quad \text{где } q = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}. \quad (2.92)$$

Далее, если $m \in \Delta_k$ при $k \geq 2$, то

$$\alpha'_m = \alpha'_{m_k} q^{m_k - m}. \quad (2.93)$$

Таким образом, определена последовательность $\{\alpha'_m\}_{m=0}^\infty$. Покажем, что для этой последовательности выполняются соотношения (2.88), (2.89) и (2.90).

Для любого $m \in \Delta_k$ из (2.93) и (2.92) следует, что

$$0 < \alpha'_m \leq \alpha'_{m_k} = \frac{1-q}{2m_1\sqrt{k}}.$$

Отсюда ясно, что для любого $m \geq 0$

$$0 < \alpha'_m < \frac{1}{2} \quad (2.94)$$

и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha'_m = 0. \quad (2.95)$$

Далее,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\alpha'_m)^2 \geq \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha'_{m_k})^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-q)^2}{4m_1^2 k} = \frac{(1-q)^2}{4m_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \quad (2.96)$$

Соотношения (2.94)–(2.96) означают, что выполняется (2.88).

Покажем, что выполняется (2.89). Если $m-1 \in \Delta_k$ и $m \in \Delta_k$, то из (2.93) следует

$$\alpha'_{m-1} = \alpha'_{m_k} q^{m_k-(m-1)}$$

и

$$\alpha'_m = \alpha'_{m_k} q^{m_k-m}.$$

Отсюда имеем

$$\alpha'_m = \sqrt[4]{2} \alpha'_{m-1}. \quad (2.97)$$

Если $m-1 \in \Delta_k$ и $m \in \Delta_{k+1}$, то $m-1 = m_k$, т.е.

$$\alpha'_{m-1} = \alpha'_{m_k}.$$

Поскольку $m \in \Delta_{k+1}$, то

$$\alpha'_m = \alpha'_{m_{k+1}} q^{m_{k+1}-m} \leq \alpha'_{m_{k+1}} \leq \alpha'_{m_k} = \alpha'_{m-1}. \quad (2.98)$$

Объединяя (2.97) и (2.98) получаем, что при $m \geq 1$

$$\alpha'_m \leq \sqrt[4]{2} \alpha'_{m-1},$$

т.е. (2.89) выполняется.

Покажем теперь, что для любого $m \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha'_j \leq 1 + \tau'_m. \quad (2.99)$$

Пусть $m \in \Delta_k$. Тогда в силу (2.86) $\tau'_m = k - 1$, и поэтому соотношение (2.99) равносильно неравенству

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha'_j \leq k. \quad (2.100)$$

Покажем, что выполняется (2.100).

Пусть $k = 1$. Тогда, поскольку $m \leq m_1$, из (2.91) имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha'_j < \sum_{j=0}^{m_1} \alpha'_j = \sum_{j=0}^{m_1} \frac{1}{2m_1} = \frac{m_1 + 1}{2m_1} \leq 1, \quad (2.101)$$

т.е. при $k = 1$ соотношение (2.100) выполняется.

Если же $k \geq 2$, то так как $m \in \Delta_k$ и $\alpha'_j > 0$ при $j \geq 0$, то имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha'_j < \sum_{j=0}^{m_k} \alpha'_j = \sum_{j=0}^{m_1} \alpha'_j + \sum_{l=2}^k \sum_{j \in \Delta_l} \alpha'_j. \quad (2.102)$$

Для любого l , $2 \leq l \leq k$, из (2.93) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Delta_l} \alpha'_j &= \alpha'_{m_l} \sum_{j \in \Delta_l} q^{m_l - j} \leq \alpha'_{m_l} (1 + q + q^2 + \dots) \\ &= \alpha'_{m_l} \frac{1}{1 - q} = \frac{1 - q}{2m_1 \sqrt{l}} \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{2m_1 \sqrt{l}} < 1. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Из (2.102), (2.101) и (2.103) следует, что если $m \in \Delta_k$, то

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha'_j \leq k.$$

Это неравенство означает, что выполняется (2.99).

Из (2.99) и (2.87) получаем, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha'_j \leq 1 + \tau_m.$$

Справедливость соотношения (2.90) показана.

Пусть для любого $m \geq 0$

$$\alpha_m = \frac{\alpha'_m}{32}. \quad (2.104)$$

Покажем, что последовательность $\{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет всем требованиям леммы 8.

Действительно, так как $\{\alpha'_m\}_{m=0}^{\infty} \in S_0$, то из (2.104) следует, что $\{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty} \in S_0$. Из (2.89) и (2.104) следует, что при $m \geq 1$

$$\alpha_m \leq \sqrt[4]{2} \alpha_{m-1}.$$

Далее, из (2.90) и (2.104) при $m \geq 1$ имеем

$$32 \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \leq 1 + \tau_m.$$

Отсюда

$$8 \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \leq \frac{1 + \tau_m}{4}. \quad (2.105)$$

Из (2.80) и (2.105) получаем, что

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{1 + \alpha_j}{1 - \alpha_j} < 2^{(1+\tau_m)/4}.$$

Лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Для любой последовательности $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$, $d_m \geq 1$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty$, существует последовательность $\{\alpha_j\} \in S$ такая, что при $m \geq 1$

- а) $\prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j) \leq d_m$,
- б) $\alpha_m^2 \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\alpha_j^2) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m_1 — такое натуральное число, что

$$\text{если } m > m_1, \text{ то } d_m > e^2.$$

Далее, для любого $k \geq 2$ число m_k определим так:

$$m_k > m_{k-1} \text{ и если } m > m_k, \text{ то } d_m > e^{k+1}. \quad (2.106)$$

Последовательность $\{\alpha_j\}$ построим следующим образом:

$$\text{если } 0 \leq j \leq m_1, \text{ то } \alpha_j = 0.$$

Далее, если $j > m_1$, то

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq m_k, k = 2, 3, \dots, \\ \frac{1}{3\sqrt{k}}, & \text{если } j = m_k. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty} \in S$. Если $0 \leq m \leq m_1$, то

$$\prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j) = 1,$$

и пункт а) выполняется.

Пусть $m > m_1$. Тогда $m_{k-1} < m \leq m_k$ для некоторого $k \geq 2$. Поэтому

$$\prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j) \leq \prod_{j=0}^{m_k} (1 + 2\alpha_j) = \prod_{j=2}^k \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{j}}\right). \quad (2.107)$$

Поскольку $1 + t \leq e^t$ при $t \geq 0$, то

$$\prod_{j=2}^k \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{j}}\right) \leq e^{\sum_{j=2}^k \frac{2}{3\sqrt{j}}} < e^k. \quad (2.108)$$

Далее, поскольку $m > m_{k-1}$, то из (2.106) имеем

$$e^k < d_m. \quad (2.109)$$

Из (2.107), (2.108) и (2.109) получаем, что при $m \geq 1$

$$\prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j) < d_m,$$

и пункт а) доказан.

Если $1 \leq m \leq m_1$, то из определения $\{\alpha_j\}$ следует, что

$$\alpha_m^2 \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\alpha_j^2) = 0,$$

и пункт б) выполняется.

Если же $m_{k-1} < m \leq m_k$ для $k \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \alpha_m^2 \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\alpha_j^2) &\leq \alpha_{m_k}^2 \prod_{j=0}^{m_k} (1 + 2\alpha_j^2) = \frac{1}{9k} \prod_{j=2}^k \left(1 + \frac{2}{9j}\right) \\ &\leq \frac{1}{9k} e^{\frac{2}{9} \sum_{j=2}^k \frac{1}{j}} \leq \frac{1}{9k} e^{\frac{2}{9} \ln k} \leq 1. \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана.

Если $P(t)$ – полином по системе $\{\cos nt\}_{n=0}^\infty$, то

$$\|P\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} |P(t)| dt \quad \text{и} \quad \|P\|_c = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |P(t)|,$$

а если $P(t)$ – полином по системе Уолша или по системе Хаара, то

$$\|P\|_{L_1} = \int_0^1 |P(t)| dt \quad \text{и} \quad \|P\|_c = \sup_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|.$$

Пусть $\{d_m\}$ – любая последовательность чисел с

$$d_m \geq 1 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty.$$

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 10. *Существует нуль-ряд*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau \quad (2.2)$$

с частичными суммами $S_m(\tau)$ такой, что при $m \geq 1$

- а) $\|S_m\|_c \leq d_m$,
- б) $\|S_m\|_{L_1} \leq 16$.

ЛЕММА 11. *Существует нуль-ряд по системе Уолша*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t) \quad (2.6)$$

с частичными суммами $W_m(t)$ такой, что при $m \geq 1$

- а) $\|W_m\|_c \leq d_m$,
- б) $\|W_m\|_{L_1} \leq 2$.

ЛЕММА 12. *Существует нуль-ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t) \quad (2.8)$$

с частичными суммами $H_m(t)$ такой, что при $m \geq 1$

- а) $\|H_m\|_c \leq d_m$,
- б) $\|H_m\|_{L_1} = 1$.

Доказательства леммы 10 и леммы 11 фактически не отличаются. Поэтому мы докажем лемму 10 и лемму 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Пусть $\omega_0 = \{1\}$ и для $m \geq 1$ $\omega_m = \{n : p_{m-1} < n \leq p_m\}$, где $p_m = \frac{4^{m+1}-1}{3}$. Для любого $m \geq 1$ обозначим

$$q_m = \min_{k \in \omega_m} d_k. \quad (2.110)$$

Очевидно, что $q_m \geq 1$ при $m \geq 1$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q_m = \infty.$$

Поэтому в силу леммы 9 существует последовательность $\{\alpha_j\} \in S$ такая, что при $m \geq 1$

$$\prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j) \leq q_m \quad (2.111)$$

и

$$\alpha_m^2 \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\alpha_j^2) \leq 1. \quad (2.112)$$

Пусть для этой последовательности $\{\alpha_j\}$ ряд (2.2) представляет произведение (2.1) с $\lambda = 2$, т.е. для любого $m \geq 0$

$$\prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j \cos 4^j \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{p_m} a_n \cos n\tau. \quad (2.113)$$

Тогда в силу теоремы А ряд (2.2) есть нуль-ряд.

Пусть $k \geq 1$ — любое натуральное число. Тогда $k \in \omega_m$ для некоторого $m \geq 0$. В силу леммы 1 $a_n \geq 0$ при $n \geq 1$, и поэтому

$$\|S_k\|_c = S_k(0) = 1 + \sum_{n=1}^k a_n \leq 1 + \sum_{n=1}^{p_m} a_n. \quad (2.114)$$

В (2.113), взяв $\tau = 0$, получаем

$$\prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j) = 1 + \sum_{n=1}^{p_m} a_n. \quad (2.115)$$

Из (2.114) и (2.115) получаем, что

$$\|S_k\|_c \leq \prod_{j=0}^m (1 + 2\alpha_j). \quad (2.116)$$

Из (2.116) и (2.111) следует, что

$$\|S_k\|_c \leq q_m. \quad (2.117)$$

Из (2.110) очевидно, что для любого $k \in \omega_m$

$$q_m \leq d_k. \quad (2.118)$$

Из (2.117) и (2.118) следует, что при $k \geq 1$ $\|S_k\|_c \leq d_k$.

Пункт а) доказан.

Далее, пусть $k \in \omega_m$ для некоторого $m \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|S_k\|_{L_1} &= \|S_{p_{m-1}} + (S_k - S_{p_{m-1}})\|_{L_1} \\ &\leq \|S_{p_{m-1}}\|_{L_1} + \|S_k - S_{p_{m-1}}\|_{L_1} \\ &\leq \|S_{p_{m-1}}\|_{L_1} + \sqrt{2\pi} \|S_k - S_{p_{m-1}}\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Из соотношения (2.113) очевидно, что при $m \geq 1$ $S_{p_{m-1}}(\tau) \geq 0$ для любого $\tau \in [0, 2\pi]$. Поэтому для $m \geq 1$

$$\|S_{p_{m-1}}\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} S_{p_{m-1}}(\tau) d\tau = 2\pi. \quad (2.120)$$

Ясно, что

$$\|S_k - S_{p_{m-1}}\|_{L_2} \leq \left(\pi \sum_{n \in \omega_m} a_n^2 \right)^{1/2}. \quad (2.121)$$

В силу леммы 1 и замечания 1 имеем

$$\sum_{n \in \omega_m} a_n^2 = \sum_{n \in \omega_m^1} a_n^2 = \sum_{n \in \omega_m^1} 4\alpha_m^2 \prod_{j \in A_n^{(m-1)}} \alpha_j^2. \quad (2.122)$$

Используя лемму 5, получаем, что при $m \geq 1$

$$\sum_{n \in \omega_m^1} 4\alpha_m^2 \prod_{j \in A_n^{(m-1)}} \alpha_j^2 = 4\alpha_m^2 \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\alpha_j^2). \quad (2.123)$$

Из (2.121), (2.122) и (2.123) следует, что при $m \geq 1$

$$\|S_k - S_{p_{m-1}}\|_{L_2} \leq \left(\pi 4\alpha_m^2 \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\alpha_j^2) \right)^{1/2}. \quad (2.124)$$

Из (2.112) и (2.124) следует, что

$$\|S_k - S_{p_{m-1}}\|_{L_2} \leq 2\sqrt{\pi}. \quad (2.125)$$

Из (2.119), (2.120) и (2.125) получаем, что

$$\|S_k\|_{L_1} \leq 2\pi + 2\sqrt{2}\pi < 16.$$

Лемма 10 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 12. Для любого $m \geq 0$ обозначим

$$q_m = \min_{2^m < k \leq 2^{m+1}} d_k. \quad (2.126)$$

Очевидно, что $q_m \geq 1$ при $m \geq 1$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q_m = \infty.$$

Поэтому в силу леммы 9 существует последовательность $\{\alpha_j\} \in S$ такая, что при $m \geq 1$

$$\prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j) \leq q_m. \quad (2.127)$$

Пусть для этой последовательности $\{\alpha_j\}$, ряд (2.8) представляет произведение (2.5), т.е. при $m \geq 0$

$$\prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j r_j(t)) = \sum_{n=1}^{2^{m+1}} c_n \chi_n(t). \quad (2.128)$$

Тогда в силу леммы 6 ряд (2.8) есть нуль-ряд.

Пусть $k \geq 2$ — любое натуральное число. Тогда $2^m < k \leq 2^{m+1}$ для некоторого $m \geq 0$. Поэтому для любого $t \in [0, 1]$

$$H_k(t) = \{H_{2^m}(t) \text{ либо } H_{2^{m+1}}(t)\}. \quad (2.129)$$

Поскольку $\alpha_j \geq 0$ при $j \geq 0$, то из (2.128) следует, что

$$\|H_{2^{m+1}}\|_c = \prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j). \quad (2.130)$$

Отсюда ясно, что

$$\|H_{2^m}\|_c \leq \|H_{2^{m+1}}\|_c. \quad (2.131)$$

Из (2.129), (2.130) и (2.131) следует, что

$$\|H_k\|_c \leq \|H_{2^{m+1}}\|_c = \prod_{j=0}^m (1 + \alpha_j). \quad (2.132)$$

Из (2.127) и (2.132) получаем

$$\|H_k\|_c \leq q_m. \quad (2.133)$$

В силу (2.126) очевидно, что для любого k при $2^m < k \leq 2^{m+1}$

$$q_m \leq d_k. \quad (2.134)$$

Из (2.133) и (2.134) следует, что при $k \geq 2$

$$\|H_k\|_c \leq d_k. \quad (2.135)$$

В случае $k = 1$ имеем: $H_1(t) = c_1 = 1$ (см. лемму 3) т.е. (2.135) выполняется и при $k = 1$.

Пункт а) доказан.

Далее, в силу леммы 6 для любого $k \geq 1$

$$H_k(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, 1],$$

и поскольку $c_1 = 1$, то

$$\|H_k\|_{L_1} = \int_0^1 H_k(t) dt = 1.$$

Лемма 12 доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $\{G_m(u)\}$ такая последовательность конечных на $[0, +\infty)$ функций, что

$$\sup_{u \geq 0} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} G_m(u) < \infty.$$

Тогда существуют число $M > 0$ и последовательность чисел $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что для любого $m \geq 1$

$$d_m \geq 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty \quad \text{и} \quad G_m(d_m) \leq M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия

$$\sup_{u \geq 0} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} G_m(u) = N < \infty.$$

Ясно, что для любого $u \geq 0$

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} G_m(u) \leq N.$$

Отсюда следует, что существует число m_1 такое, что если $m \geq m_1$, то $G_m(1) \leq N + 1$. Для любого $k \geq 2$ число m_k определим так: $m_k > m_{k-1}$ и если $m > m_k$, то

$$G_m(k) \leq N + 1. \quad (2.136)$$

Ясно, что $m_k \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Последовательность $\{d_m\}$ определим следующим образом

$$d_m = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq m \leq m_1, \\ k, & \text{если } m_k \leq m < m_{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.137)$$

Поскольку $m_k \uparrow \infty$, то числа d_m определены для любого $m \geq 1$ и очевидно, что $d_m \geq 1$ и $d_m \uparrow \infty$.

Покажем, что для любого $m \geq m_1$

$$G_m(d_m) \leq N + 1. \quad (2.138)$$

Действительно, если $m \geq m_1$, то существует число $k \geq 1$ такое, что $m_k \leq m < m_{k+1}$.

В этом случае, по определению (см. (2.137) и (2.136)),

$$d_m = k \quad \text{и} \quad G_m(k) \leq N + 1.$$

Отсюда следует справедливость соотношения (2.138). Пусть

$$M = \max \left\{ \max_{1 \leq m \leq m_1} G_m(1); N + 1 \right\}.$$

Тогда, поскольку $d_m = 1$ при $1 \leq m \leq m_1$, и при $m \geq m_1$ выполняется (2.138), получаем, что для любого $m \geq 1$

$$G_m(d_m) \leq M.$$

Лемма 13 доказана.

§3. Доказательства теорем и их следствий

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2 и 3. В силу леммы 7 для последовательности положительных чисел $\{d_m\}$ с $d_m \uparrow \infty$ и любой конечной на $[0, +\infty)$ функции $\Phi(u)$ с $\Phi(0) = 0$ существует последовательность $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty \in S$ такая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \right) \right| \leq 1. \quad (3.1)$$

Пусть для этой последовательности $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$ ряд (2.2) представляет произведение (2.1) с $\lambda = 1$, а ряды (2.6) и (2.8) представляют произведение (2.5). Тогда в силу теоремы А, теоремы В и леммы 6 для рядов (2.2), (2.6) и (2.8) имеем

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau = 0 \quad \text{для п.в. } \tau \in [0, 2\pi], \quad (3.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t) = 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, 1], \quad (3.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t) = 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Кроме того, в силу лемм 1, 2 и 3 для любого $n \geq 1$

$$a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0, \quad c_n \geq 0. \quad (3.5)$$

Из леммы 4 (см. (2.59), (2.60)) и леммы 3 (см. (2.48)) для любого $m \geq 0$ получаем

$$\sum_{n \in \omega_m} a_n = \sum_{n \in \Omega_m} b_n = \sqrt{2^m} \max_{n \in \Omega_m} c_n = \alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j).$$

Отсюда в силу (3.1) ясно, что для любого $N \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\sum_{n \in \omega_m} a_n \right) \right| &= \sum_{m=0}^N \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\sum_{n \in \Omega_m} b_n \right) \right| \\ &= \sum_{m=0}^N \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\sqrt{2^m} \max_{n \in \Omega_m} c_n \right) \right| \\ &= \sum_{m=0}^N \frac{1}{d_m} \left| \Phi \left(\alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \right) \right| \leq 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из соотношений (3.2)–(3.6) следует справедливость теорем 1, 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 4 И 5. Определим последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом.

Пусть m_0 – такое натуральное число, что

$$d_{m_0} > 2 \left[\Psi \left(\frac{\delta}{\sqrt{9}} \right) + \Psi \left(\frac{2\delta}{\sqrt{9}} \right) \right],$$

а для любого $k \geq 1$, число m_k определим так: $m_k > m_{k-1}$ и

$$d_{m_k} > 2^{k+1} \left[\Psi \left(\frac{\delta}{\sqrt{k+9}} \right) + \Psi \left(\frac{2\delta}{\sqrt{k+9}} \right) \right] \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + 2\Psi \left(\frac{\delta}{\sqrt{j+9}} \right) \right).$$

Отсюда, поскольку $\Psi(u) \geq 0$ при $u \in [0, \delta)$, то для $k \geq 0$ имеем

$$d_{m_k} > 2^{k+1} \Psi \left(\frac{2\delta}{\sqrt{k+9}} \right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + 2\Psi \left(\frac{\delta}{\sqrt{j+9}} \right) \right), \quad (3.7)$$

$$d_{m_k} > 2^{k+1} \Psi \left(\frac{\delta}{\sqrt{k+9}} \right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \Psi \left(\frac{\delta}{\sqrt{j+9}} \right) \right). \quad (3.7')$$

Теперь определим последовательность $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$:

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq m_k \text{ при } k \geq 0, \\ \frac{\delta}{\sqrt{k+9}}, & \text{если } j = m_k. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\{\alpha_j\} \in S$ и для любого $j \geq 0$

$$0 \leq \alpha_j < \frac{\delta}{3}. \quad (3.8)$$

Пусть для этой последовательности $\{\alpha_j\}$ ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau \quad (2.2)$$

представляет произведение

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + 2\alpha_j \cos 4^j \tau),$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t) \quad (2.6)$$

представляет произведение

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + \alpha_j r_j(t)).$$

Тогда в силу теорем А и В следует, что ряды (2.2) и (2.6) являются нуль-рядами. В силу леммы 1 для любого $n \in \omega_m$ при $m \geq 0$

$$a_n = 0 \quad \text{или} \quad a_n = 2\alpha_m \prod_{j \in A_n^{(m-1)}} \alpha_j, \quad (3.9)$$

а в силу леммы 2 для любого $n \in \Omega_m$ при $m \geq 0$

$$b_n = \alpha_m \prod_{j \in B_n^{(m-1)}} \alpha_j. \quad (3.9')$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что при $n \geq 1$

$$0 \leq a_n < \delta,$$

а из (3.8) и (3.9') получаем, что при $n \geq 2$

$$0 \leq b_n < \delta.$$

Используя свойство функций Ψ , из (3.9) получим, что для любого $n \in \omega_m$, где $m \geq 0$,

$$\Psi(a_n) = 0 \quad \text{или} \quad \Psi(a_n) \leq \Psi(2\alpha_m) \prod_{j \in A_n^{(m-1)}} \Psi(\alpha_j), \quad (3.10)$$

а из (3.9') получаем, что для любого $n \in \Omega_m$, где $m \geq 0$,

$$\Psi(b_n) \leq \Psi(\alpha_m) \prod_{j \in B_n^{(m-1)}} \Psi(\alpha_j). \quad (3.10')$$

Из (3.10), из пункта а) леммы 5 и замечания 1 получаем, что при $m \geq 0$

$$\sum_{n \in \omega_m} \Psi(a_n) \leq \sum_{n \in \omega_m^1} \Psi(2\alpha_m) \prod_{j \in A_n^{(m-1)}} \Psi(\alpha_j) = \Psi(2\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\Psi(\alpha_j)), \quad (3.11)$$

а из (3.10') и из пункта б) леммы 5 следует, что при $m \geq 0$

$$\sum_{n \in \Omega_m} \Psi(b_n) \leq \sum_{n \in \Omega_m} \Psi(\alpha_m) \prod_{j \in B_n^{(m-1)}} \Psi(\alpha_j) = \Psi(\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \Psi(\alpha_j)). \quad (3.11')$$

Из определения последовательности $\{\alpha_j\}$, поскольку $\Psi(0) = 0$, следует, что при $m \geq 0$

$$\begin{aligned} & \Psi(2\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\Psi(\alpha_j)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m_k \text{ при } k \geq 0, \\ \Psi\left(\frac{2\delta}{\sqrt{k+9}}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + 2\Psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{j+9}}\right)\right), & \text{если } m = m_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & \Psi(\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \Psi(\alpha_j)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m_k \text{ при } k \geq 0, \\ \Psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{k+9}}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \Psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{j+9}}\right)\right), & \text{если } m = m_k. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12')$$

Из (3.12) и (3.7) получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \Psi(2\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + 2\Psi(\alpha_j)) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d_{m_k}} \Psi\left(\frac{2\delta}{\sqrt{k+9}}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + 2\Psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{j+9}}\right)\right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.12') и (3.7') следует

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \Psi(\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \Psi(\alpha_j)) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{d_{m_k}} \Psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{k+9}}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \Psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{j+9}}\right)\right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.
 \end{aligned} \tag{3.13'}$$

Из (3.11) и (3.13) следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \sum_{n \in \omega_m} \Psi(a_n) \leq 1, \tag{3.14}$$

а из (3.11') и (3.13') имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{d_m} \sum_{n \in \Omega_m} \Psi(b_n) \leq 1. \tag{3.14'}$$

Поскольку $d_m \uparrow \infty$, то из (3.14) и (3.14') следует, что для любого $N \geq 1$

$$\frac{1}{d_N} \sum_{m=0}^N \sum_{n \in \omega_m} \Psi(a_n) \leq \sum_{m=0}^N \frac{1}{d_m} \sum_{n \in \omega_m} \Psi(a_n) \leq 1, \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{d_N} \sum_{m=0}^N \sum_{n \in \Omega_m} \Psi(b_n) \leq \sum_{m=0}^N \frac{1}{d_m} \sum_{n \in \Omega_m} \Psi(b_n) \leq 1. \tag{3.15'}$$

Из (3.15) и (3.15') очевидно, что для любого $N \geq 1$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^N \Psi(a_m) \leq d_N, \\
 & \sum_{m=2}^N \Psi(b_m) \leq d_N, \quad N \geq 2.
 \end{aligned}$$

Теоремы 4 и 5 доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. В силу леммы 13 существуют число $M > 0$ и последовательность чисел $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что при $m \geq 1$

$$d_m \geq 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty$$

и

$$G_m(d_m) \leq M.$$

Для этой последовательности $\{d_m\}$ в силу леммы 10 существует нуль-ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau$$

с частичными суммами $S_m(\tau)$ такой, что при $m \geq 1$

$$\sup_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |S_m(\tau)| \leq d_m,$$

$$\int_0^{2\pi} |S_m(\tau)| d\tau \leq 16.$$

Отсюда, поскольку $G_m(u)$ неубывающая функция для любого $m \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |S_m(\tau)| G_m(|S_m(\tau)|) d\tau &\leq \int_0^{2\pi} |S_m(\tau)| G_m(d_m) d\tau \\ &\leq M \int_0^{2\pi} |S_m(\tau)| d\tau \leq 16M, \end{aligned}$$

т.е. теорема справедлива для тригонометрических нуль-рядов.

Точно так же, с помощью леммы 11 вместо леммы 10, теорема доказывается для нуль-рядов по системе Уолша, а применяя лемму 12 вместо леммы 10, доказываем справедливость теоремы и для нуль-рядов по системе Хаара. Теорема 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть для любого $m \geq 1$

$$G_m(u) = [G(u)]^{\varepsilon_m}.$$

Тогда из условия теоремы очевидно, что для любого $m \geq 1$

- 1) $0 \leq G_m(u) < \infty$ при $u \in [0, +\infty)$,
- 2) если $u_1 < u_2$, то $G_m(u_1) \leq G_m(u_2)$.

Далее, ясно, что для любого фиксированного $u \in [0, +\infty)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} [G(u)]^{\varepsilon_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } G(u) = 0, \\ 1, & \text{если } G(u) > 0, \end{cases}$$

и поэтому

$$\sup_{u \geq 0} \lim_{m \rightarrow \infty} G_m(u) \leq 1,$$

т.е. последовательность $\{G_m(u)\}$ удовлетворяет требованиям теоремы 6. Отсюда и следует справедливость теоремы 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Поскольку $l_m \geq 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = \infty$, то в силу леммы 8 существует последовательность $\{\alpha_j\} \in S_0$ (т.е. $\{\alpha_j\} \in S$ и $\alpha_j > 0$ при $j \geq 0$) такая, что при $m \geq 1$

$$\alpha_m \leq \sqrt[4]{2} \alpha_{m-1}, \quad (3.16)$$

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{1 + \alpha_j}{1 - \alpha_j} \leq 2^{(1+l_m)/4}. \quad (3.17)$$

Пусть для этой последовательности $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t) \quad (2.8)$$

представляет произведение (2.5). Тогда, в силу леммы 6, ряд (2.8) есть нуль-ряд, а из леммы 3 (см. (2.48) и (2.49)) следует, что $c_n > 0$ при $n \geq 1$ (поскольку $0 < \alpha_j < \frac{1}{2}$ при $j \geq 0$) и

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j), \quad (3.18)$$

$$\min_{n \in \Omega_{m-l_m}} c_n = \frac{\alpha_{m-l_m}}{\sqrt{2^{m-l_m}}} \prod_{j=0}^{m-l_m-1} (1 - \alpha_j). \quad (3.19)$$

Ясно (см. (3.17)), что для любого $m \geq 1$

$$\prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \leq \sqrt[4]{2} 2^{l_m/4} \prod_{j=0}^{m-1} (1 - \alpha_j),$$

и поскольку $l_m \geq 0$, то тем более

$$\prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \leq \sqrt[4]{2} 2^{l_m/4} \prod_{j=0}^{m-l_m-1} (1 - \alpha_j). \quad (3.20)$$

Из (3.16) следует, что для любого $m \geq 0$

$$\alpha_m \leq 2^{l_m/4} \alpha_{m-l_m},$$

и поэтому

$$2^{-m/2} \alpha_m \leq 2^{-m/2+l_m/4} \alpha_{m-l_m}. \quad (3.21)$$

Из (3.20) и (3.21) для любого $m \geq 1$ получаем

$$2^{-m/2} \alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \leq \sqrt[4]{2} 2^{(-m+l_m)/2} \alpha_{m-l_m} \prod_{j=0}^{m-l_m-1} (1 - \alpha_j),$$

т.е. (см. (3.18) и (3.19)) для любого $m \geq 1$

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n \leq \sqrt[4]{2} \min_{n \in \Omega_{m-l_m}} c_n$$

и $c_n > 0$ при $n \geq 1$.

Теорема 8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Положим $\tau_m = 4 \log_2 d_m$. Поскольку $d_m \geq 1$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = \infty$, то $\tau_m \geq 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = \infty$. Поэтому в силу леммы 8 существует последовательность $\{\alpha_j\} \in S_0$ такая, что при $m \geq 1$

$$\alpha_m \leq \sqrt[4]{2} \alpha_{m-1}, \quad (3.22)$$

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{1 + \alpha_j}{1 - \alpha_j} \leq 2^{(1+\tau_m)/4} = \sqrt[4]{2} d_m. \quad (3.23)$$

Пусть для этой последовательности $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(t) \quad (2.8)$$

представляет произведение (2.5). Тогда в силу леммы 6 ряд (2.8) есть нуль-ряд, а из леммы 3 следует, что $c_n > 0$ при $n \geq 1$, а для любого $m \geq 2$

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \quad (3.24)$$

и

$$\min_{n \in \Omega_{m-1}} c_n = \frac{\alpha_{m-1}}{\sqrt{2^{m-1}}} \prod_{j=0}^{m-2} (1 - \alpha_j). \quad (3.25)$$

Из (3.22) при $m \geq 1$ имеем

$$2^{-m/2} \alpha_m \leq 2^{1/4-m/2} \alpha_{m-1}, \quad (3.26)$$

а из (3.23) следует, что для любого $m \geq 2$

$$\prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \leq \sqrt[4]{2} d_m \prod_{j=0}^{m-2} (1 - \alpha_j). \quad (3.27)$$

Из (3.26) и (3.27) для любого $m \geq 2$ следует, что

$$2^{-m/2} \alpha_m \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha_j) \leq d_m 2^{(-m+1)/2} \alpha_{m-1} \prod_{j=0}^{m-2} (1 - \alpha_j),$$

т.е. для любого $m \geq 2$ (см. (3.24) и (3.25))

$$\max_{n \in \Omega_m} c_n \leq d_m \min_{n \in \Omega_{m-1}} c_n, \quad (3.28)$$

и $c_n > 0$ при $n \geq 1$. Остается показать, что (3.28) выполняется и при $m = 1$, т.е.

$$\max_{n \in \Omega_1} c_n \leq d_1 \min_{n \in \Omega_0} c_n. \quad (3.29)$$

Отметим, что $\Omega_0 = \{2\}$ и $\Omega_1 = \{3, 4\}$. В силу леммы 3

$$\min_{n \in \Omega_0} c_n = c_2 = \alpha_0$$

и

$$\max_{n \in \Omega_1} c_n = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(1 + \alpha_0).$$

Ясно, что (3.29) будет выполняться, если покажем, что

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(1 + \alpha_0) < \alpha_0. \quad (3.30)$$

Действительно, из определения последовательности $\{\alpha_j\}$ (см. лемму 8, соотношения (2.91) и (2.104)) имеем

$$\alpha_m = \frac{1}{64m_1}, \quad \text{если } 0 \leq m \leq m_1, \quad \text{а } m_1 \geq 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\alpha_0 = \alpha_1 \leq \frac{1}{64}.$$

Поэтому ясно, что (3.30) выполняется, и тем самым для любого $d_1 \geq 1$ справедливо соотношение (3.29).

Теорема 9 доказана.

Из доказанных теорем вытекают разные следствия. Приведем некоторые следствия теоремы 4.

Пусть $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ — любое действительное число. Положим

$$F_\gamma(u) = \begin{cases} u^\gamma & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u = 0. \end{cases}$$

Ясно, что для любого числа $\delta \in (0, 1)$ имеем: $0 \leq F_\gamma(u) < 1$ при $u \in [0, \delta]$; кроме того, если $\alpha \in [0, \delta]$ и $\beta \in [0, \delta]$, то

$$F_\gamma(\alpha\beta) = F_\gamma(\alpha)F_\gamma(\beta) \quad \text{и} \quad F_\gamma(0) = 0,$$

т.е. функция $F_\gamma(u)$ удовлетворяет требованиям теоремы 4. Поэтому получаем справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ — некоторое число. Тогда для любого числа $\delta \in (0, 1)$ и любой последовательности $\{d_m\}$, $d_m > 0$ и $d_m \uparrow \infty$, существует нуль-ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau \quad (3.31)$$

такой, что $0 \leq a_n < \delta$ при $n \geq 1$ и для каждого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m F_\gamma(a_n) \leq d_m.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Psi(u)$ – любая функция с $\Psi(0) = 0$. Если для некоторого $\delta \in (0, 1)$ функция $\Psi(u)$ ограничена на $[0, \delta)$, то для любой последовательности $\{d_m\}$, $d_m > 0$ и $d_m \uparrow \infty$, существует нуль-ряд (3.31) такой, что $0 \leq a_n < \delta$ при $n \geq 1$ и для каждого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m |\Psi(a_n)| \leq d_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия для некоторых чисел $\delta \in (0, 1)$ и $M > 0$

$$|\Psi(u)| < M \quad \text{при } u \in [0, \delta).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $M \geq 1$. Положим

$$\overline{\Psi}(u) = M \operatorname{sign} u, \quad \text{где } u \in [0, \delta).$$

Ясно, что при $u \in [0, \delta)$

$$|\Psi(u)| \leq \overline{\Psi}(u). \quad (3.32)$$

Кроме того, $\overline{\Psi}(0) = 0$ и для $\alpha \in [0, \delta)$ и $\beta \in [0, \delta)$

$$\overline{\Psi}(\alpha\beta) = M \operatorname{sign} \alpha\beta \leq M \operatorname{sign} \alpha M \operatorname{sign} \beta = \overline{\Psi}(\alpha)\overline{\Psi}(\beta),$$

т.е. $\overline{\Psi}(u)$ удовлетворяет требованиям теоремы 4. Поэтому в силу теоремы 4 существует нуль-ряд (3.31) такой, что $0 \leq a_n < \delta$ при $n \geq 1$ и для любого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m \overline{\Psi}(a_n) \leq d_m. \quad (3.33)$$

Из (3.32) и (3.33) следует справедливость следствия 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любой последовательности $\{d_m\}$, $d_m > 0$ и $d_m \uparrow \infty$, существует нуль-ряд (3.31) такой, что $0 \leq a_n < 1$ при $n \geq 1$ и для каждого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m \operatorname{sign} a_n \leq d_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $\Psi(u) = \operatorname{sign} u$ ограничена и $\Psi(0) = 0$, то из следствия 2 (взяв $\delta \in (0, 1)$) получаем справедливость следствия 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\{q_n\}$ – любая последовательность положительных чисел, а $\{d_m\}$ – любая последовательность с $d_m > 0$ и $d_m \uparrow \infty$. Тогда существует нуль-ряд (3.31) такой, что $a_n \geq 0$ при $n \geq 1$ и для каждого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m a_n^{q_n} \leq d_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 3 существует нуль-ряд (3.31) такой, что $0 \leq a_n < 1$ при $n \geq 1$ и для любого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m \operatorname{sign} a_n \leq d_m. \quad (3.34)$$

Далее, поскольку $q_n > 0$ и $0 \leq a_n < 1$ при $n \geq 1$, то

$$0 \leq a_n^{q_n} \leq \operatorname{sign} a_n. \quad (3.35)$$

Из (3.35) и (3.34) вытекает справедливость следствия 4.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\Psi(u)$ – любая функция с

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \Psi(u) = \Psi(0) = 0. \quad (3.36)$$

Тогда для любой последовательности $\{d_m\}$, $d_m > 0$ и $d_m \uparrow \infty$, существует нуль-ряд (3.31) такой, что $a_n \geq 0$ при $n \geq 1$ и для каждого $m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^m |\Psi(a_n)| \leq d_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (3.36) для некоторого $\delta \in (0, 1)$ выполняется соотношение:

$$|\Psi(u)| < 1, \quad \text{если } 0 \leq u < \delta.$$

Отсюда в силу следствия 2 получаем справедливость следствия 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что из теоремы 5, проведя точно такие же рассуждения, как при доказательстве следствий 1–5, получим справедливость этих следствий и для нуль-рядов по системе Уолша.

Пусть $S_m(t)$ (как и в теоремах 6 и 7) обозначает частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t). \quad (3.37)$$

Приведем некоторые следствия теоремы 7.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если неотрицательная, измеримая на $[0, +\infty)$ функция $G(u)$ удовлетворяет соотношению

$$\sup_{0 \leq u \leq A} G(u) < \infty \quad \text{при } A \geq 0$$

(в частности, если $G(u)$ неотрицательна и непрерывна на $[0, +\infty)$), то для любой последовательности $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m > 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, существует нуль-ряд (3.37) такой, что при $m \geq 1$

$$\int_a^b |S_m(t)| [G(|S_m(t)|)]^{\varepsilon_m} dt \leq M,$$

где M – некоторое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия $G(u) \geq 0$ при $u \geq 0$ и для любого $A > 0$

$$\sup_{0 \leq u \leq A} G(u) < \infty$$

(очевидно, что этому соотношению удовлетворяет любая неотрицательная и непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $G(u)$).

Пусть

$$\overline{G}(0) = G(0) \text{ и } \overline{G}(u) = \sup_{0 \leq \eta \leq u} G(\eta) \text{ при } u > 0.$$

Тогда ясно, что

$$0 \leq \overline{G}(u) < \infty \text{ при } u \geq 0,$$

и если $u_1 \leq u_2$, то $\overline{G}(u_1) \leq \overline{G}(u_2)$, т.е. функция $\overline{G}(u)$ удовлетворяет требованиям теоремы 7. Поэтому в силу теоремы 7 существует нуль-ряд (3.37) такой, что при $m \geq 1$

$$\int_a^b |S_m(t)| [\overline{G}(|S_m(t)|)]^{\varepsilon_m} dt \leq M, \quad (3.38)$$

где M – некоторое положительное число. Из определения функции $\overline{G}(u)$ следует, что $0 \leq G(u) \leq \overline{G}(u)$ для любого $u \geq 0$. Поэтому из (3.38) при $m \geq 1$ имеем

$$\int_a^b |S_m(t)| [G(|S_m(t)|)]^{\varepsilon_m} dt \leq \int_a^b |S_m(t)| [\overline{G}(|S_m(t)|)]^{\varepsilon_m} dt \leq M.$$

Следствие 6 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7. Для любой последовательности $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m \geq 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, существует нуль-ряд (3.37) такой, что при $m \geq 1$

$$\|S_m\|_{L_{1+\varepsilon_m}} \leq M,$$

где M – некоторое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 7, взяв $G(u) = u$ при $u \geq 0$, получаем, что существует нуль-ряд (3.37) такой, что при $m \geq 1$

$$\int_a^b |S_m(t)|^{1+\varepsilon_m} dt \leq M \quad (M > 0 \text{ – некоторое число}). \quad (3.39)$$

Очевидно, что, не ограничивая общности, можем считать, что $M \geq 1$. Поскольку $\varepsilon_m \geq 0$, то из (3.39) получаем, что при $m \geq 1$

$$\|S_m\|_{L_{1+\varepsilon_m}} \leq M^{1/(1+\varepsilon_m)} \leq M.$$

Следствие 7 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ясно, что теоремы 6 и 7 и следствия 6 и 7 являются отрицательным решением более общего вопроса, чем приведенная во введении (см. пункт II) задача Литтлвуда. При этом этот вопрос решается как для тригонометрических рядов, так и для рядов по системам Уолша и Хаара.

Список литературы

1. *Menshoff D. E.* Sur l'unicité du developpement trigonometrique // CR. 1916. V. 163. P. 433–436.
2. *Шнейдер А. А.* О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24 (66). С. 279–300.
3. *Faber G.* Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresb. Deutsch. Math. Verein. 1910. V. 19. P. 104–112.
4. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Скворцов В. А.* О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. №3. С. 703–716.
6. *Петровская М. Б.* О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 773–798.
7. *Ульянов П. Л.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1964. Т. 19. №1. С. 3–69.
8. *Weiss Mary.* On a problem of Littlewood // J. London Math. Soc. 1959. V. 34. №2. P. 217–221.
9. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 925–950.
10. *Ульянов П. А.* Об единственности рядов по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Вест. МГУ. Сер. 1, матем., механика. 1983. №6. С. 64–73.
11. *Zygmund A.* On lacunary trigonometric series // Trans. Amer. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 435–446.
12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965.
13. *Тетунашвили Ш. Т.* О нуль-рядах по системе Хаара // Сообщения АН Грузии. 1991. Т. 142. №2. С. 245–247.

Грузинский технический университет

Поступила в редакцию
28.04.1995