Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Топалов, Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 3, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:58:07

УДК 515.1

П. Топалов

**Вычисление тонкого инварианта
Фоменко–Цишанга для основных
интегрируемых случаев движения твердого тела**

В работе дается общий метод вычисления меток топологического инварианта.

Библиография: 5 названий.

1. Введение

Пусть (M^4, ω) – симплектическое многообразие с симплектической структурой ω . Пусть на нем задана гамильтонова система $\vec{v} = \text{sgrad } H$ с гамильтонианом $H \in C^\infty(M)$, нерезонансная и интегрируемая по Лиувиллю с помощью боттовского интеграла $f \in C^\infty(M)$ (см. [1], [2]). Для тонкой топологической классификации таких систем в работе [1] А. Т. Фоменко и Х. Цишанг открыли тонкий топологический инвариант $W^*(Q^3, v)$, названный меченой молекулой, который классифицирует послойно эквивалентные системы на фиксированных и регулярных изоэнергетических поверхностях $Q_h^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{H(x) = h\}$. Меченая молекула является графом, вершины и ребра которого снабжены некоторыми метками [2].

В работе [2] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев и А. Т. Фоменко доказали теорему реализуемости, т.е. что любая абстрактно заданная “меченая молекула”, снабженная метками, удовлетворяющими естественным условиям, полностью описанным в [2], является инвариантом $W^*(Q_h^3, \vec{v})$ для некоторой интегрируемой, невырожденной гамильтоновой системы $\vec{v}$ на подходящем 3-многообразии Q_h^3 . Мы будем далее пользоваться терминологией и обозначениями работы [2].

Обычно в физике и механике возникает следующая задача. Пусть даны две интегрируемые гамильтоновы системы. Надо узнать эквивалентны ли они в тонком топологическом смысле, т.е. существует ли гомеоморфизм, отображающий слоевание Лиувилля одной системы в слоевание Лиувилля другой. В большинстве случаев практически единственный способ решить эту задачу состоит в вычислении соответствующих инвариантов Фоменко–Цишанга.

Метки инварианта $W^*(Q_h^3, v)$ бывают двух типов. Первый тип это ε - и r -метки. Они являются “локальными” инвариантами и стоят на ребрах молекулы. Второго типа метки, n -метки, имеют “глобальный” характер. Эти числа являются аналогом числа Эйлера для комплексных линейных расслоений над двумерными поверхностями. Для построения молекул и подсчета r -меток уже существует развитая техника (см. [3], [4]).

В настоящей работе найдены явные соотношения между группой гомологий $H_1(Q^3)$ и метками инварианта $W^*(Q^3, v)$. Так как в механике и физике обычно

топология 3-многообразия Q^3 известна изначально (или ее легко можно найти), то таким образом получается весьма эффективный способ нахождения n -меток. В конце работы в качестве применения развитой нами техники мы полностью вычисляем инвариант Фоменко–Пишанга для некоторых важных интегрируемых случаев движения твердого тела и, следовательно, получаем тонкую топологическую классификацию всех этих динамических систем.

2. Основные определения и результаты

Пусть G – молекула (см. [1], [2]). “Семьей” молекулы G называется связный подграф графа G , вершины которого отличны от атома A и на всех его ребрах $r = \infty$. Все остальные ребра в G , которые имеют вершину, принадлежащую семье, должны иметь r -метку, отличную от ∞ .

Иначе можно сказать так: “сотрем” в G все ребра, на которых $r \neq \infty$. Тогда, очевидно, G распадается на связные куски. Все такие куски, которые не содержат атомов A , будут “семьями”.

Из оставшихся кусков рассмотрим те, которые отличны от атомов A . В них существуют ребра, одна из вершин которых есть атом A . Для любого такого куска фиксируем раз и навсегда одно и только одно такое ребро. Множество всех таких ребер будем называть “множеством фиксированных ребер”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ребро молекулы G называется “существенным”, если оно не принадлежит множеству фиксированных ребер и если обе его вершины не принадлежат семье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. “Энергией семьи” $F \subset G$ будем называть число

$$\begin{aligned} E(F) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I_0} \left(-\frac{\gamma(e)}{\alpha(e)} \right) + \sum_{I_1} \frac{\alpha(e)}{\beta(e)} + \sum_{I_2} \left(-\frac{\delta(e)}{\beta(e)} \right) + \sum_{I_3} \left(\frac{\alpha(e)}{\beta(e)} - \frac{\delta(e)}{\beta(e)} \right) \\ &= n(F) + \sum_{I_1 \sqcup I_3} \varepsilon(e)r(e) + \sum_{(I_2 \sqcup I_3) \setminus \{e|r(e)=0\}} \varepsilon(e)(r(-e) - 1), \end{aligned}$$

где

- $e \in G$ – ориентированное ребро молекулы,
- $\begin{bmatrix} \alpha(e) & \beta(e) \\ \gamma(e) & \delta(e) \end{bmatrix}$ – матрица склейки (см. [2]),
- $n(F)$ – n -метка,
- $r(e)$ – r -метка,
- $I_0 = \{e \in F\}$,
- $I_1 = \{e \in G \mid v_0(e) \in F, v_1(e) \notin F\}$ – “выходящие” ребра,
- $I_2 = \{e \in G \mid v_0(e) \notin F, v_1(e) \in F\}$ – “входящие” ребра,
- $I_3 = \{e \notin F \mid v_0(e) \in F, v_1(e) \in F\}$ – “петли”,
- $v_0(e)$ – начало ребра e ,
- $v_1(e)$ – конец ребра e ,
- $(-e)$ – ребро e с обратной ориентацией.

По поводу определений молекул, атомов, r -меток, n -меток и ε -меток см. работу [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Энергия семьи $E(F)$, очевидно, является тонким топологическим инвариантом гамильтоновой системы (так как $E(F)$ выражается через метки). С другой стороны, легко проверяется, что $E(F)$ не зависит от ориентации ребер молекулы. При изменении ориентации Q^3 энергия семьи $E(F)$ меняет знак.

Для любого графа G без звездочек (см. [2]) определим “полную энергию кручения”, которая является целым числом, определенным с точностью до знака, которое мы будем обозначать через $N(G)$.

I) Для графа

$$G \stackrel{\text{def}}{=} (A_1 \longleftarrow W_0 \longrightarrow A_2),$$

если $\beta_{01}, \beta_{02} \neq 0$, то по определению считаем, что

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{01}\beta_{02}E(F),$$

где $E(F)$ – энергия единственной семьи молекулы.

II) Для графа

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left(A_4 \longleftarrow \begin{array}{c} W_1 \\ n_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} W_2 \\ n_1 \end{array} \longrightarrow A_3 \right),$$

если $\beta_{12}, \beta_{23}, \beta_{14} \neq 0$, то имеет место формула

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{14}\beta_{23}\beta_{12} \left[E(F_1)E(F_2) - \frac{1}{\beta_{12}^2} \right],$$

где $E(F_i)$ – энергия семьи F_i .

III) Для графа

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left(A_4 \longleftarrow \begin{array}{c} W_3 \\ n_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} W_1 \\ n_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} W_2 \\ n_2 \end{array} \longrightarrow A_3 \right),$$

если $\beta_{34}, \beta_{31}, \beta_{12}, \beta_{23} \neq 0$, то тогда

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{34}\beta_{31}\beta_{12}\beta_{23} \left[E(F_1)E(F_2)E(F_3) - \frac{E(F_2)}{\beta_{31}^2} - \frac{E(F_3)}{\beta_{12}^2} \right].$$

IV) Для графа

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} A_2 \\ \uparrow \\ \subset W_1 \\ \downarrow \\ A_3 \end{array} \right),$$

если $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13} \neq 0$, то

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{11}\beta_{12}\beta_{13} \left[E(F_1) - \frac{2}{\beta_{11}} \right].$$

Здесь через β_{ij} обозначены знаменатели r -меток ребер e_{ij} (начальная вершина (буква) ребра e_{ij} имеет индекс i , а вторая вершина имеет индекс j).

Для произвольного графа G , не имеющего звездочек, определение $N(G)$ будет дано в процессе доказательства основной теоремы.

В случае, когда молекула G содержит звездочки, поступим следующим образом. Любой букве W^* со звездочкой сопоставим новую букву $\widetilde{W}$ (см. рис. 1) так, чтобы выполнялись следующие условия.

- 1) $q(\widetilde{W}) = q(W^*) + \{\text{число звездочек в } W^*\}$, где $q(W)$ – валентность буквы W .
- 2) $g(\widetilde{W}) = g(W^*)$, где $g(W)$ – род буквы W .
- 3) Все вторые вершины новых ребер будут буквами A (эти ребра ориентируем по направлению к ним).
- 4) На всех новых ребрах $r = 1/2, \varepsilon = 1$.
- 5) Годится любая буква $\widetilde{W}$, для которой выполняются условия 1)–4).

Рис. 1

Проделявая эти операции для любой буквы со звездочками графа G , получим новый граф $\widetilde{G}$. Все ε -, r - и n -метки молекулы $\widetilde{G}$ останутся такими же, как и у G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если молекула G имеет звездочки, то положим

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} N(\widetilde{G}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Несмотря на неоднозначность выбора букв $\widetilde{W}$, это определение корректно.

ТЕОРЕМА 1 (основная). 1) Пусть G – молекула. Тогда

$$\begin{aligned} \text{rk}(H_1(Q^3)) &\geq b_1(G) + 2 \sum_{W \neq A} g(W), \\ \text{rk}(H_1(Q^3)) &\leq \left(b_1(G) + 2 \sum_{W \neq A} g(W) \right) + \sum_{W \neq A} q(W), \end{aligned}$$

где $q(W)$ – валентность атома W , $b_1(G)$ – первое число Бетти графа G , g – род базы буквы W .

2) Любое существенное ребро e дает в $H_1(Q^3)$ прямое слагаемое $Z_{\beta(e)}$. Если атом не принадлежит никакой семье, то все его звездочки дают независимые прямые слагаемые Z_2 .

3) Для любой молекулы имеют место соотношения:

$$N(G) = \pm \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{rk} H_1(Q^3) > b_1(G) + 2 \sum_{W \neq A} g(W), \\ \operatorname{card}(\operatorname{Tor} H_1(Q^3)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эти соотношения будем называть “ n -соотношениями”.

Приведем теперь некоторые следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\operatorname{rk} H_1(Q^3) < 2$, то все атомы плоские (т.е. $g(W) = 0$). В частности, все атомы на гомологических 3-сферах и гомологических про-ективных 3-пространствах являются плоскими.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $Q^3 \cong \{S^3, S^1 \times S^2, T^3 \text{ и их связные суммы}\}$, то на существенных ребрах стоят метки 0 и ∞ . Для $Q^3 \cong \mathbb{RP}^3$ на существенных ребрах стоят метки 0 или $1/2$. При этом метка $1/2$ стоит только на одном месте.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если граф не имеет семьи, то знаменатели конечных g -меток не превосходят $\operatorname{card}(\operatorname{Tor}(H_1(Q^3)))$.

3. Доказательство основной теоремы

Вершины графа, которые отличны от атома A , будем обозначать через W (быть может, с индексом). Пока будем предполагать, что зейфертова реализация буквы W не имеет особых слоев Зейферта (случай наличия особых слоев легко редуцируется к этому). Следовательно,

$$W = (F_g, q),$$

где поверхность F_g – двумерная, ориентируемая, замкнутая, связная и компактная рода g , а q – валентность атома W или, что тоже самое, число дырок в F_g . В этом случае, очевидно, имеем:

$$W = F_g \times S^1,$$

и сечение $F_g \times \{1\}$ является “допустимым” (определение допустимого сечения см. в [2]). Пусть граф G имеет вершины $\{W_1, \dots, W_k, A_1, \dots, A_s\}$, где A_i есть атом A . Ребра графа разбиваем на “внутренние” и “внешние”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ребро называется “внутренним”, если его концы отличны от атома A (например, петля всегда является внутренним ребром). Если один из концов ребра есть атом A , то ребро является “внешним”.

На каждой вершине W мы выбираем допустимые координаты (см. [2]) в группе гомологий $H_1(\partial W)$. Край ∂W , очевидно, состоит из q несвязных экземпляров тора T^2 . На краях полноторий A выбираем допустимые координаты так: цикл λ гомологичен нулю (при вложении $\partial A \subset A$), а цикл μ – ориентируемая потоком $\operatorname{sgrad} H$ критическая окружность (мы, конечно, считаем, что $A \subset Q^3$). Цикл λ на

Рис. 2

∂A ориентируем так, чтобы его ориентация индуцировалась ориентацией базы, которая, в свою очередь индуцируется ориентацией Q^3 и потока $\text{sgrad } H$ (см. рис. 2).

Рис. 3

Так как в нашей ситуации $W = F_g \times S^1$, то из формулы Кюннета имеем:

$$H_1(W) \cong H_1(F_g) \oplus Z.$$

Координаты в $H_1(W)$ выбираем следующим образом.

а) В качестве λ выбираем слой расслоения Зейферта, ориентированный потоком $\text{sgrad } H$.

б) Ориентируем (естественным образом) базу F_g и выберем в группе гомологий $H_1(F_g)$ базисные циклы так, как показано на рис. 3. Упорядочим базис в $H_1(W)$

следующим образом:

$$(c_1, \dots, c_{q-1}; \lambda; h'_1, h''_1, \dots, h'_g, h''_g).$$

На краях $\partial W = \bigsqcup_{i=1}^q T_i^2$ выберем координаты $(\bar{\lambda}_i, \bar{c}_i)$ так, чтобы при вложении $T_i^2 \subset W$ цикл $\bar{\lambda}_i$ был гомологичен λ , и $\bar{c}_i$ был гомологичен c_i .

На полноториях A_i берем координату e_i – ориентированную потоком $\text{sgrad } H$ критическую окружность.

Любое внутреннее ребро графа G мы заменим на два внутренних ребра и новую вершину $K = T^2 \times I$ так, как показано на рис. 4 (это техническая операция позволяет применить единый подход ко всем графам),

Рис. 4

где M_{ij} – матрица склейки.

Координаты в $H_1(K)$ индуцируем вложением $\partial W \ni T^2 \subset K$ и обозначим (k', k'') . Таким образом, координаты на одном куске ∂K уже выбраны, а на другом куске (торе) индуцируем координаты вложением $\partial K \ni T^2 \subset K$. Если ребро e связывает вершины W_1 и W_2 именно в такой последовательности в графе G , то возникающие при описанной выше процедуре два тора мы будем обозначать через $T_{12}^{(1)}$ и $T_{12}^{(2)}$ соответственно, а их базис через $(\lambda_{12}^{(i)}, \mu_{12}^{(i)})$, где $i = 1, 2$. Кольцо K будем обозначать через K_{12} , а его базис через (k'_{12}, k''_{12}) . Если ребро e является петлей с вершиной W_i , то кольцо обозначим K_{ii} , а ∂K_{ii} обозначим через $T_{ii}^{(1)}$ и $T_{ii}^{(2)}$ (если петель несколько, то будем ставить штрихи).

Пусть на Q^3 задано слоение Лиувилля, которое задается молекулой G (мы предполагаем, что $G = W^*(Q^3)$). Разобьем Q^3 на два подмножества X_1 и X_2 , где

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{\{W \neq A\}} W,$$

$$X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\coprod_{A \in G} A \right) \sqcup \left(\coprod_{\{K \mid K - \text{добавляемое кольцо}\}} K \right).$$

Триада $(Q^3; X_1, X_2)$, очевидно, вырезаемая. Кроме того, имеем:

$$X_1 \cap X_2 = \left(\coprod_{\{e \mid e - \text{внешнее ребро } G\}} T^2 \right) \sqcup \left(\coprod_{\{e \mid e - \text{внутреннее ребро } G\}} (T^2 \sqcup T^2) \right).$$

Для триады $(Q^3; X_1, X_2)$ напомним точную последовательность Майера–Вьеториса:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\partial_*} H_1(X_1 \cap X_2) &\xrightarrow{i_*} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{j_*} H_1(Q^3) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_0(X_1 \cap X_2) &\xrightarrow{i_*} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{j_*} H_0(Q^3) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где $i_*(c) = i_{1*}(c) - i_{2*}(c)$, $i_k: X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_k$ ($k = 1, 2$), а $j_*(c_1, c_2) = j_{1*}(c_1) + j_{2*}(c_2)$, $j_k: X_k \hookrightarrow Q^3$ ($k = 1, 2$).

Очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} H_0(X_1) &\cong Z^n, \\ H_0(X_2) &\cong Z^m, \\ H_0(X_1 \cap X_2) &\cong Z^p, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} n &= \{\text{число вершин } G \text{ степени } > 1\}, \\ m &= \{\text{число атомов } A\} + \{\text{число внутренних ребер } G\} = \{\text{число ребер графа } G\}, \\ p &= \{\text{число ребер } G\} + \{\text{число внутренних ребер}\}. \end{aligned}$$

В силу точности имеем цепочку изоморфизмов абелевых групп:

$$Z \cong H_0(Q^3) \cong (H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)) / \text{Im}(i_*).$$

С другой стороны, $\text{Im}(\partial_*)$ является свободной абелевой группой (как подгруппа свободной группы). Сравнивая ранги групп, получаем равенство

$$1 = (n + m) - (p - \text{rk}(\text{Im}(\partial_*))),$$

откуда получаем, что

$$\text{Im } \partial_* \cong Z^{b_1(G)},$$

где $b_1(G)$ – первое число Бетти. Из того, что $\text{Im } \partial_*$ является свободной группой, следует неканонический изоморфизм:

$$\begin{aligned} H_1(Q^3) &\cong (\text{Im}(j_*)) \oplus Z^{b_1(G)}, \\ H_1(Q^3) &\cong [(H_1(X_1) \oplus H_1(X_2)) / \text{Im}(i_*)] \oplus Z^{b_1(G)}, \\ i_*: H_1(X_1 \cap X_2) &\rightarrow H_1(X_1) \oplus H_2(X_2). \end{aligned}$$

Чтобы понять, как устроен гомоморфизм i_* в выбранных нами координатах, рассмотрим сегмент графа G , который показан на рис. 4. Базисы в группах гомологии $H_1(W_i)$ и $H_1(W_j)$, как договорились раньше, обозначим соответственно

$$(c_1^{(i)}, \dots, c_{q_i-1}^{(i)}; \xi^{(i)}; h_1^{(i)'}, \dots, h_{g_i}^{(i)'})$$

и

$$(c_1^{(j)}, \dots, c_{q_j-1}^{(j)}; \xi^{(j)}; h_1^{(j)'}, \dots, h_{g_j}^{(j)'').$$

Тогда i_* в координатах имеет вид

$$\begin{pmatrix} \beta_{ik} & 0 & \dots & \alpha_{ik} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \delta_{ik} & 0 & \dots & \gamma_{ik} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & -\textcircled{1} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & -\textcircled{1} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{ij} & 0 & \dots & -\delta_{ij} & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{ij} & 0 & \dots & \gamma_{ij} & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ & * & & * & * & & * & & * & * & * & & * & \end{pmatrix}.$$

Нашей дальнейшей целью будет диагонализация этой матрицы при помощи целочисленных преобразований над строками и столбцами. Мы ограничимся умножением строки (столбца) на целое k и добавлением к другой строке (столбцу).

Сделаем несколько очевидных замечаний.

1) Циклы (h^i) дают свободные элементы в $H_1(Q^3)$. Их число есть

$$\sum_{W \neq A} 2g(W).$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана, т.е. доказано неравенство

$$\text{rk } H_1(Q^3) \geq b_1(G) + 2 \sum_{W \neq A} g(W).$$

2) Без ограничения общности, число (-1) в столбце (e_k) можно считать матричной единицей. Следовательно, после факторизации цикл e_k обращается в 0 (в $H_1(Q^3)$).

3) Кроме того, числа (-1) “в кружочках” после вычитания из (-1) расположенных под ними, тоже являются матричными, и, следовательно, матрица упрощается. Отсюда следует грубое неравенство

$$\text{rk } H_1(Q^3) \leq (b_1(G) + 2 \sum_{W \neq A} g(W)) + \sum_{W \neq A} q(W),$$

где $q(W)$ – валентность атома W , (поскольку $\sum_{W \neq A} q(W)$ есть число столбцов новой матрицы).

После описанных выше упрощений матрица принимает вид

$$\begin{pmatrix} \beta_{ik} & 0 & \dots & \alpha_{ik} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_{ij} & 0 & \dots & -\delta_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & -\alpha_{ij} & 0 & \dots & \gamma_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Эту матрицу мы будем обозначать через $M(G)$ и называть *характеристической* матрицей графа G .

Рис. 5

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно проверить, что характеристическая матрица является квадратной порядка $\sum_{W \neq A} q(W)$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Для этого рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 5.

Тогда характеристическая матрица $M(G)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & & & & & & \dots \\ 0 & \beta_{1m_1} & & \vdots & \alpha_{1m_1} & & 0 & & & & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & \beta_{1m_t} & \alpha_{1m_t} & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -\beta_{12} & -\beta_{12} & \dots & -\beta_{12} & -\delta_{12} & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{12} & \gamma_{12} & \dots \\ & & & & & \beta_{21} & 0 & & & \alpha_{21} & \dots \\ & 0 & & & & 0 & \beta_{2l_1} & & & \alpha_{2l_1} & \dots \\ & & & & & & & \ddots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

На рис. 5 точками “.” обозначен тот кусок края атома, меридиан которого не является базисным элементом выбранного нами базиса группы $H_1(W)$. Так как $\beta_{11} = 0$, то $\alpha_{11} = \varepsilon_{11}$. Следовательно, можно “уничтожить” все элементы “под” α_{11} в столбце $(\xi^{(1)})$. Аналогичным образом, можно “уничтожить” все элементы “справа” от первой единицы в строке $(\mu_{12}^{(2)})$. Отсюда уже видно, что $Z_{\beta_{1m_1}} \oplus \dots \oplus Z_{\beta_{1m_t}}$ будет прямым слагаемым в $H_1(Q^3)$.

Если, кроме того, допустим, что $r_{21} = \infty$, то “уничтожая” при помощи $\alpha_{21} = \varepsilon_{21}$ столбец $(\xi^{(2)})$ и все справа от первого $-\beta_{12}$, мы видим, что появляется дополнительное слагаемое $Z_{\beta_{12}}$ в группе $H_1(Q^3)$. Аналогично рассматриваются остальные случаи существенных ребер.

Теперь перейдем к доказательству последней части теоремы.

Рассмотрим произвольную молекулу G . Согласно ранее доказанному

$$H_1(Q^3) \cong A \oplus Z^{b_1(G)} \oplus Z^{\sum_{W \neq A} 2g(W)},$$

где

$$A \cong \langle e_1, \dots, e_k \rangle / \langle M(G)e \rangle,$$

e_i – базисные элементы свободной конечнопорожденной абелевой группы, e – столбец $[e_1, \dots, e_k]$, а $M(G)$ – характеристическая матрица молекулы G . Определим “полную энергию кручения” молекулы G по следующей формуле:

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \det M(G).$$

Применяя целочисленные и обратимые преобразования над строками и столбцами $M(G)$, мы можем привести ее к диагональному виду. Следовательно, если $\text{rk } A \geq 1$, то на диагонали стоит как минимум один ноль, и, значит, $N(G) = 0$. Если $\text{rk } A = 0$, то очевидно, что

$$N(G) = \text{card}(\text{Tor } H_1(Q^3)).$$

Заметим, что $N(G)$ для любого фиксированного графа должна быть функцией меток, так как Q^3 восстанавливается по графу с метками с точностью до гомеоморфизма (см. [2]).

Рассмотрим теперь тот случай, когда молекула содержит звездочки (см. [2]). Пусть W^* есть атом, имеющий звездочку, т.е. особый слой типа $(1, 2)$ расслоения Зейферта атома W^* . Предполагаем, что ориентация на 3-многообразии Q^3 фиксирована, и тем самым на атоме W^* задана ориентация. Рассмотрим регулярную окрестность особого слоя (топологически это есть просто полноторие $D^2 \times S^1$). Обозначим ее через K , а замыкание ее дополнения в W через $\tilde{K}$. На граничном торе $T^2 = \partial K = \partial \tilde{K}$ рассмотрим два базиса в группе гомологий $H_1(T^2)$: (λ', μ') и (λ, μ) . В качестве λ выбираем базисный цикл, однозначно определяемый условием $i_*(\lambda) = 0$, где $i: T^2 \hookrightarrow K$, ориентация которого индуцируется естественной ориентацией базы D^2 полнотория K . Если через μ_0 обозначим базисный цикл в $H_1(K)$, ориентация которого совпадает с ориентацией критической окружности, индуцируемой полем $\text{sgrad } H$, то тогда цикл μ однозначно определяется условиями:

- 1) $i_*(\mu) = 2\mu_0$,
- 2) $\chi = \lambda + 2\mu$,

где χ есть слой расслоения Зейферта. В качестве λ' выбираем слой расслоения Зейферта. Тогда цикл μ' однозначно определяется условием, что матрица склейки есть

$$\begin{cases} \lambda = \lambda' + 2\mu', \\ \mu = -\mu'. \end{cases}$$

Такой цикл μ' будем называть *допустимым*. Обозначим через $\tilde{W}$ дополнение в атоме W ко всем регулярным окрестностям особых слоев расслоения Зейферта атома W .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Сечение расслоения Зейферта в $\tilde{W}$ называется *допустимым*, если на границах регулярных окрестностей особых слоев оно “высекает” допустимые циклы.

Таким образом, случай наличия звездочек очевидным образом сводится к уже доказанному при помощи редукции, которую мы описали перед формулировкой основной теоремы.

Тем самым теорема полностью доказана.

4. Применение полученных результатов

Рассмотрим сначала случай Сретенского движения гиростата в гравитационном поле. Как и в любом другом интегрируемом случае динамики твердого тела, уравнения движения удобно рассмотреть на алгебре Ли $e(3)^*$ (группы $E(3)$ движения евклидова 3-пространства) с пуассоновой структурой, задаваемой формулой

$$\{f_1, f_2\}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x([\nabla_x f_1, \nabla_x f_2]),$$

где $\nabla_x f_i \in e(3)$.

На орбитах коприсоединенного представления эта скобка невырождена и задает симплектическую структуру. В координатах $\{(R_i, S_i)\}$ такая орбита задается уравнением

$$TS^2 = \{f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1, f_2 = R_1 S_1 + R_2 S_2 + R_3 S_3 = g\}.$$

В случае Сретенского ($g = 0$) мы имеем следующие интегралы:

$$\begin{aligned} K &= (S_3 + 2\lambda)(S_1^2 + S_2^2) - S_1 R_3, \\ H &= \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + 4(S_3 + \lambda)^2) + R_1. \end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ получаем случай Горячева–Чаплыгина движения твердого тела с закрепленной точкой.

Бифуркационная диаграмма отображения момента

$$H \times K: TS^2 \rightarrow R^2$$

была исследована в [5], а в работе [3] была построена грубая классификация (т.е. был построен граф молекулы).

В зависимости от параметра λ имеем четыре случая:

- (a) $\lambda = 0$,
- (b) $-1/3 < \lambda < 0$,
- (c) $-1 < \lambda < -1/3$,
- (d) $\lambda < -1$.

В случае (a) мы имеем молекулы (3), (4) (см. таблицу 1). Найдем n -метку для первой из них. Из “ n -соотношения” имеем:

$$N(G) = 2\left(n + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow n = 0 \text{ или } n = -1.$$

Выбирая подходящую ориентацию 3-многообразия Q^3 , можно считать без ограничения общности, что $n = 0$.

Для второй молекулы этого случая имеем

$$\begin{aligned} N(G) &= 8\left\{\left(n_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{2}\right)\left(n_2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\right\} = \pm 2, \\ &\quad ((2n_1 + 1) + \varepsilon_1)((2n_2 - 1) + \varepsilon_2) = 1 \pm 1. \end{aligned}$$

Слева стоит число вида $4k$, следовательно,

$$((2n_1 + 1) + \varepsilon_1)((2n_2 - 1) + \varepsilon_2) = 0.$$

Здесь мы пользуемся тем фактом, что при замене ориентации 3-многообразия Q^3 все ε -метки, которые стоят на внутренних ребрах с $r \neq \infty$, меняют знак. Если ребро внешнее и $r \neq \infty$, то метка ε знак не меняет. При $r = \infty$ метка ε меняет знак на внешних ребрах и не меняет знак на внутренних. Таким образом, мы без ограничения общности считаем, что $\varepsilon = 1$ на ребрах типа $B \xrightarrow{r \neq \infty} B$. В дальнейшем мы будем делать это без оговорок.

Рассмотрим отображение $\Phi: e(3)^* \rightarrow e(3)^*$, задаваемое формулой

$$\begin{cases} R_i \mapsto R_i, & S_i \mapsto S_i \text{ при } i = 1, 2, \\ R_3 \mapsto -R_3, & S_3 \mapsto -S_3. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi^*H = H$, $\Phi^*K = -K$, $\Phi^*\omega = -\omega$. Следовательно,

$$\Phi_*(\text{sgrad } H) = -\text{sgrad } H.$$

С другой стороны, так как $\Phi^*(\omega \wedge \omega) = \omega \wedge \omega$, то Φ сохраняет ориентацию на орбите коприсоединенного действия. С другой стороны, из равенства $\Phi^*H = H$ следует, что Φ сохраняет ориентацию изоэнергетической поверхности. Таким образом, на поверхности $H = \text{const}$ отображение Φ индуцирует послойное отображение, которое сохраняет ориентацию поверхности и меняет ориентацию на всех критических окружностях. Рассмотрим два экземпляра молекулы (4), снабженные всеми метками. На одном из них поменяем ориентацию внутреннего ребра. Нетрудно проверить, что при этом n -метки меняются так:

$$\begin{aligned} n_1 &\mapsto n_1 + 1, \\ n_2 &\mapsto n_2 - 1. \end{aligned}$$

Молекулы, полученные таким образом, должны совпадать. Следовательно, $n_1 = n_2 - 1$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Таким образом, получаем:

$$(2n_1 + 1 + \varepsilon)^2 = 0.$$

Имеем две возможности:

- а) $n_1 = 0, n_2 = 1, \varepsilon = -1$,
- б) $n_1 = -1, n_2 = 0, \varepsilon = 1$.

В случае (с) имеем молекулы (1), (3), (4), (5), (7), (8) (см. таблицу 1). Рассмотрим сначала молекулу (7). Полные энергии семей таковы:

$$\begin{aligned} E(F_1) &= n_1 + \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = n_1, \\ E(F_2) &= n_2 + \frac{1}{2}, \\ E(F_3) &= n_3. \end{aligned}$$

Имеем следующее “ n -соотношение”:

$$N(G) = 4 \left\{ n_1 n_3 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} n_3 - 1 \cdot n_1 \right\} = 0,$$

$$n_3 \{ 2n_1(2n_2 + 1) - 1 \} = 4n_1.$$

Рассмотрим два случая.

I) $n_1 = 0 \Rightarrow n_3 = 0,$

откуда получаем решение $n_1 = 0, n_2 = k, n_3 = 0.$

II) $n_1 \neq 0 \Rightarrow n_3 \neq 0.$

Здесь, очевидно, имеем следующие две возможности:

а) $\begin{cases} n_3 = 4n_1, \\ 2n_1(2n_2 + 1) - 1 = 1. \end{cases}$

Таким образом, получаем две пары решений:

$n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 4$ и $n_1 = -1, n_2 = -1, n_3 = -4.$

б) $\begin{cases} n_3 = -4n_1, \\ 2n_1(2n_2 + 1) - 1 = -1, \end{cases}$

но эта система несовместна.

Рассмотрим теперь молекулу (8). Из “ n -соотношения” получаем:

$$N(G) = 4 \left\{ n_1 n_3 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} n_3 - n_1 \right\} = \pm 2.$$

Находим пять возможных случаев:

а) $n_1 = 0, n_2 = k, n_3 = \pm 2,$

б) $n_1 = k, n_2 = -1, n_3 = -2,$

в) $n_1 = k, n_2 = 0, n_3 = 2,$

г) $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = -6,$

д) $n_1 = -1, n_2 = -1, n_3 = -6.$

Из вида бифуркационной диаграммы следует, что n_1 и n_2 – метки молекул (7) и (8) должны совпадать. В результате получаем то, что показано в таблице 1.

Остальные случаи, такие как случай Жуковского движения гиростата в гравитационном поле и случай Ковалевской динамики твердого тела, рассматриваются аналогично. Все результаты показаны в таблицах, приведенных в конце настоящей работы.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову за постоянное внимание к работе.

№	молекула	метки	Q^3
(1)	$A \text{ — } A$		S^3
(2)	$A \text{ — } B \begin{array}{l} \nearrow^\infty A \\ \searrow^\infty A \end{array}$		$S^1 \times S^2$
(3)	$A \xrightarrow[n]{0} A^* \xrightarrow[n]{0} A$	$n = -1$	S^3
(4)	$\begin{array}{c} A \nearrow_{\varepsilon}^{1/2} B \xrightarrow[n_1]{1/2} B \xrightarrow[n_2]{1/2} A \\ A \searrow_0 B \end{array}$	а) $\varepsilon = 1, n_1 = -1, n_2 = 0$ б) $\varepsilon = -1, n_1 = 0, n_2 = 1$	$\mathbb{RP}^3$
(5)	$A \xrightarrow[n]{0} A^* \xrightarrow[n]{0} D_1 \begin{array}{l} \nearrow^\infty A \\ \searrow^\infty A \end{array}$	$n = 0$	$S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2$
(6)	$A \xrightarrow[n]{0} A^* \xrightarrow[n]{0} D_1 \begin{array}{l} \nearrow^\infty A \\ \searrow_0 A \end{array}$	$n = 0$	S^3
(7)	$A \xrightarrow[n_2]{0} B \begin{array}{l} \nearrow_{\varepsilon=1}^{1/2} A^* \xrightarrow[n_1]{0} A \\ \searrow_0 B \end{array}$	а) $n_1 = 0, n_2 = k, n_3 = 0$ б) $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 4$ в) $n_1 = -1, n_2 = -1, n_3 = -4$	$S^1 \times S^2$
(8)	$A \xrightarrow[n_2]{0} B \begin{array}{l} \nearrow_{\varepsilon=1}^{1/2} A^* \xrightarrow[n_1]{0} A \\ \searrow_0 B \end{array}$	а) $n_1 = 0, n_2 = k, n_3 = \pm 2$ б) $n_1 = k, n_2 = -1, n_3 = -2$ в) $n_1 = k, n_2 = 0, n_3 = 2$ г) $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = -6$ д) $n_1 = -1, n_2 = -1, n_3 = -6$	$\mathbb{RP}^3$

ТАБЛИЦА 1. Случай Сретенского

№	молекула	метки	Q^3
(1)	$A \overset{0}{-} A$		S^3
(2)	$A \overset{\infty}{-} A$		$S^1 \times S^2$
(3)	$A \overset{\infty}{-} B \begin{matrix} \nearrow^0 A \\ \searrow_0 A \end{matrix}$		S^3
(4)	$A \overset{0}{-} B \begin{matrix} \nearrow^0 A \\ \searrow_{n=0} A \end{matrix}$	$n = 0$	$S^1 \times S^2$
(5)	$\begin{matrix} A \nearrow^0 \\ A \searrow^\infty \end{matrix} B \overset{\infty}{-} B \begin{matrix} \nearrow^0 A \\ \searrow_0 A \end{matrix}$		S^3
(6)	$\begin{matrix} A \nearrow^0 \\ A \searrow^0 \end{matrix} B \overset{\infty}{-}_{n=2} B \begin{matrix} \nearrow^0 A \\ \searrow_0 A \end{matrix}$	$n = 2$	$\mathbb{RP}^3$
(7)	$\begin{matrix} A \nearrow^0 \\ A \searrow^0 \end{matrix} B \overset{\infty}{-}_{n=0} B \begin{matrix} \nearrow^0 A \\ \searrow_0 A \end{matrix}$	$n = 0$	$S^1 \times S^2$

ТАБЛИЦА 2. Случай Жуковского

№	молекула	метки	Q^3
a_1	$A \text{ — } A$		S^3
a_2	$\begin{array}{c} A \searrow_0^0 B \xrightarrow[n_1]{0} B \xleftarrow[n_2]{0} A \\ A \nearrow_0^0 \end{array}$	$n_1 = 1, n_2 = 2$ $n_1 = 0, n_2 = k$	S^3
a_3	$\begin{array}{c} A \xrightarrow[n_1]{0} A^* \xrightarrow[n_2]{0} C_2 \xleftarrow[n_3]{0} A \\ A \xrightarrow[n_2]{0} A^* \xrightarrow[n_3]{0} \end{array}$	$n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 2, 6$	$\mathbb{RP}^3$
b_2	$\begin{array}{c} A \searrow_0^0 B \xrightarrow[n]{1/2} A \\ A \nearrow_0^0 \end{array}$	$n = 0$	S^3
d_4	$\begin{array}{c} A \searrow_0^0 B \xrightarrow[n_1]{0} B \xrightarrow[n_3]{0} A \\ A \nearrow_0^0 B \xrightarrow[n_2]{0} \end{array}$	$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 2$ $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 2, 6$	$S^1 \times S^2$
d_6	$\begin{array}{c} A \searrow_0^{1/2} B \xrightarrow[n_1]{0} B \xrightarrow[n_3]{0} A \\ A \nearrow_0^{1/2} B \xrightarrow[n_2]{0} \end{array}$	$n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 2, 6$	$\mathbb{RP}^3$
d_3	$\begin{array}{c} A \searrow_\infty^0 B \xrightarrow[n]{1/2} A \\ A \nearrow_\infty^0 B \xrightarrow[n]{0} \end{array}$	$n = 0$	$S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2$

ТАБЛИЦА 3. Случай Ковалевской

Список литературы

1. *Фоменко А. Т., Цишанг Х.* Критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. 1990. Т. 54. №3. С. 546–575.
2. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 49–78.
3. *Oshemkov A. A.* Fomenko Invariants for the Main Integrable cases of the Rigid Body Motion Equations // AMS. 1991. V. 4. P. 67–146.
4. *Bolsinov A. V.* Methods of Calculation of the Fomenko–Zieschang Invariants // AMS. 1991. V. 6. P. 147–183.
5. *Харламов М. П.* Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
20.06.1995