Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 4, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:31:48

УДК 515.168.3

Л. А. Бекларян

К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию.

II. Проективно-инвариантные меры

Работа посвящена исследованию групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, общего вида. Для таких групп исследуется метрический инвариант в виде проективно-инвариантной меры. Принятый подход приводит к классификации таких групп гомеоморфизмов по степени сложности множества неподвижных точек элементов группы. Внутри каждого из выделенных классов групп проводится более тонкая классификация в зависимости от степени сложности топологической структуры орбит и комбинаторных свойств групп.

Библиография: 11 названий.

Данный текст является продолжением работы [11], использует принятые там обозначения и имеет сплошную нумерацию параграфов.

§6. Пространство $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$. Число вращения гомеоморфизма

Вводится хорошо известное понятие числа вращения гомеоморфизмов $\mathbb{R}$. Для группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих условию (P) (гомеоморфизмы, являющиеся накрытиями гомеоморфизмов окружности), исследуется отображение $A: Q \rightarrow \mathbb{R}$, где $A(q)$ — число вращения гомеоморфизма q . В терминах условий на структуру множества Q^N сформулировано необходимое и достаточное условие того, что $A \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ (теорема 6.4). Другой способ построения гомоморфизмов из $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ с помощью Q -инвариантных мер описан в работе [7]. Там же доказано, что любые две Q -инвариантные меры μ и ν порождают линейно зависимые элементы τ_μ, τ_ν из $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ с положительным коэффициентом растяжения. В рамках развитой техники этот факт заново доказывается в предложении 6.3. Далее доказано, что условие $A \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ эквивалентно существованию Q -инвариантной меры μ , а гомоморфизмы τ_μ, A линейно зависимы с положительным коэффициентом растяжения (теорема 6.7). Таким образом, существование алгебраического инварианта в виде гомоморфизма $A \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$, где $A(q)$ для любого $q \in Q$ есть число вращения гомеоморфизма q , эквивалентно существованию метрического инварианта в виде Q -инвариантной меры μ . Для группы $Q \subseteq K^+$ с Q -инвариантной мерой μ в терминах гомоморфизма τ_μ формулируется условие, эквивалентное условию строгой эргодичности группы Q (теорема 6.8).

Хорошо известному отображению окружности в себя соответствует коммутативная группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, с двумя образующими $\mathcal{T}_q = \langle q, \hat{q} \rangle$, где $\hat{q}(t) = t + 1$, а q является накрытием исследуемого

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 94-01-015113а, № 94-01-00820).

гомеоморфизма окружности. Изучается отображение $A: \mathcal{T}_q \rightarrow \mathbb{R}$ (обозначаемое через A_q), а также связь между значением числа вращения гомеоморфизма (рациональное или иррациональное) и свойствами отображения A_q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1 [1], [2]. Пусть $q \in K^+$. Предел, если он существует и не зависит от $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n(t)}{n} = \alpha(q)$$

называется *числом вращения гомеоморфизма q* .

Очевидно, что гомеоморфизм $\widehat{q}(t) = t + 1$ удовлетворяет условию (P) и перестановочен с любым гомеоморфизмом q , удовлетворяющим условию (P). Поэтому, если гомеоморфизм q удовлетворяет условию (P), то группа $\mathcal{T}_q = \langle q, \widehat{q} \rangle$ коммутативна.

Для любого $q \in K^+$ через I_q обозначается автоморфизм группы K^+ , называемый сопряжением и действующий по правилу $\forall \bar{q} \in K^+ \quad I_q(\bar{q}) = q\bar{q}q^{-1}$.

Сформулируем несколько простых предложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Если $q \in K_L^+$ и для $\bar{q} \in K^+$ существует число вращения $\alpha(\bar{q})$, то для $I_q(\bar{q})$ также существует число вращения и $\alpha(\bar{q}) = \alpha(I_q(\bar{q}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольную точку $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(q\bar{q}q^{-1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(q\bar{q}q^{-1})^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q(\bar{q})^n q^{-1}(t)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\bar{q})^n(q^{-1}(t))}{n} = \alpha(\bar{q}). \end{aligned}$$

Для числа вращения хорошо известен следующий результат [1], [2], доказательство которого проводится в рамках развитой техники.

ТЕОРЕМА 6.1. Для любого $q \in K_p^+$ число вращения $\alpha(q)$ существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

Случай первый. Пусть $N(\langle q \rangle) \neq \emptyset$. Так как $q \in K_p^+$, то множество $N(\langle q \rangle)$ не ограничено ни снизу, ни сверху. Для любого $t \in N(\langle q \rangle)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t}{n} = 0.$$

Рассмотрим множество $\mathbb{R} \setminus N(\langle q \rangle)$, состоящее из счетного числа открытых связных интервалов $\{\Delta_j\}_{-\infty}^{+\infty}$. Пусть t_0^j, t_1^j — левый и правый концы интервала Δ_j . Тогда для любого $t \in \Delta_j$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n(t) = t_1^j$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^j}{n} = 0.$$

Таким образом, для таких q число вращения $\alpha(q)$ существует и равно 0.

Случай второй. Пусть $N(\langle q \rangle) = \emptyset$. Тогда, повторяя дословно доказательство теоремы 3.1, мы можем добиться того, чтобы гомеоморфизм η принадлежал группе K_L^+ . В итоге получим, что существует циклическая группа $.Q = \langle .q \rangle$, $.q(t) = t + .h_q$ такая, что группа $\langle q \rangle$ 0-сопряжена группе $.Q$. Из этого, в частности, следует, что $q = \eta \cdot .q \cdot \eta^{-1}$. Но для сдвига $.q(t) = t + .h_q$ очевидно, что $\alpha(.q) = .h_q$. Тогда по предложению 6.1 для q число вращения $\alpha(q)$ существует и $\alpha(q) = .h_q$.

ЛЕММА 6.1. Пусть $q \in K_p^+$. Число вращения $\alpha(q) = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Fix}\langle q \rangle \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что в случае $q \neq e$ имеет место соотношение $\text{Fix}\langle q \rangle = N(\langle q \rangle)$, а в случае $q = e$ справедливо условие $\text{Fix}\langle q \rangle = \mathbb{R}$. Для $q = e$ доказательство леммы очевидно. Пусть $q \neq e$. Предположим, что $\alpha(q) = 0$ и при этом $N(\langle q \rangle) = \emptyset$. Не нарушая общности, будем полагать, что $q > e$. Тогда существует $n \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $q^n(0) > 1$. В таком случае для любого $k = 1, 2, \dots, q^{kn}(0) > k$ и, соответственно,

$$\alpha(q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^{kn}(0)}{kn} > \frac{k}{kn} = \frac{1}{n}.$$

Противоречие. Следовательно, $N(\langle q \rangle) \neq \emptyset$.

Доказываем обратное утверждение. Пусть $N(\langle q \rangle) \neq \emptyset$. Рассмотрим точку $\bar{t} \in N(\langle q \rangle)$. Так как $q(\bar{t}) = \bar{t}$, то

$$\alpha(q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n(\bar{t})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bar{t}}{n} = 0.$$

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$ такая, что $N(Q) = \emptyset$. Тогда отображение $A: Q \rightarrow \mathbb{R}$, где $A(q) = \alpha(q)$ для любого $q \in Q$, определяет гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $N(Q) = \emptyset$, $\mathbb{P}(Q) = \emptyset$. В силу леммы 3.2 группа q циклическая. Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\alpha(q^n) = n\alpha(q)$. Если положить $A(q^n) = n\alpha(q)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, то A определяет гомоморфизм группы Q в группу $\mathbb{R}$.

Рассмотрим случай $N(Q) = \emptyset$, $\mathbb{P}(Q) \neq \emptyset$. Пусть гомоморфизм $\eta^\#$ и непрерывное отображение η те же, что и в конструкции теоремы 3.4. Из доказательства теоремы 3.4 следует, что отображение η определяется Q -инвариантной мерой μ , которая в силу строгой эргодичности группы Q определяется с точностью до положительного множителя. Так как $Q \in K_p^+$, то очевидно, что $\mathbb{P}(Q) \cap [0, 1] \neq \emptyset$. По лемме 3.6 имеем $\mu([0, 1]) > 0$. Нормируем μ таким образом, чтобы $\mu([0, 1]) = 1$.

В теореме 3.4 определялся гомоморфизм $\eta^\#(q) = .q$, где $.q = t + .h_q$, $.h_q = \tilde{\mu}(\bar{t}, q(\bar{t}))$,

$$\tilde{\mu}(\bar{t}, q(\bar{t})) = \begin{cases} \mu(\bar{t}, q(\bar{t})), & \text{если } \bar{t} < q(\bar{t}), \\ -\mu([q(\bar{t}), \bar{t})), & \text{если } \bar{t} \geq q(\bar{t}). \end{cases}$$

Не нарушая общности, будем полагать, что $e < q$. Тогда в силу Q -инвариантности меры μ для любого $q \in Q$

$$.h_q = \mu(\bar{t}, q(\bar{t})) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu([q^k(\bar{t}), q^{k+1}(\bar{t}))) = \frac{1}{n} \mu(\bar{t}, q^n(\bar{t})).$$

Пусть $lk_n < q^n(\bar{t}) < l(k_n + 1)$, где k_n — целое число. Тогда в силу Q -инвариантности меры μ и условия ее нормировки

$$lk_n < \mu([0, \bar{t})) + \mu(\bar{t}, q^n(\bar{t})) < l(k_n + 1).$$

Отсюда

$$\alpha(q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n(\bar{t})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{lk_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\bar{t}, q^n(\bar{t}))}{n} = .h_q.$$

Так как $\eta^\#$ является гомоморфизмом, то $A(q) = \alpha(q)$ также определяет гомоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Числа $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ называются *несоизмеримыми*, если не существуют $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = 0$. В противном случае такие числа называются *соизмеримыми*.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$ – конечно-порожденная подгруппа группы K_p^+ и $N(Q) = \emptyset$. Для того чтобы $\mathbb{P}(Q) = \emptyset$, необходимо и достаточно, чтобы числа $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, были попарно соизмеримыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа Q тривиальная, то доказательство очевидно. Пусть $Q \neq \langle e \rangle$. Предположим, что $\mathbb{P}(Q) = \emptyset$. Тогда по теореме 3.2 группа Q циклическая. Пусть элемент $q \in Q$ является ее образующей. Тогда существуют $n^j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, s}$, такие, что $q_j = q^{n^j}$. В таком случае для любого $j = \overline{1, s}$ $\alpha(q_j) = n^j \alpha(q)$, откуда и следует, что $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, попарно соизмеримы.

Пусть числа $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, попарно соизмеримы. Тогда, повторяя доказательство теорем 3.4 и 6.2, получим, что группа Q является 0-полусопряженной к группе $\cdot Q$, где $\cdot Q = \langle \cdot q_j, j = \overline{1, s} \rangle$, $\cdot q_j(t) = t + \alpha(q_j)$. Тогда, в частности, отображение $\eta^\# : Q \rightarrow \cdot Q$ определяет изоморфизм. Так как числа $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, попарно соизмеримы, то группа $\cdot Q$ циклическая. Следовательно, группа Q также циклическая и по теореме 3.2 $\mathbb{P}(Q) = \emptyset$.

Выясним, для каких еще подгрупп $Q \subset K_p^+$ функция числа вращения $\alpha(q)$ задает гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$. Отображение $A : Q \rightarrow \mathbb{R}$, где $A(q) = \alpha(q)$ для любого $q \in Q$, задает гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\overline{Q}^N = Q^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{Q}^N = Q^N$. Если $Q^N = \langle e \rangle$, то доказательство следует из теоремы 6.2.

Предположим, что $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если $Q^N = Q$, то по лемме 6.1 для любого $q \in Q$ $\alpha(q) = 0$ и доказательство очевидно. Остается исследовать случай $Q^N \neq \langle e \rangle$, $Q^N \neq Q$. Так как по предположению $Q^N = \overline{Q}^N$, а факторгруппа Q/Q^N не тривиальна, то в силу последнего утверждения теоремы о факторгруппе из §5 $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ и факторгруппа Q/Q^N изоморфна группе $\tilde{Q}_F$ (конструкция доказательства леммы 4.2). Более того, элементы группы можно так сконструировать, чтобы они также принадлежали группе K_p^+ . Для группы $\tilde{Q}_F$ выполняется условие $N(\tilde{Q}_F) = \emptyset$. Тогда по теореме 6.2 существует гомоморфизм $\tilde{A} : \tilde{Q}_F \rightarrow \mathbb{R}$, где $\tilde{A}(\tilde{q}) = \alpha(\tilde{q})$ для любого $\tilde{q} \in \tilde{Q}_F$. Пусть $\tau : Q \rightarrow Q/Q^N$ – естественный гомоморфизм, а $\delta : Q/Q^N \rightarrow \tilde{Q}_F$ – изоморфизм, описанный выше. Для любого элемента $\tilde{q}$ из левого смежного класса qQ^N его действие на инвариантном множестве $\text{Fix } Q^N$ совпадает с действием элемента $\delta(\tau(\tilde{q}))$. Но по определению числа вращения оно не зависит от выбора точки $t \in \mathbb{R}$ и поэтому $\alpha(\tilde{q}) = \tilde{A}(\delta(\tau(\tilde{q})))$. Следовательно, $A : Q \rightarrow \mathbb{R}$, где $A = \tilde{A}\delta\tau$, и есть искомый гомоморфизм.

Докажем обратное утверждение. Пусть отображение A задает гомоморфизм. Ядро любого гомоморфизма образует подгруппу. По лемме 6.1 $\ker A = Q^N$. Следовательно, $\overline{Q}^N = Q^N$.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть $q \in K_p^+$. Тогда $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N \neq \emptyset$ и справедлива альтернатива: либо $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N = \mathbb{R}$ (что эквивалентно условию $N(\mathcal{T}_q) = \emptyset$); либо $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N = N(\mathcal{T}_q) \neq \mathbb{R}$ и подгруппа $\mathcal{T}_q^N$ циклическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что группа $\mathcal{T}_q$ коммутативная. Легко заметить, что $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N \neq \emptyset$ и, соответственно, $\mathcal{T}_q^N$ является подгруппой.

Если $\mathcal{T}_q^N = \langle e \rangle$, то $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N = \mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{T}_q^N \neq \langle e \rangle$. Очевидно, что $\mathcal{T}_q^N \neq \mathcal{T}_q$. По теореме 6.4 отображение $\alpha: \mathcal{T}_q \rightarrow \mathbb{R}$ задает гомоморфизм. Тогда для любых $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\alpha(q^n \cdot \hat{q}^{-m}) = n\alpha(q) - m\alpha(\hat{q}) = n\alpha(q) - m.$$

Элемент $\bar{q} \in \mathcal{T}_q^N$ тогда и только тогда, когда существуют $n, m \in \mathbb{Z}$ такие, что $\bar{q} = q^n q^{-m}$ и $n\alpha(q) - m = 0$. Так как $\mathcal{T}_q^N \neq \langle e \rangle$, то n не равно нулю и, следовательно, $\alpha(q)$ – рациональное число. Пусть $\alpha(q) = m'/n'$ – несократимая дробь. Тогда для любого $\bar{q} = q^n \hat{q}^{-m}$ такого, что $\bar{q} \in \mathcal{T}_q^N$, получим $m = km'$, $n = kn'$ для некоторого k . Следовательно, любой элемент $\bar{q} \in \mathcal{T}_q^N$ имеет представление $\bar{q} = (q^{n'} \hat{q}^{-m'})^k$, т.е. подгруппа $\mathcal{T}_q^N$ циклическая. Из цикличности подгруппы $\mathcal{T}_q^N$ и следует, что $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N = N(\mathcal{T}_q)$.

Приведем новое доказательство хорошо известного факта [1], [2].

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть $q \in K_p^+$. Число вращения $\alpha(q)$ рационально тогда и только тогда, когда: либо $N(\mathcal{T}_q) \neq \emptyset$ (что эквивалентно условию $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N \neq \mathbb{R}$); либо $N(\mathcal{T}_q) = \emptyset$ (что эквивалентно условию $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N = \mathbb{R}$) и $\mathcal{T}_q$ – циклическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\alpha(q)$ – рациональное число и $\alpha(q) = m/n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, и дробь несократимая.

Если $N(\mathcal{T}_q) \neq \emptyset$, то необходимость доказана.

Предположим, что $N(\mathcal{T}_q) = \emptyset$. Тогда $\mathcal{T}_q^N = \langle e \rangle$. По теореме 6.4 существует мономорфизм $A: \mathcal{T}_q \rightarrow \mathbb{R}$, где для любого $\bar{q} \in \mathcal{T}_q$ $A(\bar{q}) = \alpha(\bar{q})$. Так как группа $\mathcal{T}_q$ с двумя образующими q и $\hat{q}$, а $\alpha(\hat{q}) = 1$, то в силу рациональности числа $\alpha(q)$ образ мономорфизма A , т.е. $\text{Im } A$, является циклической группой. Так как группа $\mathcal{T}_q$ и $\text{Im } A$ изоморфны, то и группа $\mathcal{T}_q$ циклическая.

Достаточность. Если $N(\mathcal{T}_q) \neq \emptyset$, то существует элемент $\bar{q} \in \mathcal{T}_q^N$, $\bar{q} \neq e$. Элемент $\bar{q}$ имеет представление $\bar{q} = q^n \hat{q}^{-m}$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$. Тогда в силу леммы 6.1 $\alpha(\bar{q}) = 0$, т.е.

$$\alpha(\bar{q}) = \alpha(q^n \hat{q}^{-m}) = n\alpha(q) - m = 0,$$

откуда и следует рациональность числа $\alpha(q)$.

Пусть $N(\mathcal{T}_q) = \emptyset$ и $\mathcal{T}_q$ – циклическая группа. Так как $\mathcal{T}_q^N = \langle e \rangle$, то по теореме 6.4 существует мономорфизм $A: \mathcal{T}_q \rightarrow \mathbb{R}$, где для любого $\bar{q} \in \mathcal{T}_q$ $A(\bar{q}) = \alpha(\bar{q})$. Так как группа $\mathcal{T}_q$ циклическая, то циклической будет и группа $\text{Im } A = \langle \alpha(q), \alpha(\hat{q}) \rangle$, откуда и следует рациональность числа $\alpha(q)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть $q \in K_p^+$ и число вращения $\alpha(q)$ рациональное. Если $N(\mathcal{T}_q) \neq \emptyset$, то $\mathcal{T}_q^N \neq \langle e \rangle$ и любой элемент $\bar{q} \in \mathcal{T}_q^N$ имеет представление: при некоторых $n, m \in \mathbb{R}$ $\bar{q} = q^n \hat{q}^{-m}$ и справедливо условие $\alpha(q) = m/n$. Числа m и n взаимно простые тогда и только тогда, когда элемент $\bar{q} = q^n \hat{q}^{-m}$ является образующей циклической группы $\mathcal{T}_q^N$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 6.5 и 6.6 и схемы доказательства теоремы 6.5.

Для любого $q \in K_p^+$ через A_q будем обозначать гомоморфизм $A_q: \mathcal{T}_q \rightarrow \mathbb{R}$, где для любого $\bar{q} \in \mathcal{T}_q$ $A_q(\bar{q}) = \alpha(\bar{q})$. (Так как по теореме 6.5 $\text{Fix } \mathcal{T}_q^N \neq \emptyset$, то $\mathcal{T}_q^N$ является подгруппой. Тогда по теореме 6.4 отображение A_q определяет гомоморфизм.)

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Пусть $q \in K_p^+$. Число вращения $\alpha(q)$ рационально тогда и только тогда, когда $\text{Im } A_q$ — циклическая группа.

Для группы $Q \subseteq K_p^+$ определим новую группу $\mathcal{T}_Q = \langle Q, \hat{q} \rangle$, где $\hat{q} = t + 1$. Установим связь между свойствами этих групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$. Условия $\overline{Q}^N = Q^N$, $\overline{\mathcal{T}_Q}^N = \mathcal{T}_Q^N$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\overline{Q}^N = Q^N$, то отображение A из теоремы 6.4, определенное для группы Q , является гомоморфизмом и для любых $q_1, q_2 \in Q$ $\alpha(q_1 q_2) = \alpha(q_1) + \alpha(q_2)$. В силу теоремы 6.5 для любого $q \in Q$ отображение A_q также является гомоморфизмом и для любых $q \in Q, m \in \mathbb{Z}$ $\alpha(\hat{q}^m q) = \alpha(\hat{q}^m) + \alpha(q) = m + \alpha(q)$. Любой элемент группы $\mathcal{T}_Q$ имеет представление $\hat{q}^m q$, где $m \in \mathbb{Z}$, а q — некоторый элемент группы Q . Тогда для любых элементов $f_1, f_2 \in \mathcal{T}_Q$, имеющих представление $f_1 = \hat{q}^m q_1, f_2 = \hat{q}^n q_2, m, n \in \mathbb{Z}$, справедлива цепочка соотношений

$$\alpha(f_1 f_2) = \alpha(\hat{q}^{(m+n)} q_1 q_2) = \alpha(\hat{q}^{(m+n)}) + \alpha(q_1 q_2) = (m + n) + \alpha(q_1) + \alpha(q_2),$$

откуда и следует, что отображение A из теоремы 6.4, определенное для группы $\mathcal{T}_Q$, также является гомоморфизмом. В таком случае по теореме 6.4 $\overline{\mathcal{T}_Q}^N = \mathcal{T}_Q^N$.

Доказательство в обратную сторону очевидно.

Итак, с помощью числа вращения $\alpha(q)$ для группы $Q \subseteq K_p^+$, удовлетворяющей условию $Q^N = \overline{Q}^N$, можно построить элемент $A \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$, где для любого $q \in Q$ $A(q) = \alpha(q)$.

Заметим, если для группы $Q \in K_p^+$ имеет место условие $Q^N = \overline{Q}^N$ (условие существования гомоморфизма A), то выполнено условие $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ (существование инвариантной меры).

Другой способ построения элементов $A \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$, связанный с существованием инвариантных мер, предложен в работе [7].

Пусть $Q \subseteq K^+$ и существует Q -инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Тогда можно определить гомоморфизм: $\forall q \in Q$

$$\tau_\mu(q) = \begin{cases} \mu([t, q(t))), & \text{если } q(t) > t; \\ 0, & \text{если } q(t) = t; \\ -\mu([q(t), t)), & \text{если } q(t) < t. \end{cases}$$

Определение гомоморфизма τ_μ в силу теоремы о факторгруппе (см. §5) не зависит от выбора точки $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\ker \tau_\mu = Q^N$ и τ_μ является тривиальным элементом $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $Q = Q^N$.

Мы здесь дадим новое доказательство предложения из [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если μ и ν две Q -инвариантные σ -конечные борелевские меры, то существует константа $c > 0$ такая, что $\tau_\mu = c\tau_\nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q^N = \langle e \rangle$. Если $\mathbb{P}(Q) \neq \emptyset$, то предложение следует из условия строгой эргодичности группы Q (см. теорему 3.4). Если $\mathbb{P}(Q) = \emptyset$, то группа Q циклическая и доказательство очевидно.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если факторгруппа Q/Q^N циклическая, то доказательство также очевидно. Пусть факторгруппа Q/Q^N не циклическая. Тогда доказательство следует из строгой эргодичности группы Q (следствие 4.1).

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$. Отображение $A: Q \rightarrow \mathbb{R}$, где для любого $q \in Q$ $A(q)$ есть число вращения $\alpha(q)$, является гомоморфизмом (т.е. $A \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$) тогда и только тогда, когда существует Q -инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Более того, найдется константа $c > 0$ такая, что $A = c\tau_\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из существования меры μ по теореме 4.1 следует, что $Q^N = \overline{Q}^N$, т.е. гомоморфизм A корректно определен. Обратное. Если гомоморфизм A корректно определен, то по теореме 6.4 $Q^N = \overline{Q}^N$. Так как группа Q содержится в K_p^+ , то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$, что эквивалентно существованию меры.

Докажем последний пункт теоремы. Пусть $Q^N = \langle e \rangle$. Если $\mathbb{P}(Q) \neq \emptyset$, то предложение следует из строгой эргодичности группы Q (см. теорему 3.4) и последнего пункта доказательства теоремы 6.2. Если $\mathbb{P}(Q) = \emptyset$, то группа Q циклическая и доказательство очевидно.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если факторгруппа Q/Q^N циклическая, то доказательство очевидно. Пусть факторгруппа Q/Q^N не циклическая. Тогда группы Q и $\tilde{Q}_F$ строго эргодичны (см. следствие 4.1 и конструкции доказательства леммы 4.2) с одной и той же мерой μ . Из конструкций доказательства теоремы 6.4 следует, что $A = \tilde{A}\delta\tau$ ($\tilde{A}$ – гомоморфизм, определенный в теореме 6.4 для группы $\tilde{Q}_F$). Так как для группы $\tilde{Q}_F$ имеют место условия $\tilde{Q}_F^N = \langle e \rangle$, $\mathbb{P}(\tilde{Q}_F) \neq \emptyset$, то для нее доказательство следует из предыдущего пункта, т.е. $\tilde{A} = c\tau_\mu$. Тогда $A = c\tau_\mu\delta\tau$. Вместе с тем для любого элемента $q \in \ker \delta\tau$ имеет место условие $\tau_\mu(q) = 0$, т.е. $\ker \delta\tau \in \ker \tau_\mu$. Поэтому $A = c\tau_\mu$.

Из доказанной теоремы следует, что метрический инвариант в виде Q -инвариантной меры и топологический инвариант в виде числа вращения гомеоморфизма порождают линейно зависимые элементы пространства $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 6.8. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ с Q -инвариантной σ -конечной борелевской мерой μ . Группа Q строго эргодична тогда и только тогда, когда $\text{Im } \tau_\mu$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о факторгруппе (см. §5) и следствия 4.1 получим, что группа Q строго эргодична тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}_F \neq \emptyset$, что эквивалентно условию не цикличности факторгруппы Q/Q^N . Так как $\ker \tau_\mu = Q^N$, то факторгруппа Q/Q^N изоморфна образу $\text{Im } \tau_\mu$, откуда и следует утверждение теоремы.

В работе [7, предложение 2.2] доказывается слабая форма теоремы о строгой эргодичности группы Q .

§ 7. Проективно-инвариантные меры

В этом параграфе для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию,

приводятся результаты по исследованию метрического инварианта в виде проективно-инвариантной меры. Дана эквивалентная формулировка условию существования такого метрического инварианта в виде условия полусопряженности такой группы некоторой подгруппе группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$ (теорема 7.1). Исследуемый метрический инвариант обобщает понятие инвариантной меры. Описаны структура носителя проективно-инвариантной меры, условия непрерывности этой меры (леммы 7.2, 7.3, теорема 7.2), условия строгой проективной эргодичности группы Q (теорема 7.4). Следуя работе [7], по проективно-инвариантной мере строится гомоморфизм $A_Q \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$. Описана нормальная подгруппа $C = \ker A_Q$ (теорема 7.3). Приводятся достаточные условия топологической сопряженности группы Q подгруппе аффинных преобразований прямой (теоремы 7.5, 7.6). Из исследований по проективно-инвариантной мере следует отметить работу [7], в которой изучены различные критерии существования проективно-инвариантной меры, связанные с метрическими свойствами некоторых выделенных нормальных подгрупп. Там, в частности, даны критерии существования проективно-инвариантной меры для разрешимых групп.

Пусть μ — σ -конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$. Если q — гомеоморфизм $\mathbb{R}$, сохраняющий ориентацию, то определим меру $.q\mu$: для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ положим $.q\mu(E) = \mu(q^{-1}(E))$. Если $q, \bar{q} \in K^+$, то $(q\bar{q}).\mu = q.(\bar{q}.\mu)$. Заметим, что мера μ является q -инвариантной, если $q.\mu = \mu$.

Следуя работе [7], введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Борелевская σ -конечная мера μ называется Q -проективно-инвариантной, если для любого $q \in Q$ существует константа $c(q) > 0$ такая, что $.q\mu = c(q)\mu$.

Если для любого $q \in Q$, $c(q) = 1$, то, очевидно, такая мера является Q -инвариантной.

Если существует Q -проективно-инвариантная мера μ , то отображение $A_Q: Q \rightarrow \mathbb{R}$, где для любого $q \in Q$ $A_Q(q) = \log c(q)$, определяет гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Q -проективно-инвариантная мера μ является Q -инвариантной тогда и только тогда, когда $A_Q = 0$.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 7.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ . Если для конечного интервала $[t_1, t_2]$ существует элемент $q \in Q$ такой, что $q(t_1) = t_1$, $q(t_2) = t_2$ и для любого $t \in]t_1, t_2[$ $q(t) \neq t$, то $]t_1, t_2[\cap \text{supp } \mu = \emptyset$. Более того, если при этом $A_Q(q) \neq 0$, то $[t_1, t_2] \cap \text{supp } \mu = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть доказательства непосредственно следует из σ -конечности меры μ . Вторая часть доказательства следует из того, что t_1, t_2 — неподвижные точки, а $c(q) \neq 1$.

Пусть $Q \subseteq K^+$. Для любого $q \in Q^N$ определим

$$T_q = \sup\{t : t \in \text{Fix}\langle q \rangle\}, \quad t_q = \inf\{t : t \in \text{Fix}\langle q \rangle\},$$

и для любого $q \in Q \setminus Q^N$ положим $T_q = t_q = -\infty$.

ЛЕММА 7.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ . Тогда:

а) для любого $q \notin \ker A_Q$ справедливо включение

$$\text{supp } \mu \subseteq]-\infty, t_q[\cup]T_q, +\infty[;$$

б) если для некоторого $q \in Q^N$, $q \notin \ker A_Q$ выполняется условие

$$\text{supp } \mu \cap]T_q, +\infty[\neq \emptyset \quad (\text{supp } \mu \cap]-\infty, t_q[\neq \emptyset),$$

то для любого $\bar{q} \in \ker A_Q \cap Q^N$ $T_{\bar{q}} = +\infty$ ($t_{\bar{q}} = -\infty$) и $T_q \in N(\langle q \rangle) \cap N(\langle \bar{q} \rangle)$ ($t_q \in N(\langle q \rangle) \cap N(\langle \bar{q} \rangle)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $c(q) \neq 1$, то по лемме 7.1 $\mu([t_q, T_q]) = \emptyset$.

б) Пусть $\text{supp } \mu \cap]T_q, +\infty[\neq \emptyset$. Так как мера μ является $\bar{q}$ -инвариантной, то $\text{supp } \mu \subseteq \text{Fix } \langle \bar{q} \rangle$. Из определения точки T_q следует, что для любого $M > T_q$ $\text{supp } \mu \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$. Следовательно, $\text{Fix } \langle \bar{q} \rangle \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$, т.е. $T_{\bar{q}} = +\infty$. Свойство $T_q \in N(\langle q \rangle) \cap N(\langle \bar{q} \rangle)$ непосредственно следует из того, что $\text{supp } \mu \subseteq \text{Fix } \langle \bar{q} \rangle$ и для любого $\varepsilon > 0$ $\text{supp }]T_q, T_q + \varepsilon[\neq \emptyset$. Случай, указанный в скобках, доказывается аналогичным образом.

ЛЕММА 7.3. Пусть задана группа $Q \in K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ . Тогда для любых $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$ справедливо одно из условий:

- а) $t_{q_1} = t_{q_2}$, $T_{q_1} \neq T_{q_2}$, $\text{supp } \mu \subseteq]-\infty, t_{q_1}[$;
- б) $t_{q_1} \neq t_{q_2}$, $T_{q_1} = T_{q_2}$, $\text{supp } \mu \subseteq]T_{q_1}, +\infty[$;
- в) $t_{q_1} = t_{q_2}$, $T_{q_1} = T_{q_2}$, $\text{supp } \mu \subseteq]-\infty, t_{q_1}[\cup]T_{q_2}, +\infty[$;
- г) $t_{q_2} > T_{q_1}$, $t_{q_1}, T_{q_2} \in \mathbb{R}$, $\text{supp } \mu \cap]-\infty, t_{q_1}[\neq \emptyset$, $\text{supp } \mu \cap]T_{q_2}, +\infty[\neq \emptyset$;
- д) $t_{q_1} > T_{q_2}$, $t_{q_2}, T_{q_1} \in \mathbb{R}$, $\text{supp } \mu \cap]-\infty, t_{q_2}[\neq \emptyset$, $\text{supp } \mu \cap]T_{q_1}, +\infty[\neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $t_{q_1} = t_{q_2}$, $T_{q_1} \neq T_{q_2}$. Для определенности положим, что $T_{q_1} > T_{q_2}$. Предположим, что $\text{supp } \mu \cap]T_{q_2}, +\infty[\neq \emptyset$. По лемме 7.1 $T_{q_2} \neq +\infty$ и $\mu([t_{q_1}, T_{q_1}]) = 0$. Но в силу Q -проективно-инвариантности меры μ для любого $\varepsilon > 0$ $\mu([T_{q_2}, T_{q_2} + \varepsilon]) > 0$. Противоречие. Следовательно, $\text{supp } \mu \cap]T_{q_2}, +\infty[= \emptyset$.

б) Доказывается аналогично случаю а).

в) Доказательство очевидно.

г) Пусть $t_{q_2} > T_{q_1}$. Предположим, что $t_{q_1} = -\infty$.

Тогда по лемме 7.1 $\mu([-\infty, T_{q_1}]) = 0$. В силу Q -проективно-инвариантности меры μ должны выполняться условия: $\mu([-\infty, t_{q_2}]) = 0$; для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, $\mu([T_{q_1}, T_{q_1} + \varepsilon]) > 0$. Противоречие. Следовательно, $t_{q_1} \neq -\infty$. Точно также доказывается, что $T_{q_2} \neq +\infty$. Остальные условия следуют из условия Q -проективно-инвариантности меры μ , взаимного расположения точек t_{q_1} , T_{q_1} и свойства а) леммы 7.2.

д) Доказательство аналогично доказательству пункта г). Все остальные случаи нереализуемы в силу Q -проективно-инвариантности меры μ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ . $\text{Fix } Q^N = \emptyset$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_q$, такие, что $t_{q_2} > T_{q_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Fix } Q^N = \emptyset$. Тогда в силу предложения 5.2 для любого $M > 0$ $\text{supp } \mu \cap]-\infty, M[\neq \emptyset$, $\text{supp } \mu \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$. Из предложения 7.1 и условия $\text{Fix } Q^N = \emptyset$ следует, что $A_Q \neq 0$. Из условий $A_Q \neq 0$, $\text{Fix } Q^N = \emptyset$ следует, что $Q^N \setminus \ker A_Q \neq \emptyset$. Если бы не существовало элементов $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$, со свойством $t_{q_2} > T_{q_1}$, то по лемме 7.3 выполнялось бы условие б), что в свою очередь приводит к условию $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$. Полученное противоречие и доказывает наличие элементов q_1, q_2 с нужными свойствами. Обратное утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ и $\text{Fix } Q^N = \emptyset$. Тогда:

- а) для любого $q \in Q^N$, $q \notin \ker A_Q$, имеют место условия: $t_q \neq -\infty$, $T_q \neq +\infty$, $\mu(]-\infty, t_q]) = +\infty$, $\mu(]T_q, +\infty[) = +\infty$;
- б) для любого $q \in \ker A_Q \cap Q^N$ имеют место условия $t_q = -\infty$, $T_q = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Этот пункт непосредственно следует из пункта г) леммы 7.3.

б) Этот пункт непосредственно следует из пункта а) доказываемой леммы и пункта б) леммы 7.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ . Если для $q \in Q^N$, $q \notin \ker A_Q$, имеют место условия $t_q \neq -\infty$, $T_q \neq +\infty$, $\text{supp } \mu \cap]-\infty, t_q[\neq \emptyset$, $\text{supp } \mu \cap]T_q, +\infty[\neq \emptyset$, то для любых $t \in]-\infty, t_q[$, $T \in]T_q, +\infty[$ справедливо соотношение

$$\text{sign}[q(t) - t] = -\text{sign}[q(T) - T].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторых $\bar{t} \in]-\infty, t_q[$, $\bar{T} \in]T_q, +\infty[$ выполняется условие $\text{sign}[q(\bar{t}) - \bar{t}] = \text{sign}[q(\bar{T}) - \bar{T}]$. Но в силу определения точек t_q , T_q тогда и для любых $t \in]-\infty, t_q[$, $T \in]T_q, +\infty[$ справедливы условия: $\text{sign}[q(t) - t] = \text{sign}[q(T) - T]$. Для определенности предположим, что $\text{sign}[q(T) - T] = +$. Так как $c(q) \neq 1$, то получим, что $\mu(]t_q - \varepsilon, t_q]) = +\infty$ при некотором $\varepsilon > 0$. Но это противоречит σ -конечности меры μ , что и доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ .

- а) Если $\mu(]-\infty, 0]) = \mu(]0, +\infty[) = +\infty$, то $Q \setminus Q^N \subseteq \ker A_Q$.
- б) Если при сколь угодно большом $M > 0$ $\text{supp } \mu \cap]-\infty, -M[\neq \emptyset$, $\text{supp } \mu \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$ и $\mu(]-\infty, -M]) < +\infty$ или $\mu(]M, +\infty[) < +\infty$, то $Q^N = \ker A_Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\mu(]-\infty, 0]) = \mu(]0, +\infty[) = +\infty$. Рассмотрим элемент $q \in Q \setminus Q^N$. Если бы $c(q) \neq 1$, т.е. $q \notin \ker A_Q$, то либо $\mu(]-\infty, 0]) < +\infty$, либо $\mu(]0, +\infty[) < +\infty$. Следовательно, $c(q) = 1$, т.е. $q \in \ker A_Q$.

б) Для любого $\bar{q} \in Q \setminus Q^N$ должно быть $c(\bar{q}) \neq 1$, т.е. $\bar{q} \notin \ker A_Q$, иначе для любого $M > 0$ $\mu(]-\infty, -M]) = \mu(]M, +\infty[) = +\infty$. Следовательно, $\ker A_Q \subseteq Q^N$. Предположим, что существует элемент $q \in Q^N \setminus \ker A_Q$. По свойству а) леммы 7.2 $t_q \neq -\infty$, $T_q \neq +\infty$. Так как $c(q) \neq 1$, то $\mu(]-\infty, t_q]) = \mu(]T_q, +\infty[) = +\infty$. Противоречие. Следовательно, $c(q) = 1$, т.е. $q \in \ker A_Q$.

Для группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, с Q -проективно-инвариантной σ -конечной борелевской мерой μ определим подгруппы

$$C = \ker A_Q, \quad H = \ker A_Q \cap Q^N.$$

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ . Если при сколь угодно большом $M > 0$ $\text{supp } \mu \cap]-\infty, -M[\neq \emptyset$, $\text{supp } \mu \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$ и $\mu(]-\infty, -M]) < +\infty$ или $\mu(]M, +\infty]) < +\infty$, то $Q^N = \overline{Q}^N$ и существует Q -инвариантная мера (это эквивалентно условию $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по предложению 7.5 $Q^N = \ker A_Q$, то мера μ является Q^N -инвариантной, т.е. $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$, а это по теореме 4.1 эквивалентно условию существования некоторой Q -инвариантной меры ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Пусть выполняются условия следствия 7.1. Если $\mu(]-\infty, 0]) = \mu(]0, +\infty]) = +\infty$, то для любых двух элементов $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$, справедливы утверждения в), г) и д) леммы 7.3.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Q -проективно-инвариантная мера μ существует тогда и только тогда, когда группа Q полусопряжена подгруппе $.Q$ группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$. Более того, Q -инвариантная мера μ существует (что эквивалентно условию $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$) тогда и только тогда, когда в формулировке теоремы $.Q$ является подгруппой группы сдвигов на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует Q -проективно-инвариантная мера μ . Зафиксируем точку $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Определим

$$\tilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \begin{cases} \mu([\bar{t}, t)), & t > \bar{t}, \\ 0, & t = \bar{t}, \\ -\mu([t, \bar{t})), & t < \bar{t}. \end{cases}$$

Каждому элементу $q \in Q$ поставим в соответствие аффинное преобразование $.q(t) = h_q + c(q)t$, где $h_q = \tilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t})))$, а коэффициент $c(q)$ из определения Q -проективно-инвариантности меры μ . Через $.Q$ обозначим группу аффинных преобразований, определенных таким образом. Отображение $\eta^\# : Q \rightarrow .Q$, где $\eta^\#(q) = .q$, определяет эпиморфизм.

Определим отображение $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где для любого $t \in \mathbb{R}$ $\eta(t) = \tilde{\mu}([\bar{t}, t))$. Тогда для любых $q \in Q$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(q(t)) &= \tilde{\mu}([\bar{t}, q(t))) = \tilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t})) + \tilde{\mu}([q(\bar{t}), q(t))) \\ &= h_q + c(q)\eta(t) = .q(\eta(t)), \end{aligned}$$

откуда и следует, что группа Q будет полусопряжена группе $.Q$.

Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть существуют подгруппа $.Q$ группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$, монотонное отображение $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, эпиморфизм $\eta^\# : Q \rightarrow .Q$ такие, что группа Q полусопряжена группе $.Q$, и множество $\eta(\mathbb{R})$ состоит из более чем одной точки. Для любых $\bar{t}, t \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \leq t$, определим функцию $\mu([\bar{t}, t)) = \eta(t) - \eta(\bar{t})$. Так как мера определяется своими значениями на

полуинтервалах вида $[a, b)$, то таким образом определенная μ задает нетривиальную меру на $\mathbb{R}$.

Для любого $q \in Q$ имеет место перестановочное соотношение $\eta \cdot q = .q \cdot \eta$, где $.q = \eta^\#(q)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu([q(\bar{t}), q(t))) &= |\eta(q(\bar{t})) - \eta(q(t))| = |.q(\eta(\bar{t})) - .q(\eta(t))| \\ &= c(q)|\eta(\bar{t}) - \eta(t)| = c(q)\mu([\bar{t}, t)), \end{aligned}$$

откуда и следует Q -проективно-инвариантность меры μ .

Наконец, проведем доказательство последнего абзаца. Если мера μ является Q -инвариантной, то по предложению 7.1 $A_Q = 0$ и поэтому $.Q$ является подгруппой группы сдвигов на $\mathbb{R}$.

Пусть $.Q$ является подгруппой группы сдвигов. Тогда мера $\mu([\bar{t}, t)) = |\eta(\bar{t}) - \eta(t)|$, определенная выше, такова, что для всех $q \in Q$ $\mu([q(\bar{t}), q(t))) = \mu([\bar{t}, t))$, т.е. она является Q -инвариантной.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть задана группа $Q \in K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная мера μ . Тогда C и H – нормальные подгруппы группы Q , а факторгруппа C/H изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, $H = \ker \eta^\#$, где $\eta^\#$ – гомоморфизм из теоремы 7.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормальность подгруппы C следует из определения группы $C = \ker A_Q$. Очевидно, что мера μ является C -инвариантной. Из конструкции группы C и H следует, что $C^N = H$. Из C -инвариантности меры μ следует, что $\bar{C}^N = C^N$. Тогда утверждение о факторгруппе C/H следует из теоремы 2.1. С другой стороны, из C -инвариантности меры μ и условия $C^N = H$ следует, что для любых $q \in H$ и только для них выполняются условия $c(q) = 1, h_q = 0$, откуда и следует $H = \ker \eta^\#$ (определение $c(q), h_q, \eta^\#$ смотри в доказательстве теоремы 7.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Отображение η и Q -проективно-инвариантная мера μ непрерывны одновременно.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Если $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, то мера μ непрерывная и группа Q топологически полусопряжена группе $.Q$, где $.Q$ – подгруппа группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, то не существует Q -инвариантной меры и, соответственно, $A_Q \neq 0$. По предложению 7.2 существуют элементы $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$, для которых $t_{q_2} > T_{q_1}$. Группа Q полусопряжена группе аффинных преобразований $.Q$ (смотри теорему 7.1), причем элементы $.q_1(t) = c(q_1)t + h_{q_1}, .q_2(t) = c(q_2)t + h_{q_2}$ соответствуют элементам q_1, q_2 . Очевидно, что $c(q_1) \neq 1, c(q_2) \neq 1$. Определим подгруппу $.C = \{.q : .q \in *_Q, c(.q) = 1\}$.

Рассмотрим случай, когда элементы $.q_1, .q_2$ не коммутируют. Тогда элемент $.\bar{q} = .q_1 \cdot .q_2 \cdot .q_1^{-1} \cdot .q_2^{-1}$ нетривиален и $\text{Fix}(. \bar{q}) = \emptyset$, т.е. $.\bar{q} \in .C$. Более того, несложно заметить, что группа $.C$ не циклическая. Заметим, что группа $(\eta^\#)^{-1}(.C)$ совпадает с группой C . Тогда факторгруппа C/C^N (напомним, что $C^N = H$) также будет не циклической, а мера μ C -инвариантной. По следствию 4.1 мера μ является непрерывной.

Случай, когда нетривиальные элементы $.q_1, .q_2$ коммутируют, не реализуем, так как в этом случае $t_{q_2} = T_{q_1}$, что противоречит условию $t_{q_2} > T_{q_1}$.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Если $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, то $H \neq C$, $C \neq Q$, а факторгруппа C/H не циклическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства теоремы 7.2 был построен элемент $\bar{q} \in \ker A_Q \setminus Q^N$, откуда и следует условие $H \neq C$. Условие $C \neq Q$ следует из предложения 7.2. Не цикличность факторгруппы C/H была установлена в ходе доказательства теоремы 7.2.

Определим множества

$$Q_{+\infty}^N = \{q : q \in Q^N, \sup\{t : q(t) = t\} = +\infty\}, \quad Q_{-\infty}^N = \{q : q \in Q^N, \inf\{t : q(t) = t\} = -\infty\}, \quad Q_{\infty}^N = Q_{+\infty}^N \cap Q_{-\infty}^N.$$

ЛЕММА 7.4. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Если $H \neq C$, то $Q_{\infty}^N = Q_{-\infty}^N = Q_{+\infty}^N = H$. Более того, $Q \setminus Q^N \neq \emptyset$ и $Q \setminus Q^N \subseteq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \neq C$. Заметим, что мера μ является C -инвариантной и $C^N = H$. Тогда первая часть доказываемого утверждения следует из леммы 2.3. Так как $C \setminus H \neq \emptyset$, то $C \setminus H \subseteq Q \setminus Q^N$ и по утверждению а) предложения 7.5 выполняется условие $Q \setminus Q^N \subseteq C$.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Тогда $H \subseteq C \subseteq Q$, H и Q – нормальные подгруппы группы Q , факторгруппа Q/H изоморфна группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$, а факторгруппы C/H , Q/C изоморфны подгруппам аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, $C^N = H$, $\text{Fix } C^N \neq \emptyset$, для любого $t \in \text{Fix } C^N$ множество $P(C(t))$ не зависит от t , обозначается через $\mathbb{P}_F(C)$ и выполняется одно из следующих условий:

- 1) либо $\mathbb{P}_F(C) = \emptyset$ и факторгруппа C/H циклическая;
- 2) либо $\mathbb{P}_F(C)$ является совершенным нигде не плотным множеством и факторгруппа C/H не циклическая, но не более чем счетна;
- 3) либо $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$ (что эквивалентно каждому из условий $H = \langle e \rangle$, $\text{Fix } C^N = \mathbb{R}$), факторгруппа $C/H = C$ не циклическая, а группа Q топологически сопряжена группе аффинных преобразований прямой. Множества $N(C)$, $\text{Fix } C^N$, $\mathbb{P}_F(C)$ являются Q -инвариантными. Если $\mathbb{P}_F(C) \neq \emptyset$, то $\text{supp } \mu = \mathbb{P}_F(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормальность подгрупп C , H и утверждение о факторгруппе C/H доказана в следствии 7.2. Утверждение о факторгруппе Q/C непосредственно следует из определения группы $C = \ker A_Q$, $A_Q \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$. Утверждение о факторгруппе Q/H следует из теоремы 7.1 и условия $H = \ker \eta^\#$. Пункты 1), 2) и условие $\text{Fix } C^N = \mathbb{R}$ из пункта 3) следуют из леммы 4.2, примененной к группе C .

Докажем последнее утверждение сформулированной теоремы. Если $t \in N(C)$, то найдется элемент $q \in C$, для которого $q(t) = t$. Покажем, что для любого элемента $\bar{q} \in Q$ выполняется условие $\bar{q}(t) \in N(C)$. Построим элемент $\tilde{q} = \bar{q} \cdot q \cdot (\bar{q})^{-1}$, принадлежащий C . Очевидно, что $\tilde{q}(\bar{q}(t)) = \bar{q}(t)$, и поэтому $\bar{q}(t) \in N(C)$. Следовательно, множество $N(C)$ является Q -инвариантным. Пусть

$t \in \text{Fix } C^N$. Тогда для любого $q \in C^N$ выполняется условие $q(t) = t$. Предположим, что для некоторых $q \in C^N$, $\bar{q} \in Q$, $t \in \text{Fix } C^N$ имеет место условие $q(\bar{q}(t)) \neq \bar{q}(t)$. Очевидно, что элемент $\tilde{q} = (\bar{q})^{-1} \cdot q \cdot \bar{q}$ принадлежит C^N , но вместе с тем $\tilde{q}(t) \neq t$. Противоречие. Следовательно, множество $\text{Fix } C^N$ является Q -инвариантным. Пусть $\mathbb{P}_F(C) \neq \emptyset$. Так как мера μ является C -инвариантной, то по лемме 4.3 $\text{supp } \mu \subseteq \text{Fix } C^N$. Образует Q -инвариантное замкнутое множество $\mathbf{P}(Q(\mathbb{P}_F(C)))$ (множество предельных точек орбитального множества $Q(\mathbb{P}_F(C))$). Очевидно, что $\mathbb{P}_F(C) \subseteq \mathbf{P}(Q(\mathbb{P}_F(C)))$. Покажем справедливость обратного включения. Предположим, что обратное включение неверно. Тогда найдется открытая окрестность W и элемент $q \in Q$ такие, что $W \cap \mathbb{P}_F(C) \neq \emptyset$, $q(W) \cap \mathbb{P}_F(C) = \emptyset$, $q(W) \cap \mathbf{P}(Q(\mathbb{P}_F(C))) \neq \emptyset$. По лемме 3.6 $\mu(W) > 0$, и, следовательно, $\mu(q(W)) > 0$. Но это противоречит лемме 3.8. Следовательно, множество $\mathbb{P}_F(C)$ является Q -инвариантным. Так как мера μ является C -инвариантной, то по следствию 4.1 $\text{supp } \mu = \mathbb{P}_F(C)$.

Остается доказать последнее утверждение пункта 3). Так как в этом случае мера μ непрерывна и $\text{supp } \mu = \mathbb{R}$, то отображение η из теоремы 7.1 является гомеоморфизмом, откуда и следует последнее утверждение пункта 3).

Сформулируем результат, аналогичный следствию 4.1 и связывающий структуру множества неподвижных точек с условием строгой проективной эргодичности. Для этого докажем следующую лемму.

ЛЕММА 7.5. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ и либо $\text{Fix } Q^N$ состоит из более чем одной точки, либо $\text{Fix } Q^N = N(Q)$. Тогда такая группа Q не является строго проективно-эргодичной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.1 условие $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ эквивалентно существованию Q -инвариантной σ -конечной борелевской меры μ . Рассмотрим два случая.

Случай первый: $Q \neq Q^N$. Определим монотонно возрастающее отображение $\hat{\eta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу: для любого $t \in \mathbb{R}$, $\hat{\eta}(t) = \exp(\tilde{\mu}([0, t)))$, где

$$\tilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \begin{cases} \mu([\bar{t}, t)), & t \geq \bar{t}, \\ -\mu([t, \bar{t})), & t < \bar{t}. \end{cases}$$

В силу условия $Q \neq Q^N$ функция $\hat{\eta}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\eta}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\eta}(t) = +\infty.$$

Определим коммутативную группу аффинных преобразований

$$.\hat{Q} = \{.\hat{q} = at : \exists q \in Q, a = \hat{\eta}(q(0))\}$$

и эпиморфизм $\hat{\eta}^\# : Q \rightarrow .\hat{Q}$ по правилу: для любого $q \in Q$, $\hat{\eta}^\#(q) = .\hat{q}$, где $.\hat{q} = at$, $a = \hat{\eta}(q(0))$. В силу условия $Q \neq Q^N$ группа $.\hat{Q}$ не тривиальная. Простая проверка показывает, что группа Q полусопряжена нетривиальной группе $.\hat{Q}$, не являющейся группой сдвигов (с монотонным отображением $\hat{\eta}$ и эпиморфизмом $\hat{\eta}^\#$). Тогда по теореме 7.1 существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера $\hat{\mu}$. Более того, эта мера не является Q -инвариантной. Следовательно,

группа Q имеет хотя бы одну Q -инвариантную меру μ и одну Q -проективно-инвариантную (не являющуюся инвариантной) меру $\hat{\mu}$. Следовательно, группа Q не является проективно строго эргодичной.

Случай второй: $Q = Q^N$. Если множество $\text{Fix } Q^N$ состоит из более чем одной точки, то, выбрав две из них t_1 и t_2 , определим меры: для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$

$$\mu_1(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_1 \in B, \\ 0, & \text{если } t_1 \notin B, \end{cases} \quad \mu_2(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_2 \in B, \\ 0, & \text{если } t_2 \notin B. \end{cases}$$

Очевидно, что $\mu_1 \neq \mu_2$, но вместе с тем эти меры являются Q -инвариантными, что и доказывает утверждение леммы.

Пусть множество $\text{Fix } Q^N$ состоит из одной точки. Легко заметить, что в этом случае группа Q коммутативная. Для определенности будем полагать, что множество $\text{Fix } Q^N$ совпадает с точкой 0. Очевидно, что полупрямые $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ являются Q -инвариантными множествами. Рассмотрим ограничение элементов группы Q на полуось $]0, +\infty[$. Они образуют группу Q^+ . Пусть $\theta:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ — произвольное монотонное возрастающее непрерывное отображение, образ которого совпадает со всем $\mathbb{R}$. Образует группу $\hat{Q}$ гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, по правилу:

$$\hat{Q} = \{\hat{q} : \exists \bar{q} \in Q^+, \hat{q} = \theta \bar{q} \theta^{-1}\}.$$

Очевидно, что для группы $\hat{Q}$ выполняется условие $N(\hat{Q}) = \emptyset$. Тогда по теореме 3.7 для нее существует $\hat{Q}$ -инвариантная σ -конечная борелевская мера $\hat{\mu}$. Определим монотонно возрастающее непрерывное отображение $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(t) = \begin{cases} \exp(\hat{\mu}([0, \theta(t)])), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

где

$$\tilde{\mu}([0, t]) = \begin{cases} \hat{\mu}([0, t]), & t \geq 0, \\ -\hat{\mu}([t, 0]), & t < 0. \end{cases}$$

Образует коммутативную группу аффинных преобразований

$$.Q = \{.q = at : q \in Q, a = \eta(q(\theta^{-1}(0)))\}$$

и определим эпиморфизм $\eta^\# : Q \rightarrow .Q$ по правилу: для любого $q \in Q$, $\eta^\#(q) = .q$, где $.q = at$, $a = \eta(q(\theta^{-1}(0)))$. Очевидно, что группа $.Q$ нетривиальная. Простая проверка показывает, что группа q полусопряжена нетривиальной группе $.Q$ аффинных преобразований, не являющейся группой сдвигов. Тогда по теореме 7.1 существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Более того, эта мера не является Q -инвариантной. С другой стороны, определим новую меру $\tilde{\mu}$, сосредоточенную в точке 0. Очевидно, что мера $\tilde{\mu}$ является Q -инвариантной и поэтому $\mu \neq \tilde{\mu}$. Следовательно, группа Q не является строго проективно-эргодичной.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) $\text{Fix } Q^N = \emptyset$;
- б) $H \neq C$ и $C \neq Q$;
- в) факторгруппа Q/H не коммутативная;
- г) группа Q является строго проективно-эргодичной, а мера μ непрерывной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность условий а) и б). По следствию 7.3 из а) следует б). Пусть выполняются условия б). По лемме 7.4 из условия $H \neq C$ следует, что $Q \setminus Q^N \neq \emptyset$ и $Q \setminus Q^N \subseteq C$. Тогда $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, иначе из леммы 2.3 следовало бы, что $Q^N = Q_\infty^N$ и, соответственно, $C = Q$. Пусть справедливо условие а) или эквивалентное ему условие б).

Эквивалентность условий б) и в) очевидна.

Покажем, что из условия а) следует г). Предположим, что $\bar{\mu}$ — произвольная Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера. Для этой меры можем также определить гомоморфизм $\bar{A}_Q$, подгруппы $\bar{C} = \ker \bar{A}_Q$, $\bar{H} = \ker \bar{A}_Q \cap Q^N$. По следствию 7.3 из условия а) следует, что $\bar{H} \neq \bar{C}$ и $\bar{C} \neq Q$. Из леммы 7.4 и условий $\bar{H} \neq \bar{C}$, $H \neq C$ следует, что $Q_\infty^N = \bar{H} = H$, $Q \setminus Q^N \neq \emptyset$, $Q \setminus Q^N \subseteq C$, $Q \setminus Q^N \subseteq \bar{C}$. В таком случае $C = \bar{C} = Q_\infty^N \cup (Q \setminus Q^N)$. По следствию 7.3 факторгруппа C/H не циклическая. Меры $\mu, \bar{\mu}$ являются C -инвариантными, а по следствию 4.1 группа C строго эргодична. Условие строгой проективной эргодичности группы Q следует из строгой эргодичности группы C , а непрерывность меры μ следует из теоремы 7.2.

Остается показать, что из условия г) следует а). Но это следует из леммы 7.5.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Если $C = \langle e \rangle$, то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$, что эквивалентно существованию инвариантной меры.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 7.4.

ТЕОРЕМА 7.5. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Группа Q минимальна тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- 1) $C \neq \langle e \rangle$ и $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$;
- 2) $C = \langle e \rangle$ и $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа Q минимальна. Покажем, что из минимальности группы Q следует, что $H = \langle e \rangle$. Действительно, из условия $H \neq \langle e \rangle$ следует, что $\text{Fix } H \neq \mathbb{R}$. Но $\text{Fix } C^N = \text{Fix } H$ является замкнутым множеством, а по теореме 7.3 и Q -инвариантным. Но условие $\text{Fix } C^N \neq \mathbb{R}$ противоречит минимальности группы Q . Следовательно, $H = \langle e \rangle$.

Предположим, что $C \neq \langle e \rangle$. Тогда $C \neq H$. Если $Q = C$, то из условия минимальности группы $Q = C$ следует, что $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$ и доказательство следует из пункта 3) теоремы 7.3. Если $Q \neq C$, то из теоремы 7.4 и следствия 7.3 следует нециклическость факторгруппы C/H . В таком случае $\mathbb{P}_F(C) \neq \emptyset$. Из Q -инвариантности множества $\mathbb{P}_F(C)$ и минимальности группы Q следует, что $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$.

Если $C = \langle e \rangle$, то по следствию 7.4 $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$. Тогда из леммы 4.2 в силу минимальности группы Q следует, что $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$.

Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть выполняются предположения 1). Из условия $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$ и леммы 4.2 следует, что $\text{Fix } C^N = \mathbb{R}$ и C -орбита любой точки $t \in \text{Fix } C^N$ всюду плотна в $\mathbb{R}$. Очевидно, что Q -орбита любой точки $t \in \mathbb{R}$ тем более будет плотна в $\mathbb{R}$. Пусть выполняются предположения 2). Из условия $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$ и леммы 4.2 следует, что $\text{Fix } Q^N = \mathbb{R}$ и Q -орбита любой точки $t \in \text{Fix } Q^N$ всюду плотна в $\mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Если группа Q минимальна, то $H = \langle e \rangle$.

ТЕОРЕМА 7.6. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ . Если группа Q минимальная, то мера μ непрерывная и группа Q топологически сопряжена группе $.Q$, где $.Q$ – подгруппа группы аффинных преобразований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 7.5 возникают два случая:

- 1) $C \neq \langle e \rangle$ и $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$;
- 2) $C = \langle e \rangle$ и $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$.

Если выполняется случай 1), то доказательство следует из пункта 3) теоремы 7.3. Если выполняется случай 2), то для такой группы $N(Q) = \emptyset$ и доказательство следует из теоремы 3.6.

Если Q – нетривиальная группа класса $(\mathcal{A})$, т.е. $N(Q) = \emptyset$, то существует Q -инвариантная σ -конечная борелевская непрерывная мера μ , и элемент τ_μ всегда определяет нетривиальный элемент из $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

Если Q – группа класса $(\mathcal{B})$, т.е. $N(Q) \neq \emptyset$, $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$, то существует Q -инвариантная σ -конечная борелевская мера μ , однако в случае $Q^N = Q$ гомоморфизм τ_μ тривиальный. Вместе с тем, в этом случае могут существовать Q -проективно-инвариантные σ -конечные борелевские меры μ , для которых A_Q определяет нетривиальный элемент из $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

Если Q – группа класса $(\mathcal{C})$, т.е. $\text{Fix } Q^N = \emptyset$ и существует Q -проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ , то A_Q определяет нетривиальный элемент из $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

§ 8. Группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, класса $\mathcal{P}$. Коммутативные группы

В этом параграфе изучаются свойства групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, не содержащих свободных подполугрупп (групп класса $\mathcal{P}$) и групп субэкспоненциального роста (групп класса $\mathcal{L}$) [4]–[6]. Напомним, что группа класса $\mathcal{P}$ – это такая группа, которая не имеет свободных подполугрупп с более чем одной образующей. Под свободной полугруппой мы понимаем такую полугруппу, в которой нет соотношений вида $G_1 = G_2$, где G_1 и G_2 – нетривиально тождественные произведения положительных степеней образующих. Очевидно, что $\mathcal{L} \in \mathcal{P}$, а коммутативные группы относятся к группам класса $\mathcal{L}$. Существуют примеры конечнопорожденных групп, которые не являются аменабельными [3], [5], поэтому не принадлежат классу $\mathcal{L}$. Вместе с тем в работе [3] построена группа, которая не

принадлежит классу $\mathcal{P}$, но является аменабельной. В той же работе [3, лемма 3.1] приводится важный критерий того, что группа не принадлежит классу $\mathcal{P}$.

Здесь для групп класса $\mathcal{P}$ уточняется взаиморасположение неподвижных точек произвольных двух элементов группы (лемма 8.1), даются различные критерии существования инвариантной меры (теоремы 8.1–8.4) для групп класса $\mathcal{P}$. В частности, теорема 8.1 является обобщением на группы класса $\mathcal{P}$ предложения 3.1 работы [7] о существовании инвариантной меры для коммутативных групп, содержащих элемент без неподвижной точки.

ЛЕММА 8.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathcal{P}$. Тогда:

- 1) если для $q_1, q_2 \in Q^N \setminus e$, $t_1, t_2 \in N(\langle q_1 \rangle)$ $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_1 \rangle) = \emptyset$, $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_2 \rangle) \neq \emptyset$, то $t_1, t_2 \in N(\langle q_2 \rangle)$ и $t_1, t_2 \in \mathbf{P}(N(\langle q_2 \rangle) \cap]t_1, t_2[)$;
- 2) если для $\bar{q} \in Q^N$, $\bar{t} = \sup\{t : t \in N(\langle \bar{q} \rangle)\} < +\infty$ ($\bar{t} = \inf\{t : t \in N(\langle \bar{q} \rangle) > -\infty\}$), то для любого $q \in Q^N$ $\bar{t} \in N(\langle q \rangle)$. Более того, если $N(\langle q \rangle) \cap]\bar{t}, +\infty[\neq \emptyset$ ($N(\langle q \rangle) \cap]-\infty, \bar{t}[\neq \emptyset$), то $\bar{t} \in \mathbf{P}(N(\langle q \rangle) \cap]\bar{t}, +\infty[)$ ($\bar{t} \in \mathbf{P}(N(\langle q \rangle) \cap]-\infty, \bar{t}[)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем от противного. Пусть $t_1, t_2 \in N(\langle q_1 \rangle)$, $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_1 \rangle) = \emptyset$, $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_2 \rangle) \neq \emptyset$ и для определенности $t_1 \notin N(\langle q_2 \rangle)$. Рассмотрим точку $\bar{t} = \inf\{t : t \in]t_1, t_2[\cap N(\langle q_2 \rangle)\}$. Из замкнутости множества $N(\langle q_2 \rangle)$ следует, что $\bar{t} \in N(\langle q_2 \rangle)$. Очевидно, что $]t_1, \bar{t}[\cap N(\langle q_2 \rangle) = \emptyset$, $]t_1, \bar{t}] \cap N(\langle q_1 \rangle) = \emptyset$. Тогда [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Противоречие. Следовательно, $t_1 \in N(\langle q_2 \rangle)$.

Предположим, что $t_1 \notin \mathbf{P}(N(\langle q_2 \rangle) \cap]t_1, t_2[)$. Рассмотрим точку $\bar{t}$, определенную выше. Так как $t_1 \notin \mathbf{P}(N(\langle q_2 \rangle) \cap]t_1, t_2[)$, то $\bar{t} > t_1$. Тогда для некоторой степени q_2^n найдется точка $\tilde{t} \in]t_1, \bar{t}[$ такая, что $\tilde{t} = \sup\{t : q_1(t) = q_2^n(t), t \in]t_1, \bar{t}[\}$. Очевидно, что $\tilde{t} < \bar{t}$ и $q_1(\tilde{t}) = q_2^n(\tilde{t})$. Определим элемент $q_1^{-1} \cdot q_2^n$. Очевидно, что для этого элемента $q_1^{-1} q_2^n(\tilde{t}) = \tilde{t}$, и для любых $t \in]\tilde{t}, \bar{t}[$ $q_1^{-1} q_2^n(t) \neq t$. Тогда в интервале $[\tilde{t}, \bar{t}[$ нет неподвижных точек для q_2 , а в интервале $]\tilde{t}, \bar{t}]$ нет неподвижных точек для элемента $q_1^{-1} q_2^n$. Следовательно, [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, чего не может быть. Поэтому должно выполняться условие $t_1 \in \mathbf{P}(N(\langle q_2 \rangle) \cap]t_1, t_2[)$. Точно так же доказывается, что $t_2 \in N(\langle q \rangle)$, $t_2 \in \mathbf{P}(N(\langle q_2 \rangle) \cap]t_1, t_2[)$. Первая часть утверждения доказана.

2) Пусть $\bar{q} \in Q^N$ и $\bar{t} = \sup\{t : t \in N(\langle \bar{q} \rangle)\} < +\infty$. Рассмотрим произвольное $q \in Q^N$. Если $q = e$, то доказательство очевидно. Пусть $q \in Q^N \setminus e$. Предположим, что $\bar{t} < \tilde{t}$, где $\tilde{t} = \sup\{t : t \in N(\langle q \rangle)\}$. Тогда найдутся $n \in \mathbb{Z}$, $t' \in]\bar{t}, +\infty[$ такие, что $q^{-n}(t') = q(t')$ и для любого $t \in [\bar{t}, t'[$ $q^{-n}(t) \neq q(t)$. Для элемента $\bar{q}$ на интервале $]\bar{t}, t']$ нет неподвижных точек, а на интервале $[\bar{t}, t'[$ нет неподвижных точек для элемента $q^{-1} q^{-n}$. В таком случае [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, чего не может быть. Следовательно, должно выполняться условие $\bar{t} \geq \tilde{t}$.

Предположим, что $\bar{t} \notin N(\langle q \rangle)$. Пусть $t' = \inf\{t : t \in N(\langle q \rangle), t > \bar{t}\}$. На интервале $[\bar{t}, t'[$ нет неподвижных точек для q . На интервале $]\bar{t}, t']$ нет неподвижных точек для $\bar{q}$. В таком случае [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, чего не может быть. Следовательно, $\bar{t} \in N(\langle q \rangle)$.

Покажем, что в случае $N(\langle q \rangle) \cap]\bar{t}, +\infty[\neq \emptyset$, $\bar{t} \in \mathbf{P}(N(\langle q \rangle) \cap]\bar{t}, +\infty[)$. Докажем от противного. Пусть $t' \in N(\langle q \rangle)$, $t' > \bar{t}$ и на интервале $]\bar{t}, t'[$ нет подвижных точек для q . Тогда найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что элемент $q^n \cdot (\bar{q})^{-1}$ имеет неподвижные точки

на интервале $]\bar{t}, t' [$ и, более того, $\bar{t} < t', \bar{t} = \sup\{t : t \in]\bar{t}, t' [, q^n(\bar{q})^{-1}(t) = t\}$. Но это противоречит свойству 1 леммы 8.1. Следовательно, $\bar{t} \in P(N(\langle q \rangle) \cap]\bar{t}, +\infty [)$.

Случай $\bar{t} = \inf\{t : t \in N(\langle \bar{q} \rangle)\} > -\infty$ доказывается аналогичным образом.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathcal{P}$. Тогда

- 1) для любых $q_1, q_2 \in Q^N$ $N(\langle q_1 \rangle) \cap N(\langle q_2 \rangle) \neq \emptyset$;
- 2) для группы Q справедливо условие $\bar{Q}^N = Q^N$.

Доказательство непосредственно следует из пункта 1) леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть задана коммутативная группа $Q \subseteq K^+$. Тогда

- 1) группа Q относится к классу $\mathcal{P}$;
- 2) для любого $q \in Q$ множество $N(\langle q \rangle)$ инвариантно относительно группы Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно, что всякая коммутативная группа является группой субэкспоненциального роста. В таком случае она не может содержать свободную подполугруппу с двумя образующими, иначе была бы группой экспоненциального роста. Следовательно, $Q \in \mathcal{P}$.

2) Пусть $q_1, q_2 \in Q$ – произвольные элементы. Покажем, что $N(\langle q_1 \rangle)$ инвариантно относительно q_2 . Если $N(\langle q_1 \rangle) = \emptyset$, то доказательство очевидно. Пусть $N(\langle q_1 \rangle) \neq \emptyset$ и $\bar{t} \in N(\langle q_1 \rangle)$. Рассмотрим точку $q_2(\bar{t})$. Тогда $q_1(q_2(\bar{t})) = q_2(q_1(\bar{t})) = q_2(\bar{t})$, откуда и следует, что $q_2(\bar{t}) \in N(\langle q_1 \rangle)$. Так как $q_1, q_2 \in Q$ – произвольные элементы, то отсюда следует Q -инвариантность множества $N(\langle q \rangle)$ для любого $q \in Q$.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathcal{P}$. Если $Q \neq Q^N$, то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ (что эквивалентно существованию Q -инвариантной σ -конечной борелевской меры μ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $Q^N = \langle e \rangle$ $\text{Fix } Q^N = \mathbb{R}$ и доказательство очевидно.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$. Рассмотрим элемент $q \in Q \setminus Q^N$. Выберем точку $\bar{t} = 0$. Точками орбиты $\langle q \rangle(\bar{t})$, т.е. точками последовательности $\{q^k(\bar{t})\}_{k \in \mathbb{Z}}$, которая не имеет предельных точек, прямая $\mathbb{R}$ разбивается на счетное число интервалов $\{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Действие элемента q есть перекладывание интервалов $\{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ на один интервал влево или вправо. Зафиксируем интервал Δ_0 . По следствию 8.1 $\bar{Q}^N = Q^N$. Тогда по лемме 2.4 $\lambda(\bar{\Delta}_0) < +\infty$. Более того, очевидно, что $\lambda(\bar{\Delta}_0) \leq \text{mes}(\bar{\Delta}_0)$. В таком случае для любого $\bar{q} \in Q^N$ $N(\langle \bar{q} \rangle) \cap \bar{\Delta}_0 \neq \emptyset$.

Пусть $q_1, q_2 \in Q^N$ – произвольные элементы. Если один из элементов q_1 или q_2 равен e , то очевидно, что $N(\langle q_1 \rangle) \cap N(\langle q_2 \rangle) \cap \bar{\Delta}_0 \neq \emptyset$. Если $q_1, q_2 \in Q^N \setminus e$, то по указанному выше свойству $N(\langle q_1 \rangle) \cap \bar{\Delta} \neq \emptyset$, $N(\langle q_2 \rangle) \cap \bar{\Delta}_0 \neq \emptyset$, а по свойству 1) леммы 8.1 следует, что

$$N(\langle q_1 \rangle) \cap N(\langle q_2 \rangle) \cap \bar{\Delta}_0 \neq \emptyset.$$

В таком случае система множеств $\{N(\langle \bar{q} \rangle) \cap \bar{\Delta}_0\}_{\bar{q} \in Q^N}$ образует центрированную систему компактных множеств и в силу теоремы Тихонова

$$\bigcap_{\bar{q} \in Q^N} N(\langle \bar{q} \rangle) \cap \bar{\Delta}_0 \neq \emptyset,$$

откуда и следует, что $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

Теорема 8.1 обобщает предложение 3.1 работы [7]. Сформулируем результат, который для групп класса $\mathcal{P}$ усиливает теорему 4.2.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathcal{P}$. $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда существует конечный замкнутый интервал $\overline{\Delta}_0$ такой, что для любого $q \in Q^N \setminus e$ $N(\langle q \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна.

Достаточность. Для любых $q_1, q_2 \in Q^N \setminus e$ из условий $N(\langle q_1 \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \emptyset$, $N(\langle q_2 \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \emptyset$ в силу пункта 1) леммы 8.1 следует $N(\langle q_1 \rangle) \cap N(\langle q_2 \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \emptyset$. В таком случае $\{N(\langle q \rangle) \cap \overline{\Delta}_0\}_{q \in Q^N}$ образует центрированную систему компактных множеств и в силу теоремы Тихонова

$$\bigcap_{q \in Q^N} N(\langle q \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \emptyset,$$

откуда и следует, что $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathcal{P}$. Если группа Q конечно-порожденная, то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $Q^N = \langle e \rangle$ имеем $\text{Fix } Q^N = \mathbb{R}$ и теорема доказана.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если $Q \neq Q^N$, то по теореме 8.1 $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ и утверждение доказано.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$ и $Q = Q^N$. В силу условия 1) из следствия 8.1 и конечной порожденности группы Q получим, что $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Если $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, а группа Q конечно-порождена или $Q \neq Q^N$, то Q не принадлежит классу $\mathcal{P}$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 8.1 и 8.3.

В частности, любая некоммутативная группа аффинных преобразований не принадлежит классу $\mathcal{P}$.

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть задана группа $Q \in K^+$, для которой выполняется одно из условий:

- а) группа Q удовлетворяет условию (Р);
- б) существует $\bar{q} \in Q^N$, для которого множество $N(\langle \bar{q} \rangle)$ ограничено;
- в) существует конечно-порожденная подгруппа с неограниченной орбитой.

Если группа Q класса $\mathcal{P}$, то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие а). Очевидно, что гомеоморфизм $\hat{q}(t) = t + 1$ перестановочен с любым гомеоморфизмом $q \in Q$. Заметим, что для любого $q \in Q$ множество $N(\langle q \rangle)$ инвариантно относительно гомеоморфизма $\hat{q}$. По теореме 8.3 для любых $q_1, q_2 \in Q$ $\text{Fix } \hat{Q}^N \neq \emptyset$, где $\hat{Q} = \langle q_1, q_2, \hat{q} \rangle$. Так как $\text{Fix } \hat{Q}^N$ также инвариантно относительно преобразования $\hat{q}$, то $\text{Fix } \hat{Q}^N \cap [0, 1] \neq \emptyset$. В таком случае система компактных множеств $\{N(\langle q \rangle) \cap [0, 1]\}_{q \in Q^N}$ является центрированной и по теореме Тихонова $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

Рассмотрим случай б). Доказательство этого пункта дословно повторяет доказательство пункта а), в котором элемент $\hat{q}$ заменяется на элемент $\bar{q}$, а множество $[0, 1]$ на конечный замкнутый интервал, содержащий множество $N(\langle \bar{q} \rangle)$.

Рассмотрим случай в). Если $Q \neq Q^N$, то доказательство следует из теоремы 8.1. Пусть $Q = Q^N$, а $H = \langle q_1, \dots, q_k \rangle$ — конечно-порожденная подгруппа, для

которой орбита $H(t)$ при некотором $t \in \mathbb{R}$ не ограничена. Для любого $q \in Q$ образуем группу $\hat{H} = \langle q, H \rangle$. По теореме 8.3 $\text{Fix } \hat{H}^N \neq \emptyset$. Так как множество $\text{Fix } \hat{H}^N$ является $\hat{H}$ -инвариантным, а орбита $H(t)$ не ограничена, то найдется замкнутый интервал Δ , зависящий только от элементов $q_1, \dots, q_k$, такой, что $N(\langle q \rangle) \cap \Delta \neq \emptyset$. В таком случае система компактных множеств $\{N(\langle q \rangle) \cap [0, 1]\}_{q \in Q^N}$ является центрированной и по теореме Тихонова $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathcal{P}$ с $Q^N \neq \langle e \rangle$ и для любого $q \in Q^N \setminus e$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$. Тогда для любого $q \in Q^N \setminus e$ $\text{Fix } Q^N = N(Q) = N(\langle q \rangle)$ и $P(N(Q)) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого $q \in Q^N \setminus e$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$, то в силу леммы 8.1 для любого $q \in Q^N \setminus e$ $N(\langle q \rangle) = N(Q) = \text{Fix } Q^N$, откуда и следует, что $P(\text{Fix } Q^N) = P(N(Q)) = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. Пусть Q – группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ класса $C^{(1)}$, сохраняющих ориентацию, элементы группы Q взаимно-трансверсальны, $Q^N \neq \langle e \rangle$, и группа Q принадлежит классу $\mathcal{P}$. Тогда для любого $q \in Q^N \setminus e$ $\text{Fix } Q^N = N(Q) = N(\langle q \rangle)$ и $P(N(Q)) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $q \in Q^N \setminus e$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$. Действительно, пусть для некоторого $q \in Q^N \setminus e$ $P(N(\langle q \rangle)) \neq \emptyset$. Выберем $\bar{t} \in P(N(\langle q \rangle))$. Существует последовательность из $N(\langle q \rangle)$ такая, что $t_k \rightarrow \bar{t}$, $k \rightarrow +\infty$. Из замкнутости множества $N(\langle q \rangle)$ следует, что $\bar{t} \in N(\langle q \rangle)$. В таком случае $\dot{q}(\bar{t}) = 1$, что противоречит условию следствия.

В случае гладкости $C^{(2)}$ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА (Plante [7]). Пусть задана коммутативная группа $Q \subseteq K^+$. Если для любого $q \in Q$ $q \in \text{Diff}^2(\mathbb{R})$, то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

Сформулируем один результат, который усиливает лемму 3.2 работы [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Если $q_1, q_2 \in K^+$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_2 > t_1$, $q_1(t_1) = t_1$, $q_2(t_2) = t_2$ или $t_2 = \infty$, гомеоморфизм q_2 не имеет неподвижных точек в интервале $(\bar{t}, t_2)$, $t_1 \in (\bar{t}, t_2)$, а гомеоморфизм q_1 – в интервале (t_1, t_2) , то группа, порожденная q_1, q_2 , имеет свободную подполугруппу с двумя образующими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_2 \neq +\infty$. Если гомеоморфизм q_1 не имеет неподвижных точек в интервале (t_1, t_2) , то выполняются все условия леммы 3.1 работы [3], откуда и следует доказательство. Если точка t_2 является неподвижной для гомеоморфизма q_1 , то, не нарушая общности, можем полагать, что для всех $t \in (t_1, t_2)$ имеют место условия $q_1(t) > t$, $q_2(t) > t$. В таком случае для некоторой положительной степени n существует точка $\bar{t} \in (t_1, t_2)$, для которой $q_1^n(\bar{t}) = q_2(\bar{t})$. Для элемента $q_1^n q_2^{-1}$ выполняются условия $q_1^n q_2^{-1}(t_2) = t_2$, $q_1^n q_2^{-1}(t_1) \neq t_1$, и найдется точка $t \in (t_1, t_2)$, для которой $q_1^n q_2^{-1}(t) = t$. Из полученных условий в силу свойства 1) леммы 8.1 для точки t_1 также должно выполняться условие $q_1^n q_2^{-1}(t_1) = t_1$. Противоречие. Следовательно, для таких групп условие того, что точка t_2 является неподвижной для гомеоморфизма q_1 , не реализуемо.

В лемме 3.2 работы [3] утверждалось, что группа, порожденная q_1, q_2 , имеет всего лишь экспоненциальный рост.

§9. Минимальные множества и структура орбит

Важность минимальных множеств определяется тем, что в случае их “нетривиальности” орбиты точек обладают некоторыми каноническими свойствами, а сами минимальные множества определяют важнейшие характеристики метрических инвариантов. К ранним исследованиям по минимальным множествам следует отнести работы Данжуа для гомеоморфизмов окружности. В литературе результаты такого типа известны под названием теорем Данжуа [1], [2]. Исследование минимальных множеств для счетных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приведены в работах [8]–[10]. В них указаны критерии существования минимальных множеств, и в этих условиях уточняется структура орбит. Аналогичные результаты для произвольных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приведены в теоремах 9.1 и 9.2, которые являются следствиями из результатов предыдущих параграфов. В работах [8]–[10] также исследуются критерии существования минимальных множеств для счетных групп диффеоморфизмов, формулировки которых приводятся в теореме 9.3.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть для группы $Q \subseteq K^+$ существует минимальное множество $E(Q)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

- 1) $E(Q)$ – дискретное множество, $E(Q) \subseteq \text{Fix } Q^N$, и множество $\text{Fix } Q^N$ состоит из объединения замкнутых орбит;
- 2) $E(Q)$ – совершенное нигде не плотное подмножество, является единственным минимальным множеством и содержится в замыкании орбиты $\overline{Q(t)}$ произвольной точки $t \in \mathbb{R}$;
- 3) $E(Q) = \mathbb{R}$ (что эквивалентно условию минимальности группы Q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $E(Q)$ – дискретное множество, то для любого элемента $q \in Q^N$ и любой точки $t \in E(Q)$ выполняется условие $q(t) = t$, откуда и следует, что $E(Q) \subseteq \text{Fix } Q^N$. Из дискретности множества $E(Q)$ следует, что множество $\mathbb{P}_F(Q) = \emptyset$ (лемма 4.2), а факторгруппа Q/Q^N циклическая, откуда и следует, что множество $\text{Fix } Q^N$ состоит из объединения замкнутых орбит.

2) Пусть $E(Q)$ – не дискретное множество. Покажем, что в случае $E(Q) \neq \mathbb{R}$ множество $E(Q)$ является совершенным нигде не плотным подмножеством. Действительно, предположим, что $\text{Int } E(Q) \neq \emptyset$. Тогда существует некоторый максимальный открытый интервал $\Delta = (\alpha, \beta)$ такой, что $\Delta \subseteq \text{Int } E(Q)$ и один из концов интервала Δ конечный. Для определенности предположим, что β конечно. В таком случае выполняются условия:

- а) $\beta \in E(Q)$, $\overline{Q(\beta)} = E(Q)$;
- б) для любого элемента $q \in Q$ либо $q(\Delta)$ совпадает с Δ , и, соответственно, $q(\beta) = \beta$, либо $q(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$.

Но тогда $\overline{Q(\beta)} \cap \Delta = \emptyset$, что противоречит условию $\overline{Q(\beta)} = E(Q)$. Следовательно, $\text{Int } E(Q) = \emptyset$, и множество $E(Q)$ является совершенным нигде не плотным подмножеством. В частности, для всякого $t \in \mathbb{R}$ минимальное множество $E(Q)$ содержится в замыкании точки t , т.е. $E(Q) \subseteq \overline{Q(t)}$.

3) Если $E(Q) = \mathbb{R}$, то доказательство минимальности группы Q следует из определения минимального множества $E(Q)$.

ТЕОРЕМА 9.2. *Пусть $Q \subseteq K^+$. Для существования минимального множества $E(Q)$ достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

- а) $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$;

- б) для любого $q \in Q$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$;
 в) Q содержит конечно-порожденную подгруппу H , имеющую неограниченную орбиту (в частности, существует элемент $q \in Q$, для которого $N(\langle q \rangle) = \emptyset$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$. Если $\mathbb{P}_F(Q) = \emptyset$ (лемма 4.2), то для любого $t \in \text{Fix } Q^N$ орбита $Q(t)$ является минимальным множеством. Если $\mathbb{P}_F(Q) \neq \emptyset$ (лемма 4.2), то множество $\mathbb{P}_F(Q)$ и является минимальным множеством.

б) Пусть для любого $q \in Q$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$. По теореме 5.1 в случае $\mathbb{P}_N(Q) \neq \emptyset$ множество $\mathbb{P}_N(Q)$ и является минимальным множеством. Если $\mathbb{P}_N(Q) = \emptyset$, то по той же теореме 5.1 $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$, и доказательство следует из пункта а).

в) Пусть Q содержит конечно-порожденную подгруппу H , имеющую неограниченную орбиту. Рассмотрим множество замыканий орбит $\overline{Q(t)}$ всех точек t прямой $\mathbb{R}$. На этом множестве введем отношение частичного порядка: $\overline{Q(t_1)} \leq \overline{Q(t_2)}$, если $\overline{Q(t_1)} \subseteq \overline{Q(t_2)}$. Выберем произвольную точку $t \in \mathbb{R}$ и возьмем замыкание орбиты $\overline{Q(t)}$. Фиксируем произвольную точку $t_1 \in \overline{Q(t)}$ и возьмем замыкание орбиты $\overline{Q(t_1)}$. Очевидно, что $\overline{Q(t_1)} \leq \overline{Q(t)}$ и они образуют цепь. По лемме Цорна такая цепь содержится в некоторой максимальной цепи $\{\overline{Q(t_\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, где A – некоторое множество индексов. Образует пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{Q(t_\alpha)}$. В силу условия в) теоремы существует конечный замкнутый интервал Δ такой, что для любой точки $t \in \mathbb{R}$ пересечение $\Delta \cap \overline{Q(t)}$ не пусто. Тогда множества $\Delta \cap \overline{Q(t_\alpha)}$, $\alpha \in A$, образуют центрированную систему множеств, и поэтому пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} (\overline{Q(t_\alpha)} \cap \Delta)$ не пусто. Следовательно, пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{Q(t_\alpha)}$ также не пусто и, как несложно заметить, оно образует минимальное множество.

Приведем результат, принадлежащий Salhi [8]–[10].

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть $Q \subseteq K^+$ – счетная группа. Если Q абелева и содержится в $\text{Diff}^2(\mathbb{R})$ или Q содержится в $\text{Diff}^\omega(\mathbb{R})$, то существует минимальное множество $E(Q)$.

§ 10. Представление группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, в виде цепи

Здесь для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, доказано существование некоторой канонической цепочки убывающих подгрупп с абелевыми факторгруппами (теорема 10.1). Используя это, приводится критерий разрешимости групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, не содержащих свободных подполугрупп с более чем одной образующей (предложение 10.1). Представление в виде цепи приводит к уточнению классификационной схемы для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ и ее подгруппа G . Q и G связаны цепью $((Q, G)\text{-цепь})$, если существует система подгрупп Q_α группы Q , удовлетворяющая следующим условиям:

1. индексы α составляют вполне упорядоченное множество с первым элементом 0 и последним элементом γ ;
2. $Q_0 = Q$, $Q_\gamma = G$;
3. если $\alpha < \beta$, то $Q_\beta \subset Q_\alpha$;

4. если индекс, непосредственно следующий за $\alpha \neq \gamma$, обозначить через $\alpha + 1$, то для всех $\alpha \neq \gamma$ $Q_{\alpha+1}$ – нормальная подгруппа группы Q_α и $Q_\alpha/Q_{\alpha+1}$ – абелева группа;
 5. если индекс α предельный, то $Q_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} Q_\beta$.
- (Q, Q) -цепь называется *тривиальной*.

Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Тогда множество $X = \text{Fix } Q$ состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов $\{\Delta_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq \mathbb{Z}$. Через Q_j , $j \in J$, обозначим ограничение группы Q на открытый интервал Δ_j (ограничение задается естественным гомоморфизмом $\varphi_j: Q \rightarrow Q_j$, $j \in J$, $J \subseteq \mathbb{Z}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Группа G называется *F-неприводимой*, если для любого $j \in J$ $\text{Fix } G_j^N = \emptyset$. (Q, G) -цепь называется *F-неприводимой*, если подгруппа G является *F-неприводимой*. (Q, G) -цепь называется *N-исчерпываемой*, если $N(Q) \subseteq \text{Fix } G^N$.

Очевидно, что всякая *N-исчерпываемая* цепь является *F-неприводимой*.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Тогда существует подгруппа $G \subseteq Q$ такая, что (Q, G) образует *F-неприводимую* цепь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество Φ всевозможных подгрупп группы Q и введем в этом множестве отношение частичного порядка. Между подгруппами G_1, G_2 группы Q существует отношение порядка $G_1 \leq G_2$, если $G_2 \subseteq G_1$ и (G_1, G_2) образует цепь. По теореме Хаусдорфа группа Q содержится в некоторой максимальной цепи с началом Q и конечным элементом G . Остается показать, что группа G является *F-неприводимой*.

Действительно, пусть G не является *F-неприводимой*. Тогда существует $j \in J$ (определение 9.2), для которого $\text{Fix } G_j^N \neq \emptyset$. В таком случае $G_j \neq G_j^N$, G_j^N образует группу и по теореме 2.1 G_j/G_j^N – коммутативная группа. Так как $\varphi_j: G \rightarrow G_j$ – гомоморфизм (см. определение 10.2), то $\varphi_j^{-1}(G_j^N)$ – нормальная подгруппа группы G и факторгруппа $G/\varphi_j^{-1}(G_j^N)$ также является коммутативной группой. Но в таком случае цепь с началом Q и конечным элементом G не является максимальной. Противоречие. Следовательно, G является *F-неприводимой*.

Определим классы групп

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{loc}} &= \{Q : Q \subseteq K^+; \text{ существует } N\text{-исчерпываемая } (Q, G)\text{-цепь}\}, \\ \mathcal{C}_{\text{loc}} &= \{Q : Q \subseteq K^+, Q \notin \mathcal{A}_{\text{loc}}\}.\end{aligned}$$

Мы скажем, что группа $Q \subseteq K^+$ “локально” принадлежит классу $\mathcal{A}$ ($\mathcal{C}$), если она принадлежит $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ ($\mathcal{C}_{\text{loc}}$).

ЛЕММА 10.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ и ее подгруппа G , образующие (Q, G) -цепь. Если (Q, G) -цепь является *N-исчерпывающей* (т.е. группа Q принадлежит классу $\mathcal{A}_{\text{loc}}$), то группа G коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \mathbb{R} \setminus \text{Fix } G$. Оно состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов $\{\Delta_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq \mathbb{Z}$. Каждый интервал Δ_j является инвариантным относительно группы G . Если G_j , $j \in J$, – ограничение группы G на интервал Δ_j , то из условия *N-исчерпываемости* следует, что для любого $j \in J$ $N(G_j) = \emptyset$. В силу предложения 3.1 группа G_j , $j \in J$, коммутативна, откуда и следует доказываемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Пусть задана группа $Q \subseteq \mathcal{P}$, в которой для любого $q \in Q$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$. Тогда группа Q разрешима, ступени разрешимости не больше двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 8.2 для группы Q выполняется условие $Q^N = \overline{Q}^N$ и существует N -исчерпываемая (Q, G) -цепь длины один, в которой $G = Q^N$. Тогда по лемме 10.1 группа Q разрешима, ступени разрешимости не больше двух.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть задана группа $Q \subseteq \mathcal{P}$, в которой элементы $q \in Q$ являются диффеоморфизмами класса $C^{(1)}$ и взаимно-трансверсальны. Тогда группа Q разрешима, ступени разрешимости не больше двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как элементы группы Q взаимно-трансверсальны, то для любого $q \in Q$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$, и доказательство следует из предложения 10.1.

§11. Заключение

Группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, в зависимости от структуры множества неподвижных точек элементов группы (множества $N(Q)$) и множества неподвижных точек группы (множества $\text{Fix } Q^N$) допускают грубую классификацию на три непересекающихся класса $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Наиболее простой класс $\mathcal{A}$ состоит из коммутативных групп Q , для которых множество $N(Q)$ пусто (что эквивалентно условию $\text{Fix } Q^N = \mathbb{R}$).

Для групп Q классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ существует Q -инвариантная σ -конечная борелевская мера. Исследован метрический инвариант, обобщающий понятие Q -инвариантной меры – это Q -проективно-инвариантная мера. Существование Q -проективно-инвариантной меры эквивалентно условию полусопряженности группы Q группе $.Q$, где $.Q$ – подгруппа группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$. С помощью Q -проективно-инвариантных мер строятся нетривиальные элементы из $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$. Для групп Q , удовлетворяющих условию (Р) (группы гомеоморфизмов, элементы которых являются накрытиями гомеоморфизмов окружности), исследованы гомоморфизмы из $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$, порожденные числом вращения гомеоморфизма. Показано, что существование гомоморфизма, порожденного топологическим инвариантом – числом вращения гомеоморфизма, эквивалентно существованию метрического инварианта – Q -инвариантной меры. Группы с Q -проективно-инвариантной мерой могут принадлежать всем трем классам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Класс $\mathcal{C}$ состоит из групп Q , для которых множество $\text{Fix } Q^N$ пусто. Это наиболее сложный для исследования класс групп гомеоморфизмов. Группы Q , принадлежащие классу $\mathcal{C}$, допускают представление в виде (Q, G) -цепи, в которой подгруппа G “локально” принадлежит либо классу $\mathcal{A}$, либо классу $\mathcal{C}$. В силу этого возникает иная классификация групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, на два непересекающихся класса $\mathcal{A}_{\text{loc}}$, $\mathcal{C}_{\text{loc}}$.

Две упомянутые выше классификации связаны между собой следующим образом:

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\text{loc}}, \quad \mathcal{B} \subset (\mathcal{A}_{\text{loc}} \cup \mathcal{C}_{\text{loc}}), \quad \mathcal{C} \subset (\mathcal{A}_{\text{loc}} \cup \mathcal{C}_{\text{loc}}).$$

Если для группы Q выполняется условие $Q^N \neq \overline{Q}^N$, то она принадлежит классу $\mathcal{C}$ и содержит свободную подполугруппу с двумя образующими.

Группы из указанных выше классов допускают более детальное исследование в зависимости от топологических свойств орбит и множества неподвижных точек элементов группы, условия гладкости гомеоморфизмов, а также некоторых комбинаторных свойств исследуемых групп. В частности, если группа Q не содержит свободных подполугрупп с двумя образующими и для любого $q \in Q$ $P(N(\langle q \rangle)) = \emptyset$, то такая группа принадлежит классу $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ и разрешима, степени разрешимости не больше двух.

В дальнейшем для уточнения классификационной схемы следует провести более детальное исследование групп класса $\mathcal{C}$. Отметим еще раз, что все полученные результаты являются следствием существования частичного порядка в группах Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, определенного в лемме 2.1, и фундаментальной теоремы Гёльдера.

Автор признателен всем участникам семинаров “Динамические системы” (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова), “Теория групп” (Московский институт инженеров транспорта) и их руководителям Д. В. Аносову и Р. И. Григоричуку за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
3. Солодов В. В. Гомеоморфизмы прямой и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 1047–1060.
4. Григоричук Р. И., Курчанов П. Ф. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1990. Т. 58. С. 191–256.
5. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.
6. Plante I. F. Foliations with measure preserving holonomy // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 327–361.
7. Plante I. F. Solvable groups acting on the line // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. P. 401–414.
8. Salhi E. Sur les ensembles locaux // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1982. V. 295. № 12. P. 691–694.
9. Salhi E. Sur un theorie de structure de feuilletage de codimension // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1985. V. 300. № 18. P. 635–638.
10. Salhi E. Niveau de feuilles // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1985. V. 301. P. 219–222.
11. Бекларян Л. А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 3. С. 23–54.