Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Пальцев, О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 4, 59–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:29:01

УДК 517.956

Б. В. Пальцев

О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях

Для эллиптического с параметром уравнения второго порядка с дивергентной главной частью в липшицевой области Ω в рамках обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$ рассмотрены смешанные задачи (типа Зарембы) с неоднородными граничными условиями. Изучаются операторы Пуанкаре–Стеклова на липшицевом куске γ границы Γ , отвечающие однородным смешанным граничным условиям на $\Gamma \setminus \gamma$. В цилиндрической области с липшицевым сечением для однородного уравнения при однородных смешанных условиях на боковой поверхности и неоднородных граничных условиях на торцах при наличии разделения переменных проведено обоснование метода Фурье.

Библиография: 33 названия.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена некоторым аспектам теории смешанной краевой задачи

$$L(x, D, \mu)u(x) = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(x)|_{\Gamma_1} = \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \sigma(x)u(x) \right) \Big|_{\Gamma_2} = g(x) \quad (1.2)$$

в липшицевой области Ω n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, где $L(x, D, \mu)$ – эллиптический с параметром μ с дивергентной главной частью оператор второго порядка

$$\begin{aligned} L(x, D, \mu)u(x) = & - \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_j u(x)) \\ & + \sum_{i=1}^n a_i(x)D_i u(x) + (a_0(x) + \mu^2 q(x))u(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

($D_j = \partial/\partial x_j$), Γ_1 и Γ_2 – непересекающиеся части, составляющие границу Γ области Ω ,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \Big|_{\Gamma} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)n_i(x) \right) D_j u(x) \Big|_{\Gamma} \quad (1.4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00606).

– значения на Γ кономальной производной от u ($n_i(x)$ – компоненты единичной внешней нормали $\mathbf{n}$). Предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$ в общем случае комплексные, $q(x)$ – действительная функция из $L_\infty(\Omega)$, матрица $a_{ij}(x)$ эрмитова и равномерно положительная на Ω : $a_{ij}(x) = \overline{a_{ji}(x)}$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \bar{\zeta}_j \geq \alpha_0 |\zeta|^2, \quad \alpha_0 > 0, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$q(x)$ – также равномерно положительна на Ω :

$$q(x) \geq q_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.6)$$

где α_0, q_0 – постоянные. Коэффициент $\sigma(x)$ также предполагается в общем случае ограниченной измеримой функцией на Γ_2 . Параметр μ допускается комплексным, и может быть по модулю большим.

Теория общих краевых задач для эллиптических уравнений порядка $2m$, m – натуральное, с граничными условиями, удовлетворяющими в каждой точке условиям совместности (условиям Шапиро–Лопатинского), представляет собой вполне сложившуюся и хорошо разработанную теорию. Обычно здесь рассмотрения ведутся для областей с достаточно гладкими или вообще бесконечно дифференцируемыми границами и для уравнений с достаточно гладкими коэффициентами, см., например, [1]–[6]. Имеются направления, посвященные изучению эллиптических задач в областях с негладкими границами; из работ этих направлений отметим здесь лишь [7]–[9], см. также имеющиеся там ссылки.

Что касается общей теории смешанных эллиптических краевых задач, т.е. задач, для которых на двух или нескольких участках границы задаются граничные условия различных типов, то построение такой теории оказывается гораздо сложнее, и ее пока вряд ли можно считать полностью завершенной. По этой тематике отметим только работы [10]–[14], см. также некоторые главы в [9], (см. еще некоторые ссылки в [14]). В [10] был получен первый результат по существованию классического решения смешанной задачи для уравнения Лапласа и оценке первых производных вблизи поверхности $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2$. В [11]–[14] изучались общие смешанные граничные задачи для эллиптических уравнений порядка $2m$ (в [13] с $m = 1$), а в [14] даже и для систем, эллиптических по Дуглису–Ниренбергу. В [13] и [14], а также в других работах этих авторов на основе существенного развития методики Винера–Хопфа была построена общая теория эллиптических краевых задач для псевдодифференциальных уравнений в ограниченной области, и, как следствие этой теории, общая теория смешанных эллиптических граничных задач. При этом для обеспечения нормальной разрешимости в пространствах типа Соболева–Слободецкого задачи в общем случае рассматривались в обобщенной постановке: в граничные условия вводились операторы типа потенциала с неизвестными плотностями и на $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2$ задавались дополнительные граничные условия; изучалось асимптотическое поведение решений в окрестности $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2$. Отметим однако, что во всех этих работах (за исключением [9], где смешанные задачи рассмотрены в плоских полигональных областях) рассмотрения проводились в областях

с достаточно гладкими границами (заведомо более гладкими, чем общие липшицевы) и для решений с более высокой гладкостью (для уравнения 2-го порядка в этих работах решение рассматривается, как минимум, из пространств $W_2^l(\Omega)$, где $l > 3/2$).

Данная работа возникла из потребностей и в процессе обоснования итерационных методов с разделением на подобласти без перекрытия численного решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Такие методы имеют очень высокую скорость сходимости для диссипативных уравнений с большим действительным параметром μ в (1.1), (1.3). На практике обычно при разделении расчетной области (особенно, если подстраиваться под используемые сетки) возникают подобласти, границы которых могут иметь углы, ребра, пирамидальные вершины и т. д. Построение и исследование подобных методов базируются на исследовании возникающих на разделяющих поверхностях операторов типа Пуанкаре–Стеклова и обратных к ним, см., например, работы [15], [16], в которых теория операторов Пуанкаре–Стеклова получила существенное развитие. При этом требуется точное описание функциональных пространств, в которых действуют такие операторы, а также соответствующие оценки для них.

Для возникающих (в подобластях) смешанных задач вида (1.1), (1.2), которые являются вариационными (см. [7], [9], [17]–[20]), оказывается как раз весьма удобным расширение класса рассматриваемых областей до липшицевых. Для таких задач в таких областях сама теория разрешимости в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ (см. [20]) так же проста, как и для задач Дирихле или Неймана в областях с гладкими границами. В то же время имеющиеся тут простые и тем не менее точные результаты оказываются достаточными и хорошо приспособленными для ряда приложений, например, для упомянутых выше.

Содержание статьи следующее. В § 2 приводятся необходимые сведения из теории применяемых функциональных пространств. Для задач с параметром вида (1.1), (1.2), как и в [4], используется нормировка соболевских пространств со специальным вхождением параметра μ . В § 3 приводится доказательство теоремы о фредгольмовости задачи (1.1), (1.2) и сопряженной к ней и об однозначности разрешимости этих задач при достаточно больших $\operatorname{Re} \mu$. При этом перед формулировкой теоремы обсуждается понятие конормальной производной на Γ от обобщенных решений задач. Четвертый параграф посвящен теореме о разложениях по обобщенным собственным функциям эллиптического оператора (1.3) с однородными граничными условиями (1.2) в самосопряженном случае. Эта теорема является непосредственным обобщением результатов, представленных, например, в [18] для случая задачи Дирихле или 3-ей краевой в более гладких областях. В § 5 рассматриваются операторы Пуанкаре–Стеклова на открытом куске γ границы Γ для оператора (1.3) в том случае, когда на остальной части $\Gamma \setminus \gamma$, разбитой на два куска Γ_1 и Γ_2 , задаются однородные граничные условия вида (1.2). В самосопряженном случае описываются спектральные свойства такого оператора. Отметим, что в [15] и [16] операторы Пуанкаре–Стеклова изучались для вариационных задач в абстрактной форме, но, по существу, только для случая, когда $\Gamma_2 = \emptyset$. В последнем § 6 рассматриваются смешанные задачи для однородного уравнения в цилиндрической области с липшицевым сечением Λ с однородными смешанными условиями на боковой поверхности цилиндра и с неоднородными условиями Дирихле или

Неймана на торцах. Задачи в конечном итоге формулируются как задачи с заданием данных на торцах как функций или функционалов на сечении Λ из вводимых пространств $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ или $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$, описываемых внутренним образом. При этом γ_1 предполагается липшицевым куском $\partial\Lambda$. При использовании результатов §5 получено обоснование метода Фурье для такого вида смешанных задач, допускающих разделение переменных. Установлена сходимость соответствующих рядов в $W_2^1(\Omega)$; для самосопряженного оператора (1.3) со смешанными однородными условиями вида (1.2), в частности, установлена базисность собственных функций в пространствах $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Omega; \Gamma_1)$ и $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Omega; \Gamma_1)$.

Автор выражает благодарность В. П. Михайлову, В. И. Агошкову, А. К. Гушину и А. А. Дезину за ряд плодотворных обсуждений и полезных замечаний.

§2. Пространства Соболева–Слободецкого в липшицевых областях

В этом параграфе сформулируем необходимые для дальнейшего определения и результаты, сопровождая их в основном лишь комментариями и пояснениями. По поводу материала данного параграфа см. [20]–[28], [4], [5], [7] и [9]. Обобщение теории функциональных пространств Соболева $W_2^l(\Omega)$ на случай нецелых l в областях, а также на многообразиях более гладких, чем липшицевы, было построено в [22]. В [21] было получено описание следов функций из пространства $W_p^1(\Omega)$, $p > 1$, на липшицеву границу. Перенесение теории пространств Соболева–Слободецкого и развитой в [22] техники локализации с применением преобразования Фурье на случай липшицевых областей позволяют осуществить важные результаты о дифференцируемости почти всюду (п.в.) непрерывных по Липшицу функций и о справедливости классической формулы замены переменных в кратных интегралах при билипшицевых отображениях. Эти результаты, причем даже для более общего класса функций, были впервые получены в [27]; отметим также работу [28], в которой теорема о дифференцируемости п.в. липшиц-непрерывных функций, дополнительно с некоторыми важными подробностями, установлена проще.

Точки в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать, как и выше, латинскими маленькими буквами x , y и т. д., а иногда и большими буквами P , M и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (см. [7], [9], [19], [21], [23], [24], [26]). Ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *липшицевой областью* или *областью с липшицевой границей* Γ , если для любой точки (т.) $P \in \Gamma$ найдется такая декартова система координат ξ с началом в т. P , $\xi = (\xi', \xi_n)$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ и такая окрестность $O(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\xi'| < r_P, |\xi_n| < \delta_P\}$, $r_P > 0$, $\delta_P > 0$, что часть $\Gamma \cap O(P)$ границы Γ имеет в этой системе ξ представление

$$\xi_n = F_P(\xi') \quad \forall \xi' \in O'(P) = \{\xi' : |\xi'| < r_P\} \quad (2.1)$$

с функцией $F_P(\xi')$ непрерывной по Липшицу:

$$|F_P(\xi') - F_P(\eta')| \leq L_P |\xi' - \eta'| \quad \forall \xi', \eta' \in O'(P), \quad (2.2)$$

где L_P – некоторая постоянная для $O'(P)$, причем найдется такое $h_P > 0$, что множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : F_P(\xi') - h_P < \xi_n < F_P(\xi'), \xi' \in O'(P)\} \quad (2.3a)$$

принадлежит Ω , а множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : F_P(\xi') \leq \xi_n < F_P(\xi') + h_P, \xi' \in O'(P)\} \quad (2.36)$$

не имеет общих точек с Ω . Такие декартову систему ξ и окрестность $O(P)$ будем называть *подходящими* в т. $P \in \Gamma$.

Естественно, $O'(P)$ можно брать не шаровой, а какой-либо другой, например, прямоугольной.

Для любой т. $\xi' \in O'(P)$ будем обозначать через $M_{\xi'}$ точку из $\Gamma \cap O(P)$ с координатами $(\xi', F_P(\xi'))$ в подходящей системе ξ , относящейся к т. P . Окрестность $O'(P)$ с отображением $\xi' \leftrightarrow M_{\xi'}$ назовем *подходящей локальной картой* Γ в окрестности т. $P \in \Gamma$; набор ξ' представляет собой локальные координаты т. $M_{\xi'} \in \Gamma$ в этой карте.

Если $f(M)$, $M \in \Gamma$, — функция, определенная на Γ , то для всякой $P \in \Gamma$ и для всяких подходящих декартовой системы ξ , окрестности $O(P)$ и локальной карты $O'(P)$ функция

$$\hat{f}_P(\xi') = f(M_{\xi'}) \quad \forall \xi' \in O'(P)$$

представляет собой выражение функции $f(M)$ в локальной карте $O'(P)$. Если каждая из функций $\hat{f}_P(\xi')$ для каждой т. $P \in \Gamma$ и какого-нибудь одного набора (для т. P) подходящих системы ξ и окрестности $O(P)$ измерима по Лебегу на карте $O'(P)$, то $f(M)$ называется *измеримой* на Γ .

В силу теоремы Радемахера [27] (см. также [28]) и свойства (2.2) функция $F_P(\xi')$ в представлении (2.1) п.в. дифференцируема на $O'(P)$, а потому при п.в. $\xi' \in O'(P)$ в точках $M_{\xi'} \in \Gamma$ существует касательная плоскость к Γ , нормальный вектор к которой

$$n = \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial F_P}{\partial \xi_k} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ -\frac{\partial F_P}{\partial \xi_1}, \dots, -\frac{\partial F_P}{\partial \xi_{n-1}}, 1 \right\}$$

следует понимать как единичный вектор внешней нормали к Γ в т. $M_{\xi'}$. В силу (2.2)

$$\left| \frac{\partial F_P}{\partial \xi_k} \right| \leq L_P.$$

Интеграл $\int_{\Gamma} f(M) ds$ по липшицевой границе Γ от измеримой функции $f(M)$ определяется с помощью локализации с применением гладкого разбиения единицы, подчиненного некоторому покрытию Γ подходящими окрестностями, и вычисления соответствующих интегралов в локальных картах точно так же, как и по гладкой границе. Если Λ — некоторое подмножество Γ , то Λ называется *измеримым* на Γ , если измерима характеристическая функция $\chi_{\Lambda}(x)$ множества Λ . Интеграл $\int_{\Gamma} \chi_{\Lambda}(x) ds$ следует называть *мерой* Λ на Γ , а $\int_{\Gamma} ds$ — *площадью* Γ . Мэру множества Λ на Γ будем обозначать $m_{\Gamma}(\Lambda)$. Из этого и предыдущего следует, что граница Γ липшицевой области имеет п.в. (на Γ) касательную плоскость и единичную внешнюю нормаль.

Подмножество Λ границы Γ называем *открытым*, если Λ — открытое множество в топологии на Γ , индуцируемой топологией $\mathbb{R}^n$. Через $\partial\Lambda$ обозначаем границу Λ . В дальнейшем будет использовано также следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Открытое подмножество Λ липшицевой границы Γ области Ω будем называть *липшицевым куском* Γ , если для любой т. $P \in \partial\Lambda$ найдется такая подходящая декартова система координат $\xi = (\xi'', \xi_{n-1}, \xi_n)$, $\xi'' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-2})$ с центром в т. P и такая окрестность $O(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\xi''| < r_P, |\xi_{n-1}| < \delta_P, |\xi_n| < \delta_P\}$, $r_P > 0$, $\delta_P > 0$, что наряду с выполнением в определении 2.1 свойств (2.1)–(2.3) с $O'(P) = \{\xi' : |\xi''| < r_P, |\xi_{n-1}| < \delta_P\}$ выполняются еще следующие свойства. Множество $\partial\Lambda \cap O(P)$ имеет в декартовой системе ξ представление

$$\xi_n = F_P(\xi''), \quad \xi_{n-1} = G_P(\xi'') \quad \forall \xi'' \in O''(P) = \{\xi'' : |\xi''| < r_P\}, \quad (2.4)$$

где $G_P(\xi'')$ непрерывна по Липшицу на $O''(P)$ с некоторой постоянной L'_P , и при этом существует такое $h'_P > 0$, что множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \xi_n = F_P(\xi'), \quad G_P(\xi'') - h'_P < \xi_{n-1} < G_P(\xi''), \quad \xi'' \in O''(P)\} \quad (2.5a)$$

принадлежит Λ , а множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \xi_n = F_P(\xi'), \quad G_P(\xi'') \leq \xi_{n-1} < G_P(\xi'') + h'_P, \quad \xi'' \in O''(P)\} \quad (2.5b)$$

принадлежит Γ , но не имеет общих точек с Λ .

Из этого определения непосредственно вытекает, что если Λ – открытый липшицев кусок Γ , то таковым является и множество $\Gamma \setminus \bar{\Lambda}$.

Примем для дальнейшего следующее обозначения

$C(\Omega)$ – пространство функций, непрерывных в области Ω ;

$C^k(\Omega)$, $k \geq 0$, целое, – подпространство функций $u(x)$ из $C(\Omega)$, для которых существуют все $D^\alpha u(x) \in C(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$, где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$;

$C(\bar{\Omega})$ – подпространство функций из $C(\Omega)$, допускающих продолжения на замыкание $\bar{\Omega}$ как непрерывные на $\bar{\Omega}$ функции;

$C^k(\bar{\Omega})$ – пространство функций $u(x)$ из $C^k(\Omega)$, для которых $D^\alpha u(x) \in C(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq k$;

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega), \quad C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\bar{\Omega});$$

$C_{\mathbb{R}^n}^\infty(\bar{\Omega})$ – пространство функций на $\bar{\Omega}$, являющихся сужениями на $\bar{\Omega}$ функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$;

$C^{\text{Lip}}(\bar{\Omega})$ – подпространство функций из $C(\bar{\Omega})$, непрерывных по Липшицу в $\bar{\Omega}$ (каждая функция со своей константой Липшица).

Классическая формула Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = \int_{\Gamma} (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \, ds$$

заведомо остается справедливой для липшицевой области Ω и произвольного векторного поля $\mathbf{u}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ (см. также [26], где эта формула устанавливается в значительно более общих предположениях).

Пространства Соболева–Слободецкого в области Ω . Ввиду наличия у уравнения (1.3) параметра μ , который может быть большим, естественно, как и в [4], использовать нормировки таких пространств со вхождением параметра μ , имеющим, грубо говоря, “вес производной”. В нижеследующих определениях будем полагать $\mu > 0$.

$W_{2,\mu}^1(\Omega)$ – подпространство функций $u(x)$ из $L_2(\Omega)$, имеющих все обобщенные первые производные $D_j u(x) \in L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в этом пространстве определяем по формуле

$$(u, v)_{1,\mu} = \int_{\Omega} [(\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)}) + \mu^2 u(x) \overline{v(x)}] dx, \quad (2.6)$$

а норму функции $u(x)$ обозначаем $\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}$;

$W_{2,\mu}^l(\Omega)$, где $0 < l < 1$, – подпространство функций $u(x)$ из $L_2(\Omega)$, для которых конечна норма, определяемая выражением

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^l(\Omega)}^2 = k(n, l) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2l}} dx dy + \mu^{2l} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx, \quad (2.7)$$

где ради удобства нормировки полагается

$$k(n, l) = 4^{l-1} \left[\int_{|y|=1} |\cos \theta|^{2l} ds_y \int_0^{\infty} t^{-(1+2l)} \sin^2 t dt \right]^{-1},$$

θ – угол между вектором y и осью Ox_n (см. [22]). Пространство $W_{2,\mu}^l(\mathbb{R}^n)$, $0 < l \leq 1$, состоит из тех и только тех функций $u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n; (\mu^{2l} + |\xi|^{2l}))}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\mu^{2l} + |\xi|^{2l}) |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

где $\tilde{u}(\xi) = F[u](\xi)$ – образ Фурье функции $u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ в пространстве Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста (на $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ оператор F действует по формуле

$$F[\varphi](\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \varphi(x) dx,$$

см., например, [29]). При этом

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^l(\mathbb{R}^n)} = \|\tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n; (\mu^{2l} + |\xi|^{2l}))}. \quad (2.8)$$

Кроме того, пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_{2,\mu}^l(\mathbb{R}^n)$ (см. [22]).

Заметим, что равенство (2.8) обеспечивается приведенным выше выбором постоянной $k(n, l)$.

Пространства Соболева–Слободецкого на границе Γ липшицевой области Ω . Пусть Λ – открытое подмножество Γ .

$W_{2,\mu}^l(\Lambda)$, $0 < l < 1$, – подпространство функций $u(x)$ из $L_2(\Lambda)$, для которых конечна норма, определяемая формулой

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^l(\Lambda)}^2 = k(n-1, l) \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n-1+2l}} ds_x ds_y + \mu^{2l} \int_{\Lambda} |u(x)|^2 ds_x \quad (2.9)$$

(см. [21], [9]).

Все пространства $W_{2,\mu}^l(\Omega)$ и $W_{2,\mu}^l(\Lambda)$ являются полными и при введении для $0 < l < 1$ в них скалярных произведений, согласованных с нормами (2.7) и (2.9), становятся гильбертовыми пространствами (см. [22]). Кроме того, естественно, нормы каждого из этих пространств, отвечающие различным значениям μ , эквивалентны (но с постоянными зависящими от μ). Пространства $W_{2,\mu}^l(\Omega)$ и $W_{2,\mu}^l(\Lambda)$, отвечающие нормировкам с $\mu = 1$, будем обозначать через $W_2^l(\Omega)$ и $W_2^l(\Lambda)$. Приведем необходимые нам свойства этих пространств.

ЛЕММА 2.1 (см. [22]). 1. Если $\varphi(x) \in C^{\text{Lip}}(\overline{\Omega})$ с постоянной Липшица L , $u(x) \in W_{2,\mu}^1(\Omega)$, то $\varphi(x)u(x) \in W_{2,\mu}^1(\Omega)$ и

$$\|\varphi u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2 \leq 2 \left(\max_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)| + nL^2 \mu^{-2} \right) \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2. \quad (2.10a)$$

2. Если $\varphi(x)$ – измеримая функция на $\Lambda \subset \Gamma$, для которой при некотором l , $0 < l < 1$, конечна величина

$$\frac{1}{2} \|\varphi\|_{A_{2,\mu}^l(\Lambda)}^2 = \text{ess sup}_{x \in \Lambda} |\varphi(x)|^2 + \frac{k(n-1, l)}{\mu^{2l}} \text{ess sup}_{x \in \Lambda} \int_{\Lambda} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x - y|^{n-1+2l}} ds_y,$$

$u(x) \in W_{2,\mu}^l(\Lambda)$, то $\varphi(x)u(x) \in W_{2,\mu}^l(\Lambda)$ и

$$\|\varphi u\|_{W_{2,\mu}^l(\Lambda)} \leq \|\varphi\|_{A_{2,\mu}^l(\Lambda)} \|u\|_{W_{2,\mu}^l(\Lambda)}. \quad (2.10b)$$

В частности, если $\varphi(x)$ непрерывна по Липшицу на $\overline{\Lambda}$, то

$$\|\varphi\|_{A_{2,\mu}^l(\Lambda)} < \infty \quad \forall l: 0 < l < 1.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть Ω и $\tilde{\Omega}$ – области в $\mathbb{R}^n$, $y = y(x)$ – гомеоморфное отображение Ω на $\tilde{\Omega}$, являющееся билипшицевым, что обозначает, что и прямое отображение $y = y(x)$, и обратное отображение $x = x(y)$ являются липшицевыми:

$$\begin{aligned} |y(x^1) - y(x^2)| &\leq L|x^1 - x^2| & \forall x^1, x^2 \in \Omega, \\ |x(y^1) - x(y^2)| &\leq \tilde{L}|y^1 - y^2| & \forall y^1, y^2 \in \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Пространство $W_{2,\mu}^1$ инвариантно относительно такого отображения. А именно, если $u(x) \in W_{2,\mu}^1(\Omega)$, то $\tilde{u}(y) = u(x(y)) \in W_{2,\mu}^1(\tilde{\Omega})$ и обратно. При

этом обобщенные производные от $\tilde{u}(y)$ находятся по классическому правилу вычисления производных от суперпозиции функций, производные $\partial x_k / \partial y_j$ понимаются в классическом смысле. Имеют место оценки

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{W_{2,\mu}^1(\tilde{\Omega})} &\leq c\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}, \\ \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} &\leq \tilde{c}\|\tilde{u}\|_{W_{2,\mu}^1(\tilde{\Omega})},\end{aligned}$$

где $c = L^{n/2} \max(1, \tilde{L})$, $\tilde{c} = \tilde{L}^{n/2} \max(1, L)$.

По поводу леммы 2.2 см., например, [26], [9]. При доказательстве лемм 2.1 и 2.2 используется определение обобщенной производной, восходящее к Б. Леви (см. [25, гл. 4]).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Ω – ограниченная область с липшицевой границей Γ , Λ – открытый липшицев кусок границы Γ . Тогда

1) существует линейный оператор $l_{\Omega}^{\mathbb{R}^n}$ продолжения функций $u(x) \in W_{2,\mu}^l(\Omega)$ с Ω на все $\mathbb{R}^n$ функциями из $W_{2,\mu}^l(\mathbb{R}^n)$, $0 < l \leq 1$, и при этом

$$\|l_{\Omega}^{\mathbb{R}^n} u\|_{W_{2,\mu}^l(\mathbb{R}^n)} \leq c(\Omega) \|u\|_{W_{2,\mu}^l(\Omega)} \quad \forall u \in W_{2,\mu}^l(\Omega); \quad (2.11)$$

2) существует линейный оператор l_{Λ}^{Γ} продолжения функций $u(x) \in W_{2,\mu}^l(\Lambda)$ с Λ на всю Γ функциями из $W_{2,\mu}^l(\Gamma)$, $0 < l < 1$, и при этом

$$\|l_{\Lambda}^{\Gamma} u\|_{W_{2,\mu}^l(\Gamma)} \leq c(\Lambda, \Gamma) \|u\|_{W_{2,\mu}^l(\Lambda)} \quad \forall u \in W_{2,\mu}^l(\Lambda). \quad (2.12)$$

Здесь $c(\Omega)$ и $c(\Lambda, \Gamma)$ – постоянные, зависящие только от Ω и от Λ и Γ , соответственно.

Эти утверждения доказываются аналогично соответствующему утверждению типа 1) в [22] с помощью локализации с гладким разбиением единицы, распрямления границ Γ и $\partial\Lambda$ и использования “четных” продолжений относительно получаемых плоских участков границ.

Так как липшицева область Ω удовлетворяет сегментному свойству, то $C_{\mathbb{R}^n}^{\infty}(\bar{\Omega})$ плотно в $W_{2,\mu}^l(\Omega)$, $l > 0$ (см., например, [9], [24], [26]).

ТЕОРЕМА 2.2 (вложения для липшиц-непрерывных функций). Пусть Ω – ограниченная область с липшицевой границей Γ , $u(x) \in C^{\text{Lip}}(\bar{\Omega})$. Тогда

$$\begin{aligned}u(x) &\in W_2^l(\Omega) \quad \forall l: 0 < l \leq 1, \\ u(x)|_{\Gamma} &\in W_2^{\lambda}(\Gamma) \quad \forall \lambda: 0 < \lambda < 1,\end{aligned}$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^{l-1/2}(\Gamma)} \leq c_0(\Omega, l) \|u\|_{W_{2,\mu}^l(\Omega)} \quad (2.13)$$

$\forall l: 1/2 < l \leq 1$, с постоянной $c_0(\Omega, l)$, которая может быть выбрана не зависящей от μ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующего утверждения в [22] и [4]. С помощью локализации и распрямления границы билипшицевым отображением оно сводится к установлению такого же утверждения в случае, когда Ω – полупространство $\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n < 0\}$, а $u(x)$ имеет, кроме того, конечный носитель. При этом в отличие от случая, когда $u(x)$ достаточно гладкая, необходимы соответствующие уточнения в обоснованиях при использовании преобразования Фурье.

Определение следа функции $u(x)$ из $W_{2,\mu}^l(\Omega)$, $1/2 < l \leq 1$, примем по схеме, использованной в [22], с приближением $u(x)$ гладкими функциями. Согласно предыдущему для любой $u(x) \in W_{2,\mu}^l(\Omega)$ найдется последовательность функций $u_\nu(x) \in C^{\text{Lip}}(\bar{\Omega})$ (даже $u_\nu(x) \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty(\bar{\Omega})$) сходящаяся при $\nu \rightarrow \infty$ в $W_{2,\mu}^l(\Omega)$ к $u(x)$. Тогда согласно (2.13) последовательность $u_\nu(x)|_\Gamma$ фундаментальна в $W_{2,\mu}^{l-1/2}(\Gamma)$, и в силу полноты последнего пространства существует предельная для этой последовательности функция $u_*(x) \in W_{2,\mu}^{l-1/2}(\Gamma)$, которая и называется следом на Γ функции $u(x)$. Всюду в дальнейшем след функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ на открытом куске Λ границы Γ будем обозначать через $u(x)|_\Lambda$.

Таким образом, имеет место теорема вложения.

ТЕОРЕМА 2.3. *В ограниченной области Ω с липшицевой границей Γ для любой функции $u(x) \in W_{2,\mu}^l(\Omega)$, $1/2 < l \leq 1$, однозначно определен ее след на Γ , принадлежащий пространству $W_{2,\mu}^{l-1/2}(\Gamma)$, и, с обозначением этого следа также через $u(x)$, имеет место оценка (2.13). (см. [22], [4], а также [9]).*

Имеет место обращение теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть Ω – ограниченная область с липшицевой границей Γ . Существует линейный оператор продолжения l_Γ^Ω , (зависящий от μ), который всякой функции $u(x) \in W_{2,\mu}^{l-1/2}(\Gamma)$, $1/2 < l \leq 1$, ставит в соответствие функцию $l_\Gamma^\Omega u(x) \in W_{2,\mu}^l(\Omega)$ так, что $l_\Gamma^\Omega u(x)|_\Gamma = u(x)$, и имеет место оценка*

$$\|l_\Gamma^\Omega u\|_{W_{2,\mu}^l(\Omega)} \leq c_1(\Omega, l) \|u\|_{W_{2,\mu}^{l-1/2}(\Gamma)} \quad (2.14)$$

с постоянной $c_1(\Omega, l)$, которая может быть также выбрана не зависящей от μ .

Доказательство в основном аналогично доказательству соответствующего утверждения в [22]. С помощью локализации с применением гладкого разбиения единицы, распрямления границы в подходящих окрестностях задача сводится к продолжению финитной функции $u(x)$ с гиперплоскости $x_n = 0$ в полупространство $\mathbb{R}_-^n$. В качестве такого продолжения берется решение $U(x)$ задачи $-\Delta U + \mu^2 U = 0$ в $\mathbb{R}_-^n$, $U(x', 0) = u(x')$, домноженное на “срезающую” функцию.

В дальнейшем будут использоваться также следующие пространства. В предположениях, что Ω – ограниченная область с липшицевой границей Γ , Λ – открытое, Γ_1 – измеримое множества на Γ и $\Gamma_1 \subset \Lambda$, обозначим:

$W_{2,\mu}^{-1}(\Omega)$ – пространство сопряженное к $W_{2,\mu}^1(\Omega)$ (т.е. пространство линейных непрерывных функционалов на $W_{2,\mu}^1(\Omega)$);

$\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Lambda)$ – подпространство пространства $W_{2,\mu}^1(\Omega)$, состоящее из функций $u(x)$, удовлетворяющих условию $u(x)|_{\Lambda} = 0$;

$\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Lambda)$ – пространство, сопряженное пространству $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Lambda)$;

$\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \Gamma_1)$ – подпространство пространства $W_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)$ (с той же нормой), состоящее из функций, обращающихся в нуль п.в. на Γ_1 ;

$\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \Gamma_1)$ – пространство, сопряженное пространству $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \Gamma_1)$;

в случае, когда $\Lambda = \Gamma$, а Γ_2 – открытое множество на Γ , для сокращения будем обозначать $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_2) = \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma; \Gamma \setminus \Gamma_2)$, через $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_2)$ – пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_2)$.

При $\Lambda = \varnothing$ $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{\pm 1}(\Omega; \Lambda) = W_{2,\mu}^{\pm 1}(\Omega)$, при $\Gamma_2 = \Gamma$ $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{\pm 1/2}(\Gamma_2) = W_{2,\mu}^{\pm 1/2}(\Gamma)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Lambda)$ и $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \Gamma_1)$ – замкнутые подпространства пространств $W_{2,\mu}^1(\Omega)$ и $W_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)$, соответственно.

ТЕОРЕМА 2.5. *Операторы вложения пространства $W_2^l(\Omega)$, $0 < l \leq 1$, в $L_2(\Omega)$ и пространства $W_2^l(\Gamma)$, $0 < l \leq 1$, в $L_2(\Gamma)$ являются вполне непрерывными операторами.*

Эти утверждения устанавливаются аналогично соответствующим утверждениям для пространств $W_2^l(\Omega)$, например, в [20], [24]–[26], [18] (случай $l = 1$) и в [22] (когда l нецелое, с соответствующими уточнениями там формулировок леммы 8 и теоремы 11 § 7).

Нам понадобится еще следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. *В предположениях, что Ω – ограниченная область с липшицевой границей Γ , Λ – открытый липшицев кусок Γ , в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Lambda)$ плотно множество функций $\{u(x) \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty(\overline{\Omega}), u(x)|_{\Lambda} = 0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим следующую лемму.

ЛЕММА 2.4. *Пусть $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Lambda)$. Тогда функция*

$$\overset{\circ}{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } x \in \Omega, \\ 0 & \text{при } x \in (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cup \Lambda \end{cases}$$

принадлежит пространству $W_2^1(\mathbb{R}^n \setminus (\Gamma \setminus \Lambda))$, и норма $\overset{\circ}{u}(x)$ в этом пространстве совпадает с $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.4. В силу плотности $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $W_2^1(\Omega)$ существует последовательность $u_\nu(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такая, что $u_\nu(x) \rightarrow u(x)$ в $W_2^1(\Omega)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Тогда в силу определения следа и теоремы 2.2 $u_\nu \rightarrow 0$ в $W_2^{1/2}(\Lambda)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus (\Gamma \setminus \Lambda))$ – произвольная. Тогда, используя формулу Гаусса–Остроградского, получим

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus (\Gamma \setminus \Lambda)} \overset{\circ}{u}(x) D_k \varphi(x) dx &= - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{\nu}(x) D_k \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D_k u_{\nu}(x) \varphi(x) dx - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} u_{\nu}(x) n_k(x) \varphi(x) ds_x \\ &= \int_{\Omega} D_k u(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (D_k u(x))^{\circ} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

поскольку

$$\left| \int_{\Lambda} u_{\nu}(x) n_k(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|u_{\nu}\|_{L_2(\Lambda)} \|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $D_k \overset{\circ}{u}(x) = (D_k u(x))^{\circ}$ в смысле обобщенных функций.

Перейдем к доказательству леммы 2.3. Применим стандартную для доказательства такого рода утверждений технику (см., например, [24, гл. III]), начинающуюся с рассмотрения достаточно мелкого покрытия компакта $\overline{\Omega}$ окрестностями, (причем специального, приводимого ниже вида для граничных окрестностей), выделения из такого покрытия конечного, умножения функции $\overset{\circ}{u}(x)$, появляющейся в лемме 2.4 на $1 \equiv \sum_j \psi_j(x)$, где $\psi_j(x)$ – конечное гладкое разбиение единицы, подчиненное выделенному покрытию. В результате $u(x) = \sum_j u_j(x)$, где $u_j(x) = \psi_j(x) u(x) \in W_2^1(\Omega)$, и доказательство леммы 2.3 может быть сведено к доказательству ее в следующих случаях.

- 1) $\text{supp } u(x) \subset \Omega$.
- 2) Носитель $u(x)$ содержится в окрестности $U_P(h_P/2, r_P/2)$ точки $P \in \Gamma \setminus \partial\Lambda$, где $U_P(h_P, r_P)$ – объединение множеств (2.3а) и (2.3б), причем $r_P > 0$ столь мало, что:
 - а) $U_P(h_P, r_P) \cap (\Gamma \setminus \Lambda) = \emptyset$ в том случае, когда $P \in \Lambda$;
 - б) $U_P(h_P, r_P) \cap \overline{\Lambda} = \emptyset$ в том случае, когда $P \in \Gamma \setminus \overline{\Lambda}$.
- 3) Носитель $u(x)$ расположен в окрестности $U_P(h_P/2, h'_P/2, r_P/2)$ точки $P \in \partial\Lambda$, где

$$U_P(h_P, h'_P, r_P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \xi \in \tilde{U}_P(h_P, h'_P, r_P)\}, \quad (2.15а)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_P(h_P, h'_P, r_P) &= \{\xi : |\xi_n - F_P(\xi')| < h_P, \\ &\quad |\xi_{n-1} - G_P(\xi'')| < h'_P, |\xi''| < r_P\}, \end{aligned} \quad (2.15б)$$

ξ – подходящая декартова система координат, соответствующая точке P , $F_P(\xi')$ и $G_P(\xi'')$ – функции, h_P , h'_P и r_P – величины, фигурирующие в определении 2.2.

В каждом из выделенных случаев нужно для $u(x)$ построить последовательность функций $u_{\nu}(x) \in C_{\mathbb{R}^n}^{\infty}(\overline{\Omega})$ таких, что $u_{\nu}(x)|_{\Lambda} = 0$ и $u_{\nu}(x) \rightarrow u(x)$ в $W_2^1(\Omega)$ при $\nu \rightarrow \infty$. В случаях 1) и 2) это делается обычным образом с помощью операторов усреднения. В случае 1) такой последовательностью является $u_{\nu}(x) = J_{\varepsilon_{\nu}} u(x)$,

$0 < \varepsilon_\nu < d$, $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, где J_ε – оператор усреднения Соболева с радиусом усреднения ε (см., например, [20], [24], [25]), $d = \text{dist}\{\text{supp } u, \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}$. В случае 2б) $u(x)$ продолжается в окрестность $U_P(h_P/2, r_P/2)$, а затем уже нулем на все пространство как функция $\hat{u}(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ (такое продолжение можно осуществить “четным продолжением” через участок границы $\Gamma \cap U_P(h_P, r_P)$ при распрямлении этого участка границы), и последовательность $u_\nu(x) = J_{\varepsilon_\nu} \hat{u}(x)|_\Omega$, где ε_ν достаточно малые, $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$, обладает нужными свойствами. В случае 2а) сначала строится последовательность $\hat{u}'_\nu(x) = \hat{u}(x' + \delta_\nu e_P)$, где $0 < \delta_\nu < h_P/2$, e_P – единичный вектор, имеющий в подходящей декартовой системе ξ для т. P координаты $(0, \dots, 0, 1)$, $\hat{u}(x)$ – функция, фигурирующая в лемме 2.4, а затем – последовательность $u_\nu(x) = J_{\varepsilon_\nu} \hat{u}'_\nu(x)$, где $0 < \varepsilon_\nu < \text{dist}\{\text{supp } \hat{u}'_\nu, \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}$, $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, которая обладает нужными свойствами ($u_\nu(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$).

Наконец, рассмотрим случай 3). Обозначим через $\hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi', \xi_n)$ выражение в подходящей декартовой системе координат ξ для т. P функции $\hat{u}(x)$, появляющейся в лемме 2.4. Для сокращения примем также следующие обозначения:

$$U_{P,\kappa} = U_P(\kappa h_P, \kappa h'_P, \kappa r_P), \quad \tilde{U}_{P,\kappa} = \tilde{U}_P(\kappa h_P, \kappa h'_P, \kappa r_P), \\ \kappa > 0, \quad U_P = U_{P,1}, \quad \tilde{U}_P = \tilde{U}_{P,1},$$

где $U_P(h_P, h'_P, r_P)$ и $\tilde{U}_P(h_P, h'_P, r_P)$ определены (2.15а) и (2.15б),

$$\Gamma_- = \Lambda \cap U_P, \quad \Gamma_+ = (\Gamma \setminus \Lambda) \cap U_P,$$

$\tilde{\Gamma}_-$ и $\tilde{\Gamma}_+$ – образы кусков Γ_- и Γ_+ в подходящей системе ξ . В силу леммы 2.4 $\hat{u}(\xi) \in W_2^1(\tilde{U}_P \setminus \tilde{\Gamma}_+)$.

Произведем распрямление границ билипшицевым отображением

$$\eta'' = \xi'', \quad \eta_{n-1} = \xi_{n-1} - G_P(\xi''), \quad \eta_n = \xi_n - F_P(\xi'), \quad (2.16)$$

которое переводит окрестность $\tilde{U}_P$ на цилиндрическую окрестность Q_1 , где

$$Q_\kappa = \{\eta : |\eta''| < \kappa r_P, |\eta_{n-1}| < \kappa h'_P, |\eta_n| < \kappa r_P\}, \quad \kappa > 0. \quad (2.17)$$

При этом $\tilde{\Gamma}_+$ и $\tilde{\Gamma}_-$ переходят, соответственно, в части Σ_+ и Σ_- гиперплоскости $\eta_n = 0$, где

$$\Sigma_+ = \{\eta : \eta_n = 0, 0 \leq \eta_{n-1} < h'_P, |\eta''| < r_P\}, \\ \Sigma_- = \{\eta : \eta_n = 0, -h'_P < \eta_{n-1} < 0, |\eta''| < r_P\}.$$

Функцию, получающуюся из $\hat{u}(\xi)$ при переходе к новым переменным (2.16), обозначим через $\hat{v}(\eta)$. В силу леммы 2.2 $\hat{v}(\eta) \in W_2^1(Q_1 \setminus \Sigma_+)$ и, кроме того, $\text{supp } \hat{v}(\eta) \subset Q_{1/2}$, $\hat{v}(\eta) = 0$, на множестве $Q_1^+ = Q_1 \cap \{\eta : \eta_n > 0\}$; на множестве $Q_1^- = Q_1 \cap \{\eta : \eta_n < 0\}$ $\hat{v}(\eta)$ является выражением функции $u(x)|_{U_P \cap \Omega}$ в переменных (2.16).

Построим продолжение $\widehat{v}(\eta)$ функции $\overset{\circ}{v}(\eta)|_{Q_1^-}$ на все пространство $\mathbb{R}^n$ такое, чтобы $\widehat{v}(\eta) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \widehat{v}(\eta) \subset Q_{3/4}$, и чтобы $\widehat{v}(\eta) = 0$ на некоторой подобласти M_0 в Q_1^+ , примыкающей к куску Σ_- . Для этого продолжим $\overset{\circ}{v}(\eta)$ нулем вне Q_1 и используем билипшицев гомеоморфизм

$$\zeta'' = \eta'', \quad \zeta_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{n-1} + |\eta_{n-1}| - \eta_n), \quad \zeta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{n-1} - |\eta_{n-1}| + \eta_n) \quad (2.18a)$$

$\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$; обратное отображение действует по формулам

$$\eta'' = \zeta'', \quad \eta_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_n + \zeta_{n-1}), \quad \eta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_n - \zeta_{n-1} + |\zeta_n + \zeta_{n-1}|). \quad (2.18б)$$

Обозначим через $\widetilde{v}(\zeta)$ функцию $\overset{\circ}{v}(\eta)$, выраженную в переменных (2.18a), через $\widetilde{Q}_1^-$ — образ множества Q_1^- при отображении (2.18a).

Поскольку это отображение представляет собой билипшицев гомеоморфизм множества $\mathbb{R}^n \setminus \{\eta : \eta_n = 0, \eta_{n-1} \geq 0\}$ на себя, то в силу леммы 2.2 $\widetilde{v}(\zeta) \in W_2^1(\mathbb{R}_-^n)$, где $\mathbb{R}_-^n = \{\zeta : \zeta_n < 0\}$. Далее, $\widetilde{Q}_1^-$ содержится в четверти пространства $\{\zeta : \zeta_n < 0, \zeta_{n-1} > 0\}$, а потому $\widetilde{v}(\zeta)$ обращается в нуль на множестве $\{\zeta : \zeta_n < 0, \zeta_{n-1} \leq 0\}$. Обозначим теперь через $\widetilde{v}_1(\zeta)$ четное по переменной ζ_n продолжение функции $\widetilde{v}(\zeta)$ с $\mathbb{R}_-^n$ на все $\mathbb{R}^n$:

$$\widetilde{v}_1(\zeta) = \begin{cases} \widetilde{v}(\zeta) & \text{при } \zeta_n < 0, \\ \widetilde{v}(\zeta', -\zeta_n) & \text{при } \zeta_n > 0 \end{cases}$$

(на гиперплоскости $\zeta_n = 0$ $\widetilde{v}_1(\zeta)$ можно определить как угодно). Тогда $\widetilde{v}_1(\zeta) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{v}_1(\zeta) = 0$ п.в. в полупространстве $\{\zeta : \zeta_{n-1} < 0\}$.

Это полупространство переводится отображением (2.18б) на область $M_0 = \{\eta : \eta_{n-1} < \eta_n/2, \eta_n > 0\}$, а потому функция $v_1(\eta)$, определяемая как выражение функции $\widetilde{v}_1(\zeta)$ в переменных (2.18б), обращается в нуль на M_0 . Более того, $v_1(\eta) = \overset{\circ}{v}(\eta)$ на $\mathbb{R}_-^n$, а потому $v_1(\eta) = 0$ при $\eta \in \mathbb{R}_-^n \setminus Q_{1/2}$. Пусть теперь $\varphi(\eta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(\eta) \equiv 1$ на $Q_{1/2}$ и $\varphi(\eta) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus Q_{3/4}$. Тогда функция $\widehat{v}(\eta) = \varphi(\eta)v_1(\eta)$ и будет необходимым продолжением функции $\overset{\circ}{v}(\eta)|_{Q_1^-}$. Она обладает следующими свойствами: $\widehat{v}(\eta) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{v}(\eta) = \overset{\circ}{v}(\eta) \quad \forall \eta \in Q_1^-$, $\text{supp } \widehat{v}(\eta) \subset Q_{3/4}$ и $\widehat{v}(\eta) = 0 \quad \forall \eta \in M_0$.

Образуем теперь последовательность функций $\widehat{v}'_\nu(\eta) = \widehat{v}(\eta', \eta_n + \delta_\nu)$, $0 < \delta_\nu < h_P/8$, $\delta_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Тогда $\widehat{v}'_\nu(\eta) \rightarrow \widehat{v}(\eta)$ в $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ при $\nu \rightarrow \infty$, $\text{supp } \widehat{v}'_\nu \subset Q_{7/8}$ и $\widehat{v}'_\nu(\eta) = 0 \quad \forall \eta \in M_0 - \delta_\nu e_n$, где e_n — вектор с координатами $(0, \dots, 0, 1)$. Отсюда каждая функция $\widehat{v}'_\nu(\eta)$ обращается в нуль в некоторой окрестности множества Σ_- . Таким образом, последовательность функций $\widehat{u}'_\nu(x)$, получаемая из функций $\widehat{v}'_\nu(\eta)|_{Q_1}$ выражением последних в переменных x и с продолжением их нулем вне множества (2.15a), обладают следующими свойствами: $\widehat{u}'_\nu(x) \rightarrow \widehat{u}(x)$ в $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ при $\nu \rightarrow \infty$, где $\widehat{u}(x)$ строится по функции $\widehat{v}(\eta)$ точно таким же образом, как $\widehat{u}'_\nu(x)$ строятся по $\widehat{v}'_\nu(\eta)$, $\widehat{u}'_\nu(x) = 0$ вне $U_{P,7/8}$, и в некоторой окрестности $\Lambda^{2\varepsilon_\nu}$ куска Λ , где Λ^ε — ε -расширение множества Λ , $\varepsilon_\nu > 0$, $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Поэтому последовательность $u_\nu(x) = J_{\varepsilon_\nu} \hat{u}'_\nu(x)$, где J_ε – упоминавшийся в начале доказательства оператор усреднения с радиусом усреднения $\varepsilon > 0$, обладает нужными свойствами: $u_\nu(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $u_\nu(x) \rightarrow \hat{u}(x)$ в $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ при $\nu \rightarrow \infty$ (здесь используется равномерная ограниченность по ε норм семейства операторов J_ε), а поскольку $\hat{u}(x) = u(x)$ при $x \in \Omega$, то и $u_\nu(x) \rightarrow u(x)$ в $W_2^1(\Omega)$ при $\nu \rightarrow \infty$, и, наконец, $u_\nu(x)|_\Lambda = 0$.

Это и заканчивает доказательство леммы 2.3.

§3. Смешанная задача в липшицевых областях.

О значении конормальной производной обобщенных решений

Схема доказательства теорем существования обобщенных решений вариационных задач, основанная на использовании на главном этапе теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве и сведении затем задачи с младшими членами в уравнении и граничном условии к уравнению Фредгольма второго рода, общеизвестна (см., например, [20], [7], [17]–[20], [9]; в перечисленных руководствах она в основном реализована для краевых задач Дирихле, Неймана или третьего рода). В этом параграфе для полноты изложения приводятся формулировка и доказательство теоремы о фредгольмовости смешанной задачи (1.1), (1.2) с (1.3), (1.4) и сопряженной к ней. В общем случае условия на коэффициенты те же, что и в начале §1: $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$, $q(x) \in L_\infty(\Omega)$, $\sigma(x) \in L_\infty(\Gamma_2)$ и выполняются условия (1.5) и (1.6); относительно Γ_1 и Γ_2 предполагается, что они являются лишь открытыми на Γ множествами, в следующем смысле составляющими Γ : $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $m_\Gamma(\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = 0$. Последнее означает, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \delta$, где Γ_1 , Γ_2 и δ попарно не пересекаются и $m_\Gamma(\delta) = 0$.

Предварительно дадим формальное определение задачи, сопряженной к исходной, и определение обобщенных решений этих задач. Для этого вначале в предположениях достаточной гладкости коэффициентов $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$ (например, принадлежности пространству $C^1(\bar{\Omega})$) и функций $u(x)$ и $v(x)$ (например, принадлежности пространству $C^2(\bar{\Omega})$) приведем формулы Грина (две – первые и одну – вторую). Для дальнейшего будет удобно представить $a_0(x) = a_0^1(x) + a_0^2(x)$ и $\sigma(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$, где $a_0^1(x) \in L_\infty(\Omega)$ и $\sigma_1(x) \in L_\infty(\Gamma_2)$ – действительные функции (такие представления, естественно, неоднозначны).

Итак, при достаточно гладких коэффициентах и функциях

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L(x, D, \mu) u \bar{v} dx &= a[u, v]_{\mu} + \int_{\Omega} \alpha(x, D) u \bar{v} dx \\ &+ \int_{\Gamma_2} \sigma_2 u \bar{v} ds - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v} ds - \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right) \bar{v} ds, \quad (3.1a) \\ \int_{\Omega} L^*(x, D, \mu) u \bar{v} dx &= a[u, v]_{\bar{\mu}} + \int_{\Omega} u \overline{\alpha(x, D) v} dx \\ &+ \int_{\Gamma_2} u \overline{\sigma_2 v} ds - \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i n_i u \right) \bar{v} ds \end{aligned}$$

$$- \int_{\Gamma_2} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \left(\bar{\sigma} + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i n_i \right) u \right] \bar{v} ds, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} L(x, D, \mu) u \bar{v} dx - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} ds + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right) \bar{v} ds \\ &= \int_{\Omega} u \overline{L^*(x, D, \mu) v} dx - \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \sum_{i=1}^n a_i n_i u \right) \bar{v} ds \\ &+ \int_{\Gamma_2} u \overline{\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \left(\bar{\sigma} + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i n_i \right) v \right]} ds, \end{aligned} \quad (3.1\text{в})$$

где

$$a[u, v]_{\mu} = a(u, v)_{\mu} + \int_{\Omega} a_0^1(x) u(x) \bar{v}(x) dx + \int_{\Gamma_2} \sigma_1(x) u(x) \bar{v}(x) ds, \quad (3.2\text{а})$$

$$a(u, v)_{\mu} = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u(x) D_i \bar{v}(x) + \mu^2 q(x) u(x) \bar{v}(x) \right) dx,$$

$$\alpha(x, D) u(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) D_i u(x) + a_0^2(x) u(x), \quad (3.2\text{б})$$

$$\begin{aligned} L^*(x, D, \mu) u(x) &= - \sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij}(x) D_j u(x)) \\ &- \sum_{i=1}^n D_i (\bar{a}_i(x) u(x)) + (\bar{a}_0(x) + \bar{\mu}^2 q(x)) u(x), \end{aligned} \quad (3.2\text{в})$$

$\partial/\partial\nu$ – операция (1.4) вычисления конормальной производной, $n_i = n_i(x)$ – компоненты единичной внешней нормали к Γ .

Исходя из формулы (3.1в), задача, сопряженная к задаче (1.1), (1.2), определяется как смешанная задача

$$L^*(x, D, \mu) u(x) = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (3.3)$$

$$u(x)|_{\Gamma_1} = \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \left(\bar{\sigma}(x) + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i(x) n_i(x) \right) u(x) \right) \Big|_{\Gamma_2} = g(x). \quad (3.4)$$

Определения же обобщенных решений задач (1.1), (1.2) и (3.3), (3.4) даются по обычной схеме на основании интегральных соотношений (3.1а) и (3.1б).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$, $q(x)$ и $\sigma(x)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в начале этого параграфа, и пусть в (1.1), (1.2) или (3.3), (3.4) $f(x) \in \mathring{W}_2^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$, $\varphi(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$, $g(x) \in \mathring{W}_2^{-1/2}(\Gamma_2)$. Под *обобщенным решением* (о.р.) задачи (1.1), (1.2) или задачи (3.3), (3.4) понимается функция $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая граничному условию $u(x)|_{\Gamma_1} = \varphi(x)$ в смысле следов, и для любой функции $v(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$ – соотношению

$$a[u, v]_{\mu} + \int_{\Omega} \alpha(x, D) u \bar{v} dx + \int_{\Gamma_2} \sigma_2 u \bar{v} ds = \langle f, \bar{v} \rangle_{\Omega} + \langle g, \bar{v} \rangle_{\Gamma_2} \quad (3.5\text{а})$$

для задачи (1.1), (1.2) или соотношению

$$a[u, v]_{\overline{\mu}} + \int_{\Omega} \overline{u\alpha(x, D)v} dx + \int_{\Gamma_2} u \overline{\sigma_2 v} ds = \langle f, \overline{v} \rangle_{\Omega} + \langle g, \overline{v} \rangle_{\Gamma_2} \quad (3.56)$$

для задачи (3.3), (3.4). Здесь и далее через $\langle f, v \rangle_{\Omega}$ и $\langle g, v \rangle_{\Gamma_2}$ обозначаем действия функционалов $f(x)$ и $g(x)$ на $v(x)$ и на $v(x)|_{\Gamma_2}$, соответственно.

Отметим, что в этих определениях никак не участвуют граничные значения функций $a_{ij}(x)$ и $a_i(x)$, что и позволяет распространить определения обобщенных решений на случай уравнений с измеримыми ограниченными коэффициентами. При этом выражения (1.4) и $\sum_{i=1}^n \overline{a_i(x)n_i(x)}|_{\Gamma_2}$ в (3.4) в общем носят уже символический характер.

Прежде чем перейти к теореме о разрешимости задач, обсудим понятие ко-нормальной производной на Γ от обобщенных решений сформулированных задач. Здесь мы сталкиваемся с невозможностью однозначного определения $\partial u / \partial \nu$ от о.р. и на основе данных, принадлежащих только пространствам, фигурирующим в определении 3.1. Исходя из классических формул (3.1а) и (3.1б), естественно дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $u(x)$ — о.р. задачи (1.1), (1.2) или задачи (3.3), (3.4) с $f(x) \in \mathring{W}_2^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$, $\varphi(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$, $g(x) \in \mathring{W}_2^{-1/2}(\Gamma_2)$, а $\hat{f} \in W_2^{-1}(\Omega)$ — некоторое продолжение функционала $f(x)$ с $\mathring{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$ на $W_2^1(\Omega)$. Обозначим

$$\sigma^0(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{при } x \in \Gamma_2, \\ 0 & \text{при } x \in \Gamma \setminus \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Под соответствующим продолжению $\hat{f}$ значением

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma^0 u \right]_{\Gamma}$$

от о.р. $u(x)$ задачи (1.1), (1.2) или значением

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \left(\overline{\sigma^0} + \sum_{i=1}^n \overline{a_i n_i} \right) u \right]_{\Gamma}$$

от о.р. $u(x)$ задачи (3.3), (3.4) будем понимать функционал из $W_2^{-1/2}(\Gamma)$, действующий на произвольную функцию $\psi \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ по правилу

$$\psi \rightarrow a[u, \overline{l\psi}]_{\overline{\mu}} + \int_{\Omega} \alpha(x, D)u \cdot l\psi dx + \int_{\Gamma_2} \sigma_2 u \cdot l\psi ds - \langle \hat{f}, l\psi \rangle_{\Omega} \quad (3.7a)$$

в случае задачи (1.1), (1.2) или, соответственно,

$$\psi \rightarrow a[u, \overline{l\psi}]_{\overline{\mu}} + \int_{\Omega} \overline{u\alpha(x, D)l\psi} dx + \int_{\Gamma_2} \overline{u\sigma_2 l\psi} ds - \langle \hat{f}, l\psi \rangle_{\Omega} \quad (3.7б)$$

в случае задачи (3.3), (3.4), где $l\psi \in W_2^1(\Omega)$ – произвольное продолжение функции $\psi: l\psi|_\Gamma = \psi$.

Нетрудно видеть, что правые части в (3.7а) и (3.7б) не зависят от выбора продолжения $l\psi$ и представляют собой функционалы из $W_2^{-1/2}(\Omega)$. Проверим это, например, для (3.7а). Пусть $l_1\psi$ и $l_2\psi$ – два продолжения функции ψ . Тогда $v = \overline{l_2\psi} - \overline{l_1\psi} \in \mathring{W}_2^1(\Omega; \Gamma)$, и следовательно, $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$, $v|_{\Gamma_2} = 0$. Поэтому разность значений правых частей (3.7а) при $l\psi$ равных, соответственно, $l_2\psi$ и $l_1\psi$ в силу (3.5а) равна

$$\begin{aligned} a[u, v]_\mu + \int_\Omega \alpha(x, D)u\bar{v} dx + \int_{\Gamma_2} \sigma_2 u\bar{v} ds - \langle \hat{f}, \bar{v} \rangle_\Omega \\ = a[u, v]_\mu + \int_\Omega \alpha(x, D)u\bar{v} dx + \int_{\Gamma_2} \sigma_2 u\bar{v} ds - \langle f, \bar{v} \rangle_\Omega - \langle g, \bar{v} \rangle_{\Gamma_2} = 0. \end{aligned}$$

Элементарно проверяется при использовании в качестве $l\psi$ продолжения $l_\Gamma^\Omega \psi$, фигурирующего в теореме 2.4, и теоремы 2.3 вложения ограниченность функционала правой части (3.7а) в $W_2^{1/2}(\Gamma)$.

Далее, значение функционала правой части (3.7а) или (3.7б) на Γ_2 не зависит от выбора продолжения $\hat{f}$ и равно заданному функционалу g . Действительно, если $\psi \in \mathring{W}_2^{1/2}(\Gamma_2)$, то $\psi|_{\Gamma_1} = 0$, $l\psi \in \mathring{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$, а потому в силу соотношений (3.5а) и (3.5б) с $v = \overline{l\psi}$ и того, что $\hat{f}$ совпадает с f на $\mathring{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$, получаем утверждаемое.

Однако на Γ_1 значения правых частей (3.7а) и (3.7б) существенно зависят от выбора продолжения $\hat{f}$. В самом деле, пусть $\hat{f}_1 \in W_2^{-1}(\Omega)$ – некоторое продолжение функционала f , и пусть $\hat{f}_2 = \hat{f}_1 + \theta$, где $\theta \in W_2^{-1}(\Omega)$, действующий по формуле $\langle \theta, v \rangle_\Omega = \int_{\Gamma_1} v ds$ ($v|_\Gamma$ – след v на Γ). Тогда θ обращается в нуль на $\mathring{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$, а потому $\hat{f}_2$ – также продолжение функционала f . Следовательно, при одной и той же $\psi \in \mathring{W}_2^{1/2}(\Gamma_1)$ разности правых частей как (3.7а), так и (3.7б), отвечающих продолжениям $\hat{f}_2$ и $\hat{f}_1$, отличаются друг от друга на отличный от нулевого функционал $\psi \rightarrow - \int_{\Gamma_1} \psi ds$.

Выясним на примере задачи Дирихле $-\Delta u + u = f$ в Ω , $u|_\Gamma = \varphi$, в случае, когда Ω – область с границей класса C^∞ , чему соответствует значение $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_\Gamma$, отвечающее какому-либо продолжению $\hat{f}$. В этом случае найдутся последовательности $\hat{f}_k(x) \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty(\overline{\Omega})$ и $\varphi_k(x) \in C^\infty(\Gamma)$ такие, что $\hat{f}_k \rightarrow \hat{f}$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ и $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в $W_2^{1/2}(\Gamma)$ при $k \rightarrow \infty$. Классические решения приближающих задач Дирихле $-\Delta \hat{u}_k + \hat{u}_k = \hat{f}_k$ в Ω , $\hat{u}_k|_\Gamma = \varphi_k$, являются гладкими: $\hat{u}_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а потому для них определены в классическом смысле значения нормальных производных $\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \mathbf{n}}|_\Gamma \in C^\infty(\Gamma)$. Решения $\hat{u}_k$ являются также и обобщенными, а потому в силу теоремы, следующей ниже, $\hat{u}_k(x) \rightarrow u(x)$ в $W_2^1(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$, причем этот предел $u(x)$ зависит только от исходной правой части $f \in \mathring{W}_2^{-1}(\Omega; \Gamma)$ и φ , но не

от продолжений $\widehat{f}$. Но значения $\frac{\partial \widehat{u}_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma}$ стремятся в $W_2^{-1/2}(\Gamma)$ к значению $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma}$ (зависящему, как мы уже видели, от продолжения $\widehat{f}$).

В самом деле, исходя из формулы Грина, с помощью приближения $l\psi$ гладкими функциями получаем, что

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \widehat{u}_k}{\partial \mathbf{n}} \psi \, ds = \int_{\Omega} [(\nabla \widehat{u}_k, \nabla l\psi) + \widehat{u}_k l\psi] \, dx - \int_{\Omega} \widehat{f}_k l\psi \, dx.$$

В силу определения $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma}$, соответствующего продолжению $\widehat{f}$,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \psi \right\rangle_{\Gamma} = \int_{\Omega} [(\nabla u, \nabla l\psi) + ul\psi] \, dx - \langle \widehat{f}, l\psi \rangle_{\Omega}.$$

Поэтому, вычитая из предыдущего равенства последнее и производя очевидные оценки, получим оценку

$$\left| \left\langle \left(\frac{\partial \widehat{u}_k}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right), \psi \right\rangle_{\Gamma} \right| \leq (\|\widehat{u}_k - u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\widehat{f}_k - \widehat{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}) \|l\psi\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Полагая в последнем неравенстве $l\psi = l_{\Gamma}^{\Omega} \psi$ — продолжению, фигурирующему в теореме 2.4, пользуясь оценкой (2.14) с $l = 1$, приходим к оценке

$$\left\| \frac{\partial \widehat{u}_k}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{W_2^{-1/2}(\Gamma)} \leq c_1(\Omega, 1) (\|\widehat{u}_k - u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\widehat{f}_k - \widehat{f}\|_{W_2^{-1}(\Omega)}) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Заметим, что последнее утверждение может быть получено и непосредственно из теории, представленной в [6].

Отметим, кроме того, что в предыдущем примере, как это нетрудно проверить, при $\varphi \in C^{\infty}(\Gamma)$, $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, значение $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma}$, соответствующее “минимальному” продолжению $\widehat{f}$ в $W_2^{-1}(\Omega)$, а именно продолжению f как функционала из $\overset{\circ}{W}_2^{-1}(\Omega; \Gamma)$ с сохранением нормы в $W_2^{-1}(\Omega)$, равно вовсе не классическому значению $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma}$, а значению $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma}$ от решения задачи $-\Delta \widehat{u} + \widehat{u} = 0$ в Ω , $\widehat{u}|_{\Gamma} = \varphi$.

Введем еще следующие понятия. Пусть, как и выше, Γ_1 и Γ_2 — непересекающиеся открытые куски, составляющие Γ , $m_{\Gamma}(\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = 0$. Обозначим через $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ факторпространство $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma) / \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_2)$, т.е. подпространство функций $\varphi(x)$ из $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_2)$, допускающих продолжения $l\varphi \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)} = \inf_{\substack{l\varphi \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma) \\ l\varphi|_{\Gamma_1} = \varphi}} \|l\varphi\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)}. \quad (3.8)$$

Через $W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ обозначим пространство, сопряженное к $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$. Пространство $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ (как факторпространство банаховых пространств) также является банаховым пространством (см., например, [31]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть функционал $h(x) \in W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma)$ обращается в нуль на Γ_2 : $\langle h, \psi \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_2)$ (т.е. $\text{supp } h \subseteq \overline{\Gamma}_1$). Под значением $h(x)$ на Γ_1 будем понимать линейный функционал $h|_{\Gamma_1}$, действие которого на произвольную функцию $\varphi(x) \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ определяется по формуле

$$\langle h|_{\Gamma_1}, \varphi \rangle_{\Gamma_1} = \langle h, l\varphi \rangle_\Gamma, \quad (3.9)$$

где $l\varphi \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)$ — произвольное продолжение функции φ .

Нетрудно видеть, что это определение не зависит от выбора продолжения $l\varphi$ функции φ , что $h|_{\Gamma_1} \in W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ и что $\|h|_{\Gamma_1}\|_{W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)} \leq \|h\|_{W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma)}$.

В случае, когда Γ_1 — липшицев кусок Γ , пространство $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ совпадает с пространством $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1)$, и нормы этих двух пространств эквивалентны. В самом деле, включение $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma) \subseteq W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1)$ с оценкой

$$\|\varphi\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \|\varphi\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)}$$

элементарно следуют из (3.8). С другой стороны, если $\varphi \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1)$, то по теореме 2.1.2) существует продолжение $l\varphi \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)$ функции φ такое, что выполняется оценка (2.12) с $\Lambda = \Gamma_1$ и $l = 1/2$, а потому $\|\varphi\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)} \leq c(\Gamma_1, \Gamma) \|\varphi\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_1)}$.

Естественно, что в этом случае и пространство $W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ совпадает с пространством $W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_1)$.

Перейдем к основной теореме этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. При любом комплексном μ размерность пространства обобщенных решений однородной задачи (1.1), (1.2) конечна и совпадает с размерностью пространства о.р. однородной сопряженной задачи (3.3), (3.4). При $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$, $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_2)$, $\varphi(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)^{1)}$ задача (1.1), (1.2) имеет о.р. тогда и только тогда, когда

$$\langle f, \bar{z}^* \rangle_\Omega - \left\langle \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} + \langle g, \bar{z}^* \rangle_{\Gamma_2} = 0 \quad (3.10a)$$

для любого о.р. z^* однородной сопряженной задачи (3.3), (3.4), а неоднородная задача (3.3), (3.4) имеет о.р. тогда и только тогда, когда

$$\langle f, \bar{z} \rangle_\Omega - \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} + \langle g, \bar{z} \rangle_{\Gamma_2} = 0 \quad (3.10b)$$

¹⁾Последнее условие в силу теоремы 2.3 является необходимым условием существования обобщенного решения в $W_2^1(\Omega)$.

для любого о.р. z однородной задачи (1.1), (1.2). Существует такое $\mu_* > 0$, что при $\operatorname{Re} \mu \geq \mu_*$ каждая из задач (1.1), (1.2) и (3.3), (3.4) однозначно разрешима и для их решений $u(x)$ имеют место оценки

$$\|u\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)} \leq C(1 + |\operatorname{Im} \mu|/\operatorname{Re} \mu) \times (\|f\|_{\mathring{W}_{2,|\mu|}^{-1}(\Omega;\Gamma_1)} + c_1\|\varphi\|_{W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)} + c_2\|g\|_{\mathring{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\Gamma_2)}), \quad (3.11)$$

где C , c_1 и c_2 — некоторые постоянные, не зависящие от μ . В (3.10)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} &= \overline{\left\langle \frac{\partial z}{\partial \nu}, \bar{\varphi} \right\rangle_{\Gamma_1}}, \quad \left\langle \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} = \overline{\left\langle \frac{\partial z^*}{\partial \nu}, \bar{\varphi} \right\rangle_{\Gamma_1}}, \\ \left\langle \frac{\partial z}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} &= \left\langle \left[\frac{\partial z}{\partial \nu} + \sigma^0 z \right] \Big|_{\Gamma_1}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1}, \\ \left\langle \frac{\partial z^*}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} &= \left\langle \left[\frac{\partial z^*}{\partial \nu} + \left(\bar{\sigma}^0 + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i n_i \right) z^* \right] \Big|_{\Gamma_1}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

(см. определения 3.2 и 3.3; при определении функционалов

$$\left[\frac{\partial z}{\partial \nu} + \sigma^0 z \right] \Big|_{\Gamma}$$

и

$$\left[\frac{\partial z^*}{\partial \nu} + \left(\bar{\sigma}^0 + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i n_i \right) z^* \right] \Big|_{\Gamma}$$

по формулам (3.7а) и (3.7б) продолжения $\hat{f}$ полагаются нулевыми).

В случае, когда Γ_1 — липшицев кусок, всюду в вышеприведенной формулировке теоремы $W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ следует заменить на все пространство $W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_1)$.

Отметим, что оценка (3.11) для случая однородной задачи Дирихле или 3-ей краевой задачи представляет собой хорошо известную оценку резольвенты эллиптического оператора вне некоторой параболы, содержащей внутри себя отрицательную полуось на плоскости $\lambda = \mu^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1 проведем в четыре этапа.

I-й этап. Задачи (1.1), (1.2) и (3.3), (3.4) с $a_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $a_0^2(x) = 0$, $\sigma_2(x) = 0$, $\mu > 0$, $\varphi(x) = 0$.

При таких предположениях задача (3.3), (3.4) совпадает с задачей (1.1), (1.2). Форма $a[u, v]_\mu$, определенная для $u(x), v(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ выражением (3.2а), эрмитова и при достаточно больших μ : $\mu \geq \mu_0 > 0$ эквивалентна скалярному произведению (2.6). В самом деле, в силу (1.5), (1.6) и существенной ограниченности $a_{ij}(x)$ и $q(x)$, имеем при $\mu > 0$

$$\begin{aligned} 2c^2\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} a_0^1(x) \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_2} \sigma_1(x) \cdot \|u\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 \\ \leq a[u, u]_\mu \leq \frac{1}{2}C^2\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} a_0^1(x) \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Gamma_2} \sigma_1(x) \cdot \|u\|_{L_2(\Gamma_2)}^2. \end{aligned}$$

Используя выражение (2.6), неравенство вложения (2.13) и выражение (2.7), получим оценки

$$\begin{aligned}\mu^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2, \\ \mu \|u\|_{L_2(\Gamma_2)}^2 &\leq c_0^2(\Omega, 1) \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Отсюда следует существование такого $\mu_0 > 0$, что при $\mu \geq \mu_0$

$$c^2 \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2 \leq a[u, u]_\mu \leq C^2 \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2, \quad (3.12)$$

где постоянные $c > 0$, $C > 0$ не зависят от μ , причем, если $\sigma_1(x) \geq 0$ п.в. на Γ_2 , то $\mu_0 > 0$ можно взять произвольно малым (C в этом случае будет зависеть от μ_0).

В рассматриваемом сейчас случае функция $u(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ является о.р. задачи (1.1), (1.2), если $\forall v(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$

$$a[u, v]_\mu = \langle F, \bar{v} \rangle_\Omega, \quad (3.13)$$

где

$$\langle F, \bar{v} \rangle_\Omega = \langle f, \bar{v} \rangle_\Omega + \langle g, \bar{v} \rangle_{\Gamma_2}. \quad (3.14)$$

Функционал $\overline{\langle F, \bar{v} \rangle}_\Omega$ представляет собой элемент из $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$, поскольку с использованием (2.13)

$$|\langle F, \bar{v} \rangle_\Omega| \leq \left\{ \|f\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)} + c_0(\Omega, 1) \|g\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_2)} \right\} \|v\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}, \quad (3.15)$$

и норма этого функционала не превосходит выражения в фигурных скобках. Используя в качестве скалярного произведения в $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ форму $a[u, v]_\mu$, на основании теоремы Рисса заключаем, что существует $u(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ такая, что $a[v, u]_\mu = \overline{\langle F, \bar{v} \rangle}_\Omega$, т.е. (3.13) выполняется $\forall v \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ и при этом значение $a[u, u]_\mu^{1/2}$ равно норме функционала F при выбранной нормировке $W_{2,\mu}^1(\Omega)$. Поэтому (3.11) имеет место для $\mu \geq \mu_0$.

Для дальнейшего вводим линейный оператор $G_\mu: \mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1) \rightarrow \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, действующий на произвольный $F \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ по формуле $G_\mu F = u$, где u — решение задачи (3.13). Таким образом,

$$a[G_\mu f, v]_\mu = \langle f, \bar{v} \rangle_\Omega, \quad f \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1), \quad \forall v \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1). \quad (3.16)$$

Свойства оператора G_μ при $\mu \geq \mu_0$.

1°. Оператор G_μ представляет собой гомеоморфизм пространства $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ на пространство $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, причем нормы G_μ и G_μ^{-1} могут быть оценены постоянными, не зависящими от μ .

В самом деле, оператор G_μ действует взаимно однозначно: из (3.16) имеем, что если $G_\mu f = 0$, то и f как функционал равен нулю. Далее, G_μ отображает на все $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Действительно, $\forall u \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ функционал $v \rightarrow a[u, \bar{v}]_\mu$ представляет собой в силу оценки

$$|a[u, v]_\mu| \leq C^2 \|u\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega)} \|v\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega)},$$

устанавливаемой аналогично (3.12), некоторый элемент $f \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$. Следовательно, $G_\mu f = u$ и

$$\|f\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)} = \|G_\mu^{-1} u\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)} \leq C^2 \|u\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)} \quad \forall u \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1).$$

2°. Сужение оператора G_μ на $L_2(\Omega)$, рассматриваемое как оператор в $L_2(\Omega)$, представляет собой вполне непрерывный самосопряженный неотрицательный оператор, у которого 0 не является собственным значением.

В самом деле, поскольку

$$\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1) \supset L_2(\Omega) \supset \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$$

оператор G_μ определен на всем $L_2(\Omega)$ и действует в $L_2(\Omega)$. Далее, полагая $\forall f_1, f_2 \in L_2(\Omega)$ в (3.16) $f = f_1, v = G_\mu f_2$, имеем

$$\begin{aligned} (f_1, G_\mu f_2)_{L_2(\Omega)} &= \langle f_2, \overline{G_\mu f_2} \rangle_\Omega = a[G_\mu f_1, G_\mu f_2]_\mu \\ &= \overline{a[G_\mu f_2, G_\mu f_1]_\mu} = \overline{\langle f_2, \overline{G_\mu f_1} \rangle_\Omega} = (G_\mu f_1, f_2)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отсюда, в частности,

$$(G_\mu f, f)_{L_2(\Omega)} = a[G_\mu f, G_\mu f]_\mu \geq 0 \quad \forall f \in L_2(\Omega).$$

Далее, если $G_\mu f = 0$ для некоторой $f \in L_2(\Omega)$, то в силу предыдущего свойства 1° $f = 0$ как элемент пространства $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$, что означает, что

$$\int_\Omega f v dx = 0 \quad \forall v \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1).$$

Но тогда согласно обобщенной лемме Дюбуа–Реймона $f(x) = 0$ п.в. на Ω . Компактность оператора G_μ как оператора в $L_2(\Omega)$ следует из того, что этот оператор представляет собой композицию оператора G_μ и оператора вложения пространства $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ в $L_2(\Omega)$, а последний оператор вследствие теоремы 2.5 вполне непрерывен.

3°. В силу свойства 2° оператора G_μ существует компактный положительный оператор $G_\mu^{1/2}$ (см., например, [30]). Оператор $G_\mu^{1/2}$ на самом деле действует ограниченно из $L_2(\Omega)$ на все $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$.

Установим это. Используя (3.17), получим $\forall f_1, f_2 \in L_2(\Omega)$ равенство

$$a[G_\mu f_1, G_\mu f_2]_\mu = (G_\mu^{1/2} f_1, G_\mu^{1/2} f_2)_{L_2(\Omega)}.$$

Выполняя замены $v_i = G_\mu^{1/2} f_i$, $i = 1, 2$, находим, что

$$a[G_\mu^{1/2} v_1, G_\mu^{1/2} v_2]_\mu = (v_1, v_2)_{L_2(\Omega)} \quad (3.18)$$

для всех таких v_1 и v_2 . Но область значений оператора $G_\mu^{1/2}$, определенного на $L_2(\Omega)$, плотна в $L_2(\Omega)$. В самом деле, из условия

$$(G_\mu^{1/2} f, g)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall f \in L_2(\Omega)$$

следует равенство $(f, G_\mu^{1/2} g)_{L_2(\Omega)} = 0$, откуда $G_\mu^{1/2} g = 0$, и в силу положительности $G_\mu^{1/2}$ имеем, что $g = 0$.

Таким образом, производя замыкание в (3.18) с таких $v_i = G_\mu^{1/2} f_i$ до любых $v_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, получаем справедливость 3° и формулы (3.18) $\forall v_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$.

II-й этап. Задачи (1.1), (1.2) и (3.3), (3.4) при общих сформулированных в теореме предположениях с дополнительными условиями: $\mu > \mu_0 > 0$, $\varphi(x) = 0$ в (1.2) и (3.4) (μ_0 - то же, что и на I-м этапе).

Сведем задачи (3.5а) и (3.5б) к уравнениям Фредгольма в пространстве $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Введем билинейную формулу

$$B(u, v) = B_1(u, v) + B_2(u, v), \quad (3.19)$$

$$B_1(u, v) = \int_\Omega \alpha(x, D)uv \, dx, \quad B_2(u, v) = \int_{\Gamma_2} \sigma_2 uv \, dx$$

$\forall u, v \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Эта форма непрерывна на $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1) \times \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, поскольку с использованием неравенства Коши–Буняковского, неравенства вложения (2.13) и определений (2.6) и (2.9) получаем оценку

$$|B(u, v)| \leq \mu^{-1} C \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} \|v\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)},$$

где постоянная C не зависит от μ . Отсюда следует, что форма $B(u, v)$ представляет собой при фиксированной $u \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ функционал $B(u, \cdot) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ по переменной v (с нормой, не превосходящей $C\mu^{-1}\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}$) и точно также $\overline{B}(u, v) = \overline{B(\overline{u}, \overline{v})}$ как функционал $\overline{B}(\cdot, v)$ по первой переменной u при фиксированной v есть элемент $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$.

Поэтому линейные операторы K_μ и K'_μ , определяемые по формулам $K_\mu u = G_\mu B(u, \cdot)$ и $K'_\mu u = G_\mu \overline{B}(\cdot, u)$, а именно, соотношениями

$$a[K_\mu u, v]_\mu = B(u, \overline{v}), \quad a[K'_\mu u, v]_\mu = \overline{B(v, \overline{u})} \quad (3.20)$$

$\forall v \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, представляют собой непрерывные операторы в $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ (норма каждого не превосходит C/μ). Эти операторы обладают следующими свойствами.

1°. K_μ и K'_μ – вполне непрерывные операторы на $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$.

Это достаточно установить для K_μ . Используя разложение (3.19), можем представить

$$K_\mu = K_{\mu,1} + K_{\mu,2},$$

где

$$K_{\mu,1}u = G_\mu B_1(u, \cdot) = G_\mu \alpha(x, D)u, \quad K_{\mu,2}u = G_\mu B_2(u, \cdot).$$

Представим $K_{\mu,1} = G_\mu^{1/2} G_\mu^{1/2} \alpha(x, D)u$. В силу свойства 3° оператора G_μ оператор $G_\mu^{1/2} \alpha(x, D)$ действует ограниченно в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, а потому вполне непрерывно из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому $K_{\mu,1}$ является вполне непрерывным оператором в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$.

Перейдем к оператору $K_{\mu,2}$. Для формы $B_2(u, v)$ имеем с использованием неравенства вложения (2.13) оценку

$$|B_2(u, v)| \leq C \|u\|_{L_2(\Gamma_2)} \|v\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq \mu^{-1/2} C \|u\|_{L_2(\Gamma_2)} \|v\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}$$

(отсюда норма функционала $v \rightarrow B_2(u, v)$ не превосходит $C \mu^{-1/2} \|u\|_{L_2(\Gamma_2)}$). Пусть теперь u_j – ограниченная последовательность в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Тогда в силу теоремы 2.5 последовательность $u_j|_{\Gamma_2}$ компактна в $L_2(\Gamma_2)$ и из нее можно выделить сходящуюся в $L_2(\Gamma_2)$ подпоследовательность $u_{j_\nu}|_{\Gamma_2}$. Поэтому подпоследовательность $K_{\mu,2}u_{j_\nu} = G_\mu B_2(u_{j_\nu}, \cdot)$ будет фундаментальна в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Итак, оператор $K_{\mu,2}$ переводит всякую ограниченную последовательность в компактную, а потому является также вполне непрерывным в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$.

2°. K'_μ сопряжен оператору K_μ относительно скалярного произведения $a[u, v]_\mu$.

В самом деле, заменяя во втором соотношении (3.20) u на v , а v на u , получим

$$a[u, K'_\mu v]_\mu = B(u, \bar{v}) = a[K_\mu u, v]_\mu \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1).$$

Воспользуемся теперь в соотношениях (3.5а) и (3.5б) соотношениями (3.20) и (3.16), последним с f , замененным на F , определяемым (3.14). В результате (3.5а) и (3.5б) можем переписать, соответственно, в виде

$$a[(u + K_\mu u - G_\mu F), v]_\mu = 0 \quad \text{и} \quad a[(u + K'_\mu u - G_\mu F), v]_\mu = 0.$$

В силу произвольности v отсюда находим, что соотношения (3.5а) и (3.5б) эквивалентны, соответственно, уравнениям Фредгольма второго рода

$$u + K_\mu u = G_\mu F, \tag{3.21а}$$

$$u + K'_\mu u = G_\mu F \tag{3.21б}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$.

В силу хорошо известной абстрактной теории таких уравнений (см., например, [30], а также [18, гл. II]), размерность пространства решений z однородного уравнения (3.21а) конечна и совпадает с размерностью пространства решений z^* однородного уравнения (3.21б). Уравнения (3.21а) или (3.21б) разрешимы тогда и только тогда, когда, соответственно,

$$a[G_\mu F, z^*]_\mu = 0 \quad \forall z^* \quad \text{или} \quad a[G_\mu F, z]_\mu = 0 \quad \forall z. \quad (3.22)$$

Но в силу предыдущего z и z^* являются обобщенными решениями задач (1.1), (1.2) и (3.3), (3.4), соответственно. Кроме того, в силу (3.16) и (3.14) необходимые и достаточные условия (3.22) существования обобщенных решений задач (1.1), (1.2) и (3.3), (3.4) с $\varphi(x) = 0$ приводятся, соответственно, к виду (3.10а) и (3.10б).

III-й этап. μ — произвольное, $\varphi(x) = 0$ в (1.2) и (3.4).

Утверждение теоремы о разрешимости в этом случае тривиально следует из уже установленных на II-ом этапе утверждений. В самом деле, уравнение (1.1) всегда можно переписать в виде $\tilde{L}(x, D, \tilde{\mu}) = f$ с $\tilde{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x)$, $\tilde{a}_i(x) = a_i(x)$, $\tilde{a}_0(x) = a_0(x) + (\mu^2 - \tilde{\mu}^2)q(x)$, и с $\tilde{\mu} > \mu_0$ — достаточно большим неотрицательным.

Перейдем к выводу оценки (3.11). Обозначим $\mu_1 = \operatorname{Re} \mu$, $\mu_2 = \operatorname{Im} \mu$. Пусть, например, $u(x)$ — о.р. задачи (1.1), (1.2) с $\varphi(x) = 0$. Положим $\sigma_1(x) = \operatorname{Re} \sigma(x)$, $\sigma_2(x) = i \operatorname{Im} \sigma(x)$. Далее положим в соотношении (3.5а) $v = u$ и отделим в нем действительные и мнимые части. Приходим к двум равенствам

$$\begin{aligned} a[u, u]_{|\mu|} - 2\mu_2^2 \int_{\Omega} q|u|^2 dx &= \operatorname{Re} \langle F, \bar{u} \rangle_{\Omega} - \operatorname{Re} \int_{\Omega} \alpha(x, D) u \bar{u} dx, \\ 2\mu_1 \mu_2 \int_{\Omega} q|u|^2 dx &= \operatorname{Im} \langle F, \bar{u} \rangle_{\Omega} - \operatorname{Im} \int_{\Omega} \alpha(x, D) u \bar{u} dx - \int_{\Gamma_2} \operatorname{Im} \sigma \cdot |u|^2 ds, \end{aligned}$$

где функционал F определен (3.14). Исключая из этих двух соотношений

$$\int_{\Omega} q|u|^2 dx,$$

получаем равенство

$$\begin{aligned} a[u, u]_{|\mu|} &= \operatorname{Re} \langle F, \bar{u} \rangle_{\Omega} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{Im} \langle F, \bar{u} \rangle_{\Omega} - \operatorname{Re} \int_{\Omega} \alpha(x, D) u \bar{u} dx \\ &\quad - \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{Im} \int_{\Omega} \alpha(x, D) u \bar{u} dx - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{\Gamma_2} \operatorname{Im} \sigma \cdot |u|^2 ds. \end{aligned}$$

Оценивая сверху правую часть этого равенства с использованием неравенств

$$\left| \int_{\Omega} \alpha(x, D) u \bar{u} dx \right|, \quad \left| \int_{\Gamma_2} \operatorname{Im} \sigma \cdot |u|^2 ds \right| \leq \frac{C}{|\mu|} \|u\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)}^2,$$

(получаемых точно так же, как и приведенная выше оценка для формы $B(u, v)$) и левой оценки (3.12), получим, что для $\mu_1 > \mu_0$

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)}^2 &\leq C^2(1 + |\mu_2|/|\mu_1|)\|F\| \cdot \|u\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)} \\ &\quad + C_1(1 + |\mu_2|/|\mu_1|)|\mu|^{-1}\|u\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\|F\|$ — норма функционала F , постоянные C и C_1 не зависят от μ , $\mu_1 > \mu_0$. Поскольку $(1 + |\mu_2|/|\mu_1|)|\mu|^{-1} \leq 2\mu_1^{-1}$, то, если еще потребовать, чтобы выполнялось $\mu_1 = \operatorname{Re} \mu \geq 4C_1$, т.е. если взять $\mu_* \geq \max\{\mu_0, 4C_1\}$, при $\mu_1 \geq \mu_*$ выполняется оценка $C_1(1 + |\mu_2|/|\mu_1|)|\mu|^{-1} \leq 1/2$. При этом (3.23) с вытекающей из (3.15) оценки для $\|F\|$ дают оценку (3.11).

Для обобщенного решения $u(x)$ задачи (3.3), (3.4) совершенно аналогично получается такая же оценка (3.11).

IV-й этап. Общий случай, $\varphi \neq 0$ в (1.2) или в (3.4).

Сначала рассмотрим случай $\operatorname{Re} \mu \geq \mu_* > 0$. Пусть $\varphi(x) \in W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$.

В силу (3.8) найдется продолжение $l\varphi \in W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma)$ функции φ такое, что

$$\|l\varphi\|_{W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma)} \leq 2\|\varphi\|_{W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)}.$$

Далее, функция $u_0(x) = l_\Gamma^\Omega \cdot l\varphi$, где l_Γ^Ω — оператор продолжения, фигурирующий в теореме 2.4, принадлежит $W_{2,|\mu|}^1(\Omega)$, $u_0(x)|_{\Gamma_1} = \varphi(x)$ и

$$\|u_0\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)}, \quad (3.24)$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от $|\mu|$. Если искать решение задачи (1.1), (1.2) или (3.3), (3.4) в виде $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$, где $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^1(\Omega; \Gamma_1)$, то подстановка такого разложения в (3.5а) или (3.5б) приводит, соответственно, к вариационной задаче

$$a[u, v]_\mu + \int_\Omega \alpha(x, D)u\bar{v} dx + \int_{\Gamma_2} \sigma_2 u\bar{v} ds = \langle F, \bar{v} \rangle_\Omega - \langle h, \bar{v} \rangle_\Omega \quad (3.25а)$$

или

$$a[u, v]_{\bar{\mu}} + \int_\Omega u\overline{\alpha(x, D)v} dx + \int_{\Gamma_2} u\overline{\sigma_2 v} ds = \langle F, \bar{v} \rangle_\Omega - \langle h', \bar{v} \rangle_\Omega \quad (3.25б)$$

$\forall v \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^1(\Omega; \Gamma_1)$, где $\langle F, \bar{v} \rangle_\Omega$ определен (3.14),

$$\langle h, v \rangle_\Omega = a[u_0, \bar{v}]_\mu + \int_\Omega \alpha(x, D)u_0 v dx + \int_{\Gamma_2} \sigma_2 u_0 v ds, \quad (3.26а)$$

$$\langle h', v \rangle_\Omega = a[u_0, \bar{v}]_{\bar{\mu}} + \int_\Omega u_0 \overline{\alpha(x, D)\bar{v}} dx + \int_{\Gamma_2} u_0 \overline{\sigma_2 \bar{v}} ds. \quad (3.26б)$$

Функционалы (3.26а) и (3.26б) являются ограниченными на $\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Действительно, аналогично оцениванию формы $B(u, v)$ получаем

$$|\langle h, v \rangle_\Omega|, |\langle h', v \rangle_\Omega| \leq (C + C_1|\mu|^{-1})\|u_0\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)}\|v\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)}.$$

Поэтому, используя эти оценки с оценкой (3.24), а также оценку для функционала F точно так же, как и на III-м этапе, с единственной лишь заменой F на $F - h$ или $F - h'$, соответственно, приходим к полной оценке (3.11).

Если μ — произвольное, то как и выше, найдется продолжение $u_0(x)$ функции $\varphi(x)$, для которого справедлива оценка вида (3.24) (с $|\mu|$ замененным, например, на $|\mu| + 1$). Условие разрешимости задачи (1.1), (1.2) или (3.3), (3.4) является, соответственно, условием разрешимости вариационной задачи (3.25а) или (3.25б), которое имеет вид

$$\langle F, \bar{z}^* \rangle_\Omega + \langle h, \bar{z}^* \rangle_\Omega = 0 \quad \forall z^* \quad (3.27а)$$

или

$$\langle F, \bar{z} \rangle_\Omega + \langle h, \bar{z} \rangle_\Omega = 0 \quad \forall z, \quad (3.27б)$$

где z или z^* — произвольное о.р. однородной задачи (1.1), (1.2) или (3.3), (3.4). Согласно (3.26а) и (3.26б), определениям 3.2 и 3.3 получаем, что

$$\begin{aligned} \overline{\langle h, \bar{z}^* \rangle}_\Omega &= a[z^*, u_0]_{\bar{\mu}} + \int_\Omega z^* \overline{\alpha(x, D)u_0} dx + \int_{\Gamma_2} z^* \overline{\sigma_2 u_0} ds \\ &= \left\langle \left[\frac{\partial z^*}{\partial \nu} + \left(\bar{\sigma}^0 + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i n_i \right) z^* \right] \Big|_\Gamma, \bar{u}_0|_\Gamma \right\rangle_\Gamma \\ &= \left\langle \frac{\partial z^*}{\partial \nu}, \bar{\varphi} \right\rangle_{\Gamma_1} = \overline{\left\langle \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1}}, \end{aligned}$$

и аналогично, что

$$\langle h', \bar{z} \rangle_\Omega = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1}.$$

Последнее утверждение теоремы является непосредственным следствием утверждения, установленного перед теоремой 3.1.

Таким образом, теорема 3.1. полностью установлена.

§ 4. О собственных функциях эллиптического оператора со смешанными граничными условиями (самосопряженный случай)

Рассмотрим эллиптический оператор $L(x, D) = L(x, D, 0)$, где $L(x, D, \mu)$ определен (1.3), с однородными граничными условиями вида (1.2). В дополнение к предыдущим предположениям полагаем здесь, что все $a_i(x) \equiv 0$, $a_0(x)$ и $\sigma(x)$ — действительные функции из $L_\infty(\Omega)$ и $L_\infty(\Gamma_2)$, соответственно. Γ_1 и Γ_2 предполагаются открытыми кусками Γ , удовлетворяющими условиям $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $m_\Gamma(\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = 0$.

В этом параграфе приведем с доказательством основное утверждение о разложении по обобщенным собственным функциям такого оператора в пространствах

$L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$ и $\overset{\circ}{W}_2^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$. Для случая оператора с однородными граничными условиями Дирихле или третьего рода в областях класса C^1 доказательство базисности системы собственных функций в пространствах $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ или $\overset{\circ}{W}_2^{-1}(\Omega)$, соответственно, имеется, например, в [18, гл. 4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Обобщенная собственная функция (о.с.ф.) $e(x)$, отвечающая собственному значению (с.з.) λ , оператора $L(x, D)$ с однородными граничными условиями вида (1.2) является нетривиальным решением задачи

$$L(x, D)e = \lambda e \quad \text{в } \Omega \quad e|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial e}{\partial \nu} + \sigma e \right) \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (4.1)$$

т.е. функцией, принадлежащей пространству $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$ и удовлетворяющей условиям $\|e\|_{L_2(\Omega)} \neq 0$ и

$$a[e, v]_0 = \lambda(e, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1), \quad (4.2)$$

где $a[u, v]_0$ – форма (3.2а) с $\mu = 0$, $a_0^1(x) = a_0(x)$, $\sigma_1(x) = \sigma(x)$.

Естественно, что $e(x)$ будет о.с.ф., отвечающей с.з. λ , оператора $L(x, D)$ с однородными граничными условиями (1.2) тогда и только тогда, когда $e(x)$ – о.с.ф. оператора $L(x, D) + \mu^2 I$, $\mu > 0$, с теми же граничными условиями, отвечающая с.з. $\lambda + \mu^2$. Таким образом,

$$a[e, v]_\mu = (\lambda + \mu^2)(e, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1), \quad (4.3)$$

где $a[u, v]_\mu$ – форма (3.2а) с $q(x) \equiv 1$, $\sigma_1(x) = \sigma(x)$. Поскольку при достаточно больших μ : $\mu \geq \mu_0 > 0$, имеет место оценка (3.12), удобно использовать для определения о.с.ф. (4.3), а в качестве скалярного произведения в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ – форму $a[u, v]_\mu$ (с $q(x) \equiv 1$, $\sigma_1(x) = \sigma(x)$) при каком либо $\mu \geq \mu_0$.

Далее будет существенно использоваться оператор G_μ , определяемый по форме $a[u, v]_\mu$ с помощью соотношения (3.16). Поскольку G_μ представляет собой гомеоморфизм пространства $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ на пространство $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, то в качестве скалярного произведения в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ можно использовать форму

$$a^{-1}[f_1, f_2]_\mu = a[G_\mu f_1, G_\mu f_2]_\mu = \langle f_1, \overline{G_\mu f_2} \rangle_\Omega \quad \forall f_1, f_2 \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1). \quad (4.4)$$

При этом

$$c^2 \|f\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)}^2 \leq a^{-1}[f, f]_\mu \leq C^2 \|f\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)}^2 \quad (4.5)$$

$\forall f \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ с некоторыми постоянными $c > 0$, $C > 0$, не зависящими от μ .

ТЕОРЕМА 4.1. При сформулированных выше условиях оператор $L(x, D)$ с однородными граничными условиями (1.2) обладает ортонормированным в $L_2(\Omega)$ базисом $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ из о.с.ф. Соответствующие $e_k(x)$ с.з. λ_k действительны и стремятся к $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$ (будем считать, что $e_k(x)$ занумерованы в порядке неубывания λ_k : $\lambda_k \leq \lambda_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$). Системы о.с.ф.

$$\{(\lambda_k + \mu^2)^{-1/2} e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad (4.6a)$$

$$\{(\lambda_k + \mu^2)^{1/2} e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad (4.6b)$$

представляют собой ортонормированные базисы, соответственно, в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ со скалярным произведением $a[u, v]_{\mu}$ и в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ со скалярным произведением (4.4).

Всякая функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$ представима сходящимся в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ рядом

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(u) e_k(x), \quad (4.7a)$$

где $c_k(u) = (u, e_k)_{L_2(\Omega)}$ — коэффициенты Фурье функции $u(x)$. Для любых u и v из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ справедливо равенство Парсеваля–Стеклова

$$a[u, v]_{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu^2) c_k(u) \overline{c_k(v)}. \quad (4.8a)$$

Всякий $f(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ представим сходящимся в $\overset{\circ}{W}_2^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ рядом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k(x), \quad (4.7b)$$

где $c_k(f) = \langle f, \bar{e}_k \rangle_{\Omega}$ — коэффициенты Фурье функционала f . Для любых f и g из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ справедливо равенство Парсеваля–Стеклова

$$a^{-1}[f, g]_{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu^2)^{-1} c_k(f) \overline{c_k(g)}. \quad (4.8b)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании определений (3.16) оператора G_{μ} и (4.3) элементарно проверяется, что функция $e(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \Gamma_1)$ является отвечающей с.з. λ о.с.ф. оператора $L(x, D)$ с однородными граничными условиями (1.2) тогда и только тогда, когда $e(x)$ — собственная функция (с.ф.) оператора G_{μ} , отвечающая с.з. $(\lambda + \mu^2)^{-1}$. По силу свойств 2° оператора G_{μ} как оператора в $L_2(\Omega)$ (компактности и положительной определенности) у оператора G_{μ} существует ортонормированный в $L_2(\Omega)$ базис $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ из с.ф., отвечающих собственным значениям γ_k ,

$\gamma_k > 0$, $\gamma_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$: $G_\mu e_k = \gamma_k e_k$ (см., например, [30, гл. VI, п. 93]). Отсюда $\{e_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ из о.с.ф., отвечающих с.з. $\lambda_k = \gamma_k^{-1} - \mu^2$ оператора $L(x, D)$ с однородными условиями (1.2).

Далее, в силу (4.3) и (4.4)

$$a[e_k, e_j]_\mu = (\lambda_k + \mu^2)(e_k, e_j)_{L_2(\Omega)} = (\lambda_k + \mu^2)\delta_k^j, \quad (4.9a)$$

$$a^{-1}[e_k, e_j]_\mu = a[G_\mu e_k, G_\mu e_j]_\mu = (\lambda_k + \mu^2)^{-2}a[e_k, e_j]_\mu = (\lambda_k + \mu^2)^{-1}\delta_k^j, \quad (4.9b)$$

где δ_k^j — символ Кронекера.

Проверим, что система $\{e_k(x)\}_{k=1}^\infty$ является замкнутой как в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, так и в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$. В самом деле, пусть $u(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ и $a[u, e_k]_\mu = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда, в силу (4.3)

$$a[u, e_k]_\mu = \overline{a[e_k, u]_\mu} = (\lambda_k + \mu^2)\overline{(e_k, u)_{L_2(\Omega)}} = (\lambda_k + \mu^2)(u, e_k)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

и так как $(\lambda_k + \mu^2) > 0$, $(u, e_k)_{L_2(\Omega)} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Но $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — замкнутая система в $L_2(\Omega)$, а потому последние равенства влекут, что $u(x) = 0$ п.в. на Ω . Таким образом, замкнута в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ и ортонормированная система (4.6a), а потому она образует ортонормированный базис в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$.

Точно так же, пусть $f(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ и $a^{-1}[f, e_k]_\mu = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (4.4) и (3.16)

$$a^{-1}[f, e_k]_\mu = \overline{a[G_\mu e_k, G_\mu f]_\mu} = \overline{(e_k, G_\mu f)_{L_2(\Omega)}} = (G_\mu f, e_k)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $G_\mu f = 0$, и $f = 0$ в силу обратимости G_μ . Таким образом, замкнута в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ и ортонормированная система (4.6b), а потому она образует ортонормированный базис в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ со скалярным произведением (4.4).

Пусть теперь функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Тогда $u(x)$ представима сходящимся в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ рядом Фурье по системе (4.6a):

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a[u, (\lambda_k + \mu^2)^{-1/2} e_k]_\mu (\lambda_k + \mu^2)^{-1/2} e_k(x). \quad (4.10a)$$

Используя (4.3), имеем

$$(\lambda_k + \mu^2)^{-1} a[u, e_k]_\mu = (\lambda_k + \mu^2)^{-1} \overline{a[e_k, u]_\mu} = \overline{(e_k, u)_{L_2(\Omega)}} = (u, e_k)_{L_2(\Omega)} = c_k(u),$$

а потому ряд (4.10a) совпадает с рядом в правой части (4.7a).

Точно так же, всякий функционал $f \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ представим сходящимся в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ рядом Фурье в этом пространстве по системе (4.6b):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{-1}[f, (\lambda_k + \mu^2)^{1/2} e_k]_\mu (\lambda_k + \mu^2)^{1/2} e_k(x). \quad (4.10b)$$

Воспользовавшись (4.4), (3.16) и равенствами $(\lambda_k + \mu^2)G_\mu e_k = e_k$, находим, что

$$(\lambda_k + \mu^2)a^{-1}[f, e_k]_\mu = (\lambda_k + \mu^2)a[G_\mu f, G_\mu e_k]_\mu = \langle f, \bar{e}_k \rangle_\Omega = c_k(f),$$

а потому ряд (4.10б) совпадает с рядом в правой части (4.7б).

Наконец, равенства Парсеваля–Стеклова (4.8а) и (4.8б) получаются подстановкой в формы $a[u, v]_\mu$ и $a^{-1}[f, g]_\mu$ разложений элементов в ряды Фурье при использовании соотношений ортогональности (4.9а) и (4.9б).

По поводу о.р. краевых задач и разложениям по о.с.ф. в самосопряженном случае см. также [32]. По поводу разложений по с.ф. сильно эллиптических несамосопряженных операторов с однородными условиями Дирихле или Неймана см., например, [33].

§ 5. Об операторах Пуанкаре–Стеклова

В настоящем параграфе будет рассмотрено обобщение развитой в [15] и [16] теории операторов Пуанкаре–Стеклова на куске γ границы Γ для того случая, когда на оставшейся части $\Gamma \setminus \bar{\gamma}$ задаются однородные смешанные граничные условия.

Предположим, что граница Γ липшицевой области Ω разбита на три открытых непересекающихся куска γ , Γ_1 и Γ_2 в том смысле, что $m_\Gamma(\Gamma \setminus (\gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)) = 0$. Последнее означает, что $\Gamma = \gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \delta$, где γ , Γ_1 , Γ_2 и δ попарно не пересекаются и $m_\Gamma(\delta) = 0$. Рассмотрим граничную задачу:

$$L(x, D, \mu)u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (5.1)$$

$$u(x)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \sigma(x)u(x) \right) \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \Big|_{\gamma} = g(x), \quad (5.2)$$

где $L(x, D, \mu)$ – равномерно эллиптический оператор (1.3). Вначале предположения о коэффициентах уравнения, $\sigma(x)$ и значениях параметра μ остаются теми же, что в § 1 и в начале § 3. Рассмотрения этого параграфа будут существенно использованы в следующем параграфе.

Задачу (5.1), (5.2) будем рассматривать, в соответствии с предыдущей теорией, как смешанную задачу для уравнения (5.1) с граничными условиями

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \overset{\circ}{\sigma}(x)u(x) \right) \Big|_{\Gamma_3} = \overset{\circ}{g}(x), \quad (5.3)$$

где $\Gamma_3 = \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_1$,

$$\overset{\circ}{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{при } x \in \Gamma_2, \\ 0 & \text{при } x \in \Gamma_3 \setminus \Gamma_2, \end{cases} \quad (5.4)$$

$\overset{\circ}{g}(x)$ – функционал из $\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\Gamma_3)$ с носителем на $\bar{\gamma}$, т.е. $\overset{\circ}{g}(x)$ обращается в нуль на Γ_2 :

$$\langle \overset{\circ}{g}, \psi \rangle_{\Gamma_3} = 0 \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_2), \quad (5.5)$$

и при этом $\overset{\circ}{g}(x)$ совпадает на γ с $g(x)$ в определенном смысле. Нам будет для дальнейшего удобно дать эквивалентное описание таких функционалов $\overset{\circ}{g}(x)$ через их значения $g(x)$ на γ , описываемые как функционалы над некоторым пространством функций, определенных только на γ .

Обозначим $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, $\mu > 0$, факторпространство $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_3)/\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_2)$, т.е. подпространство функций $\varphi(x)$ из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma)$, допускающих продолжения $l\varphi \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_3)$, с нормой в этом пространстве, определяемой выражением

$$\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} = \inf_{\substack{l\varphi \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_3) \\ l\varphi|_{\gamma} = \varphi}} \|l\varphi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_3)}. \quad (5.6)$$

Пространство $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ является (как факторпространство банаховых) банаховым пространством (см., например, [31]). Обозначим $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ пространство, сопряженное пространству $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$.

ЛЕММА 5.1. *Существует естественный изометрический изоморфизм между подпространством функционалов из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_3)$ с носителями в $\overline{\gamma}$ и пространством $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$. А именно, всякому функционалу $\overset{\circ}{g}(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_3)$ с носителем в $\overline{\gamma}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие функционал $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ так, что при этом*

$$\langle g, \varphi \rangle_{\gamma} = \langle \overset{\circ}{g}, l\varphi \rangle_{\Gamma_3}, \quad (5.7)$$

где $l\varphi \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_3)$ – произвольное продолжение $\varphi \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, и имеет место равенство

$$\|g\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} = \|\overset{\circ}{g}\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_3)}. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overset{\circ}{g}(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_3)$, $\text{supp } \overset{\circ}{g}(x) \subseteq \overline{\gamma}$. Тогда значение правой части в (5.7) в силу (5.5) не зависит от продолжения $l\varphi$ элемента $\varphi \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, а потому формула (5.7) определяет линейный функционал на этом пространстве. Кроме того,

$$|\langle g, \varphi \rangle_{\gamma}| = |\langle \overset{\circ}{g}, l\varphi \rangle_{\Gamma_3}| \leq \|\overset{\circ}{g}\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma_3)} \cdot \|l\varphi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_3)}.$$

Переходя в этой оценке к $\inf$ по продолжениям $l\varphi$ получим, что левая часть в (5.8) не превосходит правой части.

Пусть задан $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$. Определим функционал $\overset{\circ}{g}(x)$ формулой (5.7), а более точно, действие $\overset{\circ}{g}(x)$ на произвольную функцию $\psi \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma_3)$ определим по формуле

$$\langle \overset{\circ}{g}, \psi \rangle_{\Gamma_3} = \langle g, \psi|_{\gamma} \rangle_{\gamma}. \quad (5.9)$$

Очевидно выполняется (5.5) и, кроме того,

$$|\langle \overset{\circ}{g}, \psi \rangle_{\Gamma_3}| = |\langle g, \psi|_{\gamma} \rangle_{\gamma}| \leq \|g\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \cdot \|\psi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_3)},$$

откуда следует, что правая часть в (5.8) не превосходит левую. Легко также убедиться, что введенные только что операции $\overset{\circ}{g} \rightarrow g$ и $g \rightarrow \overset{\circ}{g}$ действительно являются взаимно обратными.

Итак, в задаче (5.1), (5.2) будем предполагать, что $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, а саму эту задачу понимать как задачу (5.1), (5.3) с $\overset{\circ}{g}(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\Gamma_3)$, определяемым по $g(x)$ согласно соответствию, устанавливаемому леммой 5.1. Будем предполагать также, что задача (5.1), (5.3) однозначно разрешима, например, ограничимся для определенности рассмотрением случая $\operatorname{Re} \mu \geq \mu_*$ (см. теорему 4.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Линейный оператор S_{μ} , определенный на любом функционале $g \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ по формуле

$$S_{\mu}g = u|_{\gamma}, \quad (5.10)$$

где $u(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^1(\Omega; \Gamma_1)$ – решение задачи (5.1), (5.2), назовем оператором Пуанкаре–Стеклова, соответствующим этой задаче (см. [15], [16]).

ТЕОРЕМА 5.1. При $\operatorname{Re} \mu \geq \mu_*$, где μ_* – значение, появляющееся в теореме 4.1, оператор S_{μ} представляет собой гомеоморфизм пространства $\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ на пространство $\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$. При этом, если еще μ подчинено, например, ограничению $|\arg \mu| < (\pi/2) - \delta$, $\delta > 0$, то нормы S_{μ} и S_{μ}^{-1} могут быть оценены постоянными, не зависящими от μ . Сужение оператора S_{μ} на $L_2(\gamma)$, рассматриваемое как оператор в $L_2(\gamma)$, является вполне непрерывным оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как решение $u(x)$ задачи (5.1), (5.3) принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^1(\Omega; \Gamma_1)$, то в силу теоремы 2.3 $u|_{\Gamma} \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_3)$, и при использовании оценок (2.13), (3.1) и равенства (5.8) получаем

$$\begin{aligned} \|S_{\mu}g\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} &\leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_3)} \leq c_0(\Omega, 1) \|u\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^1(\Omega)} \\ &\leq C(1 + |\operatorname{Im} \mu| / \operatorname{Re} \mu) \|g\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Чтобы получить обратимость S_{μ} и оценку нормы S_{μ}^{-1} , рассмотрим для произвольной $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ смешанную задачу для уравнения (5.1) с граничным условием

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad u|_{\gamma} = \varphi, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right) \Big|_{\Gamma_2} = 0. \quad (5.12)$$

Обозначим

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in \gamma, \\ 0 & \text{при } x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\|\overset{\circ}{\varphi}\|_{W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2)} \leq \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)},$$

а потому (это можно установить, проанализировав вывод оценки (3.11)) для решения $u(x)$ задачи (5.1), (5.12) справедлива оценка (3.11) с $f = 0$, $g = 0$ и с φ , замененной на $\overset{\circ}{\varphi}$, Γ_1 , замененным на $\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2$. Далее, на основании определения 3.2 можно построить по формуле (3.7а) с $\hat{f} = 0$ функционал

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma^0 u \right) \Big|_{\Gamma} \in W_{2,|\mu|}^{-1/2}(\Gamma),$$

где коэффициент σ^0 определен (3.6). Используя в (3.7а) $l\psi = l_{\Gamma}^{\Omega}\psi$, где l_{Γ}^{Ω} – оператор продолжения, фигурирующий в теореме 2.4 (соответствующий значению параметра $|\mu|$), и производя оценки, аналогичные уже проводившимся, получаем, что

$$\left\| \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma^0 u \right) \Big|_{\Gamma} \right\|_{W_{2,|\mu|}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W_{2,|\mu|}^1(\Omega)}$$

с постоянной C , не зависящей от μ . Кроме того, из предыдущего следует, что функционал

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma^0 u \right) \Big|_{\Gamma}$$

обращается в нуль на Γ_2 . Обозначим через $\overset{\circ}{g}(x)$ сужение этого функционала на подпространство $\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_3)$. Поскольку носитель $\overset{\circ}{g}(x)$ сосредоточен на $\overline{\gamma}$, можно построить функционал $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, удовлетворяющий (5.7). С использованием (5.8) легко получаем, что

$$\|g\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \leq \left\| \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma^0 u \right) \Big|_{\Gamma} \right\|_{W_{2,|\mu|}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Все это приводит окончательно к оценке

$$\|g\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \leq C(1 + |\operatorname{Im} \mu| / \operatorname{Re} \mu) \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \quad (5.13)$$

с постоянной C , также не зависящей от μ .

Далее, нетрудно проверить, что решение $u(x)$ задачи (5.1), (5.2) с таким образом найденным по $\varphi(x)$ функционалом $g(x)$, совпадает с решением $u(x)$ задачи (5.1), (5.12). Поэтому $S_{\mu}g = \varphi$. Это дает, что S_{μ} отображает на все $\overset{\circ}{W}_{2,|\mu|}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$.

Осталось еще проверить, что S_{μ} обратим. В самом деле, если $S_{\mu}g = 0$, то решение u задачи (5.1), (5.2) является в то же время решением задачи (5.1), (5.12)

с $\varphi = 0$, а потому в силу единственности решения этой задачи $u = 0$. Тогда в силу (3.7а) и равенства

$$\mathring{g} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma^0 u \right) \Big|_{\Gamma_3}$$

получаем, что $\mathring{g} = 0$, а потому и $g = 0$. Оценку нормы S_μ^{-1} получаем при подстановке в (5.13) $g = S_\mu^{-1}\varphi$.

Утверждение о полной непрерывности S_μ , рассматриваемого на $L_2(\gamma)$, получается аналогично соответствующему утверждению для оператора G_μ .

Ниже спектральные свойства оператора S_μ рассмотрим (как и в [15], [16]) только для самосопряженного случая, т.е. для случая, когда коэффициенты $a_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$, коэффициенты $a_0(x)$ и $\sigma(x)$ — действительные функции из $L_\infty(\Omega)$ и $L_\infty(\Gamma_2)$, соответственно, $\mu \geq \mu_0 > 0$, где μ_0 появляется на I-м этапе доказательства теоремы 3.1. Через $a[u, v]_\mu$ будем обозначать форму (3.2а) с $a_0^1(x) = a_0(x)$ и $\sigma_1(x) = \sigma(x)$. Итак, $\mu_0 > 0$ таково, что выполняется оценка (3.12) (с постоянными s и C не зависящими от μ). Основными для дальнейшего являются следующие соотношения.

ЛЕММА 5.2. 1. Пусть для $g_i \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ функции $u_i(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ представляют собой решения задачи (5.1), (5.2) с $g = g_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$a[u_1, u_2]_\mu = \langle g_1, \overline{S_\mu g_2} \rangle_\gamma, \quad (5.14)$$

и в качестве эквивалентного скалярного произведения в $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ можно принять форму (5.14).

2. Пусть для $\varphi_i \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ функции $u_i(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ представляют собой решения задачи (5.1), (5.12) с $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$a[u_1, u_2]_\mu = \langle S_\mu^{-1} \varphi_1, \overline{\varphi_2} \rangle_\gamma, \quad (5.15)$$

и в качестве эквивалентного скалярного произведения в $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ можно принять форму (5.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (3.5а) (с $\sigma_2 = 0$) $u = u_1, v = u_2$, пользуясь определением (5.7) и равенством $u_2|_\gamma = S_\mu g_2$, приходим к (5.14). Соотношение (5.15) получается из (5.14) при введении функционалов $g_i = S_\mu^{-1} \varphi_i$ и использовании уже установленного факта, что решения $u_i(x)$ задачи (5.1), (5.2) с g , равным таким g_i , совпадают с решениями задачи (5.1), (5.12) с $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$.

Далее, формы (5.14) и (5.15) являются эрмитовыми. Более того, в силу теоремы 5.1, теоремы 2.3 вложения, оценки (3.12) и, наконец, оценки (3.11), имеем для решения $u(x)$ задачи (5.1), (5.2)

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^2 &\sim \|S_\mu g\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^2 \leq \|u\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq c_0^2(\Omega, 1) \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}^2 \\ &\sim a[u, u]_\mu \leq C \|g\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^2. \end{aligned}$$

Если теперь $u(x)$ – решение задачи (5.1), (5.12), то $u(x)$ является также и решением задачи (5.1), (5.2) с $g = S_\mu^{-1}\varphi$. Поэтому, пользуясь предыдущим и теоремой 5.1, получим

$$\begin{aligned}\langle S_\mu^{-1}\varphi, \varphi \rangle_\gamma &= \langle g, S_\mu g \rangle_\gamma \sim \|g\|_{\dot{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^2 \\ &= \|S_\mu^{-1}\varphi\|_{\dot{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^2 \sim \|\varphi\|_{\dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^2.\end{aligned}$$

Здесь под эквивалентностью понимается наличие двусторонней оценки с положительными постоянными, не зависящими от μ .

В связи с этим используем следующие обозначения для этих скалярных произведений:

$$(g_1, g_2)_{\dot{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^* = \langle g_1, \overline{S_\mu g_2} \rangle_\gamma, \quad (5.16a)$$

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^* = \langle S_\mu^{-1}\varphi_1, \overline{\varphi_2} \rangle_\gamma. \quad (5.16b)$$

ТЕОРЕМА 5.2. *При сформулированных выше условиях самосопряженности задачи (5.1), (5.2) и условиях на параметр μ , ограничение оператора S_μ на $L_2(\gamma)$ представляет собой самосопряженный вполне непрерывный неотрицательный оператор в $L_2(\gamma)$, у которого 0 не является собственным значением, а потому, он обладает ортонормированным базисом $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в $L_2(\gamma)$ из с.ф.:*

$$S_\mu \varepsilon_k = \nu_k^{-1} \varepsilon_k, \quad (5.17)$$

где $\nu_k > 0$, $\nu_k \leq \nu_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, $\varepsilon_k(x) \in \dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ (ν_k и ε_k , естественно, зависят и от μ). Системы с.ф.

$$\{\nu_k^{-1/2} \varepsilon_k(x)\}_{k=1}^\infty, \quad (5.18a)$$

$$\{\nu_k^{1/2} \varepsilon_k(x)\}_{k=1}^\infty \quad (5.18b)$$

образуют ортонормированные базисы, соответственно, в пространствах $\dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ со скалярным произведением (5.16a) и $\dot{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ со скалярным произведением (5.16b).

Всякая $\varphi(x) \in \dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ представима сходящимся в $\dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ рядом

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k(\varphi) \varepsilon_k(x), \quad (5.19a)$$

где $c_k(\varphi) = (\varphi, \varepsilon_k)_{L_2(\gamma)}$ – коэффициенты Фурье функции φ . Для любых φ_1 и φ_2 из $\dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ справедливо равенство Парсеваля–Стеклова

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\dot{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^* = \sum_{k=1}^\infty \nu_k c_k(\varphi_1) \overline{c_k(\varphi_2)}. \quad (5.20a)$$

Всякий $g \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ представим сходящимся в $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ рядом

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) \varepsilon_k(x), \quad (5.196)$$

где $c_k(g) = \langle g, \bar{\varepsilon}_k \rangle_{\gamma}$ — коэффициенты Фурье функционала g . Для любых g_1 и g_2 из $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ справедливо равенство Парсеваля–Стеклова

$$(g_1, g_2)_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^* = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^{-1} c_k(g_1) \overline{c_k(g_2)}. \quad (5.206)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компактность оператора S_{μ} как оператора из $L_2(\gamma)$ в $L_2(\gamma)$ уже установлена (см. теорему 5.1).

Далее, пусть $g_i(x) \in L_2(\gamma)$ — произвольные, а $u_i(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ — решения задачи (5.1), (5.2) с $g(x) = g_i(x)$, $i = 1, 2$. Тогда в силу леммы 5.2.1, а именно равенства (5.14),

$$\begin{aligned} (g_1, S_{\mu} g_2)_{L_2(\Omega)} &= \langle g_1, \overline{S_{\mu} g_2} \rangle_{\Omega} = a[u_1, u_2]_{\mu} \\ &= \overline{a[u_2, u_1]_{\mu}} = \langle g_2, \overline{S_{\mu} g_1} \rangle_{\Omega} = (S_{\mu} g_1, g_2)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из положительности формы $a[u, v]_{\mu}$ следует самосопряженность и неотрицательность оператора S_{μ} в $L_2(\gamma)$. Если же для некоторой $g \in L_2(\gamma)$ $S_{\mu} g = 0$, то в силу теоремы 5.1 $g = 0$ как элемент пространства $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, что означает

$$\int_{\gamma} g \varphi dx = 0$$

$\forall \varphi \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, а потому и $\forall \varphi \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma)$. Но тогда в силу обобщения леммы Дюбуа–Реймона для этого случая (такое обобщение может быть легко установлено с помощью проведения локализации и использования, например, леммы 2.3), получаем, что $g(x) = 0$ п.в. на γ .

Далее доказательство теоремы 5.2 совершенно аналогично доказательству соответствующей части теоремы 4.1. В самом деле, в теореме 4.1 устанавливается утверждение о разложении по собственным функциям сужения в $L_2(\Omega)$ (вполне непрерывного и положительного) оператора G_{μ} в пространствах $\mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ и $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$, в которых скалярные произведения вводились по сути дела по формулам $\langle G_{\mu}^{-1} u_1, \bar{u}_2 \rangle_{\Omega}$ и $\langle f, \overline{G_{\mu} f_2} \rangle_{\Omega}$, соответственно. Настоящая же теорема представляет собой аналогичное утверждение о разложении по собственным функциям сужения в $L_2(\gamma)$ (вполне непрерывного и положительного) оператора S_{μ} в пространствах $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ и $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, в которых скалярные произведения вводятся по формулам (5.16а) и (5.16б), соответственно. В связи с этим доказательство оставшейся части теоремы 5.2 опустим.

Отметим, что оператор S_μ переводит базис (5.18а) в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, ортонормированный относительно скалярного произведения (5.16а), а базис (5.18б) в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, ортонормированный относительно скалярного произведения (5.16б).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Решение $E_k(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ задачи (5.1), (5.2) с $g(x) = \nu_k^{1/2} \varepsilon_k(x)$ или, что то же самое, решение задачи (5.1), (5.12) с $\varphi(x) = \nu_k^{-1/2} \varepsilon_k(x)$ назовем *фундаментальной функцией* (ф.ф.) Пуанкаре–Стеклова, соответствующей с.ф. $\varepsilon_k(x)$ оператора S_μ (см. [15], [16]).

С помощью разложений функционала g в граничном условии в (5.2) или функции φ в граничном условии (5.12) в ряды Фурье по с.ф. $\varepsilon_k(x)$ оператора S_μ легко устанавливается следующее утверждение (см. [15], [16] для случая, соответствующего $\Gamma_2 = \emptyset$).

ТЕОРЕМА 5.3. Система ф.ф. $\{E_k(x)\}_{k=1}^\infty$ Пуанкаре–Стеклова, соответствующая оператору S_μ , ортонормирована относительно скалярного произведения $a[u, v]_\mu$ в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$. Для всякого функционала $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ в (5.2) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^{-1/2} c_k(g) E_k(x),$$

где $c_k(g)$ – коэффициенты Фурье функционала $g(x)$ по системе с.ф. $\varepsilon_k(x)$ оператора S_μ (см. (5.19а)), сходится в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega)$ к решению $u(x)$ задачи (5.1), (5.2).

Для всякой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ в (5.12) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^{1/2} c_k(\varphi) E_k(x),$$

где $c_k(\varphi)$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по системе с.ф. $\varepsilon_k(x)$ (см. (5.19б)), сходится в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega)$ к решению $u(x)$ задачи (5.1), (5.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (5.14) $g_1 = \nu_k^{1/2} \varepsilon_k(x)$, $g_2 = \nu_j^{1/2} \varepsilon_j(x)$, имеем:

$$\begin{aligned} a[E_k, E_j]_\mu &= \left(\frac{\nu_k}{\nu_j} \right)^{1/2} \langle \varepsilon_k, \overline{\nu_j S_\mu \varepsilon_j} \rangle_\gamma \\ &= \left(\frac{\nu_k}{\nu_j} \right)^{1/2} \langle \varepsilon_k, \bar{\varepsilon}_j \rangle_\gamma = \left(\frac{\nu_k}{\nu_j} \right)^{1/2} (\varepsilon_k, \varepsilon_j)_{L_2(\gamma)} = \delta_k^j. \end{aligned}$$

Соотношения (5.14) и (5.15) с использованием (5.16а) и (5.16б) перепишем в виде

$$a[u_1, u_2]_\mu = (g_1, g_2)_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^*, \quad (5.21а)$$

$$a[u_1, u_2]_\mu = (\varphi_1, \varphi_2)_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^*, \quad (5.21б)$$

соответственно. Если в (5.2) $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, то в силу теоремы 5.2 $g(x) - \sum_{k=1}^N c_k(g) \varepsilon_k(x) \rightarrow 0$ в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ при $N \rightarrow \infty$. Решением задачи (5.1), (5.2) с $g(x)$, замененным на $g(x) - \sum_{k=1}^N c_k(g) \varepsilon_k(x)$, согласно определению 5.3 будет функция $u(x) - \sum_{k=1}^N \nu_k^{-1/2} c_k(g) E_k(x)$, и в силу (5.21а) получаем, что

$$\left\| u - \sum_{k=1}^N \nu_k^{-1/2} c_k(g) E_k \right\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega, \Gamma_1)}^* = \left\| g - \sum_{k=1}^N c_k(g) \varepsilon_k \right\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}^* \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$, где

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)}^* = a[u, u]_\mu^{1/2}.$$

Совершенно аналогично с использованием (5.21б) устанавливается последнее утверждение теоремы 5.3.

В заключение параграфа следующее утверждение, которое будет использовано и в дальнейшем, выделим в виде леммы.

ЛЕММА 5.3. *Если в дополнение к предыдущим предположениям Γ_2 — липшицев кусок границы Γ , то функция $\varphi(x)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ тогда и только тогда, когда функция*

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in \gamma, \\ 0 & \text{при } x \in \Gamma \setminus (\gamma \cup \overline{\Gamma}_2) \end{cases}$$

принадлежит пространству $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2)$. При этом

$$\|\overset{\circ}{\varphi}\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2)} \leq \|\varphi\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \leq c \|\overset{\circ}{\varphi}\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2)}, \quad (5.22)$$

где $c = c(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2; \Gamma)$ — постоянная, фигурирующая в (2.12) (не зависит от μ).

Доказательство аналогично доказательству утверждения, приведенного непосредственно перед теоремой 3.1, и использует оператор продолжения l_Λ^Γ , существование которого гарантируется теоремой 2.1.2.

Таким образом, взаимно однозначное соответствие $\varphi \leftrightarrow \overset{\circ}{\varphi}$ устанавливает в этом случае отождествление пространств $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ и $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2; \Gamma_1)$. С этим получаем отождествление и двойственных пространств $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\gamma \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ и $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2; \Gamma_1)$.

§6. О смешанной задаче в цилиндрических областях.

Обоснование метода Фурье

Пусть Λ — область с липшицевой границей $\partial\Lambda$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, $\Omega = \Lambda \times (a_0, a_1)$, $a_0 < a_1$, — цилиндрическая область в $\mathbb{R}^n$. Пусть, далее, $\partial\Lambda$ разбита на два открытых липшицева куска γ_1 и γ_2 : $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\gamma_1} \cup \gamma_2 = \partial\Lambda$ (в частном случае одно из γ_i может быть пустым множеством). Обозначим: $\Lambda_0 = \Lambda \times \{a_0\}$ и $\Lambda_1 = \Lambda \times \{a_1\}$ — торцы цилиндра Ω , $\Gamma_1 = \gamma_1 \times (a_0, a_1)$ и $\Gamma_2 = \gamma_2 \times (a_0, a_1)$ — части, составляющие $\Gamma_0 = \partial\Lambda \times (a_0, a_1)$ — боковую поверхность цилиндра Ω . Всю границу области Ω обозначаем, как и раньше, через Γ .

ЛЕММА 6.1. *При сделанных предположениях Ω является также областью с липшицевой границей, Λ_0 , Λ_1 , Γ_0 , Γ_1 и Γ_2 представляют собой липшицевы куски границы Γ .*

Доказательство этого интуитивно достаточно очевидного в $\mathbb{R}^3$ утверждения в общем случае технически довольно громоздко и будет опущено.

Настоящий параграф в основном посвящен обоснованию метода Фурье для смешанной задачи для однородного уравнения

$$L(x, D, \mu)u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (6.1)$$

при однородных граничных условиях на боковой поверхности

$$u(x)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \sigma(x')u(x) \right) \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (6.2)$$

и с неоднородными граничными условиями на торцах одного из следующих видов:

$$u(x)|_{\Lambda_0} = \varphi_0(x), \quad u(x)|_{\Lambda_1} = \varphi_1(x); \quad (6.3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)|_{\Lambda_0} = g_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)|_{\Lambda_1} = g_1(x); \quad (6.3b)$$

$$u(x)|_{\Lambda_0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)|_{\Lambda_1} = g_1(x), \quad (6.3b)$$

где $\partial/\partial \mathbf{n}$ — производная по направлению внешней нормали. Оператор (6.1) предполагаем допускающим разделение переменных на группу $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и переменную x_n вида

$$L(x, D, \mu) = L'(x', D') - D_n^2 + \mu^2 I, \quad (6.4a)$$

где

$$L'(x', D')u(x) = - \sum_{i,j=1}^{n-1} D_i(a_{ij}(x')D_j u(x)) + a_0(x')u(x), \quad (6.4b)$$

$a_{ij}(x') \in L_\infty(\Lambda)$ и образуют эрмитову равномерно по $x' \in \Lambda$ положительно определенную матрицу:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x') \zeta_i \bar{\zeta}_j \geq \alpha_0 |\zeta'|^2 \quad \forall \zeta' \in \mathbb{C}^{n-1}, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0.$$

Предполагается также, что $a_0(x') \in L_\infty(\Lambda)$, $\sigma(x') \in L_\infty(\gamma_2)$ – действительные функции, и что $\mu \geq \mu_0 > 0$, где μ_0 – столь большое, чтобы рассматриваемые задачи были однозначно разрешимы.

Сначала получим такие формулировки обобщенных решений рассматриваемых задач, в которых функции и функционалы правых частей неоднородных граничных условий (6.3а)–(6.3в) представляют собой соответствующие объекты уже только на одном и том же поперечном сечении Λ цилиндра Ω .

Исходя из рассмотрений §3 и §5, задачу (6.1), (6.2), (6.3а) будем понимать как задачу вида (5.1), (5.12) с $\gamma = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$ и с

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{при } x \in \Lambda_0, \\ \varphi_1(x) & \text{при } x \in \Lambda_1. \end{cases} \quad (6.5a)$$

При этом следует полагать, что

$$\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1). \quad (6.6a)$$

При достаточно больших μ , $\mu \geq \mu_0$, задача имеет единственное обобщенное решение $u(x)$, для которого выполняется оценка вида (3.11) с f и g нулевыми и с членом $\|\varphi\|_{W_{2,|\mu|}^{1/2}(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)}$, замененным на $\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}$.

Задачу (6.1), (6.2), (6.3б) в силу соответствующих рассмотрений §5 будем понимать как задачу вида (5.1), (5.2), опять же с $\gamma = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$ и с

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{на } \Lambda_0, \\ g_1(x) & \text{на } \Lambda_1 \end{cases} \quad (6.5б)$$

(однако здесь требуется еще придать смысл последнему выражению, что будет сделано ниже). Должно выполняться включение

$$g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1). \quad (6.6б)$$

Такую задачу на самом деле нужно понимать как задачу вида (5.1), (5.3) с функционалом $\overset{\circ}{g}(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma \setminus \bar{\Gamma}_1)$, представляющим собой “продолжение нулем на Γ_2 ” функционала $g(x)$ в смысле леммы 5.1. При достаточно больших μ , $\mu \geq \mu_0$, задача имеет единственное обобщенное решение $u(x)$, для которого выполняется оценка вида самого правого неравенства в (5.11).

Задачу (6.1), (6.2), (6.3в) будем рассматривать как обобщение задачи (5.1), (5.2) с $\gamma = \Lambda_1$, $g(x) = g_1(x)$, для которого однородное граничное условие $u|_{\Gamma_1} = 0$ заменено на неоднородное: $u|_{\Gamma_1} = 0$, $u|_{\Lambda_0} = \varphi_0$. Итак, в (5.1), (5.2) Γ_1 заменяется на $\tilde{\Gamma}_1 = \text{int}(\overline{\Gamma_1 \cup \Lambda_0})$ и на этом множестве задается функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{при } x \in \Lambda_0, \\ 0 & \text{при } x \in \tilde{\Gamma}_1 \setminus \Lambda_0. \end{cases} \quad (6.5в)$$

Предполагаем, что

$$\begin{aligned} g_1(x) &\in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_0), \\ \varphi_0(x) &\in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_0 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1). \end{aligned} \quad (6.6в)$$

Отметим, что последнее условие эквивалентно условию $\varphi(x) \in W_{2,\mu}^{1/2}(\tilde{\Gamma}_1 \rightarrow \Gamma)$.

При выполнении первого условия (6.6в) по функционалу $g_1(x)$ согласно лемме 5.1 может быть построен функционал $\mathring{g}(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_2)$, где $\tilde{\Gamma}_2 = \text{int}(\overline{\Gamma_2 \cup \Lambda_1})$, являющийся “продолжением нулем на Γ_2 ” функционала $g_1(x)$, и задача (6.1), (6.2), (6.3в) понимается как задача вида (1.1), (1.2):

$$L(x, D, \mu)u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\tilde{\Gamma}_1} = \varphi, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathring{\sigma} u \right) \Big|_{\tilde{\Gamma}_2} = \mathring{g}, \quad (6.7)$$

где

$$\mathring{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma(x') & \text{при } x \in \Gamma_2, \\ 0 & \text{при } x \in \Lambda_1. \end{cases} \quad (6.8)$$

Обобщенным решением такой задачи является функция $u(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, удовлетворяющая граничному условию

$$u(x)|_{\Lambda_0} = \varphi_0(x)$$

и $\forall v(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)$ — соотношению

$$a[u, v]_\mu = \langle g_1, \bar{v} \rangle_{\Lambda_1}, \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned} a[u, v]_\mu &= \int_{a_0}^{a_1} a'[u, v]_\mu dx_n + \int_{\Omega} D_n u D_n \bar{v} dx, \\ a'[u, v]_\mu &= \int_{\Lambda} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x') D_j u(x) D_i \bar{v}(x) + (a_0(x') + \mu^2) u(x) \bar{v}(x) \right] dx' \\ &\quad + \int_{\gamma_1} \sigma(x') u(x) \bar{v}(x) ds_{x'}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Последняя задача имеет единственное решение $u(x)$ при $\mu \geq \mu_0$, где μ_0 достаточно большое, и при этом выполняется оценка вида (3.11):

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} \leq (c_1 \|\varphi_0\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_0 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} + c_2 \|g_1\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)}). \quad (6.11)$$

Ниже под эквивалентностью двух зависящих от параметра μ нормировок будем понимать, не оговаривая это, наличие двусторонних оценок с оценивающими постоянными, не зависящими от μ .

ЛЕММА 6.2. 1. Пространства $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ и $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$ совпадают; их нормы эквивалентны, $m = 0, 1$.

2. Включение (6.6а) для функции (6.5а) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_m(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, $m = 0, 1$. Норма функции (6.5а) в пространстве $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ эквивалентна норме

$$\sum_{m=0}^1 \|\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из определений непосредственно следует оценка

$$\|\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \leq \|\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})}.$$

Обозначим, далее, $\eta_0(x) = (a_1 - x_n)/(a_1 - a_0)$, $\eta_1(x) = (x_n - a_0)/(a_1 - a_0)$. Тогда, если $l\varphi_m \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma; \Gamma_1)$ такая, что $l\varphi_m|_{\Lambda_m} = \varphi_m$ и

$$\|l\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)} \leq 2\|\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)},$$

то в силу леммы 2.1 $\eta_m(x)l\varphi_m(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$ и

$$\|\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})} \leq \|\eta_m l\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)} \leq c\|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)},$$

где c — постоянная, не зависящая от μ . Итак, первое утверждение леммы установлено.

2. На основании определений функции (6.5а), удовлетворяющей (6.6а), и встречающихся пространств легко получаем, что

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_k \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} &\leq \|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \\ &\leq \sum_{m=0}^1 \|\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})}, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Эта оценка с учетом уже доказанного устанавливает справедливость второй части леммы 6.2.

ЛЕММА 6.3. 1. Пространства $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ и $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$ совпадают, а их нормы эквивалентны.

2. Для всякого функционала $g(x)$, удовлетворяющего (6.6б), существует однозначно определенные функционалы $g_m(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, $m = 0, 1$, такие, что для любой функции (6.5а), удовлетворяющей (6.6а),

$$\langle g, \varphi \rangle_{\Lambda_0 \cup \Lambda_1} = \sum_{m=0}^1 \langle g_m, \varphi|_{\Lambda_m} \rangle_{\Lambda_m}. \quad (6.14)$$

Обратно, для любых двух функционалов $g_m(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, $m = 0, 1$, функционал $g(x)$, определяемый по формуле (6.14), удовлетворяет (6.6б), и при этом

$$\|g\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \leq \sum_{m=0}^1 \|g_m\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}. \quad (6.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение непосредственно вытекает из п. 1 леммы 6.2.

2. Для каждого $m = 0, 1$ определим линейный оператор λ_m , который всякую функцию $\varphi_m(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ переводит в функцию

$$\lambda_m \varphi_m(x) = \begin{cases} \varphi_m(x) & \text{при } x \in \Lambda_m, \\ 0 & \text{при } x \in \Lambda_{1-m}. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \|\lambda_m \varphi_m\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} &= \|\varphi_m\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})} \\ &\leq c \|\varphi_m\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)}, \end{aligned}$$

то непрерывен каждый из операторов λ_m . Поэтому функционалы g_m , определяемые по формуле

$$\langle g_m, \varphi_m \rangle_{\Lambda_m} = \langle g, \lambda_m \varphi_m \rangle_{\Lambda_0 \cup \Lambda_1}, \quad (6.16)$$

принадлежат пространствам $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$. Всякую функцию (6.5а), удовлетворяющую (6.6а), представим

$$\varphi = \sum_{m=0}^1 \lambda_m \varphi|_{\Lambda_m}.$$

Подставляя это разложение в $\langle g, \varphi \rangle_{\Lambda_0 \cup \Lambda_1}$, приходим к представлению (6.14) с функционалами g_m , определяемыми по формуле (6.16).

Единственность представления (6.14) устанавливается при подстановке в него $\varphi = \lambda_k \varphi|_{\Lambda_k}$: для g_m тогда необходимо получают выражения (6.16).

Наконец, если $g_m(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, $m = 0, 1$, — произвольные, то формула (6.14) определяет функционал $g(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$, причем, в силу левой части оценки (6.13), получаем (6.15).

Отметим, что в доказательствах лемм 6.2 и 6.3 не использовалось то условие, что γ_1 — липшицев кусок $\partial\Lambda$.

Перейдем теперь к трактовке встречающихся функций и функционалов на торцах Λ_0 и Λ_1 как соответствующих объектов на сечении $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Для функций это тривиально. Всякой функции $\varphi_m(x)$, определенной на Λ_m , поставим во взаимно однозначное соответствие функцию

$$\varphi_m(x', a_m), \quad x' \in \Lambda, \quad (6.17)$$

определенную на Λ . Покажем, что все встречающиеся выше пространства функций на Λ_m очень просто описываются принадлежностью функции (6.17) “эталонному” пространству $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$, которое сейчас определим.

Обозначим в $\mathbb{R}^n$ через $\mathring{\Lambda}$ и $\Sigma_1^\pm$ следующие множества:

$$\mathring{\Lambda} = \Lambda \times \{0\}, \quad \Sigma_1^+ = \gamma_1 \times [0, 1), \quad \Sigma_1^- = \gamma_1 \times (-1, 0]. \quad (6.18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Скажем, что функция $\varphi(x')$ из $W_2^{1/2}(\Lambda)$ принадлежит пространству $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$, если одна из функций

$$\mathring{\varphi}^\pm(x) = \begin{cases} \varphi(x') & \text{при } (x', x_n) \in \mathring{\Lambda}, \\ 0 & \text{при } x \in \Sigma_1^\pm, \end{cases}$$

например, $\mathring{\varphi}^+(x)$, принадлежит пространству $W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^+)$ (тогда и другая – функция $\mathring{\varphi}^-(x)$ – принадлежит $W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^-)$). Норму в $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ определим любым из выражений:

$$\|\varphi\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)} = \|\mathring{\varphi}^+\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^+)} = \|\mathring{\varphi}^-\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^-)}.$$

ЛЕММА 6.4. Пусть выполнены условия, приведенные в начале §6. Тогда функция $\varphi_m(x)$, $m = 0$ или 1 , принадлежит пространству $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ ($= \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$) тогда и только тогда, когда функция (6.17) принадлежит пространству $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. Норма $\varphi_m(x)$ в $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ (или в $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$) эквивалентна норме функции $\varphi_m(x', a_m)$ в $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим это утверждение, например, для $\varphi_1(x)$. Без ограничения общности при этом можем предполагать, что $a_1 = 0$, а потому $\mathring{\Lambda} = \Lambda_1$. Обозначим через

$$\mathring{\varphi}_1(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } x \in \Lambda_1, \\ 0 & \text{при } x \in \Gamma_1, \end{cases}$$

а через

$$\mathring{\varphi}_1^-(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } x \in \Lambda_1 = \mathring{\Lambda}, \\ 0 & \text{при } x \in \Sigma_1^-. \end{cases}$$

В силу леммы 5.3, поскольку согласно лемме 6.1 множество $\text{int}(\overline{\Gamma_2 \cup \Lambda_0})$ является липшицевым куском Γ , можем оценить

$$\|\mathring{\varphi}_1\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_1 \cup \Gamma_1)} \leq \|\varphi_1\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)} \leq c \|\mathring{\varphi}_1\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_1 \cup \Gamma_1)}. \quad (6.19)$$

В случае, когда $(a_1 - a_0) = 1$, эта оценка и является уже доказываемой оценкой, поскольку $\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Sigma}_1^-$ и $\mathring{\varphi}_1(x) = \mathring{\varphi}_1^-(x)$.

Пусть теперь $(a_1 - a_0) > 1$. Тогда $\Sigma_1^- \subset \bar{\Gamma}_1$. Обозначим $\Delta^- = \Gamma_1 \setminus \Sigma_1^-$. Тогда $\text{dist}\{\Lambda_1, \Delta^-\} = 1$, а потому можем оценить

$$\begin{aligned} \|\mathring{\varphi}_1^-\|^2_{W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^-)} &\leq \|\mathring{\varphi}_1\|^2_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_1 \cup \Gamma_1)} \\ &= \|\mathring{\varphi}_1^-\|^2_{W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^-)} + 2 \int_{\Delta^-} \left(\int_{\Lambda_1} \frac{|\varphi_1(x)|^2}{|x-y|^n} ds_x \right) ds_y \\ &\leq \|\mathring{\varphi}_1^-\|^2_{W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^-)} + 2m_\Gamma(\Delta^-) \|\varphi_1\|_{L_2(\Lambda_1)}^2 \\ &\leq (1 + 2m_\Gamma(\Gamma_1)\mu^{-1}) \|\mathring{\varphi}_1^-\|^2_{W_{2,\mu}^{1/2}(\mathring{\Lambda} \cup \Sigma_1^-)}, \end{aligned}$$

что вместе с (6.19) дает желаемую оценку эквивалентности.

Случай $(a_1 - a_0) < 1$ обрабатывается аналогично: теперь Γ_1 и Σ_1^- как бы меняются ролями.

Как следствие этой леммы и леммы 6.2.2 получаем, что для функции (6.5а) включение (6.6а) имеет место тогда и только тогда, когда функции $\varphi_m(x', a_m)$, $m = 0, 1$, принадлежат пространству $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. При этом норма (6.6а) эквивалентна норме

$$\sum_{m=0}^1 \|\varphi_m(x', a_m)\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)}. \quad (6.20)$$

Перейдем теперь к функционалам. По функционалам $g_m(x)$ на Λ_m построим функционалы $g_m(x', a_m)$ на Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть $g_m(x)$, $m = 0$ или 1 , — линейный функционал, действующий на некотором линейном пространстве $\mathcal{L}_m(\Lambda_m)$ функций, определенных на Λ_m . Совокупность функций (6.17), определенных на Λ , где φ_m пробегают все $\mathcal{L}_m(\Lambda_m)$, образуют линейное пространство, которое обозначим через $\mathcal{L}_m(\Lambda)$. Тогда для любой $\varphi(x') \in \mathcal{L}_m(\Lambda)$ функция $\varphi_m(x)$ на Λ_m такая, что $\varphi_m(x', a_m) = \varphi(x')$, принадлежит $\mathcal{L}_m(\Lambda_m)$. Обозначим через $g_m(x', a_m)$ линейный функционал на $\mathcal{L}_m(\Lambda)$, действующий на $\varphi(x')$ по формуле

$$\langle g_m(x', a_m), \varphi(x') \rangle_\Lambda = \langle g_m(x), \varphi_m(x) \rangle_{\Lambda_m}. \quad (6.21)$$

Непосредственным следствием этого определения и предыдущих лемм являются следующие утверждения.

ЛЕММА 6.5. 1. Функционал $g_m(x)$, $m = 0$ или 1 , принадлежит пространству $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$ ($= \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$) тогда и только тогда, когда $g_m(x', a_m) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. Норма $g_m(x)$ в $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$

(или в $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$) эквивалентна норме $g_m(x', a_m)$ в пространстве $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. Для любой $\varphi_m(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1)$

$$\langle g_m(x), \varphi_m(x) \rangle_{\Lambda_m} = \langle g_m(x', a_m), \varphi_m(x', a_m) \rangle_{\Lambda}.$$

2. Если $g(x)$ – функционал, удовлетворяющий (6.6б), $g_m(x)$ – компоненты этого функционала на Λ_m в смысле п. 2 леммы 6.3, то $\forall \varphi(x)$, удовлетворяющей (6.6а),

$$\langle g, \varphi \rangle_{\Lambda} = \sum_{m=0}^1 \langle g_m(x', a_m), \varphi_m(x', a_m) \rangle_{\Lambda}.$$

На основании введенных понятий переформулируем рассматриваемые задачи в следующей форме.

Формально задачи (6.1), (6.2), (6.3а)–(6.3в) будем записывать, соответственно, как задачи для уравнения (6.1), при однородных граничных условиях (6.2) и с неоднородными граничными условиями на торцах вида

$$u(x', a_0) = \varphi_0(x'), \quad u(x', a_1) = \varphi_1(x'); \quad (6.22а)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_0) = g_0(x'), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_1) = g_1(x'); \quad (6.22б)$$

$$u(x', a_0) = \varphi_0(x'), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_1) = g_1(x'), \quad (6.22в)$$

где через $\varphi_m(x')$ и $g_m(x')$ для сокращения обозначены, соответственно, $\varphi_m(x', a_m)$ и $g_m(x', a_m)$, $m = 0, 1$. Предполагаем, что

$$\varphi_0(x'), \varphi_1(x') \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1), \quad g_0(x'), g_1(x') \in \mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1). \quad (6.23)$$

О.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22а) является функция $u(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, удовлетворяющая граничным условиям (6.22а) и для любой $v(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Lambda_0 \cup \Lambda_1)$ – соотношению

$$a[u, v]_{\mu} = 0. \quad (6.24а)$$

О.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22б) является функция $u(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, удовлетворяющая для любой $v(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$ соотношению

$$a[u, v]_{\mu} = \sum_{m=0}^1 \langle g_m(x'), \overline{v(x', a_m)} \rangle_{\Lambda}. \quad (6.24б)$$

О.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22в) является функция $u(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1)$, удовлетворяющая первому граничному условию в (6.22в) и для любой функции $v(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)$ – соотношению

$$a[u, v]_{\mu} = \langle g_1(x'), \overline{v(x', a_1)} \rangle_{\Lambda}. \quad (6.24в)$$

При $\mu \geq \mu_0$, где μ_0 – достаточно большое, для обобщенного решения $u(x)$ каждой из этих задач имеет место, соответственно, оценка

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} \leq c \sum_{m=0}^1 \|\varphi_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)}; \quad (6.25a)$$

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} \leq c \sum_{m=0}^1 \|g_m\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)}; \quad (6.25б)$$

$$\|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} \leq (c_0 \|\varphi_0\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)} + c_1 \|g_1\|_{\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)}), \quad (6.25в)$$

где постоянные c , c_0 и c_1 не зависят от μ .

Сформулируем еще, исходя из всех предыдущих определений, определения функционалов $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_m)$, $m = 0, 1$, от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22а), а также функционал $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_0)$ от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22в). Если $u(x)$ – о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22а), то согласно определениям 3.2 и 3.3 $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2}$ представляет собой функционал из пространства $W_{2,\mu}^{-1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2 \rightarrow \Gamma)$, действующий на произвольную $\psi(x) \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2 \rightarrow \Gamma)$ по формуле

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2}, \psi \right\rangle_{\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2} = a[u, \overline{l\psi}]_\mu,$$

где $l\psi \in W_{2,\mu}^1(\Omega)$ – произвольное продолжение функции $\psi: l\psi|_{\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2} = \psi$ (такие продолжения существуют в силу теоремы 2.4 и определения пространства $W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2 \rightarrow \Gamma)$). Значения, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Lambda_m}$, $m = 0, 1$, естественно определить как сужение функционала $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2}$ на подпространство

$$W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2 \rightarrow \Gamma) \cap \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_2; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m}) = \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m}).$$

Поэтому, используя еще леммы 6.4, 6.5.1 и определение 6.2, окончательно приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Под значением нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_m)$, $m = 0, 1$, от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22а), $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_0)$ от о.р. задачи (6.1), (6.3), (6.22в) будем понимать функционалы из $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$, действующие на произвольную функцию $\psi(x) \in \mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ по формулам

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_m), \psi(x') \right\rangle_\Lambda = a[u, \overline{l_m \psi}]_\mu, \quad (6.26)$$

где $l_m \psi(x)$ – произвольная функция из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$, удовлетворяющая условию $l_m \psi(x', a_m) = \psi(x')$.

Такое определение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_0)$ от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22в) получается рассуждениями, совершенно аналогичными рассуждениями, приведенным перед этим определением для о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22а).

Заметим, что независимость данного определения от выбора продолжения $l_m \psi$ следует из рассуждений, приводящих к определению 6.3; она может быть проверена и непосредственно, исходя из определений (6.24а) и (6.24в) о.р. этих задач.

Для так определенных $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_m)$ справедливы оценки

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_m) \right\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)} \leq c \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)}, \quad (6.27)$$

где постоянную c можно взять не зависящей от μ . В самом деле, в силу леммы 6.4 функция $\psi_m(x)$ на Λ_m такая, что $\psi_m(x', a_m) = \psi(x')$, принадлежит $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$, и при этом

$$\|\psi_m\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_m \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})} \leq c \|\psi(x')\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)}$$

с постоянной c , не зависящей от μ . В силу определения (5.6) для $\psi_m(x)$ найдется такая функция $\lambda \psi_m(x) \in W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)$, что $\lambda \psi_m|_{\Lambda_m} = \psi_m$, $\lambda \psi_m|_{\Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m}} = 0$ и

$$\|\lambda \psi_m\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\Gamma)} \leq 2c \|\psi(x')\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)}.$$

В силу же теоремы 2.4 функция $l_m \psi = l_\Gamma^\Omega \lambda \psi_m \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Lambda_{1-m})$, $l_m \psi(x', a_m) = \psi(x')$ и

$$\|l_m \psi\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} \leq \tilde{c} \|\psi(x')\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)}.$$

Использование теперь в (6.26) такого продолжения $l_m \psi$ вместе с оценкой (3.12) приводит к оценке (6.27).

Перейдем к обоснованию метода Фурье для рассматриваемых задач. Обозначим через

$$\{e_k(x')\}_{k=1}^\infty \quad (6.28)$$

ортонормированный базис в $L_2(\Lambda)$ из о.с.ф. оператора $L'(x', D')$, определяемого (6.4б), при однородных смешанных граничных условиях

$$u(x')|_{\gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + \sigma(x')u(x') \right) \Big|_{\gamma_2} = 0; \quad (6.29)$$

каждая о.с.ф. $e_k(x')$ отвечает с.з. λ_k , и будем предполагать нумерацию элементов базиса (6.28) такой, что $\lambda_k \leq \lambda_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (теорема 4.1 устанавливает существование такого базиса).

При решении каждой из рассматриваемых смешанных задач граничные данные – функции $\varphi_m(x')$ или/и функционалы $g_m(x')$ разлагаются в ряды Фурье вида:

$$\text{для } \varphi(x') \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$$

$$\varphi(x') = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi) e_k(x'), \quad \text{где } c_k(\varphi) = (\varphi, e_k)_{L_2(\Lambda)}, \quad (6.30)$$

$$\text{для } g(x') \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$$

$$g(x') = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) e_k(x'), \quad \text{где } c_k(g) = \langle g(x'), \overline{e_k(x')} \rangle_{\Lambda}, \quad (6.31)$$

по системе о.с.ф. (6.28). Решение каждой из задач ищется в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(x_n) e_k(x').$$

Формальная подстановка таких рядов в уравнение и граничные условия приводит к следующим формальным разложениям для решения $u(x)$ каждой из этих задач, соответственно,

$$u(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^1 X_k^m(x_n) c_k(\varphi_m) e_k(x'); \quad (6.32a)$$

$$u(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^1 X_k^m(x_n) c_k(g_m) e_k(x'); \quad (6.32б)$$

$$u(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^0(x_n) c_k(\varphi_0) + X_k^1(x_n) c_k(g_1)) e_k(x'), \quad (6.32в)$$

где $X_k^m(x_n)$ – решения уравнений

$$-D_n^2 X_k^m(x_n) + (\lambda_k + \mu^2) X_k^m(x_n) = 0, \quad (6.33)$$

удовлетворяющие, соответственно, следующим краевым условиям

$$X_k^0(a_0) = 1, \quad X_k^0(a_1) = 0, \quad X_k^1(a_0) = 0, \quad X_k^1(a_1) = 1; \quad (6.34a)$$

$$-D_n X_k^0(a_0) = 1, \quad D_n X_k^0(a_1) = 0, \quad D_n X_k^1(a_0) = 0, \quad D_n X_k^1(a_1) = 1; \quad (6.34б)$$

$$X_k^0(a_0) = 1, \quad D_n X_k^0(a_1) = 0, \quad X_k^1(a_0) = 0, \quad D_n X_k^1(a_1) = 1. \quad (6.34в)$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены все условия, приведенные в начале §6, и $\mu \geq \mu_0$, где μ_0 – достаточно большое. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\forall \varphi(x') \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ ряд Фурье (6.30) сходится к $\varphi(x')$ в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. Эквивалентным скалярным произведением в этом пространстве двух функций $\varphi_1(x')$ и $\varphi_2(x')$ является скалярное произведение:

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu^2)^{1/2} c_k(\varphi_1) \overline{c_k(\varphi_2)}, \quad (6.35)$$

относительно которого система о.с.ф. (6.28) ортогональна.

$\forall g(x') \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ ряд Фурье (6.31) сходится к $g(x')$ в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. Эквивалентным скалярным произведением в этом пространстве двух функционалов $g_1(x')$ и $g_2(x')$ является скалярное произведение

$$(g_1, g_2)_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu^2)^{-1/2} c_k(g_1) \overline{c_k(g_2)}, \quad (6.36)$$

относительно которого система (6.28) также ортогональна.

2. При выполнении (6.23) каждый из формальных рядов (6.32а)–(6.32в) сходится в $W_{2,\mu}^1(\Omega)$ к обобщенному решению соответствующей смешанной задачи (6.1), (6.2), (6.22а)–(6.22в).

3. Значения $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_j)$, $j = 0, 1$, от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22а), а также $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x', a_0)$ от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22в) представимы, соответственно, рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^1 (-1)^{j+1} D_n X_k^m(a_j) c_k(\varphi_m) e_k(x'), \quad j = 0, 1, \quad (6.37а)$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (D_n X_k^0(a_0) c_k(\varphi_0) + D_n X_k^1(a_0) c_k(g_1)) e_k(x'), \quad (6.37б)$$

сходящимися в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ и представляющими собой ряды Фурье для этих функционалов. Значения $u(x', a_j)$, $j = 0, 1$, от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22б) и $u(x', a_1)$ от о.р. задачи (6.1), (6.2), (6.22в) представимы, соответственно, рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^1 X_k^m(a_j) c_k(g_m) e_k(x'), \quad j = 0, 1, \quad (6.38а)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (X_k^0(a_1) c_k(\varphi_0) + X_k^1(a_1) c_k(g_1)) e_k(x'), \quad (6.38б)$$

сходящимися в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ и представляющими собой ряды Фурье для этих граничных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что всякая функция

$$E_k(x', x_n) = X_k(x_n)e_k(x'), \quad (6.39)$$

где $X_k(x_n)$ – некоторое решение уравнения (6.33) на (a_0, a_1) , является о.р. любой из задач: (6.1), (6.2) плюс один из следующих наборов граничных условий на торцах Λ_0 и Λ_1 :

$$E_k(x', a_j) = X_k(a_j)e_k(x'), \quad j = 0, 1, \quad (6.40a)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{n}}(x', a_j) = (-1)^{j+1} D_n X_k(a_j)e_k(x'), \quad j = 0, 1, \quad (6.40b)$$

$$E_k(x', a_0) = X_k(a_0)e_k(x'), \quad \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{n}}(x', a_1) = D_n X_k(a_1)e_k(x'), \quad (6.40в)$$

например, задачи (6.1), (6.2), (6.40в) (эта задача содержит оба вида граничных условий на торцах). Для остальных задач проверка аналогична.

Для этого воспользуемся следующим элементарным фактом. Пусть $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ – область в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, где Ω' и Ω'' – области в $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$, соответственно. Тогда, если $u(x') \in W_{2,\mu}^1(\Omega')$, $v(x'') \in W_{2,\mu}^1(\Omega'')$, то $u(x')v(x'') \in W_{2,\mu}^1(\Omega)$, и справедлива оценка

$$\|uv\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega)} \leq \mu^{-1} \|u\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega')} \|v\|_{W_{2,\mu}^1(\Omega'')}. \quad (6.41)$$

Поэтому $E_k(x', x_n) \in W_{2,\mu}^1(\Omega)$. Далее, покажем, что в смысле следов

$$E_k(x', x_n)|_{\Gamma_1} = 0, \quad E_k(x', a_j) = X_k(a_j)e_k(x'), \quad j = 0, 1. \quad (6.42)$$

В силу леммы 2.3 для о.с.ф. $e_k(x')$ найдется последовательность функций $e_{k,\nu}(x') \in C^\infty(\overline{\Lambda})$ таких, что $e_{k,\nu}(x')|_{\gamma_1} = 0$ и $e_{k,\nu}(x') \rightarrow e_k(x')$ в $W_{2,\mu}^1(\Lambda)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Тогда $E_{k,\nu}(x', x_n) = X_k(x_n)e_{k,\nu}(x') \in C^\infty(\overline{\Omega})$, и в силу (6.41) $E_{k,\nu}(x', x_n) \rightarrow E_k(x', x_n)$ в $W_{2,\mu}^1(\Omega)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Поскольку $E_{k,\nu}(x', x_n)|_{\Gamma_1} = 0$, согласно определению следа получаем первое равенство в (6.42). Кроме того, $E_{k,\nu}(x', a_j) = X_k(a_j)e_{k,\nu}(x') \rightarrow X_k(a_j)e_k(x')$ в $W_{2,\mu}^1(\Lambda)$, а потому и в $L_2(\Lambda)$ при $\nu \rightarrow \infty$. С другой стороны, по определению следа $E_{k,\nu}(x', a_j) \rightarrow E_k(x', a_j)$ в $W_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)$, а потому также и в $L_2(\Lambda)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Отсюда получаем два последних равенства в (6.42). (Заметим, что (6.42) могут быть установлены и без привлечения леммы 2.3 и условия, что γ_1 – липшицев кусок.)

Проверим теперь выполнение $\forall v(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)$ соотношения вида (6.24в), а именно:

$$a[E_k, v]_\mu = \int_\Lambda D_n X_k(a_1)e_k(x') \overline{v(x', a_1)} dx'. \quad (6.43)$$

В силу леммы 2.3 это соотношение достаточно проверить $\forall v(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей условию $v(x)|_{\overline{\Gamma_1 \cup \Lambda_0}} = 0$. Обращаясь к формулам (6.9), (6.10) и используя определяющее соотношение вида (4.3) для $e_k(x')$:

$$a'[e_k(x'), v(x', x_n)]_\mu = (\lambda_k + \mu^2) \int_\Lambda e_k(x') \overline{v(x', x_n)} dx'$$

$(v(x', x_n) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^1(\Lambda; \gamma_1)$ при каждом фиксированном x_n), а также теорему Фубини, получаем, что

$$a[E_k, v]_\mu = (\lambda_k + \mu^2)(E_k, v)_{L_2(\Omega)} + \int_{\Lambda} e_k(x') \left(\int_{a_0}^{a_1} D_n X_k(x_n) D_n \overline{v(x', x_n)} dx_n \right) dx'.$$

Перебрасывая в последнем интеграле по x_n интегрированием по частям оператор D_n с $\bar{v}$ на $D_n X_k$ и учитывая при этом, что $v(x', a_0) = 0$, а $X_k(x_n)$ удовлетворяет уравнению (6.33), получаем справедливость (6.43). Итак, сформулированные свойства функций (6.39) установлены. Отметим, что условие, что γ_1 является липшицевым куском $\partial\Lambda$, существенно используется именно на этом этапе.

Нетрудно установить, сравнивая определение 6.3 и определение о.р. (6.24б), что имеют место равенства (6.40б), в которых $\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{n}}(x', a_j)$ — уже значения на торцах нормальной производной от о.р. E_k какой-либо из задач (6.1), (6.2), (6.40а) или (6.40в).

Перейдем теперь к доказательству первой части теоремы 6.1. Рассмотрим смешанную задачу (6.1), (6.2), (6.3в) с $\varphi_0(x) = 0$ и обозначим через S_μ оператор Пуанкаре–Стеклова, соответствующий этой задаче (см. определение 5.1). Обозначим

$$E_k^m(x', x_n) = X_k^m(x_n) e_k(x'), \quad m = 0, 1, \quad (6.44)$$

где $X_k^m(x_n)$ — решения уравнения (6.33) с граничными условиями (6.34в). В силу предыдущего $E_k^1(x', x_n)$ — решение задачи (6.1), (6.2) плюс граничные условия

$$E_k^1(x', a_0) = 0, \quad \frac{\partial E_k^1}{\partial \mathbf{n}}(x', a_1) = e_k(x').$$

Обозначим, далее, через $\varepsilon_k(x)$ функции на Λ_1 такие, что $\varepsilon_k(x', a_1) = e_k(x')$. Тогда $E_k^1(x', x_n)$ представляет собой решение задачи (6.1), (6.2), (6.3в) с $\varphi_0(x) = 0$ и с $g_1(x) = \varepsilon_k(x)$ (точнее с функционалом $g_1(x)$, порождаемым функцией $\varepsilon_k(x)$: $\langle g_1, \psi \rangle_{\Lambda_1} = \int_{\Lambda_1} \varepsilon_k(x) \psi(x) ds$). Но согласно (6.40а) $E_k^1(x', a_1) = X_k^1(a_1) e_k(x')$. Отсюда

$$S_\mu \varepsilon_k(x) = X_k^1(a_1) \varepsilon_k(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, система функций $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^\infty$ представляет собой ортонормированный базис в $L_2(\Lambda_1)$ из собственных функций оператора Пуанкаре–Стеклова S_μ на Λ_1 , отвечающих характеристическим значениям

$$\nu_k = (X_k^1(a_1))^{-1} = \sqrt{\lambda_k + \mu^2} \operatorname{cth} \sqrt{\lambda_k + \mu^2} (a_1 - a_0).$$

Поэтому утверждения первой части теоремы 6.1 являются непосредственными следствиями теоремы 5.2 и лемм 6.4 и 6.5.1.

В самом деле, пусть $\varphi(x')$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. Обозначим через $\widehat{\varphi}(x)$ функцию на Λ_1 такую, что $\widehat{\varphi}(x', a_1) = \varphi(x')$. Тогда в силу леммы 6.4

$\widehat{\varphi}(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)$, нормы функции $\widehat{\varphi}(x)$ в последнем пространстве и функции $\varphi(x')$ в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ эквивалентны. По теореме 5.2 $\widehat{\varphi}(x)$ представима сходящимся в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)$ рядом Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\widehat{\varphi}) \varepsilon_k(x),$$

где

$$c_k(\widehat{\varphi}) = \int_{\Lambda_1} \widehat{\varphi}(x) \overline{\varepsilon_k(x)} ds = \int_{\Lambda} \varphi(x') \overline{e_k(x')} dx' = c_k(\varphi)$$

являются в то же время и коэффициентами Фурье функции $\varphi(x')$ по системе о.с.ф. (6.28). Тогда, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\widehat{\varphi}) \varepsilon_k(x', a_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi) e_k(x')$$

(представляющий собой ряд Фурье (6.30)) опять же в силу леммы 6.4 сходится по норме пространства $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ к функции $\widehat{\varphi}(x', a_1) = \varphi(x')$. Наконец, использование формулы (5.20а) и леммы 6.4 дает, что эквивалентным скалярным произведением в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ двух функций $\varphi_1(x')$ и $\varphi_2(x')$ является форма

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)}^* = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k c_k(\widehat{\varphi}_1) \overline{c_k(\widehat{\varphi}_2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k c_k(\varphi_1) \overline{c_k(\varphi_2)},$$

где $\widehat{\varphi}_i(x)$, $i = 1, 2$, определяются по $\varphi_i(x')$ так же, как $\widehat{\varphi}(x)$ определялась выше по $\varphi(x')$. В силу эквивалентности, $\nu_k \sim \sqrt{\lambda_k + \mu^2}$, последнее скалярное произведение эквивалентно скалярному произведению (6.35).

Далее, пусть $g(x')$ – произвольный функционал из $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$. Построим по $g(x')$ функционал $\widehat{g}(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)$ такой, что в смысле определения 5.2 $\widehat{g}(x', a_1) = g(x')$. В силу (6.21) такой функционал $\widehat{g}(x)$ определяется формулой

$$\langle \widehat{g}(x), \widehat{\varphi}(x) \rangle_{\Lambda_1} = \langle g(x'), \varphi(x') \rangle_{\Lambda},$$

где $\widehat{\varphi}(x', a_1) = \varphi(x')$. В силу теоремы 5.2 функционал $\widehat{g}(x)$ представим сходящимся в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda_1 \rightarrow \Gamma; \Gamma_1 \cup \Lambda_0)$ рядом Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\widehat{g}) \varepsilon_k(x),$$

где

$$c_k(\widehat{g}) = \langle \widehat{g}(x), \overline{\varepsilon_k(x)} \rangle_{\Lambda_1} = \langle g(x'), \overline{e_k(x')} \rangle_{\Lambda}$$

являются, как мы видим, и коэффициентами Фурье функционала $g(x')$ по системе (6.26). Но тогда в силу леммы 6.5.1 ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\hat{g})\varepsilon_k(x', a_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g)e_k(x')$$

сходится в $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ к функционалу $g(x')$. Точно так же, на основании формулы (5.20б) с помощью леммы 6.5.1 устанавливается, что эквивалентным скалярным произведением в $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ является скалярное произведение (6.34).

Перейдем к доказательству второй части теоремы 6.1. Проведем его, например, для задачи (6.1), (6.2), (6.22в). Пусть $u(x')$ – о.р. этой задачи. В силу установленного выше относительно функций (6.39), функции (6.44) являются о.р. задачи (6.1), (6.2) плюс граничные условия

$$E_k^m(x', a_0) = \delta_0^m e_k(x'), \quad \frac{\partial E_k^m}{\partial \mathbf{n}}(x', a_1) = \delta_1^m e_k(x'),$$

где δ_j^m – символ Кронекера. Поэтому N -ая частичная сумма $u_N(x)$ ряда (6.32в) представляет собой решение задачи (6.1), (6.2), (6.22в) с $\varphi_0(x')$ и $g_1(x')$, замененными, соответственно, на

$$\varphi_{0,N}(x') = \sum_{k=1}^N c_k(\varphi_0)e_k(x') \quad \text{и} \quad g_{1,N}(x') = \sum_{k=1}^N c_k(g_1)e_k(x').$$

Тогда $(u(x) - u_N(x))$ представляет собой решение задачи (6.1), (6.2), (6.22в) с $\varphi_0(x')$, замененной на $(\varphi_0(x') - \varphi_{0,N}(x'))$, и с $g_1(x')$, замененным на $(g_1(x') - g_{1,N}(x'))$. Но вследствие уже установленной части 1 теоремы 6.1 $\varphi_{0,N}(x') \rightarrow \varphi_0(x')$ в $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$, $g_{1,N}(x') \rightarrow g_1(x')$ в $\mathring{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ при $N \rightarrow \infty$, а потому оценка (6.25в) дает, что $u_N(x) \rightarrow u(x)$ в $W_{2,\mu}^1(\Omega)$ при $N \rightarrow \infty$. Аналогично получаем обоснование метода Фурье и для других задач.

Доказательство третьей части теоремы 6.1 проводится непосредственно на основании определений с использованием соотношений (6.40а) и (6.40б), в которых $\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{n}}(x', a_j)$ – значения нормальных производных от о.р. E_k , теоремы 2.3 вложения и оценок (6.27), в которых $u(x)$ заменяется на $(u(x) - u_N(x))$, где $u_N(x)$ – N -ые частичные суммы рядов (6.32).

В заключение сделаем два замечания.

1. В случае, когда $\gamma_1 = \emptyset$, пространство $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \gamma_1)$ превращается в пространство $W_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)$. Для случая, когда $\gamma_1 = \partial\Lambda$, можно показать, что пространство $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \partial\Lambda)$ (как множество функций) совпадает с пространством $\mathring{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)$, определяемым как подмножество функций $u(x')$ из $W_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)$ таких, что функции

$$\mathring{u}(x') = \begin{cases} u(x') & \text{при } x' \in \Lambda, \\ 0 & \text{при } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \Lambda \end{cases}$$

принадлежат пространству $W_{2,\mu}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, с нормой

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)} = \|\overset{\circ}{u}\|_{W_{2,\mu}^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

При этом нормировки $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda; \partial\Lambda)$ и $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Lambda)$ эквивалентны.

2. Часть 1 теоремы 6.1 дает следующее дополнение к теореме 4.1. Для всякой функции $u \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Omega; \Gamma_1)$ ряд Фурье (4.7а) сходится к u в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Omega; \Gamma_1)$, для всякого функционала $f \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Omega; \Gamma_1)$ ряд Фурье (4.7б) сходится к f в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Omega; \Gamma_1)$. При достаточно больших μ эквивалентными скалярными произведениями в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Omega; \Gamma_1)$ и в $\overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Omega; \Gamma_1)$ являются, соответственно, скалярные произведения вида (6.35) и (6.36), в которых теперь $c_k(\varphi_j)$ и $c_k(g_j)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi_j \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{1/2}(\Omega; \Gamma_1)$ и функционалов $g_j \in \overset{\circ}{W}_{2,\mu}^{-1/2}(\Omega; \Gamma_1)$ по системе о.с.ф. оператора, фигурирующего в теореме 4.1, λ_k — с.з. этого оператора.

Список литературы

1. Агмон Ш., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962.
2. Schechter M. General boundary value problems for elliptic equations // Comm. Pure and Appl. Math. 1959. V. 12. P. 457–486.
3. Peetre J. Another approach to elliptic boundary problems // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. V. 14. P. 711–731.
4. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. №3. С. 54–112.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
6. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // ДАН СССР. 1964. Т. 157. №4. С. 798–801.
7. Nečas J. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague: Academia, 1967.
8. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. №2. С. 3–76.
9. Crisvard P. Elliptic problems in nonsmooth domains. London: Pittman, 1985.
10. Zaremba S. Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace // Bull. Acad. Sci. Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Ser A. 1910. P. 313–344.
11. Schechter M. Mixed boundary problem for general elliptic equations // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. P. 331–354.
12. Peetre J. Mixed problems for higher order elliptic equations in two variables // I. Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa. 1961. V. 15. P. 337–353; // II. Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa. 1963. V. 17. P. 1–12.
13. Вишик М. И., Эскин Г. И. Пространства Соболева–Слободянского переменного порядка с весовыми нормами и их приложения к смешанным краевым задачам // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. №5. С. 973–997.
14. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.

15. *Лебедев В. И., Агошков В. И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1983.
16. *Агошков В. И., Лебедев В. И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Вычислительные процессы и системы. Вып. 2. М.: Наука, 1985. С. 173–226.
17. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.
18. *Митайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
19. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.
20. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
21. *Gagliardo E.* Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rend. Sem. Mathem. univ. di Pavoda. 1957. V. 27. P. 284–305.
22. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 197. С. 54–112.
23. *Яковлев Г. Н.* О следах функций из пространства W_p^l на кусочно-гладких поверхностях // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). № 4. С. 526–543.
24. *Adams R.* Sobolev spaces. New York–San Francisco–London: Academic Press, 1975.
25. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
26. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
27. *Rademacher H.* Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehreren Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale // Math. Ann. 1918. V. 79. P. 340–359.
28. *Кружков С. Н.* К вопросу о дифференцируемости почти всюду функций многих переменных // Вестн. МГУ. 1976. № 6. С. 67–70.
29. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1981.
30. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
31. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
32. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
33. *Agranovich M. S.* Nonself-ajoint elliptic operators on nonsmooth domains // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 2. P. 139–148.