Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие многообразия
с пучком двойных накрытий Фано. III, *Матем. сб.*, 2006,
том 197, номер 3, 35–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:36:20

УДК 513.6

А. В. Пухликов

Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. III

Завершено изучение бирациональной геометрии расслоений Фано $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, слой которых – двойная гиперповерхность Фано индекса 1. Для каждого семейства этих многообразий либо доказана бирациональная жесткость, либо предъявлены нетривиальные структуры расслоений Фано. Развита новый, линейный метод изучения подвижных систем на расслоениях Фано $V/\mathbb{P}^1$.

Библиография: 17 названий.

Введение

Настоящая работа является заключительной в серии статей, посвященных бирациональной геометрии расслоений $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, слой которых – двойная гиперповерхность Фано индекса 1. Для почти всех семейств (за исключением конечного числа) бирациональная жесткость доказана в работах [1], [2]. Оставшиеся несколько семейств рассматриваются в этой статье.

0.1. Список рассматриваемых многообразий. Напомним [2], что параметры семейства расслоений $V/\mathbb{P}^1$ записываются в следующем формате:

$$((a_1, \dots, a_{M+1}), (a_Q, a_W))$$

(соответственно $((a_1, \dots, a_M), a_W)$), если речь идет о пучках двойных пространств Фано), где

$$\sigma: V \rightarrow Q \subset X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

– двойное накрытие, $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$, $a_0 = 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{M+1}$, морфизм σ разветвлен над гладким дивизором $W_Q = W \cap Q$,

$$Q \sim mL_X + a_Q R, \quad W \sim 2lL_X + 2a_W R,$$

$a_Q, a_W \in \mathbb{Z}_+$, R – класс слоя проекции $\pi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, а $L_X \in \text{Pic } X$ – класс тавтологического пучка расслоения $X/\mathbb{P}^1$. Для компактности записи в наборе $(a_1, \dots, a_{M+1})$ пишем только ненулевые числа, если таковые имеются, в противном случае пишем (0). Вот список семейств, исключенных из рассмотрения

в работах [1], [2]:

1. $((0), (1, 0))$;
2. $((0), (0, 1))$;
3. $((0), (0, 0))$;
4. $((1), (1, 0))$;
5. $((1), (0, 0))$;
6. $((1, 1), (1, 0))$;
7. $((1, 1), (0, 0))$.

Кроме того, в [1], [2] были исключены из рассмотрения следующие семейства многообразий с пучком двойных пространств:

- 1*. $((0), 1)$;
- 2*. $((0), 0)$;
- 3*. $((1), 0)$;
- 4*. $((1, 1), 0)$.

В §1 настоящей работы будет доказана бирациональная сверхжесткость общих многообразий в семействах 6, 7 и 4*. Для многообразий в семействах 1–3, 5 и 1*–3* будет построено бесконечно много нетривиальных структур расслоений Фано, что исключает бирациональную жесткость. Этим проблема бирациональной жесткости решена для всех семейств, кроме семейства 4. Многообразиям последнего типа будет посвящена отдельная работа.

0.2. Дальнейшие результаты. Некоторые ключевые факты в работах [1], [2] были доказаны на пределе возможностей современной техники. Это относится, в первую очередь, к доказательству предложения 3.1 в [1]. Поэтому естественно попытаться усовершенствовать отдельные технические звенья рассуждений. В §2 обсуждается возможность усиления локального неравенства, лежащего в основе доказательства предложения 3.1 работы [1]. Усиленный вариант этого неравенства формулируется в виде гипотезы и полностью доказывается в случае, когда граф соответствующей последовательности раздутий есть цепь.

В §3 развит новый метод доказательства бирациональной жесткости расслоений Фано $V/\mathbb{P}^1$ (точнее, новый метод изучения подвижных линейных систем на этих расслоениях) – *линейный метод*. Название подчеркивает его отличие от традиционного *квадратичного метода*, в основе которого – операция самопересечения подвижной линейной системы Σ , т.е. операция образования эффективного алгебраического цикла $Z = (D_1 \circ D_2)$ коразмерности 2, где $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры. Естественно, все конструкции квадратичного метода квадратичны по параметрам системы Σ (например, $4n^2$ -неравенство и другие ключевые факты). Напротив, в основе линейного метода – операция ограничения подвижной системы Σ на некоторый слой $F = F_t = \pi^{-1}(t)$ расслоения $V/\mathbb{P}^1$. Понятно, что основные вычисления линейного метода линейны по параметрам системы Σ (степеням, кратностям и др.) Линейный метод был впервые успешно использован в работе [3]. Его основную идею можно проиллюстрировать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1 (см. [3]). Скажем, что примитивное многообразие Фано F удовлетворяет условию *дивизориальной каноничности*, или условию (С) (соответственно условию *дивизориальной лог-каноничности*, или условию (L)), если для любого эффективного дивизора $D \in |-nK_F|$, $n \geq 1$, пара

$$\left(F, \frac{1}{n}D\right) \quad (1)$$

имеет канонические (соответственно лог-канонические) особенности. Если пара (1) имеет канонические особенности для общего дивизора $D \in \Sigma \subset |-nK_F|$ любой *подвижной* линейной системы, то скажем, что F удовлетворяет условию *подвижной каноничности*, или условию (M).

Пусть $V/\mathbb{P}^1$ – расслоение Фано, $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ – подвижная линейная система на V , отличная от пучка слоев проекции π , т.е. $n \geq 1$. Предположим, что лог-пара $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$ не канонична, т.е. для некоторого исключительного дивизора $E \subset \tilde{V}$, где $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ – некоторая последовательность раздутий, выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\nu_E(\Sigma) > na(E).$$

Предположим, что центр $B = \varphi(E) \subset V$ лежит в некотором слое $F = F_t$ и имеет коразмерность ≥ 3 на V (этот случай и представляет наибольшую трудность во всех задачах). Поскольку линейная система Σ подвижна, ее ограничение $\Sigma_F = \Sigma|_F$ есть непустая линейная система (возможно, уже обладающая неподвижными компонентами). Согласно принципу обращения присоединения [4] лог-пара

$$\left(F, \frac{1}{n}\Sigma_F\right)$$

не лог-канонична. Если же заранее известно, что слои F удовлетворяют условию (L) (тем более – условию (С)), то полученное противоречие позволяет исключить максимальную особенность E .

Такова, в общих чертах, схема линейного метода. Для ее реализации необходимо уметь доказывать условие (L), что в большинстве случаев очень трудно. Единственный известный способ это делать предложен в работе [3] и требует существенно более сильных условий общности положения (регулярности), чем те, которые используются в квадратичном методе [5]. Однако линейный метод обладает и некоторым преимуществом по сравнению с квадратичным – он совершенно не использует условия “закрученности” расслоения $V/\mathbb{P}^1$ по базе. Единственная информация, которая используется, – это свойства слоев.

В §3 линейным методом доказана бирациональная сверхжесткость расслоений $V/\mathbb{P}^1$ на двойные пространства, двойные квадрики и гиперповерхности Фано индекса 1.

Значительная часть результатов настоящей статьи (в частности, вычисления §2 и ключевые звенья линейного метода) была получена автором во время пребывания в Математическом институте Макса Планка в Бонне летом и осенью 2003 г. Автор благодарит институт за гостеприимство и прекрасные условия работы.

§ 1. Бирационально жесткие и нежесткие расслоения Фано

1.1. Многообразие типа $((1, 1), (1, 0))$. Здесь $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, где пучок $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus M} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}$. Пространство $H^0(X, \mathcal{L}_X \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ двумерно и задает пучок дивизоров $|L_X - R|$. Его базисное множество $\Delta_X = \text{Bs } |L_X - R|$ имеет коразмерность 2: легко видеть, что

$$\Delta_X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus M}) \cong \mathbb{P}^{M-1} \times \mathbb{P}^1.$$

Далее, $Q \sim mL_X + R$ и $W \sim 2lL_X$. Положим

$$\Delta_Q = \Delta_X \cap Q, \quad \Delta = \sigma^{-1}(\Delta_Q) \subset V.$$

Очевидно, Δ_Q есть гладкий дивизор бистепени $(m, 1)$ на $\Delta_X = \mathbb{P}^{M-1} \times \mathbb{P}^1$, $\Delta \subset V$ есть гладкое неприводимое подмногообразие коразмерности 2.

ЛЕММА 1.1. *Антиканоническая линейная система $|-K_V|$ подвижна, причем $\text{Bs } |-K_V| = \Delta$. Далее,*

$$-K_V \in \partial A_{\text{mov}}^1 V.$$

Точнее, любая линейная система $|-nK_V + lF|$ пуста при $l < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы вытекает из того, что антиканоническая система $|-K_V| = |L_V - F|$.

Предположим, что линейная система $\Sigma = |-nK_V + lF|$ непуста при некотором $l < 0$. Необходимо показать, что данное предположение ведет к противоречию. Чтобы это сделать, будет построено некоторое специальное семейство поверхностей, заматающих V . Ограничение линейной системы Σ на общую поверхность этого семейства должно быть непустой линейной системой кривых. Как будет видно, последнее невозможно.

Пусть

$$\alpha: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus M} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \quad \beta: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$$

– сюръективные морфизмы пучков. Их прямая сумма $\alpha \oplus \beta$ определяет вложение проективных расслоений

$$S = S(\alpha, \beta) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \hookrightarrow X = \mathbb{P}(\mathcal{E}).$$

Подмногообразие S есть $\mathbb{P}^2$ -расслоение над $\mathbb{P}^1$, причем пересечение $S \cap \Delta_X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ есть дивизор на S .

Положим

$$V_S = \sigma^{-1}(Q \cap S), \quad \Delta_S = \Delta \cap V_S.$$

Для общих α, β поверхность V_S гладкая, $\Delta_S \subset V_S$ – гладкая кривая. Более того, поверхности V_S заматают многообразие V .

Очевидно, $\sigma(\Delta_S) = \Delta_Q \cap S \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ есть кривая бистепени $(m, 1)$. Обозначим символами L_S и F_S ограничение классов L_V и F на поверхность V_S соответственно.

ЛЕММА 1.2. (i) *Имеют место эквивалентности $\Delta_S \sim L_S - F_S \sim (-K_V)|_{V_S}$.*
(ii) *Имеет место равенство $(\Delta_S \cdot \Delta_S) = 2(1 - m)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) В силу конструкции многообразия S имеем

$$S \cap \Delta_X \sim L_X - R,$$

остальное очевидно.

(ii) В силу (i) получаем

$$(\Delta_S \cdot \Delta_S) = (\Delta_S \cdot L_S) - (\Delta_S \cdot F_S).$$

Как отмечено выше, $\sigma(\Delta_S)$ есть кривая бистепени $(m, 1)$ на $S \cap \Delta_X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Легко видеть, что ограничение тавтологического пучка $L_X|_{S \cap \Delta_X}$ имеет бистепень $(1, 0)$. Поэтому $(\Delta_S \cdot L_S) = 2$ и $(\Delta_S \cdot F_S) = 2m$. (Индексы пересечения удваиваются за счет двойного накрытия σ .) Лемма доказана.

Завершим доказательство леммы 1.1 Пусть Σ_S – ограничение линейной системы Σ на поверхность V_S . Это непустая линейная система кривых. В силу предыдущей леммы

$$\Sigma_S \subset |n\Delta_S + lF_S|,$$

где $n \geq 0$, $l < 0$. Возьмем общую кривую $C \in \Sigma_S$ и запишем

$$C = m^+ \Delta_S + C^+,$$

где $n^+ \in \mathbb{Z}_+$ и все неприводимые компоненты кривой C^+ отличны от Δ_S . Конечно, $m^+ \leq n$ (иначе класс $(-F_S)$ был бы эффективным). Следовательно,

$$C^+ \sim (n - m^+) \Delta_S + lF_S,$$

так что

$$0 \leq (C^+ \cdot \Delta_S) = 2(n - m^+)(1 - m) + 2ml < 0$$

(напомним, что $l < 0$). Это противоречие завершает доказательство леммы 1.1.

ЛЕММА 1.3. *Расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет обобщенному K^2 -условию глубины $1/m$, т.е.*

$$K_V^2 - \frac{1}{m} H_F \notin \text{Int } A_+^2 V,$$

где $H_F \in A_{\mathbb{R}}^2 V$ – класс гиперплоского сечения слоя, т.е. $H_F = (-K_V \cdot F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [2; формула (1)] $(K_V^2 \cdot L_V^{M-1}) = 2$. Поскольку для степеней слоя очевидным образом имеем $(F \cdot L_V^M) = (H_F \cdot L_V^{M-1}) = 2m$, то получаем

$$\left(\left(K_V^2 - \frac{1}{m} H_F \right) \cdot L_V^{M-1} \right) = 0,$$

откуда немедленно вытекает утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Общее расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ типа $((1, 1), (1, 0))$ является бирационально сверхжестким. Проекция $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ есть единственная нетривиальная структура рационально связного расслоения на V . Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают:*

$$\text{Bir } V = \text{Aut } V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Доказательство сразу следует из работы [2; теорема 2] ($1/m < 2$, так что расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет K^2 -условию глубины 2, а любая подвижная система Σ есть подсистема полной линейной системы $|-nK_V + lF|$ с $n, l \in \mathbb{Z}_+$).

1.2. Многообразие типа $((1, 1), (0, 0))$. Бирациональная геометрия многообразий этого типа несколько сложнее, чем бирациональная геометрия многообразий типа $((1, 1), (1, 0))$. Проективное расслоение X и локально свободный пучок $\mathcal{E}$ такие же, как в п. 1.1. Однако в рассматриваемом случае $Q \sim mL_X$, так что $-K_V = L_V$ и поэтому линейная система

$$|-K_V - F| = \sigma^*(|L_X - R|_Q)$$

подвижна. Следовательно, многообразие V не удовлетворяет K -условию. Пусть

$$\varphi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

– рациональное отображение, заданное пучком $|-K_V - F|$. Бирациональную геометрию многообразия V полностью описывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. (i) *Многообразие V является бирационально сверхжестким: для любой подвижной линейной системы Σ на V ее виртуальный и фактический пороги канонического присоединения совпадают:*

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma).$$

(ii) *На многообразии V имеются ровно две нетривиальные структуры рационально связного расслоения, а именно $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\varphi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Эти структуры бирационально различны, т.е. не существует бирационального автоморфизма $\chi \in \text{Bir } V$, переводящего слои π в слои φ . Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают: $\text{Bir } V = \text{Aut } V$.*

(iii) *Существует единственное с точностью до послыйного изоморфизма расслоение Фано $\pi^+: V^+ \rightarrow \mathbb{P}^1$ того же самого типа $((1, 1), (0, 0))$ такое, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V^+ \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi^+ \\ \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

где χ – бирациональное отображение. Соответствие $V \rightarrow V^+$ является инволютивным, т.е. $(V^+)^+ = V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символы Δ_Q , Δ_X и Δ имеют тот же смысл, что и выше (п. 1.1). Однако в рассматриваемой ситуации Δ_Q есть гладкий дивизор бистепени $(m, 0)$ на $\Delta_X = \mathbb{P}^{M-1} \times \mathbb{P}^1$, т.е. $\Delta_Q = \Delta_{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}^1$, где $\Delta_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – гладкая гиперповерхность степени m . Аналогично, $\Delta = \Delta_F \times \mathbb{P}^1$, где $\Delta_F = \sigma^{-1}(\Delta_{\mathbb{P}})$ – двойное накрытие гиперповерхности $\Delta_{\mathbb{P}}$, разветвленное над $W \cap \Delta_{\mathbb{P}}$.

ЛЕММА 1.4. *Базисное множество подвижной линейной системы $|-K_V - F|$ есть $\text{Bs } |-K_V - F| = \Delta$. Далее,*

$$-K_V - F \in \partial A_{\text{mov}}^1 V.$$

Точнее, $|-nK_V + lF| = \emptyset$ при $l < -n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью аналогично доказательству леммы 1.1. Единственная разница состоит в том, что кривая $\Delta_S \sim L_S - F_S$ (поверхность S строится точно таким же образом, как в доказательстве леммы 1.1) на этот раз не является неприводимой. Кривая Δ_S есть объединение $2m$ дизъюнктивных (-1) -кривых:

$$\Delta_S = \sum_{i=1}^m (C_i^+ + C_i^-), \quad \Delta_Q = \sum_{i=1}^m C_i, \quad \sigma(C_i^\pm) = C_i.$$

Прямые $C_i \subset S \cap \Delta_X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ имеют бистепень $(1, 0)$ и соответствуют m точкам пересечения $\Delta_{\mathbb{P}} \cap S$. Отметим, что дивизор ветвления $W \cap \Delta_X \subset \mathbb{P}^{M-1} \times \mathbb{P}^1$ имеет бистепень $(2l, 0)$, т.е.

$$W \cap \Delta_X = W_{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}^1,$$

где $W_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – общая гиперповерхность степени $2l$. Поэтому для общей поверхности S прямые $C_1, \dots, C_m$ лежат вне дивизора ветвления, так что имеем $C_i^+ \cap C_i^- = \emptyset$.

Теперь пустота линейной системы $|aL_V - bF|$ при $b > a$ устанавливается дословно так же, как в доказательстве леммы 1.1 (с заменой неприводимой кривой Δ_S на $2m$ дизъюнктивных (-1) -кривых $C_i^\pm$).

Доказательство леммы 1.4 закончено.

Изучим теперь рациональное отображение $\varphi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Для этого нам понадобится явное координатное представление многообразий X , Q и W , по которым строится расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$.

Рассмотрим локально свободные подпучки

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus M} \hookrightarrow \mathcal{E} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2} \hookrightarrow \mathcal{E}.$$

Очевидно, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1$. Пусть $\Pi_0 \subset H^0(X, \mathcal{L}_X)$ – подпространство, соответствующее пространству сечений пучка $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}_0) \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E})$. Положим также

$$\Pi_1 = H^0(X, \mathcal{L}_X \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}_1(-1)).$$

Пусть $x_0, \dots, x_{M-1}$ – некоторый базис пространства Π_0 , y_0, y_1 – базис пространства Π_1 . Тогда сечения

$$x_0, \dots, x_{M-1}, y_0 t_0, y_0 t_1, y_1 t_0, y_1 t_1, \quad (2)$$

где t_0, t_1 – система однородных координат на $\mathbb{P}^1$, образуют базис пространства $H^0(X, \mathcal{L}_X)$. Легко видеть, что полная линейная система (2) задает морфизм

$$\xi: X \rightarrow \overline{X} \subset \mathbb{P}^{M+3},$$

образ которого X есть квадратичный конус с вершинным пространством

$$\mathbb{P}^{M-1} = \xi(\Delta_X)$$

и базой – неособой квадрикой в $\mathbb{P}^3$, изоморфной $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Морфизм ξ бирационален, точнее,

$$\xi: X \setminus \Delta_X \rightarrow \overline{X} \setminus \xi(\Delta_X)$$

есть изоморфизм, причем ξ стягивает $\Delta_X = \mathbb{P}^{M-1} \times \mathbb{P}^1$ на вершинное пространство конуса. Пусть

$$u_0, \dots, u_{M-1}, u_{00}, u_{01}, u_{10}, u_{11}$$

– однородные координаты на $\mathbb{P}^{M+3}$, соответствующие упорядоченному набору сечений (2). Конус $\overline{X}$ задается уравнением

$$u_{00}u_{11} = u_{01}u_{10}.$$

На конусе $\overline{X}$ имеются два пучка $(M+1)$ -плоскостей, соответствующих двум пучкам прямых на гладкой квадрике в $\mathbb{P}^3$. Пусть $\tau \in \text{Aut } \mathbb{P}^{M+3}$ – автоморфизм, переставляющий координаты u_{01} и u_{10} и не меняющий других координат. Очевидно, $\tau \in \text{Aut } \overline{X}$ есть автоморфизм конуса $\overline{X}$, переставляющий вышеупомянутые пучки $(M+1)$ -плоскостей. Один из этих пучков есть образ пучка слоев проекции π , т.е. пучок $\xi(|R|)$. Для другого пучка имеем очевидное равенство

$$\tau\xi(|R|) = \xi(|L_X - R|).$$

Аutomорфизм τ индуцирует инволютивный бирациональный автоморфизм

$$\tau^+ \in \text{Bir } X.$$

Точнее, τ^+ есть бирегулярный автоморфизм вне замкнутого подмножества Δ_X коразмерности 2. Пусть

$$\varepsilon: \tilde{X} \rightarrow X$$

– раздутие гладкого подмногообразия Δ_X . Очевидно, многообразие $\tilde{X}$ изоморфно раздутию конуса $\overline{X}$ в его вершинном пространстве $\xi(\Delta_X)$. Легко проверить, что τ^+ продолжается до бирегулярного автоморфизма гладкого многообразия $\tilde{X}$.

Положим $Q^+ = \tau^+(Q) \subset X$, $W^+ = \tau^+(W) \subset X$. Дивизоры Q^+ и W^+ корректно определены в силу того, что τ^+ – изоморфизм в коразмерности 1.

ЛЕММА 1.5. *Дивизоры Q^+ и W^+ суть дивизоры общего положения в линейных системах $|mL_X|$ и $|2L_X|$ соответственно. В частности, Q^+ , W^+ и $Q^+ \cap W^+$ суть гладкие многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из того, что линейные системы $|kL_X|$, $k \in \mathbb{Z}_+$, инвариантны относительно τ^+ , а Q и W – достаточно общие дивизоры соответствующих линейных систем. Отметим, что если дивизор $D \in |kL_X|$ задается многочленом степени k

$$h(u_0, \dots, u_{M-1}, u_{00}, u_{01}, u_{10}, u_{11}),$$

то его образ $\tau^+(D)$ задается многочленом

$$h^+(u_*) = h(u_0, \dots, u_{M-1}, u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{11})$$

с переставленными координатами u_{01} и u_{10} . Лемма доказана.

Пусть $\sigma^+: V^+ \rightarrow Q^+$ – двойное накрытие, разветвленное над гладким дивизором $Q^+ \cap W^+$. Очевидно, $V^+/\mathbb{P}^1$ есть общее расслоение Фано типа $((1, 1), (0, 0))$.

ЛЕММА 1.6. (i) *Отображение τ^+ поднимается до бирационального отображения $\chi: V \dashrightarrow V^+$, бирегулярного в коразмерности 1.*

(ii) *Действие χ на группе Пикара дается формулами*

$$\chi^* K_{V^+} = K_V, \quad \chi^* F^+ = -K_V - F,$$

где F^+ – класс слоя проекции $V^+ \rightarrow \mathbb{P}^1$, так что $\text{Pic } V^+ = \mathbb{Z}K_{V^+} \oplus \mathbb{Z}F^+$.

(iii) *Конструкция многообразия V^+ инволютивна: $(V^+)^+ \cong V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i)–(iii) очевидны. Отметим лишь, что имеет место представление $\chi = q^+ \circ q^{-1}$, где $q: \tilde{V} \rightarrow V$ и $q^+: \tilde{V} \rightarrow V^+$ – раздутия гладких подмногообразий $\Delta \subset V$ и $\Delta^+ \subset V^+$ коразмерности 2 соответственно. При этом $E = q^{-1}(\Delta)$ есть исключительный дивизор обоих раздутий, $E = \Delta \times \mathbb{P}^1 = \Delta_F \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а проекции $q|_E$ и $q^+|_E$ суть проекции относительно второго и третьего прямого сомножителя.

ЛЕММА 1.7. *Расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет обобщенному K^2 -условию глубины 2.*

Доказательство немедленно следует из равенства

$$((K_V^2 - 2H_F) \cdot L_V^{M-1}) = 0.$$

Докажем, наконец, предложение 1.1. Пусть $\Sigma \subset |-nK_{V^+} + lF|$ – подвижная линейная система. Если $l \in \mathbb{Z}_+$, то по [2; теорема 2] имеем желаемое совпадение порогов: $c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma)$. Предположим, что $l < 0$. Рассмотрим линейную систему $\Sigma^+ = \tau_*^+(\Sigma)$ на V^+ . Согласно лемме 1.6 $\Sigma^+ \subset |-n_+K_{V^+} + l_+F^+|$, где

$$l_+ = -l \geq 1.$$

Поскольку τ^+ есть изоморфизм в коразмерности 1, имеем $c(\Sigma) = c(\Sigma^+)$. Снова применяя [2; теорема 2], получаем требуемое совпадение порогов:

$$c_{\text{virt}}(\Sigma^+) = c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma^+) = c(\Sigma) = n_+ = n + l.$$

Этим бирациональная сверхжесткость доказана.

Обратимся к доказательству утверждения (ii) предложения 1.1. Стандартное рассуждение (см. [2; п. 1.1]) показывает, что на V имеются ровно две нетривиальные структуры рационально связного расслоения (из проведенных выше рассуждений следует, что если подвижная линейная система Σ удовлетворяет равенству $c_{\text{virt}}(\Sigma) = 0$, то либо Σ составлена из пучка $|F|$, либо Σ составлена из пучка $|-K_V - F|$, что и дает описание имеющихся структур). Для общего многообразия V эти структуры не могут быть бирационально эквивалентны. В самом деле, в силу бирациональной сверхжесткости двойных гиперповерхностей Фано индекса 1 любое бирациональное отображение $\chi^+ \in \text{Bir } V$, переводящее пучок $|F|$ в пучок $|-K_V - F|$, индуцирует бирегулярный изоморфизм слоев общего положения в пучках $|F|$ и $|F^+|$ (последний взят на многообразии V^+). Следовательно, χ^+ индуцирует бирегулярный изоморфизм слоев общего положения расслоений $Q/\mathbb{P}^1$ и $Q^+/\mathbb{P}^1$. Теперь из [6] при $m \geq 3$ следует, что эти расслоения глобально послойно изоморфны. Легко проверить, что для достаточно общего дивизора $Q \subset X$ это невозможно. При $m = 2$ рассуждаем аналогично, используя дивизор ветвления W .

Наконец, утверждение (iii) вытекает из проведенных выше рассуждений.

Доказательство предложения 1.1 завершено.

1.3. Многообразие типа $((0), (1, 0))$. Здесь $X = \mathbb{P} \times \mathbb{P}^1$, гиперповерхность $Q \subset X$ имеет бистепень $(m, 1)$, гиперповерхность $W \subset X$ имеет бистепень $(2l, 0)$, т.е. $W = W_{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}^1$, где $W_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхность степени $(2l)$. Пусть $(u : v)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^1$, $(x_0 : \dots : x_{M+1})$ – однородные координаты на $\mathbb{P}$. Гиперповерхность Q задается уравнением

$$uf_+ + vf_- = 0,$$

где $f_{\pm}(x_0, \dots, x_{M+1})$ – однородные многочлены степени m , гиперповерхность W задается уравнением $h(x_*) = 0$, $\deg h = 2l$.

Пусть $\beta_{\mathbb{P}}: Y_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}$ (соответственно $\beta_X: Y_X \rightarrow X$) – двойное пространство, разветвленное над $W_{\mathbb{P}}$ (соответственно двойное накрытие, разветвленное над W). Очевидно, прямое произведение $X = \mathbb{P} \times \mathbb{P}^1$ порождает прямое произведение $Y_X = Y_{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}^1$, согласованное с двойными накрытиями $\beta_{\mathbb{P}}, \beta_X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Проекция $q: Y_X \rightarrow Y_{\mathbb{P}}$ на первый сомножитель определяет бирациональный морфизм*

$$q_V = q|_V: V \rightarrow Y_{\mathbb{P}},$$

стягивающий исключительный дивизор $E \subset V$:

$$E = q_V^{-1}(\{\beta_{\mathbb{P}}^* f_+ = \beta_{\mathbb{P}}^* f_- = 0\}).$$

Бирациональный морфизм q_V преобразует пучок $|F|$ слоев расслоения $V/\mathbb{P}^1$ в пучок дивизоров

$$\{\lambda_+ \beta_{\mathbb{P}}^* f_+ + \lambda_- \beta_{\mathbb{P}}^* f_- = 0 \mid \lambda_{\pm} \in \mathbb{C}\}$$

на $Y_{\mathbb{P}}$. Обратное бирациональное отображение q_V^{-1} есть раздутие базисного множества этого пучка.

Доказательство очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Многообразие $Y_{\mathbb{P}}$ есть многообразие Фано индекса $m + 1$. Любая структура расслоения

$$\mathbb{P} \dashrightarrow S$$

на полные пересечения Фано типа $(b_1, \dots, b_e)$ с $b_1 + \dots + b_e \leq m$ порождает структуру расслоения

$$Y_{\mathbb{P}} \dashrightarrow S$$

на многообразия Фано индекса $m - b_1 - \dots - b_e + 1 \geq 1$. Пример такой структуры дает описанный в предложении пучок $(q_V)_*|F|$. Наибольшая размерность базы при таком способе поиска нетривиальных структур расслоения на $Y_{\mathbb{P}}$ получается, если взять $b_1 = \dots = b_m = 1$, т.е. расслоить $\mathbb{P}$ на линейные подпространства коразмерности m . В этом случае $\dim S = m$. Многообразие $Y_{\mathbb{P}}$, конечно, не является бирационально жестким.

ГИПОТЕЗА 1.1. *Если гиперповерхность $W_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ достаточно общая, то для любой структуры рационально связного расслоения $Y_{\mathbb{P}} \dashrightarrow S$ имеем $\dim S \leq m$. Если же $\dim S = m$, то существуют линейная проекция $\mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ и бирациональное отображение $S \dashrightarrow \mathbb{P}^m$, образующие коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mathbb{P}} & \xrightarrow{2:1} & \mathbb{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \dashrightarrow & \mathbb{P}^m. \end{array}$$

1.4. Многообразие типа $((0), (0, 1))$. Здесь $X = \mathbb{P} \times \mathbb{P}^1$ и для многообразия $Q \subset X$ также имеем прямое разложение $Q = G \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^1$, где $G \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхность степени m . Пусть $q: Q \rightarrow G$ – проекция на первый сомножитель, $L_x = q^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1$ – слой над произвольной точкой $x \in G$. Положим $C_x = \sigma^{-1}(L_x) \subset V$. Таким образом, C_x есть слой проекции

$$q_V = q \circ \sigma: V \rightarrow G.$$

Двулистное накрытие $\sigma: C_x \rightarrow L_x$ разветвлено над двумя точками (потому что $a_W = 1$): уравнение гиперповерхности $W \subset X$ имеет вид

$$f_{uu}u^2 + 2f_{uv}uv + f_{vv}v^2 = 0,$$

где $(u : v)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^1$, f_* – однородные многочлены степени $2l$ на $\mathbb{P}$. Если кривая C_x неприводима, то она является гладкой коникой, в противном случае C_x есть пара гладких рациональных кривых, если только все три многочлена f_{uu} , f_{uv} , f_{vv} не обращаются в точке x в нуль одновременно. Из сказанного вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Проекция q_V реализует V как расслоение на коники с базой $G \subset \mathbb{P}$. Дискриминантный дивизор задается уравнением $f_{uv}^2 = f_{uu}f_{vv}$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ не является бирационально жестким. Группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir } V \neq \text{Bir}(V/\mathbb{P}^1)$ бесконечна.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Поскольку структура расслоения Фано $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ не является послойной по отношению к структуре q_V расслоения на коники V/G , последнее также не является бирационально жестким. Это согласуется с тем фактом, что V/G не удовлетворяет условию Саркисова:

$$4K_G + D = -4H_G,$$

где D – дискриминантный дивизор расслоения V/G , H_G – класс гиперплоского сечения гиперповерхности $G \subset \mathbb{P}$, $K_G = (-M - 2 + m)H_G$, $D = 4lH_G$.

Группа $\text{Bir}(V/G)$ бирациональных автоморфизмов, сохраняющих структуру расслоения на коники V/G , очень велика. Соответственно, на многообразии V имеется бесконечно много пучков рационально связанных многообразий: достаточно рассмотреть все пучки вида

$$\chi_*|F|, \quad \chi \in \text{Bir}(V/G).$$

Однако неясно, существуют ли на V бирациональные автоморфизмы, не согласованные с расслоениями на коники V/G .

ГИПОТЕЗА 1.2. *Для общих G, W на многообразии V имеется только одна структура расслоения на коники, именно $q_V: V \rightarrow G$, а группа бирациональных автоморфизмов многообразия V и группа послойных бирациональных автоморфизмов расслоения V/G совпадают:*

$$\text{Bir } V = \text{Bir}(V/G).$$

1.5. Многообразие типа $((0), (0, 0))$. Очевидно, любое многообразие этого типа изоморфно прямому произведению $F \times \mathbb{P}^1$, где $\sigma: F \rightarrow G$ – двойное накрытие Фано индекса 1, разветвленное над дивизором $W_G = G \cap W^*$, $W^* \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхность степени $2l$. Таким образом, многообразие V не является бирационально жестким. Морфизм проекции на прямой сомножитель $q: V \rightarrow F$ задает на V структуру расслоения на коники. Действуя, как выше, послойными бирациональными автоморфизмами $\chi \in \text{Bir}(V/F)$ на пучок $|F|$, получаем бесконечно много пучков рационально связных многообразий на V . Пусть $\tau \in \text{Aut } V$ – инволюция Галуа двойного накрытия $\sigma: V \rightarrow Q$, так что для общих Q, W имеем $\text{Aut } V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\text{id}, \tau\}$.

ГИПОТЕЗА 1.3. *Для общих G, W_* на V имеется единственная структура расслоения на коники, а именно $q: V \rightarrow F$. Для группы бирациональных автоморфизмов многообразия V справедливо представление*

$$\text{Bir } V = \text{Aut } V \times \text{Bir}(V/F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Bir}(V/F).$$

1.6. Многообразие типа $((1), (0, 0))$. Прежде всего напомним следующий известный факт: при $a_1 = \dots = a_M = 0$, $a_{M+1} = 1$ многообразие $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ изоморфно раздутию $\mathbb{P}^{M+2}$ в подпространстве коразмерности два, причем относительно такого изоморфизма пучок слоев морфизма π_X соответствует пучку гиперплоскостей в $\mathbb{P}^{M+2}$, проходящих через центр раздутия. Подробнее, пусть $P \subset \mathbb{P}^{M+2}$ – линейное подпространство коразмерности два, $\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^{M+2}$ – его раздутие, $E \subset \tilde{\mathbb{P}}$ – исключительный дивизор, $E \cong \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^1$, причем $\varphi: E \rightarrow P = \mathbb{P}^M$ есть просто проекция E на первый прямой сомножитель. Пусть $\mathcal{L}_P = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. В соответствии с нашими обозначениями

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(M+1)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ – проективизация этого пучка, $\mathcal{L}$ – соответствующий тавтологический пучок, $E^+ \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ – дивизор общих нулей всех сечений

$$s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L})$$

(в смысле вложения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \hookrightarrow \mathcal{E}$). Очевидно, $E^+ = \mathbb{P}(\mathcal{E}^+)$, где $\mathcal{E}^+ = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(M+1)}$, т.е. $E^+ \cong \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^1$.

ЛЕММА 1.8. *Многообразия $\tilde{\mathbb{P}}$ и $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ изоморфны. Более того, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}} & \longleftrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{L}} \\ \mathbb{P}^{M+2} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^{M+2}, \end{array}$$

где $\varphi_{\mathcal{L}}$ – морфизм, который задается пространством глобальных сечений тавтологического пучка $\mathcal{L}$.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 1.9. *Для любого целого $e \geq 1$ и любого неприводимого дивизора $R \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $R \neq E^+$, $R = (s)$, где $s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L}^{\otimes e})$, образ $\varphi_{\mathcal{L}}(R) \subset \mathbb{P}$ есть неприводимая гиперповерхность степени e .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно сказанному выше

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \setminus E^+ \cong \mathbb{P}^{M+2} \setminus P,$$

причем тавтологические дивизоры на $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ соответствуют гиперплоскостям на $\mathbb{P}^{M+2}$. Общая прямая $L \subset \mathbb{P}^{M+2}$ не задевает P и потому

$$\deg(\mathcal{L}|_{\varphi_{\mathcal{L}}^{-1}(L)}) = 1.$$

Иными словами, $(R \cdot \varphi_{\mathcal{L}}^{-1}(L)) = (\varphi_{\mathcal{L}}(R) \cdot L) = e$, что и требовалось доказать.

В силу леммы 1.9 многообразие V бирационально эквивалентно многообразию $V^\sharp$, которое реализуется как двойное накрытие $\sigma^\sharp: V^\sharp \rightarrow Q^\sharp$, $Q^\sharp = \varphi_{\mathcal{L}}(Q) \subset \mathbb{P}^{M+2}$, причем $\sigma^\sharp$ разветвлено (в коразмерности 1) над дивизором $Q^\sharp \cap W^\sharp$, где $W^\sharp = \varphi_{\mathcal{L}}(W) \subset \mathbb{P}^{M+2}$. Согласно лемме 1.9 $\deg Q^\sharp = m$, $\deg W^\sharp = 2l$, так что $V^\sharp$ – двойная гиперповерхность Фано индекса 2. Любой пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}^{M+2}$ определяет пучок многообразий Фано на $V^\sharp$ и, тем самым, пучок рационально связанных дивизоров на V .

ГИПОТЕЗА 1.4. *На многообразии V нет других структур рационально связанного расслоения, кроме описанных выше пучков рационально связанных дивизоров. Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают:*

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

1.7. Многообразие с пучком двойных пространств. Напомним, что когда речь идет о двойных пространствах Фано индекса 1, символ $\mathbb{P}$ обозначает проективное пространство $\mathbb{P}^M$ на единицу меньшей размерности.

Многообразие типа $((0), 1)$. Здесь $X = \mathbb{P} \times \mathbb{P}^1$ и дивизор ветвления $W \subset X$ имеет тип $(2M, 2)$, т.е. задается уравнением

$$f_{uu}u^2 + 2f_{uv}uv + f_{vv}v^2 = 0,$$

$(u : v)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^1$, $f_\sharp$ – однородные многочлены степени $2M$ на $\mathbb{P}$. Этот случай полностью аналогичен разобранным выше в п. 1.4. Проекция $q: V \rightarrow \mathbb{P}$ реализует V как расслоение на коники. Его дискриминантный дивизор $D \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхность степени $4M$, т.е. условие Саркисова не выполнено.

ГИПОТЕЗА 1.5. *На многообразии V нет других структур расслоения на коники, кроме $V/\mathbb{P}$. Группы бирациональных и послойных автоморфизмов совпадают:*

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Bir}(V/\mathbb{P}).$$

Многообразие типа $((0), 0)$. Здесь $X = \mathbb{P} \times \mathbb{P}^1$, $W = W_{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}^1$, где $W_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхность степени $2M$. Пусть $\sigma: F \rightarrow \mathbb{P}$ – двойное пространство с ветвлением в гиперповерхности $W_{\mathbb{P}}$. Этот случай полностью аналогичен разобранным выше в п. 1.5: $V \cong F \times \mathbb{P}^1$.

ГИПОТЕЗА 1.6. *На многообразии V нет других структур расслоения на коники, кроме V/F . Для группы бирациональных автоморфизмов имеет место представление*

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V \times \mathrm{Bir}(V/F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{Bir}(V/F).$$

Многообразия типа $((1), 0)$. Этот случай полностью аналогичен разобранному выше в п. 1.6. Здесь многообразие $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ изоморфно раздутию $\mathbb{P}^{M+1}$ в линейном подпространстве $P \subset \mathbb{P}^{M+1}$ коразмерности 2. Элементарные вычисления (см. п. 1.6) показывают, что относительно указанного изоморфизма многообразие V бирационально эквивалентно двойному пространству $\mathbb{P}^{M+1}$ индекса 2 (с дивизором ветвления $W_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}^{M+1}$ степени $2M$). Более того, легко видеть, что все многообразия типа $((1), 0)$ реализуются таким образом: возьмем двойное пространство индекса 2 и любой пучок гиперплоскостей на $\mathbb{P}^{M+1}$. В частности, любой плоскости коразмерности два $P \subset \mathbb{P}^{M+1}$ соответствует пучок Λ_P многообразий Фано на V .

ГИПОТЕЗА 1.7. *Любая структура рационально связного расслоения на V есть пучок Λ_P для некоторого подпространства $P \subset \mathbb{P}^{M+1}$ коразмерности два. Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают:*

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V.$$

Многообразия типа $((1, 1), 0)$. Этот случай полностью аналогичен разобранному выше в п. 1.2. Для этих многообразий справедливо утверждение предложения 1.1. Проходит приведенное в п. 1.2 доказательство с упрощениями (нет дивизора Q).

§ 2. Бесконечно близкие особенности вертикальных подмногообразий

2.1. Постановка задачи. Напомним, что в работе [1; п. 2.2] доказательство условия (vs) для случая особой точки слоя $o \in F$, лежащей вне дивизора ветвления двойного накрытия $\sigma: F \rightarrow G$, проводилось следующим образом. Предположим, что существует простой дивизор $Y \subset F$, для которого выполнена оценка

$$\frac{\mathrm{mult}_x \tilde{Y}}{\deg Y} > \frac{1}{m}, \quad (3)$$

где x – бесконечно близкая точка первого порядка над точкой o , т.е. $x \in E$, где $E \subset \tilde{F}$ – исключительный дивизор раздутия $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$ точки o . Здесь $p = \sigma(o) \in G$ – невырожденная двойная точка гиперповерхности G , $p \notin W$.

Теперь ключевую роль в рассуждениях играет предложение 2.2 из [1; п. 2.2]:

Существует гиперплоскость $P \subset \mathbb{P}$, $P \ni p$, такая, что $\sigma(Y) \not\subset P$ и эффективный алгебраический цикл $Y_P = (Y \circ_F P_F)$, где $P_F = \sigma^{-1}(P_G)$, $P_G = P \cap G$ – гиперплоское сечение, удовлетворяет оценке

$$\frac{\mathrm{mult}_o Y_P}{\deg Y_P} > \frac{3}{2m}. \quad (4)$$

Доказательство дословно повторяет рассуждения работы [7] в аналогичной ситуации и поэтому в [1] опущено. Оно опирается на следующий локальный факт. Положим $2\nu = \mathrm{mult}_o Y$, $\mu = \mathrm{mult}_x \tilde{Y}$, $B = T_x E \cap E$, где E рассматривается как квадратичная гиперповерхность в $\mathbb{P}^M$.

ЛЕММА 2.1. *Имеет место оценка*

$$\text{mult}_B \tilde{Y} \geq \frac{1}{2}(\mu - \nu). \quad (5)$$

Цитированное выше предложение 2.2 работы [1] вытекает из леммы 2.1 почти непосредственно. В самом деле, исключительный дивизор E вложен в исключительный дивизор $\mathbb{T}$ раздутья точки p на проективном пространстве $\mathbb{P}$ как квадратичная гиперповерхность. Таким образом, можно рассматривать касательную гиперплоскость $T_x E$ как гиперплоскость в $\mathbb{T}$, т.е. проективизированный касательный конус к однозначно определенной гиперплоскости $P \subset \mathbb{P}$, $p \in P$. Пусть $P^\sharp$ – собственный прообраз P на $\tilde{\mathbb{P}}$, тогда

$$P^\sharp \cap \mathbb{T} = T_x E.$$

Положим $P_G = P \cap G$ и $P_F = \sigma^{-1}(P_G)$. Это неприводимые многообразия, причем

$$\deg P_F = 2m, \quad \text{mult}_x \tilde{P}_F \leq 2,$$

так что $Y \neq P_F$. Далее,

$$B = T_x E \cap E \subset \tilde{P}_F,$$

так что по стандартным формулам теории пересечений [8; гл. 2] имеем для эффективного цикла $Y_P = (Y \circ_F P_F)$:

$$\text{mult}_o Y_P \geq 2\nu + (\text{mult}_B \tilde{Y}) \deg B = \mu + \nu,$$

откуда, учитывая, что $\deg Y_P = \deg Y$ (ибо Y_P – гиперплоское сечение Y), и по предположению (см. (3))

$$2\nu \geq \mu = \text{mult}_x \tilde{Y} > \frac{1}{m} \deg Y$$

получаем требуемое неравенство (4).

К сожалению, это простое рассуждение, с помощью которого предложение 2.2 работы [1] выводится из леммы 2.1, не проходит в случае, когда особая точка $o \in F$ лежит на дивизоре ветвления: если в обозначениях п. 3.1 работы [1] точка $x \in E$ лежит вне дивизора ветвления накрытия $\tilde{\sigma}_E$, т.е. $\tilde{\sigma}(x) \notin W_E$, то гиперплоскости $P \subset \mathbb{P}$, описанной выше, не существует. Самое лучшее, что можно взять в качестве подмногообразия P в этом случае, – это квадратичную гиперповерхность, касательный конус к которой в точке p содержит квадрику $\tilde{\sigma}_E(B)$. Однако отношение кратности к степени для цикла Y_P оказывается слишком слабым. Именно поэтому в работе [1] развит альтернативный метод доказательства условия (vs) для этого случая. Рассмотрим процесс получения оценки снизу для числа $(\text{mult}_o / \deg) Y_P$ подробнее. Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – квадратичная гиперповерхность, содержащая точку $p \in W \cap G$, причем $p \in P$ – особая точка и $P^\sharp \supset \tilde{\sigma}_E(B)$. Теперь дословное повторение приведенных выше рассуждений дает оценку

$$\text{mult}_o Y_P \geq 4\nu + 2 \text{mult}_B \tilde{Y}, \quad (6)$$

откуда с учетом леммы 2.1 получаем

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y_P > \frac{5}{4m},$$

но этого не достаточно для получения противоречия. Однако из неравенства (6) видно, что для получения оценки для кратности цикла Y_P в точке o важна не столько оценка числа $\text{mult}_B \tilde{Y}$, сколько комбинированная оценка для ν и $\text{mult}_B \tilde{Y}$. Например, если бы мы знали, что

$$\nu + \text{mult}_B \tilde{Y} > \frac{1}{m} \deg Y, \quad (7)$$

то, учитывая, что $\nu \geq \text{mult}_B \tilde{Y}$, получили бы

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y_P > \frac{3}{2m},$$

после чего можно было бы рассуждать как в случае особой точки вне дивизора ветвления. Автор предполагает, что если (в обозначениях работы [2; п. 1.4]) имеет место неравенство $k_v > 2$, то оценка (7) справедлива. Цель настоящего параграфа – точно сформулировать соответствующее утверждение и доказать его в частном случае, когда граф последовательности раздутий есть цепь. Доказательство этой гипотезы в полном объеме позволило бы существенно упростить работу с расслоениями Фано $V/\mathbb{P}^1$ в отношении вертикальных подмногообразий.

Структура этого параграфа такова. Сначала напомним доказательство леммы 2.1 (по работе [7], однако более подробно). Это необходимо для последующих рассуждений, которые обобщают метод доказательства леммы 2.1. Затем рассмотрена общая ситуация и сформулирована вышеупомянутая гипотеза. Оставшаяся часть параграфа – доказательство этой гипотезы в случае, когда граф последовательности раздутий есть цепь.

2.2. Доказательство леммы 2.1. Утверждение леммы локальное. Пусть $\Pi \ni p$ – росток общего сечения слоя G четырехмерным гладким подмногообразием объемлющего пространства (аналитически G в окрестности точки p есть гиперповерхность в $\mathbb{C}^{M+1}$) такой, что его собственный прообраз на $\tilde{G}$ содержит точку x : $\tilde{\Pi} \ni x$. Положим

$$E \cap \tilde{\Pi} = E_{\Pi} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Очевидно,

$$B_{\Pi} = B \cap E_{\Pi} = L_1 + L_2$$

– объединение двух прямых на квадрике E , проходящих через точку x . Поскольку $\Pi \ni p$ есть росток трехмерной невырожденной квадратичной особенности, его собственный прообраз $\tilde{\Pi}$ гладкий. Положим $L = L_1$.

Пусть

$$Y_{\Pi} = Y \cap \Pi, \quad \tilde{Y}_{\Pi} = \tilde{Y} \cap \tilde{\Pi}$$

– ограничения Y на Π , $\tilde{\Pi}$ соответственно. Покажем, что выполнено неравенство

$$\gamma = \text{mult}_L \tilde{Y}_{\Pi} \geq \frac{1}{2}(\mu - \nu).$$

Ввиду общности ростка Π отсюда следует неравенство (5).

Пусть

$$\varphi_L: \Pi_L \rightarrow \tilde{\Pi}$$

– раздутие прямой L на гладком трехмерном многообразии $\tilde{\Pi}$, $E_L \subset \Pi_L$ – исключительный дивизор. Поскольку

$$(L \cdot L)_{E_\Pi} = 1, \quad (L \cdot E_\Pi)_{\tilde{\Pi}} = -1,$$

имеем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{L/E_\Pi} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{L/\tilde{\Pi}} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{E_\Pi/\tilde{\Pi}}|_L \longrightarrow 0, \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & \mathcal{O}_L & & & & \mathcal{O}_L(-1) \end{array}$$

так что

$$\mathcal{N}_{L/\tilde{\Pi}} \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1) \quad (8)$$

и потому E_L – линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_1$ с исключительным сечением $\tilde{E}_\Pi \cap E_L$, класс которого обозначим буквой s . Имеем

$$\text{Pic } E_L = \mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}f,$$

где f – класс слоя линейчатой поверхности. Поскольку

$$(s \cdot E_L|_{E_L})_{E_L} = ((\tilde{E}_\Pi \cap E_L) \cdot E_L) = (L \cdot L)_{L_\Pi} = 0,$$

получаем $(E_L \cdot E_L) = -s - f$ (что можно увидеть и непосредственно из (8)).

Пусть Y_L – собственный прообраз дивизора $\tilde{Y}_\Pi$ на Π_L . Очевидно,

$$Y_L \sim -\nu E_\Pi - \gamma E_L$$

(напомним, что Π – росток трехмерного сечения). Отсюда

$$Y_L|_{E_L} \sim \gamma s + (\gamma + \nu)f.$$

С другой стороны, хорошо известен следующий факт.

ЛЕММА 2.2. Пусть $Z \subset R \subset X$ – цепочка строго вложенных гладких многообразий, D – эффективный дивизор на X ,

$$\varphi_R: \tilde{X} \rightarrow X$$

– раздутие подмногообразия R с исключительным дивизором E_R и

$$E_Z = \varphi_R^{-1}(Z).$$

Пусть $\tilde{D} \subset \tilde{X}$ – собственный прообраз дивизора D на $\tilde{X}$. Имеет место оценка

$$\text{mult}_{E_Z} \tilde{D} = \text{mult}_Z D - \text{mult}_R D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая ограничение Z, R, D на общее гладкое подмногообразие в X подходящей размерности, считаем, что $Z = \{z\}$ – точка, R – кривая. Пусть $S \supset R$ – общая поверхность, $\tilde{S} \cong S$ – ее собственный прообраз на $\tilde{X}$. Имеем

$$D|_S = (\text{mult}_R D)R + D_S^\#, \\ \tilde{D}|_{\tilde{S}} = D_S^\#, \quad \text{mult}_{E_Z} \tilde{D} = \text{mult}_z D_S^\#,$$

но поскольку $\text{mult}_Z D = \text{mult}_z D|_S$ и $\text{mult}_z R = 1$, получаем утверждение леммы.

Пусть $\Lambda \subset E_L$ – слой над точкой x . Согласно доказанной лемме имеет место оценка

$$\text{mult}_\Lambda(Y_L|_{E_L}) \geq \mu - \gamma.$$

Следовательно,

$$\gamma + \nu \geq \mu - \gamma,$$

так что $2\gamma \geq \mu - \nu$, что и требовалось доказать.

2.3. Гипотеза о кратностях. Пусть $\Delta \ni o$ – росток невырожденной квадратичной особенности, $\dim \Delta = N + 1$, $N \geq 3$. Раздуем точку o :

$$\varphi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta,$$

$E \subset \tilde{\Delta}$ – исключительный дивизор, N -мерная гладкая квадратика. Пусть

$$\varphi_{i,i-1}: \Delta_i \rightarrow \Delta_{i-1}$$

– последовательность раздутий неприводимых многообразий $B_{i-1} \subset \Delta_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$, $\Delta_0 = \tilde{\Delta}$, с исключительными дивизорами

$$E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1}) \subset \Delta_i,$$

причем $B_i \subset E_i$ для $i = 0, \dots, k-1$, где $E_0 = E$, $B_0 = x \in E$ – точка. Рассмотрим граф Γ , ассоциированный с последовательностью раздутий $\varphi_{i,i-1}$, и положим

$$p_i = \#\{\text{пути из } E_k \text{ в } E_i\}.$$

Пусть $D \subset \Delta$ – простой дивизор,

$$D^0 = \tilde{D} \subset \tilde{\Delta} = \Delta_0, \quad D^1 \subset \Delta_1, \dots, D^k \subset \Delta_k$$

– его собственные прообразы на $\Delta_0 = \tilde{\Delta}$, $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ соответственно. Имеем

$$D^k \sim D - \nu E - \mu_1 E_1 - \dots - \mu_k E_k$$

для некоторых $\nu, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{Z}_+$. Точнее,

$$2\nu = \text{mult}_o D, \quad \mu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} D^{i-1}.$$

Положим

$$B = T_x E \cap E,$$

где квадратика E считается стандартно вложенной в $\mathbb{P}^{N+1}$.

ГИПОТЕЗА 2.1. *Предположим, что имеет место неравенство*

$$2\nu p_0 + \sum_{i=1}^k p_i \mu_i \geq \lambda \left(2p_0 + \sum_{i=1}^k p_i \right).$$

Тогда справедлива оценка

$$\nu + \text{mult}_B \tilde{D} \geq \lambda. \quad (9)$$

Докажем справедливость гипотезы в частном случае, когда граф Γ есть цепь, т.е.

$$B_i \not\subset E_{i-1}^i$$

ни для какого $i = 2, \dots, k-1$. В этом случае все числа p_i равны единице.

2.4. Доказательство в случае графа-цепи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Предположим, что граф Γ есть цепь и выполнено неравенство*

$$2\nu + \mu_1 + \dots + \mu_k \geq (k+2)\lambda. \quad (10)$$

Тогда справедлива оценка (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дадим в предположении, что все раздуваемые подмногообразия B_i суть точки. Общий случай сводится к этому тривиальным образом. Имеем

$$E_1 \cong \dots \cong E_k \cong \mathbb{P}^N.$$

Построим по индукции последовательность неприводимых неособых подмногообразий коразмерности 2:

$$Y_j \subset \Delta_{j+2},$$

$j = 0, \dots, k-1$, следующим образом. Положим $Y_0 = B^1$ — собственный прообраз квадратичного конуса B на Δ_1 . Очевидно, Y_0 есть конус B с раздутой вершиной; в частности, $Y_0 \cap E_1$ есть неособая квадратичная гиперповерхность в гиперплоскости $E^1 \cap E_1 \subset E_1 \cong \mathbb{P}^N$. Теперь

$$Y_1, \dots, Y_{k-1}$$

однозначно определяются следующим требованием: подмногообразие

$$Y_j^+ = \varphi_{j+1,j}(Y_j) \subset E_j$$

есть невырожденный квадратичный конус в $E_j \cong \mathbb{P}^N$ с вершиной в точке $x_j \in E_j$ и базой $Y_{j-1} \cap E_j$, причем Y_j есть собственный прообраз Y_j^+ на Δ_{j+1} .

Эта конструкция имеет смысл именно потому, что неособая квадрика $Y_{j-1} \cap E_j$ содержится в гиперплоскости $E_{j-1}^j \cap E_j$, в то время как вершина конуса x_j не содержится в этой гиперплоскости по предположению: $x_j \notin E_{j-1}^j$, так как граф Γ есть цепь.

Положим

$$\gamma_i = \text{mult}_{Y_i} D^i = \text{mult}_{Y_i^+} D^{i-1}.$$

Для удобства положим также $\gamma_{-1} = 0$, $\mu_0 = \nu$, $\gamma_k = 0$.

ЛЕММА 2.3. Для любого $i \in \{0, \dots, k-1\}$ имеет место оценка

$$2\gamma_i \geq \mu_{i+1} - \mu_i + \gamma_{i-1} + \gamma_{i+1}. \quad (11)$$

Доказательство леммы дадим ниже, а сейчас завершим доказательство предложения 2.1. Из оценок (11), просуммированных с коэффициентами $(k-i)$, вытекает неравенство

$$\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)(2\gamma_i - \mu_{i+1} + \mu_i - \gamma_{i-1} - \gamma_{i+1}) \geq 0. \quad (12)$$

При $i \neq 0$ кратность γ_i входит в левую часть (12) с коэффициентом

$$2(k-i) - (k-i-1) - (k-i+1) = 0;$$

кратность γ_0 входит в левую часть (12) с коэффициентом

$$-(k-1) + 2k = k+1;$$

при $i \neq 0$ кратность μ_i входит с коэффициентом

$$(k-i) - (k-i+1) = -1;$$

наконец, кратность μ_0 входит в (12) с коэффициентом k . В итоге получаем неравенство

$$(k+1)\gamma_0 + k\nu \geq \mu_1 + \dots + \mu_k,$$

откуда с учетом неравенства (10) имеем

$$(k+1)\gamma_0 + (k+2)\nu \geq (k+2)\lambda,$$

так что тем более

$$\gamma_0 + \nu \geq \lambda.$$

Вспоминая, что $\gamma_0 = \text{mult}_B \tilde{D}$, завершаем доказательство предложения 2.1.

2.5. Доказательство леммы 2.3. Рассмотрим следующую общую ситуацию. Пусть $\Pi \ni o$ – гладкий трехмерный росток,

$$\psi: \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi$$

– раздутие точки o , $E \subset \tilde{\Pi}$ – исключительный дивизор, $E \cong \mathbb{P}^2$. Пусть $a \in E$ – произвольная точка,

$$\psi^+: \Pi^+ \rightarrow \tilde{\Pi}$$

– ее раздутие, $E^+ \subset \Pi^+$ – исключительная плоскость, $\tilde{E}$ – собственный прообраз плоскости E на Π^+ . Очевидно, $\tilde{E}$ – линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_1$. Наконец, пусть $L^* \subset E$ – некоторая прямая, проходящая через точку a , $L \subset \tilde{E}$ – ее собственный прообраз на Π^+ , и пусть $R \subset E^+$ – некоторая прямая, проходящая через точку $L \cap E^+$, но не совпадающая с прямой $\tilde{E} \cap E^+$. На прямой L возьмем точку $b \neq a$, и пусть $C \subset \Pi$ – гладкая кривая, трансверсально пересекающая плоскость E в точке b .

Пусть $D \subset \Pi$ – росток простого дивизора, $o \in D$; и пусть $\tilde{D} \subset \tilde{\Pi}$ и $D^+ \subset \Pi^+$ – собственные прообразы D на $\tilde{\Pi}$ и Π^+ соответственно. Наконец, положим

$$\begin{aligned}\mu_o &= \text{mult}_o D, & \mu_a &= \text{mult}_a \tilde{D}, \\ \mu_C &= \text{mult}_C \tilde{D}, & \mu_R &= \text{mult}_R D^+, \\ \mu_L &= \text{mult}_L \tilde{D}.\end{aligned}$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 2.4. *Справедлива оценка*

$$2\mu_L \geq \mu_a + \mu_R + \mu_C - \mu_o.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздвем кривую L :

$$\psi_L: \Pi_L \rightarrow \Pi^+,$$

и пусть $E_L \subset \Pi_L$ – исключительный дивизор. Хорошо известно, что нормальный пучок прямой $L^* \subset \tilde{\Pi}$ имеет вид

$$\mathcal{N}_{L^*/\tilde{\Pi}} \cong \mathcal{O}_{L^*}(-1) \oplus \mathcal{O}_{L^*}(1),$$

так что нормальный пучок кривой L есть

$$\mathcal{N}_{L/\Pi^+} \cong \mathcal{O}_L(-2) \oplus \mathcal{O}_L. \quad (13)$$

В частности, E_L есть поверхность типа $\mathbb{F}_2$. Пусть E^L – собственный прообраз поверхности $\tilde{E}$ на Π_L . Легко видеть, что исключительное сечение линейчатой поверхности E_L есть кривая $E_L \cap E^L$. Запишем

$$\text{Pic } E_L = \mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}f,$$

где $(s^2) = -2$, f – класс слоя. Обозначим символами C_L и R_L собственные прообразы кривых C и R на Π_L . Поскольку C и R трансверсально пересекают поверхность $\tilde{E}$ в точках $b \in L$ и $L \cap E^+$, кривые C_L и R_L пересекают (трансверсально) линейчатую поверхность E_L в точках $x_C = C_L \cap E_L$ и $x_R = R_L \cap E_L$, не лежащих на исключительном сечении $E_L \cap E^L$, соответственно. Наконец, пусть $D_L \subset \Pi_L$ – собственный прообраз дивизора D . Имеем

$$D_E = (D_L \circ E_L) \sim \mu_L(-E_L|_{E_L}) + (\mu_o - \mu_a)f,$$

поскольку, очевидно,

$$(\psi_L \circ \psi^+)^* E|_{E_L} \sim -f, \quad \psi_L^* E^+|_{E_L} \sim f.$$

Из вида нормального пучка (13) или из соотношения

$$(E - E^+ - E_L)|_{E_L} \sim s$$

(потому что $E^L \sim E - E^+ - E_L$) получаем, что

$$-E_L|_{E_L} \sim s + 2f,$$

так что имеем окончательно

$$D_E \sim \mu_L s + (2\mu_L + \mu_o - \mu_a)f. \quad (14)$$

Однако кривая $D_E \subset E_L$ эффективна, причем

$$\text{mult}_{x_C} D_E \geq \mu_C, \quad \text{mult}_{x_R} D_E \geq \mu_R. \quad (15)$$

Запишем

$$D_E = A^* + \alpha_C A_C + \alpha_R A_R, \quad (16)$$

где A_C (соответственно A_R) есть слой линейчатой поверхности E_L , содержащий точку x_C (соответственно x_R), причем кривая A^* эффективна и не содержит A_C или A_R компонентой. Очевидно,

$$A^* \sim \mu_L s + \alpha^* f,$$

где $\alpha^* \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 2.5. *Имеет место оценка*

$$\text{mult}_{x_C} A^* + \text{mult}_{x_R} A^* \leq \min(\alpha^*, 2\mu_L). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку A_C не является компонентой кривой A^* , имеем

$$\text{mult}_{x_C} A^* \leq (A^* \cdot A_C)_{x_C} \leq (A^* \cdot A_C) = \mu_L \quad (18)$$

(аналогично для x_R). Далее, если S – некоторая неприводимая компонента кривой A^* , содержащая хотя бы одну из точек x_C, x_R , то S не есть исключительное сечение поверхности E_L (так как $x_C, x_R \notin E_L \cap E^L$). Значит,

$$S \sim \beta s + \delta f,$$

причем $\delta \geq 2\beta$, откуда, как и выше в (18), получаем

$$\text{mult}_{x_C} S \leq \beta \leq \frac{\delta}{2}$$

(аналогично для x_R), так что

$$\text{mult}_{x_C} S + \text{mult}_{x_R} S \leq \delta.$$

Этим лемма 2.5 доказана.

Объединяя оценки (14)–(17) и учитывая, что $x_C \notin A_R$ и $x_R \notin A_C$ по построению, получаем

$$2\mu_L + \mu_o - \mu_a \geq \mu_C + \mu_R,$$

как и утверждалось. Доказательство леммы 2.4 завершено.

Вернемся к доказательству леммы 2.3. Докажем сначала неравенство (11) для $i \geq 1$. Пусть

$$\Gamma_i^- \subset \Delta_{i-1}$$

– росток гладкой кривой, удовлетворяющий следующим требованиям:

- (i) $x_{i-1} \in \Gamma_i^-$;
- (ii) собственный прообраз $\Gamma_i \subset \Delta_i$ кривой Γ_i^- содержит точку x_i ;
- (iii) собственный прообраз $\Gamma_i^+ \subset \Delta_{i+1}$ кривой Γ_i содержит точку x_{i+1} .

Такой росток существует именно потому, что граф

$$E_i \longleftarrow E_{i+1} \longleftarrow E_{i+2}$$

есть цепь. Теперь пусть $\Pi_i^- \supset \Gamma_i^-$ – общий гладкий трехмерный росток в точке x_{i-1} . Очевидно, собственный прообраз $\Pi_i \subset \Delta_i$ ростка Π_i^- содержит точку x_i , а, в свою очередь, его собственный прообраз Π_i^+ на Δ_{i+1} содержит точку x_{i+1} . Плоскость

$$\Pi_i \cap E_i \subset \Delta_i$$

обозначим символом E_Π . Поскольку E_Π содержит вершину квадратичного конуса Y_i^+ , пересечение $E_\Pi \cap Y_i^+$ есть пара различных прямых, проходящих через точку x_i . Пусть $L_i^* \subset E_\Pi \cap Y_i^+$ – одна из этих двух прямых, $L_i \subset \Delta_{i+1}$ – ее собственный прообраз на Δ_{i+1} . Пусть $R_i \subset \Pi_i^+$ – прямая в $E_{i+1} \cong \mathbb{P}^N$, соединяющая точки x_{i+1} и $L_i \cap E_{i+1}$. Наконец, если росток Π_i^- достаточно общий, то кривая $Y_{i-1}^+ \cap \Pi_i^-$ имеет в точке x_{i-1} пару различных ветвей с различными касательными направлениями, так что кривая

$$C_i = \Pi_i \cap Y_{i-1} \subset E_{i-1}^i$$

трансверсально пересекает E_i в двух различных точках. Пусть $a_i \in C_i \cap E_i$ – та из них, которая лежит на прямой L_i^* (напомним, что $Y_{i-1} \cap E_i$ есть база квадратичного конуса Y_i^+ , а $\Pi_i \cap E_i$ – плоскость, содержащая его вершину). Теперь применяем лемму с x_{i-1} , x_i , L_i , R_i , C_i в качестве o , a , L , R , C соответственно. Отсюда немедленно вытекает оценка (11) для $i \geq 1$.

При $i = 0$ ситуация полностью аналогична с единственным исключением: нет кривой C_i , так что неравенство леммы 2.4 используется в урезанном виде

$$2\mu_L \geq \mu_a + \mu_R - \mu_o,$$

где $o \in \Pi$ – росток невырожденной квадратичной особенности,

$$\mu_o = \frac{1}{2} \text{mult}_o D,$$

как в доказательстве леммы 2.1. Этим доказательство леммы 2.3 полностью завершено.

§ 3. Линейный метод

3.1. Линейный метод доказательства бирациональной жесткости.

Пусть $V/\mathbb{P}^1$ – расслоение Фано, относительно которого предполагаем следующее:

- (i) V – гладкое проективное многообразие с группой Пикара $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \mathbb{Z}F$, где F – класс слоя проекции $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$;

- (ii) каждый слой $F_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{P}^1$, есть (факториальное) многообразие размерности $\dim F_t \geq 4$, имеющее, самое большее, невырожденные квадратичные особенности, причем

$$A^1 F_t = \mathbb{Z} H_t, \quad A^2 F_t = \mathbb{Z} H_t^2,$$

- где $H_t = -K_{F_t} = (-K_V \cdot F_t)$ – обильный антиканонический дивизор;
 (iii) в каждой точке $x \in V$ выполнено локальное условие (LR): если $x \in F = F_t$ – неособая точка слоя, то для любого эффективного дивизора $D \in |-nK_F|$ и любой гиперплоскости $B \subset E$ в исключительном дивизоре $E \subset \tilde{F}$ раздутья точки x на F имеет место неравенство

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_B \tilde{D} \leq 2n, \quad (19)$$

где $\tilde{D} \subset \tilde{F}$ – собственный прообраз дивизора D . Если же $x \in F$ – квадратичная особенность, то для любого эффективного дивизора $D \in |-nK_F|$ и любого гиперплоского сечения B неособой квадратики $E \subset \tilde{F}$ – исключительного дивизора раздутья точки x на F – имеет место неравенство

$$\text{mult}_x D + 2 \text{mult}_B \tilde{D} \leq 4n, \quad (20)$$

где $\tilde{D} \subset \tilde{F}$ – собственный прообраз дивизора D .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любой подвижной линейной системы*

$$\Sigma \subset |-nK_V + lF|$$

с $n \geq 1$ лог-пара $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$ канонична. В частности, если $l \in \mathbb{Z}_+$, то виртуальный и фактический пороги канонического присоединения совпадают:

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma) = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пара $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$ не канонична. Иными словами, линейная система Σ имеет максимальную особенность $E \subset \tilde{V}$, где $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ – некоторая последовательность раздутий. Пусть $Z = \varphi(E) \subset V$ – центр максимальной особенности.

ЛЕММА 3.1. *Имеет место оценка $\text{codim}_V Z \geq 3$.*

Доказательство непосредственно вытекает из условия (ii).

Пусть $x \in Z$ – точка общего положения, $D \in \Sigma$ – общий дивизор. Пусть, далее,

$$\lambda: V^+ \rightarrow V$$

– раздутие точки x на V , исключительный дивизор $\lambda^{-1}(x) \subset V^+$ обозначим символом E^+ .

ЛЕММА 3.2. *Существует гиперплоскость $B^+ \subset E^+$ такая, что выполнено неравенство*

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_{B^+} D^+ > 2n, \quad (21)$$

где $D^+ \subset V^+$ – собственный прообраз дивизора D .

Доказательство легко следует из принципа связности Шокурова–Коллара [4] и свойств не лог-канонической изолированной особенности на поверхности. (Подробное доказательство см. в [3].)

Пусть $F = F_t$ – слой проекции π , на котором лежит точка x . Предположим сначала, что $x \in F$ – неособая точка слоя. Имеются две возможности:

- 1) $B^+ \not\subset F^+$;
- 2) $B^+ \subset F^+$,

где $F^+ \subset V^+$ – собственный прообраз слоя F . Очевидно, $\lambda_F: F^+ \rightarrow F$ есть раздутие точки $x \in F$, а $E_F = E^+ \cap F^+$ – его исключительный дивизор. Рассмотрим эти возможности по порядку.

1) Здесь $B = B^+ \cap F^+$ – гиперплоскость в исключительном дивизоре E_F . Положим $D_F = D|_F$ – ограничение дивизора D на слой F . Эффективный дивизор D_F корректно определен, потому что $F \not\subset \text{Supp } D$. Неравенство (21) можно переписать в следующем виде:

$$\text{mult}_{B^+}(\lambda^* D) > 2n$$

(поскольку, очевидно, $\text{mult}_{B^+} E^+ = 1$). Теперь имеем

$$\text{mult}_B(\lambda_F^* D_F) = \text{mult}_B(\lambda^* D)|_{F^+} \geq \text{mult}_{B^+}(\lambda^* D).$$

Учитывая, что $\text{mult}_B(\lambda_F^* D_F) = \text{mult}_x D_F + \text{mult}_B D_F^+$, где $D_F^+ \subset F^+$ – собственный прообраз дивизора D_F , получаем окончательно

$$\text{mult}_x D_F + \text{mult}_B D_F^+ > 2n.$$

Отметим, что $D_F \in |-nK_F|$. Получаем противоречие с условием (LR).

2) Здесь $B^+ = E_F$ – исключительный дивизор раздутия λ_F . Полагая $D_F = D|_F$, имеем оценку $\text{mult}_x D_F = \text{mult}_x D + \text{mult}_{B^+} D^+ > 2n$, что опять противоречит условию (LR).

Таким образом, точка $x \in F$ не может быть гладкой. Смысл приведенных рассуждений в том, что неравенство (21) можно “ограничить на слой F ”.

Однако точка $x \in F$ не может быть и особенностью слоя. В самом деле, в принятых выше обозначениях в этом случае $E_F \subset E^+$ – неособая квадрика, так что $B^+ \not\subset F^+$. Рассуждение п. 1) снова приводит к неравенству

$$\text{mult}_B(\lambda_F^* D_F) > 2n,$$

где $B = B^+ \cap F^+$ – гиперплоское сечение квадрики E_F . Учитывая, что

$$\text{mult}_B(\lambda_F^* D_F) = \frac{1}{2} \text{mult}_x D_F + \text{mult}_B D_F^+,$$

снова получаем противоречие с условием (LR).

Следовательно, лог-пара $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$ канонична.

Если $l \in \mathbb{Z}_+$, то $c(\Sigma) = n$. Стандартные рассуждения [7] показывают, что строгое неравенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) < n$$

влечет неканоничность пары $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$. Следовательно, имеет место равенство $c_{\text{virt}}(\Sigma) = n$.

Предложение 3.1 полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Предположим, что расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет требованиям (i)–(iii) и K -условию, т.е.*

$$-K \notin A_{\text{mov}}^1 V.$$

Тогда расслоение $V/\mathbb{P}^1$ бирационально сверхжесткое.

3.2. Многообразие с пучком двойных пространств. В этой части статьи символ $\mathbb{P}$ обозначает комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^M$ размерности $M \geq 5$. Пусть $\mathcal{W} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2M)))$ – пространство гиперповерхностей степени $2M$. В работе [3] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Существует непустое открытое по Зарискому подмножество $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$ такое, что*

- (i) $\text{codim}(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\text{reg}}) \geq 2$;
- (ii) *двойное пространство Фано $\sigma: F \rightarrow \mathbb{P}$, разветвленное над гиперповерхностью $W \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$, удовлетворяет условию (LR) в каждой гладкой точке $x \in F$ и имеет, самое большее, невырожденные квадратичные особенности.*

Предположим, что $x \in F$ – особая точка.

ЛЕММА 3.3. *Многообразие F удовлетворяет условию (LR) в точке x .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти очевидно: если для дивизора $D \in |-nK_F|$ и гиперплоского сечения B квадрики $E = \lambda^{-1}(x)$, где $\lambda: \tilde{F} \rightarrow F$ – раздутие точки x , выполнено неравенство

$$\text{mult}_x D + 2 \text{mult}_B \tilde{D} > 4n, \quad (22)$$

то $\text{mult}_x D > 2n$, поскольку $\text{mult}_x D \geq 2 \text{mult}_B \tilde{D}$. Однако имеет место противоположная оценка $\text{mult}_x D \leq 2n$. Противоречие завершает доказательство леммы.

Поскольку $\text{codim}(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\text{reg}}) \geq 2$, для общего многообразия $V/\mathbb{P}^1$ с пучком двойных пространств Фано размерности $M \geq 5$ каждый слой в каждой точке удовлетворяет условию (LR).

Напомним, что многообразие V есть двойное накрытие проективного расслоения $X/\mathbb{P}^1$, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, разветвленное над гладкой гиперповерхностью $W^* \sim 2ML_X + 2a_W R$, где L_X, R – классы тавтологического пучка и слоя в $\text{Pic } X$ соответственно. По построению локально свободный пучок $\mathcal{E}$ порождается своими сечениями, так что линейная система $|L_V|$ свободна, где $L_V = \sigma^* L_X$.

ЛЕММА 3.4. *Имеет место равенство $(-K_V \cdot L_V^{M-1}) = 4 - 2a_W$.*

Доказательство: непосредственные вычисления.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *При $a_W \geq 2$ расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет K -условию: $-K_V \notin \text{Int } A_{\text{mov}}^1 V$.*

На самом деле, при $a_W \geq 2$ выполнено более сильное условие

$$-K_V \notin \text{Int } A_+^1 V,$$

но нам это не нужно.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *При $a_W \geq 2$ общее расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ является бирационально сверхжестким.*

3.3. Многообразие с пучком двойных квадратик. Пусть теперь $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{M+1}$, $M \geq 6$. Положим $\mathcal{W} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2M-2)))$. Для гиперповерхности $W \in \mathcal{W}$ рассмотрим двойное накрытие квадрики $Q \subset \mathbb{P}$

$$\sigma = \sigma_W: F \rightarrow Q,$$

разветвленное над пересечением $W_Q = W \cap Q$. Относительно квадрики Q , гиперповерхности W и их взаимного расположения предполагаем следующее.

1) Квадрика Q либо неособа, либо есть конус над неособой квадратикой в $\mathbb{P}^M$ с вершиной в точке.

2) Многообразие F имеет, самое большее, невырожденные квадратичные особенности. Если Q есть конус, то дивизор ветвления W_Q неособ.

3) Пусть $p \in W_Q$ – гладкая точка дивизора ветвления, $(z_1, \dots, z_{M+1})$ – некоторая система аффинных координат на $\mathbb{P}^{M+1}$ с началом в точке p . Гиперповерхности Q и W задаются в этой системе координат уравнениями

$$q_1 + q_2 = 0 \quad \text{и} \quad w_1 + w_2 + \dots + w_{2M-2} = 0 \quad (23)$$

соответственно. Без ограничения общности предполагаем, что $q_1 \equiv z_1$, $w_1 \equiv z_2$. Для любой линейной формы $\lambda(z_3, \dots, z_{M+1})$ и любой константы $c \in \mathbb{C}$

$$c q_2(0, 0, z_3, \dots, z_{M+1}) \neq w_2(0, 0, z_3, \dots, z_{M+1}) - \lambda^2(z_3, \dots, z_{M+1}).$$

Аналогичным образом, пусть $p \in W_Q$ – особая точка дивизора ветвления, (z_*) – некоторая система аффинных координат, уравнения гиперповерхностей Q и W имеют вид (23), где без ущерба для общности считаем, что $q_1 \equiv w_1 \equiv z_1$. Для любой линейной формы $\lambda(z_2, \dots, z_{M+1})$ и любой константы $c \in \mathbb{C}$

$$c q_2(0, z_2, \dots, z_{M+1}) \neq w_2(0, z_2, \dots, z_{M+1}) - \lambda^2(z_2, \dots, z_{M+1}).$$

Пусть $\mathcal{Q} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)))$ – пространство квадратик.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Существует непустое открытое по Зарискому подмножество $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{W}$ такое, что*

- (i) $\text{codim}(\mathcal{Q} \times \mathcal{W} \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}) \geq 2$;
- (ii) *для любой пары $(Q, W) \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ соответствующее двойное накрытие Фано F удовлетворяет предположениям 1)–3).*

Доказательство: очевидный подсчет размерностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Для любой пары $(Q, W) \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ соответствующее двойное накрытие Фано F удовлетворяет условию (LR) в каждой точке $x \in F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $p = \sigma(x) \in Q$. Рассмотрим сначала случай, когда морфизм σ неразветвлен в точке x , т.е. $p \notin W$. Пусть

$$\varphi: \tilde{F} \rightarrow F \quad \text{и} \quad \bar{\varphi}: \tilde{Q} \rightarrow Q$$

– раздутья точек x и p соответственно, $E = \varphi^{-1}(x)$ и $\bar{E} = \bar{\varphi}^{-1}(p)$ – исключительные дивизоры. Морфизм σ продолжается до рационального отображения $\tilde{\sigma}: \tilde{F} \dashrightarrow \tilde{Q}$, регулярного в окрестности E и отождествляющего исключительные дивизоры E и $\bar{E}$.

Предположим, что $p \in Q$ – неособая точка. Допустим, что дивизор $D \in |-nK_F|$ удовлетворяет неравенству $\text{mult}_x D + \text{mult}_B \tilde{D} > 2n$, где $B \subset E$ – некоторая гиперплоскость. Обозначим символом $\overline{B} = \tilde{\sigma}(B)$ соответствующую ей гиперплоскость в $\overline{E} = \mathbb{P}(T_p Q)$.

Теперь наши рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2 в работе [3] (с упрощениями). Очевидно, имеется пучок Λ_B гиперплоских сечений $R \ni x$ квадрики Q таких, что

$$\tilde{R} \cap \overline{E} = \overline{B},$$

где $\tilde{R} \subset \tilde{Q}$ – собственный прообраз дивизора R . Общая квадрика $R \in \Lambda_B$ неособа в точке p , так что $\sigma^{-1}(R)$ есть неприводимое многообразие, неособое в точке x . Класс гиперплоского сечения многообразия $\sigma^{-1}(R)$ обозначим символом H_R . Положим также $D_R = D|_{\sigma^{-1}(R)}$. Это эффективный дивизор на неприводимом многообразии $\sigma^{-1}(R)$, удовлетворяющий неравенству

$$\text{mult}_x D_R = \text{mult}_x D + \text{mult}_B \tilde{D} > 2n.$$

Однако дивизор $T_R = \sigma^{-1}(R \cap T_p R)$ неприводим и имеет в точке x кратность точно 2. Следовательно, можно записать

$$D_R = aT_R + D_R^\sharp,$$

где $a \in \mathbb{Z}_+$ и эффективный дивизор $D_R^\sharp \in |n^\sharp H_R|$ не содержит дивизор T_R компонентой, причем $n^\sharp \geq 1$. Имеет место неравенство

$$\text{mult}_x D_R^\sharp > 2n^\sharp.$$

Рассмотрим эффективный цикл $\Delta = (D_R^\sharp \circ T_R)$. Его степень относительно обильного класса H_R есть $4n^\sharp$, в то время как справедливо неравенство

$$\text{mult}_x \Delta > 4n^\sharp.$$

Это невозможно. Полученное противоречие исключает рассматриваемый случай.

Предположим теперь, что $p \in Q$ – вершина конуса. Здесь $E \cong \overline{E}$ – неособая квадрика, $B \cong \overline{B}$ – ее гиперплоское сечение.

Предположим, что некоторый дивизор $D \in |-nK_F|$ удовлетворяет неравенству (22). Имеется единственная гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}$ такая, что сечение $R = H \cap Q$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{R} \cap \overline{E} = \overline{B},$$

$\tilde{R} \subset \tilde{Q}$ – собственный прообраз сечения R . Поскольку

$$\text{mult}_x R = 2, \quad \text{mult}_{\overline{B}} R = 1 \quad \text{и} \quad \sigma^{-1}(R) \in |-K_F|,$$

дивизор $\sigma^{-1}(R) \subset F$ удовлетворяет неравенству (20). Следовательно,

$$\sigma^{-1}(R) \neq D.$$

Образуем эффективный цикл $\Delta = (D \circ \sigma^{-1}(R))$. Его $(-K_F)$ -степень есть $4n$. Далее,

$$\text{mult}_x \Delta = \text{mult}_x D + 2 \text{mult}_B \tilde{D} > 4n.$$

Это невозможно. Таким образом, случай $p \notin W$ полностью исключен.

Предположим, что морфизм σ разветвлен в точке x , т.е. $p \in W$. Обозначения $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$, $\tilde{\varphi}: \tilde{Q} \rightarrow Q$, $E \subset \tilde{F}$ и $\bar{E} \subset \tilde{Q}$ имеют тот же смысл, что и выше, однако морфизм σ не отождествляет E и $\bar{E}$. Пусть $p \in Q$ – гладкая точка, $D \in |-nK_F|$ – эффективный дивизор, удовлетворяющий неравенству

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_B \tilde{D} > 2n. \quad (24)$$

Пусть $\bar{\Lambda}$ – пучок сечений квадрики Q гиперплоскостями в $\mathbb{P}$, содержащими линейное пространство $T_p(W \cap Q) = T_p W \cap T_p Q$. Возьмем общий дивизор $\bar{R} \in \bar{\Lambda}$ и положим $R = \sigma^{-1}(\bar{R})$. Очевидно, $R \in |-K_F|$ – неприводимый дивизор, $E_R = \tilde{R} \cap E$ есть неприводимая квадратика в E . Символом H_R обозначим, как выше, класс гиперплоского сечения многообразия R . Получаем эффективный дивизор $D_R = (D \circ R) \in |nH_R|$ на R , для которого справедливы равенства

$$\text{mult}_x D_R = 2 \text{mult}_x D, \quad \text{mult}_{B \cap E_R} \tilde{D}_R = \text{mult}_B \tilde{D}.$$

Поскольку $\text{mult}_x D_R \leq 4n$, кратность $\text{mult}_B \tilde{D}$ строго положительна: носитель $\text{Supp } \tilde{D}$ содержит множество B . В силу линейности неравенства (24) по дивизору D можно считать дивизор D_R неприводимым. Как мы только что объяснили,

$$B \cap E_R \subset \text{Supp } D_R.$$

ЛЕММА 3.5. *Собственный прообраз дивизора $T = \sigma^{-1}(\bar{R} \cap T_p \bar{R})$ на $\tilde{F}$ не содержит целиком множество $B \cap E_R$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из условий общности положения для многообразия F . В самом деле, положим $\mathbb{T} = \mathbb{P}(T_p \bar{R})$. Легко видеть, что $\sigma|_R$ реализует E_R как двойное накрытие пространства $\mathbb{T}$, разветвленное над квадратикой

$$W_T = \mathbb{P}T_p(W \cap T_p(W \cap Q))$$

(необходимо учесть, что $T_p \bar{R} = T_p(W \cap Q)$). В координатной форме (относительно системы координат в условии 3)) квадратика E_R задается уравнением

$$y^2 = w_2(0, 0, z_3, \dots, z_{M+1})$$

в проективном пространстве с однородными координатами

$$(y : z_3 : \dots : z_{M+1}),$$

$z_3 : \dots : z_{M+1}$ есть система однородных координат на $\mathbb{T}$, накрытие $\sigma_E: E_R \rightarrow \mathbb{T}$ есть ограничение на E_R линейной проекции из точки $(1 : 0 : \dots : 0)$. Множество $\tilde{T} \cap E_R$ (где $\tilde{T}$, как обычно, есть собственный прообраз дивизора T на $\tilde{R}$) задается уравнением $q_2(0, 0, z_3, \dots, z_{M+1}) = 0$.

Пусть $\alpha y + \lambda(z_3, \dots, z_{M+1}) = 0$ – уравнение гиперплоского сечения $B \cap E_R$, $\alpha = 0$ или 1 , $\lambda(\cdot)$ – линейная форма. Предположим, что

$$B \cap E_R \subset \tilde{T}.$$

Тогда, очевидно, $\sigma_E(B \cap E_R)$ содержится в квадратике $q_2|_{\mathbb{T}} = 0$. Если $\alpha = 0$, то это означает, что квадратичный многочлен $q_2(0, 0, z_*)$ делится на линейную форму $\lambda(z_*)$, что невозможно. Если $\alpha = 1$, то это означает, что квадратичный многочлен $q_2(0, 0, z_*)$ с точностью до скалярного множителя есть $w_2(0, 0, z_*) - \lambda^2(z_*)$, что снова невозможно в силу условий общности положения. Лемма доказана.

Поскольку, как мы только что установили, $D_R \neq T$ (и оба дивизора неприводимы), корректно определен эффективный цикл $(D_R \circ T) = \Delta$ коразмерности 2 на R . Легко видеть, что его степень относительно H_R есть $4n$, а кратность в точке x

$$\text{mult}_x \Delta \geq 2 \text{mult}_x D_R = 4 \text{mult}_x D > 4n,$$

что невозможно. Этим случай гладкой точки $x \in F$, $p \in W$, исключен.

Остается рассмотреть единственный случай – случай особой точки $x \in F$, где $p = \sigma(x) \in W$. В силу условий общности положения $p \in Q$ – гладкая точка на квадрике. Предположим, что дивизор $D \in |-nK_F|$ удовлетворяет неравенству (22). В силу линейности этого неравенства по дивизору D можно считать, что D – простой дивизор. В антиканонической системе $|-K_F|$ рассмотрим дивизор $T = \sigma^{-1}(Q \cap T_p Q)$. Очевидно, $\text{mult}_x T = 4$ и в силу условий общности положения $\tilde{T} \not\geq B$. Следовательно, $D \neq T$ и эффективный цикл $\Delta = (D \circ T)$ корректно определен. Поскольку

$$\text{mult}_x \Delta \geq 2 \text{mult}_x D > 4n$$

(точка $x \in F$ двойная), опять получаем противоречие. Предложение 3.4 полностью доказано.

Из предложений 3.3, 3.4 вытекает, что для общего расслоения Фано $V/\mathbb{P}^1$ на двойные квадрики индекса 1 размерности $M \geq 6$ каждый слой в каждой точке удовлетворяет условию (LR).

Напомним [1], [2], что многообразие V реализуется как двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow Q^*$ гиперповерхности $Q^* \subset X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, разветвленное над дивизором $W^* \cap Q^*$. Расслоение V характеризуется тройкой неотрицательных целочисленных параметров (a_X, a_Q, a_W) . Из формулы

$$(-K_V \cdot L_V^M) = 2(8 - 2a_X - 3a_Q - 4a_W)$$

следует, что при $2a_X + 3a_Q + 4a_W \geq 8$ расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет K -условию: $-K \notin \text{Int } A_{\text{mov}}^1 V$ (и даже $-K \notin \text{Int } A_{+}^1 V$).

СЛЕДСТВИЕ 3.4. При $2a_X + 3a_Q + 4a_W \geq 8$ общее расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ является бирационально сверхжестким.

3.4. Двойные гиперповерхности Фано. Приведем один промежуточный результат, относящийся к этому классу многообразий. Пусть $\sigma: F \rightarrow Q \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^{M+1}$ – двойное накрытие Фано, где Q – гиперповерхность степени $m \geq 3$, $M \geq 6$. Морфизм σ разветвлен над дивизором $W = W^* \cap Q$, где $W^* \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхность степени $2l$, $m + l = M + 1$. Предположим, что F имеет, самое большее, невырожденные квадратичные особенности. Предположим также, что в любой гладкой точке $x \in F$ вне дивизора ветвления многообразии F регулярно в смысле определения 1 работы [9]. Кроме того, будем предполагать выполненными следующие условия общности положения. Пусть $(z_1, \dots, z_{M+1})$ – система аффинных координат с началом в точке $p = \sigma(x)$,

$$f = q_1 + q_2 + \dots + q_m$$

– уравнение гиперповерхности Q (так что в силу определения 1 статьи [9] последовательность $q_1, \dots, q_m$ регулярна). Потребуем, чтобы линейная оболочка

любой неприводимой компоненты замкнутого множества

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

в $\mathbb{C}^{M+1}$ совпадала с гиперплоскостью $q_1 = 0$ (касательной гиперплоскостью $T_p Q$). Далее, потребуем, чтобы замкнутое алгебраическое множество

$$\sigma^{-1}(\overline{\{q_1 = q_2 = 0\} \cap Q}) \subset F$$

было неприводимо и любое сечение этого множества антиканоническим дивизором $P \in |-K_F|$, $P \ni x$, было также неприводимо и приведено.

Сформулированные условия полностью аналогичны условиям регулярности (R1.1)–(R1.3) работы [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *В сделанных предположениях многообразие F удовлетворяет условию (LR) в любой гладкой точке $x \in F$ вне дивизора ветвления.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается дословным повторением рассуждений п. 2.1 работы [3] с заменой (в заключительной части доказательства) гиперкасательной техники статьи [5] (которая используется в [3]) на гиперкасательную технику статьи [9]. Никаких других изменений не требуется. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Предположим, что расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ на двойные гиперповерхности индекса 1 удовлетворяет сформулированным выше условиям общности положения в каждой гладкой точке каждого слоя, лежащей вне дивизора ветвления. Тогда центр $B = \text{centre}(E)$ любой максимальной особенной E подвижной линейной системы $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ с $l \in \mathbb{Z}_+$ либо содержится в дивизоре ветвления, либо совпадает с особой точкой слоя.*

3.5. Многообразие с пучком гиперповерхностей Фано. В заключение рассмотрим класс расслоений Фано, изученный в [7]. Покажем, как за счет усиления условий общности положения линейный метод позволяет упростить доказательство бирациональной жесткости.

Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M)))$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}^M$, – множество гиперповерхностей Фано индекса 1. В [3; § 2] был установлен следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Существует открытое (в смысле топологии Зариско-го) подмножество $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}$ такое, что любая гиперповерхность $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ является гладкой и удовлетворяет условию (LR) в каждой точке.*

Особые гиперповерхности образуют в $\mathcal{F}$ замкнутое подмножество коразмерности 1, так что и дополнение $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}$ имеет коразмерность 1. Однако из построений п. 2.3 в [3] видно, что нарушение условий регулярности (R1.1)–(R1.3) (которые и задают множество $\mathcal{F}_{\text{reg}}$) хотя бы в одной гладкой точке $x \in F$ определяет замкнутое подмножество коразмерности не меньше 2 в $\mathcal{F}$. Следовательно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Существует открытое (в смысле топологии Зариско-го) подмножество $\mathcal{F}_{\text{reg}}^+ \subset \mathcal{F}$ такое, что*

- (i) $\text{codim}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}^+) \geq 2$;

- (ii) любая гиперповерхность $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_{\text{reg}}^+$ имеет, самое большее, невырожденные квадратичные особенности, причем если $x \in F$ – такая особенность, то последовательность однородных многочленов

$$q_2, \dots, q_M$$

регулярна в $\mathcal{O}_{x, \mathbb{P}}$, где $f = q_2 + \dots + q_M$ – многочлен, задающий гиперповерхность F в некоторой системе аффинных координат с началом в точке x ;

- (iii) любая гиперповерхность $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_{\text{reg}}^+$ удовлетворяет условию (LR) в каждой гладкой точке $x \in F$.

Оказывается, невырожденные квадратичные особенности, удовлетворяющие условию регулярности (ii), не порождают серьезных проблем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Любая гиперповерхность $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_{\text{reg}}^+$ удовлетворяет условию (LR) в каждой точке $x \in F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В проверке нуждается лишь случай квадратичной особенности $x \in F$. Пусть

$$\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P} \quad \text{и} \quad \varphi_F: \tilde{F} \rightarrow F$$

– раздутие точки $x \in \mathbb{P}$ и его ограничение на F соответственно,

$$E = \varphi^{-1}(x) \subset \tilde{\mathbb{P}} \quad \text{и} \quad E_F = \varphi_F^{-1}(x) = \tilde{F} \cap E$$

– исключительные дивизоры, $E_F \subset E$ – гладкая квадрака. Предположим, что дивизор $D \in |-nK_F|$ удовлетворяет неравенству (22). В силу линейности этого неравенства по D можно считать дивизор D неприводимым. Имеем

$$B = E_F \cap \Pi,$$

где $\Pi \subset E$ – некоторая гиперплоскость. Пусть $P \subset \mathbb{P}$, $P \ni x$, – единственная гиперплоскость, для которой справедливо равенство $\tilde{P} \cap E = \Pi$, $\tilde{P} \subset \tilde{\mathbb{P}}$ – собственный прообраз. Пусть $R = P \cap F$ – дивизор на F .

Очевидно, R неприводим и удовлетворяет неравенству (20) с $n = 1$ и R вместо D . Следовательно, $R \neq D$, так что корректно определен эффективный цикл $Y = (R \circ D)$ коразмерности 2. Этот цикл (его можно считать неприводимым) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} Y > \frac{4}{M}.$$

Теперь доказательство завершается стандартным образом: пусть $\Lambda_2, \dots, \Lambda_{M-1}$ – гиперкасательные линейные системы. В силу условия регулярности имеем

$$\text{codim}_F \text{Bs } \Lambda_k = k - 1.$$

Пусть $(D_4, \dots, D_{M-1}) \in \Lambda_4 \times \dots \times \Lambda_{M-1}$ – общий набор гиперкасательных дивизоров. Очевидно, $Y \notin \text{Supp } \Lambda_4$. По индукции построим последовательность

неприводимых подмногообразий Y_i , $i = 2, \dots, M-2$, где $\text{codim}_F Y_i = i$, $Y_2 = Y$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} Y_{i+1} \geq \frac{\text{mult}_x}{\deg} Y_i \cdot \frac{i+3}{i+2},$$

Y_{i+1} есть неприводимая компонента эффективного цикла $(Y_i \circ D_{i+2})$. Это возможно, потому что

$$\text{codim}_F Y_i = i < \text{codim}_F \text{Bs } \Lambda_{i+2} = i+1,$$

так что $Y_i \not\subset \text{Supp } D_{i+2}$ для общего дивизора $D_{i+2} \in \Lambda_{i+2}$. Кривая $C = Y_{M-2}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} C > \frac{4}{M} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{M}{M-1} = 1,$$

что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 3.8.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Предположим, что для каждого слоя $F_t = \pi^{-1}(t)$ расслоения Фано $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеем $F_t \in \mathcal{F}_{\text{reg}}^+$. Тогда*

- (i) *для любой подвижной линейной системы $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ с $l \in \mathbb{Z}_+$ пара $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$ канонична;*
- (ii) *если многообразие V удовлетворяет K -условию, то оно бирационально сверхжесткое.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Линейный метод позволяет упростить доказательство бирациональной жесткости в работах [7], [10]. Однако техника, с помощью которой устанавливается справедливость условий типа (L), работает для многообразий достаточно высокой (не меньше 3) размерности. Поэтому для расслоений на кривые [11], [12] и поверхности [13]–[15] линейный метод в его нынешнем виде дает немного. Например, в случае одномерного слоя, ограничивая линейную систему на конику, пересекающую центр максимальной особенности, мы не получаем никакой новой информации. В случае двумерного слоя (поверхности дель Пеццо) положение лучше, однако легко показать, что при любых условиях общности положения найдутся слой F , точка $x \in F$ и дивизор $D \in |-nK_F|$ такие, что пара $(F, \frac{1}{n}D)$ не лог-канонична в точке x , что препятствует исключению максимальной особенности с центром в этой точке линейным методом. Трудности в работе линейного метода в небольших размерностях проявляются и в абсолютном случае (т.е. для многообразий Фано): условие (L) остается недоказанным для трехмерных квартик и четырехмерных квинтик, в то время как квадратичный метод успешно работает для этих многообразий [16], [17].

Список литературы

- [1] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. Г”, *Матем. сб.*, **195**:7 (2004), 127–160.
- [2] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. II”, *Матем. сб.*, **195**:11 (2004), 119–156.

- [3] А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186.
- [4] J. Kollár (ed.), *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry (University of Utah, Salt Lake City, UT, 1991), Astérisque, **211**, Soc. Math. France, Paris, 1992.
- [5] А. В. Пухликов, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
- [6] А. В. Пухликов, “Послойные бирациональные соответствия”, *Матем. заметки*, **68**:1 (2000), 120–130.
- [7] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие расслоения Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:3 (2000), 131–150.
- [8] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.
- [9] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано”, *Матем. сб.*, **191**:6 (2000), 101–126.
- [10] И. В. Соболев, “Об одной серии бирационально жестких многообразий с пучком гиперповерхностей Фано”, *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 123–130.
- [11] В. Г. Саркисов, “Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:4 (1980), 918–945.
- [12] В. Г. Саркисов, “О структурах расслоений на коники”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:2 (1982), 371–408.
- [13] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164.
- [14] М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 17–38.
- [15] М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2. II”, *Матем. сб.*, **194**:5 (2003), 31–60.
- [16] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86**:1 (1971), 140–166.
- [17] А. В. Пухликов, “Birational isomorphisms of four-dimensional quintics”, *Invent. Math.*, **87** (1987), 303–329.

А. В. Пухликов (A. V. Pukhlikov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: pukh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
26.09.2005