Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов, О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 12, 43–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:20:25

УДК 517.927.7

И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов

О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии

В работе рассмотрены некоторые обратные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений: оценивается число дополнительных особых точек, возникающих при построении фуксова уравнения по произвольному (в частности, приводимому) представлению монодромии; оценивается ранг Пуанкаре единственной нефуксовой особой точки регулярной линейной системы, построенной по произвольному представлению монодромии; исследуется задача о мероморфном преобразовании линейной системы в окрестности иррегулярной особой точки к полиномиальному виду (задача, связанная с приведением линейной системы к биркгофовой стандартной форме).

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z) \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \dots + b_p(z) y = 0 \quad (1)$$

порядка p с мероморфными на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ коэффициентами $b_1(z), \dots, b_p(z)$, голоморфными вне множества особых точек $a_1, \dots, a_n$.

Представлением монодромии или *монодромией* данного уравнения называется представление

$$\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \quad (2)$$

фундаментальной группы пространства $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ в пространство невырожденных комплексных матриц порядка p , которое определяется следующим образом. В окрестности неособой точки z_0 рассмотрим базис $(y_1(z), \dots, y_p(z))$ пространства решений уравнения (1). При аналитическом продолжении функций $y_1(z), \dots, y_p(z)$ вдоль произвольной петли γ , начинающейся в точке z_0 и лежащей в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, базис $(y_1, \dots, y_p)$ переходит в (вообще говоря, другой) базис $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p)$. Два базиса связаны с помощью невырожденной матрицы перехода G_γ , соответствующей петле γ :

$$(y_1, \dots, y_p) = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p) G_\gamma.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-22000) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-457.2003.01).

Отображение $[\gamma] \mapsto G_\gamma$ (которое зависит только от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ) и задает представление χ . Матрицей монодромии уравнения (1) в особой точке a_i (относительно базиса $(y_1, \dots, y_p)$) называется матрица G_i , соответствующая простой петле γ_i , обходящей точку a_i , т.е. $G_i = \chi([\gamma_i])$.

Особая точка a_i уравнения (1) называется *фуксовой*, если коэффициент $b_j(z)$ имеет в этой точке полюс порядка не более j ($j = 1, \dots, p$). Согласно теореме Фукса (см. [1]) особая точка a_i является фуксовой тогда и только тогда, когда она *регулярна* (т.е. когда любое решение имеет не более чем степенной рост в окрестности точки a_i). Уравнение (1) называется *фуксовым*, если все его особые точки фуксовы.

Задача о построении фуксова уравнения (1) с заданными особыми точками $a_1, \dots, a_n$ и заданным представлением монодромии (2) в общем случае имеет отрицательное решение, поскольку число параметров, от которых зависит такое уравнение, меньше числа параметров, от которых зависит множество представлений χ (см. [2], [1]). Поэтому при построении фуксова уравнения возникают дополнительные “ложные” особые точки (т.е. точки, в которых коэффициенты уравнения имеют особенности, но решения голоморфны). Когда представление (2) неприводимо, выражение для минимально возможного числа таких особых точек было получено А. А. Болибрухом [2]. В настоящей работе мы исследуем случай приводимого представления.

Наряду с уравнением (1) можно рассмотреть линейную систему

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad (3)$$

из p уравнений с мероморфной на сфере Римана матрицей $B(z)$, голоморфной вне точек $a_1, \dots, a_n$. Представление монодромии данной системы определяется так же, как и для уравнения (1), нужно только вместо строки $(y_1, \dots, y_p)$ рассмотреть *фундаментальную матрицу* $Y(z)$ – матрицу, столбцы которой образуют базис в пространстве решений системы.

Особая точка a_i системы (3) называется *фуксовой*, если матрица $B(z)$ имеет простой полюс в этой точке. Фуксова особая точка линейной системы всегда является регулярной, хотя регулярная особенность не обязана быть фуксовой (см. [1]). Система (3) называется *фуксовой*, если все ее особые точки фуксовы.

Так же как и для скалярного уравнения (1), задача о построении фуксовой системы (3) с заданными особыми точками $a_1, \dots, a_n$ и заданным представлением монодромии (2) (называемая *проблемой Римана–Гильберта*) в общем случае имеет отрицательное решение (см. [1]–[3]). Известны различные достаточные условия положительного решения этой проблемы (например, таковым является условие неприводимости представления (2)).

Метод решения задач, связанных с проблемой Римана–Гильберта, был развит А. А. Болибрухом и состоит в следующем. По представлению (2) на сфере Римана строится семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений ранга p с логарифмическими связностями, имеющими данные особые точки и данную монодрию. Напомним, что расслоение F ранга p задается набором $\{U_i\}$ окрестностей, покрывающих сферу, и набором $\{g_{ij}\}$ склеивающих коциклов –

голоморфно обратимых матриц размера p , определенных на непустых пересечениях $U_i \cap U_j$ (т.е. $g_{ij}(z)$ голоморфна в $U_i \cap U_j$ и $\det g_{ij}(z)$ не обращается там в нуль) и обладающих следующими свойствами:

- 1) $g_{ij}(z) = g_{ji}^{-1}(z)$;
- 2) $g_{ij}(z)g_{jk}(z)g_{ki}(z) \equiv I$, если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Связность ∇ задается набором $\{\omega^i\}$ локальных матричных дифференциальных 1-форм (ω^i определена в U_i), на пересечениях $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ удовлетворяющих условиям склейки:

$$\omega^i = (dg_{ij})g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega^j g_{ij}^{-1}. \quad (4)$$

Локально связность определяет систему $dy = \omega^i y$. Монодромия связности (так же как и монодромия системы (3)) описывает характер ветвления решений этих локальных систем при аналитическом продолжении вдоль замкнутых путей, обходящих особые точки. Связность ∇ называется *логарифмической (фуксовой)*, если все особые точки форм ω^i суть полюсы первого порядка. Проблема Римана–Гильберта для данного представления (2) решается положительно, если окажется, что одно из расслоений семейства $\mathcal{F}$ голоморфно тривиально (поскольку тогда в качестве коциклов g_{ij} можно выбрать единичные матрицы и в силу условия склейки (4) связность ∇ будет задавать фуксову систему с монодромией (2), определенную на всей сфере Римана).

Теорема Биркгофа–Гротендика утверждает, что любое голоморфное векторное расслоение F ранга p на сфере Римана эквивалентно расслоению, имеющему описание вида

$$(U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, g_{0\infty} = z^K), \quad K = \text{diag}(k_1, \dots, k_p),$$

где $k_1 \geq \dots \geq k_p$ – набор целых чисел, который называется *типом расщепления* расслоения F .

Обозначим через $\tilde{\gamma}_{\min}(\chi)$ величину

$$\tilde{\gamma}_{\min}(\chi) = \min_{F \in \mathcal{F}} (k_1 - k_p),$$

определенную для произвольного представления χ .

Основные результаты §§ 3, 4 настоящей работы состоят в следующем.

ТЕОРЕМА 1. *Для величины $\tilde{\gamma}_{\min}(\chi)$ справедлива оценка*

$$\tilde{\gamma}_{\min}(\chi) \leq (p-1)(n-1).$$

Рангом Пуанкаре особой точки системы (3) называется целое число, на единицу меньше порядка полюса матрицы $B(z)$ в этой точке (например, ранг Пуанкаре фуксовой особой точки равен нулю).

Хотя проблема Римана–Гильберта, как отмечалось выше, в общем случае имеет отрицательное решение, однако согласно теореме Племеля (см. [1], [3]) по представлению (2) можно построить систему (3), фуксову во всех точках, кроме одной, в которой она регулярна. Здесь же мы приведем некоторую оценку ранга Пуанкаре регулярной особой точки построенной системы.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякое представление (2) может быть реализовано как представление монодромии системы (3), фуксовой во всех точках, кроме одной, в которой она регулярна, причем ранг Пуанкаре в этой точке не превосходит величины $(n-1)(p-1)$.*

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного представления (2) существует фуксово уравнение (1) с данной монодромией, число t дополнительных ложных особых точек которого удовлетворяет неравенству*

$$t \leq \frac{(n+1)p(p-1)}{2} + 1.$$

В § 5 настоящей работы, носящем, в основном, самостоятельный характер, изучаются вопросы, связанные с задачей о мероморфном преобразовании системы линейных дифференциальных уравнений к биркгофовой стандартной форме.

§ 2. Доказательство леммы Делиня

Если представление монодромии системы (3) неприводимо, то по такой системе можно построить линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{W(u_1, \dots, u_p)} \det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_p & y \\ \frac{du_1}{dz} & \dots & \frac{du_p}{dz} & \frac{dy}{dz} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^p u_1}{dz^p} & \dots & \frac{d^p u_p}{dz^p} & \frac{d^p y}{dz^p} \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

вида (1) относительно неизвестной функции $y(z)$, где $u_1, \dots, u_p$ – элементы произвольной строки некоторой фундаментальной матрицы системы, $W(u_1, \dots, u_p)$ – их вронскиан. Нетрудно показать, что элементы любой строки фундаментальной матрицы системы (3) с неприводимой монодромией линейно независимы, поэтому функции $u_1, \dots, u_p$ образуют базис пространства решений построенного уравнения, а его монодромия совпадает с монодромией системы. При этом дополнительными ложными особыми точками уравнения (5) будут нули вронскиана $W(u_1, \dots, u_p)$, который при сделанных предположениях не равен тождественно нулю.

В случае, когда представление монодромии системы (3) приводимо, изложенным выше способом перейти к уравнению, вообще говоря, нельзя. Например, если матрица $B(z)$ системы диагональна, то элементы любой строки произвольной фундаментальной матрицы такой системы линейно зависимы. Но существует другой способ перехода от системы к скалярному уравнению с той же монодромией, основанный на лемме, обычно называемой леммой Делиня [4; лемма II.1.3]. Здесь мы приведем аналитическое доказательство этой леммы (сформулированной в [4] в алгебраических терминах).

Преобразование $\tilde{y} = \Gamma(z)y$ системы (3) называется *мероморфно обратимым*, если матрица $\Gamma(z)$ этого преобразования мероморфна и $\det \Gamma(z) \neq 0$. Такое

преобразование переводит систему (3) в систему

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \tilde{B}(z)\tilde{y} \quad (6)$$

с матрицей коэффициентов

$$\tilde{B}(z) = \Gamma B(z)\Gamma^{-1} + \frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1}. \quad (7)$$

ЛЕММА 1 (П. Делинь [4]). *Всякая система (3) с помощью некоторого мероморфно обратимого на сфере Римана преобразования $\tilde{y} = \Gamma(z)y$ может быть переведена в систему (6), (7) с матрицей коэффициентов $\tilde{B}(z)$ вида*

$$\tilde{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -b_p & \dots & \dots & -b_1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $b_1(z), \dots, b_p(z)$ – мероморфные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (основано на упражнении 7 из [5; §1.1]). Рассмотрим некоторую p -мерную вектор-строку $t_0(z)$, элементы которой являются членами степени $p-1$. Запишем $t_0(z)$ в виде

$$t_0(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \frac{1}{2}\alpha_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!}\alpha_{p-1}(z - z_0)^{p-1},$$

где z_0 – точка, не входящая в число особенностей системы (3). Далее определим мероморфные на сфере Римана вектор-функции $t_1(z), \dots, t_p(z)$ по формулам

$$t_{j+1} = \frac{dt_j}{dz} + t_j B(z), \quad j = 0, \dots, p-1. \quad (9)$$

Рассмотрим матрицу $\Gamma(z)$, строками которой являются $t_0(z), \dots, t_{p-1}(z)$. Пусть C – некоторая постоянная невырожденная матрица размера p . Обозначим ее строки через $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_{p-1}$. Покажем, что вектор $t_0(z)$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие $\Gamma(z_0) = C$, т.е. $\det \Gamma(z) \not\equiv 0$. Для этого нужно положить

$$\begin{aligned} t_0(z_0) &= \alpha_0 = \mathbf{c}_0, \\ t_1(z_0) &= \alpha_1 + \alpha_0 B(z_0) = \mathbf{c}_1, \quad \text{т.е.} \quad \alpha_1 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0 B(z_0). \end{aligned}$$

Вообще,

$$t_j(z_0) = \alpha_j + F_j(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}) = \mathbf{c}_j,$$

где $F_j(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1})$ – уже найденный вектор, т.е.

$$\alpha_j = \mathbf{c}_j - F_j(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}), \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Итак, коэффициенты α_j многочлена $t_0(z)$ выбраны таким образом, что построенная по этому многочлену матрица $\Gamma(z)$ мероморфно обратима на всей

сфере Римана. Рассмотрим вектор-функцию $b(z) = (b_p(z), \dots, b_1(z))$, удовлетворяющую соотношению

$$t_p(z) = -b(z)\Gamma(z),$$

и соответствующую ей матрицу

$$\tilde{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -b_p & \dots & \dots & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Из формул (9) следует, что

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \tilde{B}\Gamma - \Gamma B,$$

поэтому преобразование $\tilde{y} = \Gamma(z)y$ переводит систему (3) в систему с матрицей коэффициентов

$$\Gamma B \Gamma^{-1} + \frac{d\Gamma}{dz} \Gamma^{-1} = \Gamma B \Gamma^{-1} + \tilde{B} - \Gamma B \Gamma^{-1} = \tilde{B}$$

искового вида. Доказательство леммы 1 завершено.

Особыми точками системы (6), (7) помимо особенностей $a_1, \dots, a_n$ исходной системы (3) будут нули $z_1, \dots, z_m$ функции $\det \Gamma(z)$ (не дающие вклада в монодромию). Будем считать, что одна из особых точек системы (3), например a_n , расположена в бесконечности (в противном случае можно применить дробно-линейное преобразование $\zeta = 1/(z - a_n)$ сферы Римана, переводящее особенности $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ в особенности $b_1 = 1/(a_1 - a_n), \dots, b_{n-1} = 1/(a_{n-1} - a_n), b_n = \infty$ тех же рангов Пуанкаре).

Нетрудно заметить, что первая компонента решения системы (6) с матрицей коэффициентов $\tilde{B}(z)$ вида (8) является решением уравнения вида (1) с особыми точками $a_1, \dots, a_n$ и дополнительными ложными особенностями $z_1, \dots, z_m$. Поэтому в качестве базиса пространства решений этого уравнения можно выбрать элементы $u_1, \dots, u_p$ первой строки некоторой фундаментальной матрицы $Y(z)$ системы (6). Функции $u_1, \dots, u_p$ линейно независимы, поскольку матрица $Y(z)$ имеет вид

$$Y(z) = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_p \\ \frac{du_1}{dz} & \dots & \frac{du_p}{dz} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{p-1}u_1}{dz^{p-1}} & \dots & \frac{d^{p-1}u_p}{dz^{p-1}} \end{pmatrix}$$

и линейная зависимость функций $u_1, \dots, u_p$ влекла бы линейную зависимость столбцов матрицы $Y(z)$. Таким образом, монодромия построенного уравнения совпадает с монодromией системы (6), а следовательно, и с монодromией системы (3) (с учетом того, что в дополнительных особенностях построенного уравнения матрицы монодромии единичные). Помимо этого из теоремы Фукса следует, что если все особые точки системы (3) регулярны, то получившееся

уравнение будет фуксовым. Оценим теперь число m его дополнительных ложных особых точек $z_1, \dots, z_m$.

Ряд Лорана матрицы $B(z)$ коэффициентов системы (3) в окрестности точки $a_i \neq \infty$ запишем в виде

$$B(z) = \frac{B_{-r_i-1}^i}{(z - a_i)^{r_i+1}} + \dots + \frac{B_{-1}^i}{z - a_i} + B_0^i + \dots, \quad B_{-r_i-1}^i \neq 0$$

(в окрестности же точки $a_n = \infty$ главная часть ряда Лорана матрицы $B(z)$ – многочлен степени $r_n - 1$), где r_i – ранг Пуанкаре системы в особой точке a_i .

Нули и полюсы функции $\det \Gamma(z)$ (из леммы 1) суть $z_1, \dots, z_m, a_1, \dots, a_n = \infty$.

Из формул (9) следует, что в окрестности точки $a_i \neq \infty$ (векторнозначную) функцию $t_j(z)$ можно представить в виде

$$t_j(z) = \frac{1}{(z - a_i)^{j(r_i+1)}} \tilde{t}_j(z), \quad j = 0, \dots, p-1,$$

где $\tilde{t}_j(z)$ – голоморфная в окрестности точки a_i функция, поэтому

$$\Gamma(z) = \text{diag}(1, (z - a_i)^{-(r_i+1)}, \dots, (z - a_i)^{-(p-1)(r_i+1)}) \tilde{\Gamma}(z),$$

где $\tilde{\Gamma}(z)$ – голоморфная в окрестности точки a_i матрица. Следовательно,

$$\text{ord}_{a_i} \det \Gamma(z) \geq -\frac{p(p-1)}{2}(r_i+1), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

В то же время в окрестности бесконечности матрица $B(z)$ представляется в виде

$$B(z) = z^{r_n-1} B_0(z),$$

где $B_0(z)$ – голоморфная в этой окрестности матрица. Поэтому там же функция $t_j(z)$ может быть записана как

$$t_j(z) = z^{p-1+j(r_n-1)} \tilde{t}_j(z), \quad j = 0, \dots, p-1,$$

где $\tilde{t}_j(z)$ – голоморфная в окрестности бесконечности функция. Тогда

$$\Gamma(z) = \text{diag}(z^{p-1}, z^{p-1+(r_n-1)}, \dots, z^{p-1+(p-1)(r_n-1)}) \tilde{\Gamma}(z),$$

где $\tilde{\Gamma}(z)$ – голоморфная в окрестности бесконечности матрица. Следовательно,

$$\text{ord}_{a_n} \det \Gamma(z) \geq -p(p-1) - \frac{p(p-1)}{2}(r_n-1) = -\frac{p(p-1)}{2}(r_n+1).$$

Обозначим через d_i порядок нуля функции $\det \Gamma(z)$ в точке z_i . Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^m d_i + \sum_{i=1}^n \text{ord}_{a_i} \det \Gamma(z) \geq \sum_{i=1}^m d_i - \left(\sum_{i=1}^n r_i + n \right) \frac{p(p-1)}{2},$$

откуда следует, что

$$m \leq \sum_{i=1}^m d_i \leq \left(\sum_{i=1}^n r_i + n \right) \frac{p(p-1)}{2}.$$

Таким образом, получена следующая вспомогательная лемма.

ЛЕММА 2. По произвольной системе (3) можно построить скалярное уравнение (1) с той же монодромией, число t дополнительных ложных особых точек которого удовлетворяет неравенству

$$t \leq \frac{(R+n)p(p-1)}{2},$$

где $R = \sum_{i=1}^n r_i$ – сумма рангов Пуанкаре особых точек системы. При этом если все особенности системы регулярны, то полученное уравнение фуксово.

§ 3. Голоморфные расслоения и регулярные системы

В этом параграфе мы докажем теорему 1. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений F^Λ на сфере Римана с логарифмическими связностями ∇^Λ , имеющими заданную монодрию (2). Метод построения семейства $\mathcal{F}$ подробно изложен в работах А. А. Болибруха (см. [1], [3]). Здесь мы напомним только основные моменты построения.

Каждое расслоение F^Λ задается набором $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ допустимых матриц Λ_i (диагональных матриц с целочисленными элементами λ_i^j , образующими невозрастающую последовательность: $\lambda_i^j \geq \lambda_i^{j+1}$, $j = 1, \dots, p-1$) и имеет следующее координатное описание. Сфера покрывается набором $O_1, \dots, O_n$ малых окрестностей точек $a_1, \dots, a_n$ и набором $\{U_\alpha\}$, дополняющим набор $\{O_i\}$. Для каждого непустого пересечения $O_i \cap U_\alpha$ склеивающий коцикл $g_{i\alpha}(z)$ записывается в виде

$$g_{i\alpha}(z) = (z - a_i)^{\Lambda_i} (z - a_i)^{E_i} S_i^{-1},$$

где

$$E_i = \frac{1}{2\pi i} \ln(S_i^{-1} G_i S_i)$$

– верхнетреугольная матрица, собственные значения ρ_i^j которой удовлетворяют условию

$$0 \leq \operatorname{Re} \rho_i^j < 1, \quad j = 1, \dots, p, \quad (10)$$

а S_i – невырожденная постоянная матрица, приводящая матрицу монодромии G_i к верхнетреугольному виду.

Для непустых пересечений $O_i \cap U_\alpha \cap U_\beta$ коцикл $g_{i\beta}(z)$ является аналитическим продолжением коцикла $g_{i\alpha}(z)$ и $g_{\alpha\beta}(z) \equiv \text{const}$. Строго говоря, расслоение F^Λ зависит также от набора $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ матриц S_i , приводящих матрицы монодромии G_i к верхнетреугольному виду. Поэтому, учитывая эту зависимость, элементы семейства $\mathcal{F}$ следует обозначать $F^{\Lambda, S}$, но в дальнейшем нам понадобится лишь зависимость от набора Λ и под F^Λ будем подразумевать расслоение, построенное по данному набору Λ и некоторому набору S .

Связность ∇^Λ задается нулевыми в U_α формами ω^α и формами ω^{Λ_i} , имеющими в окрестностях O_i вид

$$\omega^{\Lambda_i} = (\Lambda_i + (z - a_i)^{\Lambda_i} E_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}) \frac{dz}{z - a_i} \quad (11)$$

(из определения допустимой матрицы Λ_i и верхнетреугольности матрицы E_i следует, что $z = a_i$ – полюс первого порядка формы ω^{Λ_i}). Нетрудно проверить, что на непустых пересечениях $O_i \cap U_\alpha$ и $U_\alpha \cap U_\beta$ формы ω^{Λ_i} , ω^α и $\omega^\alpha, \omega^\beta$ удовлетворяют условиям склейки (4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Собственные значения $\beta_i^j = \lambda_i^j + \rho_i^j$ матрицы $\Lambda_i + E_i$ называются *показателями связности* ∇^Λ в точке $z = a_i$.

Из вида (11) формы связности ω^{Λ_i} следует, что показатели в фуксовой точке $z = a_i$ – это собственные значения матрицы-вычета $\text{res}_{a_i} \omega^{\Lambda_i}$.

Как уже было отмечено во введении, логарифмическая связность в тривиальном расслоении задает фуксову систему (3). В голоморфном же расслоении F^Λ с типом расщепления $(k_1, \dots, k_p)$, рассматриваемом в эквивалентном координатном описании

$$(U_1 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1\}, g_{1\infty} = (z - a_1)^K), \quad K = \text{diag}(k_1, \dots, k_p),$$

логарифмическая связность ∇^Λ задает систему (3), фуксову во всех особых точках, кроме одной ($z = a_1$), в которой она регулярна, и фундаментальная матрица $Y_1(z)$ в окрестности этой точки имеет вид

$$Y_1(z) = (z - a_1)^{-K} V_1(z) (z - a_1)^{\Lambda_1} (z - a_1)^{E_1}, \quad (12)$$

где $V_1(z)$ – голоморфно обратимая в окрестности точки a_1 матрица. В окрестностях же остальных (фуксовых) особых точек a_i существуют фундаментальные матрицы $Y_i(z)$ вида

$$Y_i(z) = V_i(z) (z - a_i)^{\Lambda_i} (z - a_i)^{E_i}, \quad (13)$$

где $V_i(z)$ – голоморфно обратимая в окрестности точки a_i матрица (подробнее об этом см. в [1], [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Степенью $\deg F^\Lambda$ расслоения F^Λ называется число

$$\deg F^\Lambda = \sum_{i=1}^n \text{res}_{a_i} \text{tr} \omega^{\Lambda_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j.$$

Степень расслоения является целым числом, равным сумме коэффициентов k_i типа расщепления этого расслоения. Это можно показать следующим образом. Рассмотрим систему (3) с формой $\omega = B(z) dz$, соответствующую связности ∇^Λ . Из вида (12), (13) фундаментальной матрицы $Y_1(z)$ и остальных фундаментальных матриц $Y_i(z)$ этой системы, а также из формулы Лиувилля $d \ln \det Y_i(z) = \text{tr} \omega$ следует, что

$$\begin{aligned} \text{res}_{a_1} \text{tr} \omega &= \text{res}_{a_1} \left(-\frac{\text{tr} K}{z - a_1} dz + \frac{d \det V_1}{\det V_1} + \frac{\text{tr}(\Lambda_1 + E_1)}{z - a_1} dz \right) \\ &= -\text{tr} K + \text{tr}(\Lambda_1 + E_1), \\ \text{res}_{a_i} \text{tr} \omega &= \text{res}_{a_i} \left(\frac{d \det V_i}{\det V_i} + \frac{\text{tr}(\Lambda_i + E_i)}{z - a_i} dz \right) = \text{tr}(\Lambda_i + E_i) \end{aligned}$$

(дифференциальные формы $d \det V_i / \det V_i$ голоморфны в соответствующих точках a_i). По теореме о сумме вычетов имеем

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{a_i} \operatorname{tr} \omega = 0,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\Lambda_i + E_i) - \operatorname{tr} K = 0$$

и

$$\deg F^\Lambda = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\Lambda_i + E_i) = \operatorname{tr} K.$$

А. А. Болибрухом было показано, что для типа расщепления расслоения $F^\Lambda \in \mathcal{F}$, построенного по неприводимому представлению (2), имеют место неравенства

$$k_i - k_{i+1} \leq n - 2, \quad i = 1, \dots, p - 1$$

(см. [1], [3]). На основе этого мы докажем следующее предложение, из которого будет следовать теорема 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рассмотрим расслоение $F^\Lambda \in \mathcal{F}$ с логарифмической связностью ∇^Λ , показатели которой удовлетворяют условию $0 \leq \operatorname{Re} \beta_i^j < M$, $M \in \mathbb{N}$. Для типа расщепления этого расслоения имеют место следующие неравенства:*

$$k_i - k_{i+1} \leq nM - 1, \quad i = 1, \dots, p - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отдельно рассмотрим два случая.

Случай 1. Для типа расщепления расслоения F^Λ выполнены неравенства

$$k_i - k_{i+1} \leq n - 2, \quad i = 1, \dots, p - 1.$$

Поскольку $M \in \mathbb{N}$, утверждение в этом случае прямо следует из предположения.

Случай 2. Для некоторого l имеет место неравенство $k_l - k_{l+1} \geq n - 1$. В этом случае покажем, что $k_l - k_{l+1} \leq nM - 1$.

Сначала покажем, что у расслоения F^Λ есть подрасслоение F^1 ранга l , которое стабилизируется связностью ∇^Λ и имеет тип расщепления $(k_1, \dots, k_l)$. В терминах координатного описания пары $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ существование такого подрасслоения означает, что коциклы g_{ij} и формы ω_i имеют блочно-верхнетреугольный вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij}^1 & * \\ 0 & g_{ij}^2 \end{pmatrix}, \quad \omega_i = \begin{pmatrix} \omega_i^1 & * \\ 0 & \omega_i^2 \end{pmatrix},$$

где размеры всех блоков g_{ij}^1 и ω_i^1 равны $l \times l$. В таком случае формы ω_i^1 определяют ограничение ∇^1 связности ∇^Λ на подрасслоение F^1 .

Рассмотрим систему (3) с регулярной особой точкой a_1 и фуксовыми особенностями $a_2, \dots, a_n$, соответствующую связности ∇^Λ . Форма $\omega' = B(z) dz$ коэффициентов этой системы имеет простые полюсы в $O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1\}$, а в окрестности O_1 точки a_1 имеет вид

$$\omega' = (dY_1)Y_1^{-1} = -\frac{K}{z-a_1} dz + (z-a_1)^{-K} \omega (z-a_1)^K, \quad (14)$$

где форма ω имеет логарифмическую особенность в точке a_1 . Это следует из вида (12) фундаментальной матрицы данной системы в окрестности точки $z = a_1$:

$$Y_1(z) = (z-a_1)^{-K} V_1(z) (z-a_1)^{\Lambda_1} (z-a_1)^{E_1}.$$

Напомним, что матрица $V_1(z)$ голоморфно обратима в точке a_1 и набор диагональных элементов матрицы K совпадает с типом расщепления расслоения F^Λ .

Вследствие (14) элементы ω'_{mj} и ω_{mj} матричных дифференциальных 1-форм ω' и ω при $m \neq j$ связаны соотношением

$$\omega'_{mj} = (z-a_1)^{-k_m+k_j} \omega_{mj},$$

$\text{ord}_{a_1} \omega_{mj} \geq -1$. По предположению $k_l - k_{l+1} > n - 2$ для некоторого l , следовательно, для $j \leq l$, $m > l$ имеем $k_j - k_m > n - 2$. Поэтому порядки $\text{ord}_{a_1} \omega'_{mj}$ дифференциальных форм ω'_{mj} с указанными индексами в точке a_1 больше числа $n - 3$, в то время как сумма порядков $\text{ord}_{a_i} \omega'_{mj}$ в особых точках, отличных от a_1 , не меньше числа $-n+1$ (так как форма ω' имеет логарифмические особенности в этих точках). Окончательно получаем, что для мероморфных на сфере Римана форм ω'_{mj} с указанными индексами сумма их порядков по всем особым точкам и нулям больше -2 , хотя известно, что эта сумма для ненулевой дифференциальной формы (степень канонического дивизора) должна быть равна -2 (см. [6; § 17]). Значит, эти формы тождественно равны нулю (так же как и формы ω_{mj}), и, стало быть, формы ω' и ω имеют блочно-верхнетреугольный вид:

$$\omega' = \begin{pmatrix} \omega^1 & * \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_0^1 & * \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где размеры матричных форм ω^1 и ω_0^1 равны $l \times l$ и эти формы удовлетворяют (вследствие (14)) условию склейки

$$\omega^1 = -\frac{K^1}{z-a_1} dz + (z-a_1)^{-K^1} \omega_0^1 (z-a_1)^{K^1}, \quad (16)$$

где $K^1 = \text{diag}(k_1, \dots, k_l)$.

Таким образом, векторное расслоение F^Λ имеет эквивалентное координатное описание

$$(O_1, O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1\}, g_{1\infty} = (z-a_1)^K), \quad K = \text{diag}(k_1, \dots, k_p),$$

а логарифмическая связность ∇^Λ в окрестностях O_1, O_∞ задается формами ω, ω' вида (15), удовлетворяющими условию склейки (14). Следовательно, у расслоения F^Λ есть подрасслоение F^1 ранга l со связностью ∇^1 , определяемой

в окрестностях O_1, O_∞ формами ω_0^1, ω^1 , удовлетворяющими условию склейки (16). Согласно построению связность ∇^Λ стабилизирует подрасслоение F^1 и совпадает на нем со связностью ∇^1 , а тип расщепления подрасслоения F^1 равен $(k_1, \dots, k_l)$.

Допустим, что $k_l - k_{l+1} \geq nM$. Тогда для среднего арифметического показателей $^1\beta_i^j$ связности ∇^1 (собственных значений матриц $\text{res}_{a_1} \omega_0^1$ и $\text{res}_{a_i} \omega^1$) подрасслоения F^1 справедлива нижняя оценка

$$\frac{1}{ln} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l {}^1\beta_i^j = \frac{\deg F^1}{ln} = \frac{k_1 + \dots + k_l}{ln} \geq \frac{k_{l+1}}{n} + M,$$

а для среднего арифметического остальных показателей $^2\beta_i^j$ (собственных значений матриц $\text{res}_{a_1} \omega_0^2$ и $\text{res}_{a_i} \omega^2$) выполняется оценка сверху

$$\frac{1}{(p-l)n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p-l} {}^2\beta_i^j = \frac{\deg F - \deg F^1}{(p-l)n} = \frac{k_{l+1} + \dots + k_p}{(p-l)n} \leq \frac{k_{l+1}}{n}.$$

Из этого следует, что среднее значение показателей $^1\beta_i^j$ должно быть больше среднего значения показателей $^2\beta_i^j$ как минимум на M , но по условию предложения действительные части всех показателей связности ∇^Λ строго меньше M . Получаем противоречие. Следовательно, $k_l - k_{l+1} \leq nM - 1$ для любого l . Предложение 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно рассмотреть каноническое расслоение F^0 , построенное по набору $\Lambda = \{0, \dots, 0\}$ нулевых матриц. В этом случае показатели β_i^j связности ∇^0 вследствие (10) удовлетворяют условию

$$0 \leq \text{Re } \beta_i^j = \text{Re } \rho_i^j < 1.$$

Тогда из предложения 1 следует, что для коэффициентов k_i^0 типа расщепления расслоения F^0 выполняются неравенства

$$k_i^0 - k_{i+1}^0 \leq n - 1, \quad i = 1, \dots, p - 1.$$

Поэтому

$$\tilde{\gamma}_{\min}(\chi) = \min_{F^\Lambda} (k_1 - k_p) \leq k_1^0 - k_p^0 = \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^0 - k_{i+1}^0) \leq (n-1)(p-1).$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Рассмотрим каноническое расслоение F^0 с логарифмической связностью ∇^0 , построенное по представлению (2). Это расслоение имеет тип расщепления $(k_1^0, \dots, k_p^0)$, причем $k_1^0 - k_p^0 \leq (n-1)(p-1)$ (см. доказательство теоремы 1). Связности ∇^0 соответствует система (3) с регулярной особой точкой a_1 и фуксовыми особенностями $a_2, \dots, a_n$, имеющая заданную монодромию (2). Для того чтобы оценить ранг Пуанкаре r_1 в особой точке a_1 , вспомним, что форма $\omega' = B(z) dz$ коэффициентов этой системы в окрестности точки a_1 имеет вид (14):

$$\omega' = -\frac{K^0}{z - a_1} dz + (z - a_1)^{-K^0} \omega(z - a_1)^{K^0},$$

где $K^0 = \text{diag}(k_1^0, \dots, k_p^0)$ и форма ω имеет простой полюс в точке a_1 . Поэтому порядок полюса элементов матричной формы ω' в этой точке не превосходит величины $k_1^0 - k_p^0 + 1$, следовательно, $r_1 \leq k_1^0 - k_p^0 \leq (n-1)(p-1)$. Следствие 1 доказано.

Отметим, что в случае размерности $p = 3$ (минимальная размерность, в которой появляется контрпример к проблеме Римана–Гильберта) имеется более точная оценка ранга Пуанкаре r_1 регулярной особой точки системы, построенной по представлению (2):

$$r_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1,$$

где $[x]$ – целая часть числа x [2; следствие 2.3.3]. При этом в размерности $p = 3$ существуют такие представления, по которым нельзя построить аналогичную систему с меньшим рангом Пуанкаре r_1 (см. [2; предложение 2.2.4, доказательство теоремы 2.3.3, следствие 2.3.2]), т.е. не являющаяся точной оценка из следствия 1 все же имеет смысл (есть представления (2), по которым нельзя построить систему (3) с регулярными особенностями и маленьким рангом Пуанкаре в единственной нефуксовой особой точке).

§ 4. Дополнительные особенности фуксова уравнения

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений F^Λ с логарифмическими связностями ∇^Λ , построенное по представлению (2). Фуксовым весом расслоения $F^\Lambda \in \mathcal{F}$ называется величина

$$\gamma(F^\Lambda) = \sum_{i=1}^p (k_1 - k_i),$$

где $(k_1, \dots, k_p)$ – тип расщепления расслоения F^Λ .

Функция $\gamma: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ограничена в том и только том случае, если представление (2) неприводимо [2; теорема 4.2.1]. При этом для типа расщепления любого расслоения $F^\Lambda \in \mathcal{F}$, построенного по неприводимому представлению, имеют место неравенства

$$k_i - k_{i+1} \leq n - 2, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

и для такого представления определена величина

$$\gamma_{\max}(\chi) = \max_{F^\Lambda \in \mathcal{F}} \gamma(F^\Lambda) \leq \frac{(n-2)p(p-1)}{2},$$

называемая *максимальным фуксовым весом* неприводимого представления χ .

Минимально возможное число m_0 дополнительных ложных особых точек, возникающих при построении фуксова уравнения (1) по неприводимому представлению (2), выражается формулой [2; теорема 4.4.1]

$$m_0 = \frac{(n-2)p(p-1)}{2} - \gamma_{\max}(\chi). \quad (17)$$

Ранее этот вопрос также изучался в работе [7], где была получена верхняя оценка величины m_0 в случае, когда представление монодромии неприводимо и одна из матриц монодромии G_i диагонализирована (в указанной работе уравнения рассматривались на компактной римановой поверхности произвольного рода).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из теоремы Племеля следует (см. также [1]), что всякое представление (2) может быть реализовано фуксовой системой с одной дополнительной ложной особенностью. Скажем об этом несколько подробнее.

Рассмотрим некоторое голоморфное векторное расслоение F^Λ с логарифмической связностью ∇^Λ , построенное по представлению χ^* , полученному из представления (2) добавлением дополнительной особой точки a_{n+1} с единичной матрицей монодромии.

Связности ∇^Λ соответствует система (3) с фуксовыми особенностями $a_1, \dots, a_n$ и регулярной особой точкой a_{n+1} , имеющая заданную монодромию χ^* . В окрестности точки $z = a_{n+1}$ фундаментальная матрица $Y(z)$ этой системы имеет вид (12):

$$Y(z) = (z - a_{n+1})^{-K} V(z) (z - a_{n+1})^{\Lambda_{n+1}},$$

где K – диагональная целочисленная матрица, $V(z)$ – голоморфно обратимая в этой окрестности матрица ($E_{n+1} = 0$, поскольку $G_{n+1} = I$).

Согласно лемме Болибруха о перестановке [2; лемма 4.1.3] найдутся голоморфно обратимая вне точки a_{n+1} матрица $\Gamma(z)$ и голоморфно обратимая в окрестности точки a_{n+1} матрица $U(z)$ такие, что

$$\Gamma(z)(z - a_{n+1})^{-K} V(z) = U(z)(z - a_{n+1})^{\tilde{K}},$$

где $\tilde{K}$ – диагональная целочисленная матрица и ее элементы являются некоторой перестановкой диагональных элементов матрицы $-K$. Тогда преобразование $y' = \Gamma(z)y$ переводит указанную систему в систему, для которой особенности $a_1, \dots, a_n$ будут по-прежнему фуксовыми (матрица $\Gamma(z)$ голоморфно обратима возле этих точек), а в окрестности точки $z = a_{n+1}$ ее фундаментальная матрица $Y'(z) = \Gamma(z)Y(z)$ имеет вид

$$Y'(z) = U(z)(z - a_{n+1})^{\tilde{K}} (z - a_{n+1})^{\Lambda_{n+1}} = U(z)(z - a_{n+1})^{\tilde{K} + \Lambda_{n+1}}.$$

Таким образом, для преобразованной системы точка a_{n+1} также является фуксовой, поскольку матрица коэффициентов

$$B'(z) = \frac{dY'}{dz} Y'^{-1} = \frac{dU}{dz} U^{-1} + U \frac{\tilde{K} + \Lambda_{n+1}}{z - a_{n+1}} U^{-1}$$

имеет простой полюс в этой точке. При этом все решения построенной системы в окрестности точки $z = a_{n+1}$ – однозначные мероморфные функции, а сумма R рангов Пуанкаре особых точек равна нулю.

Теперь, воспользовавшись леммой 2, построим фуксово дифференциальное уравнение с монодромией χ^* , число m дополнительных ложных особых точек

которого удовлетворяет неравенству

$$m \leq \frac{(n+1)p(p-1)}{2}.$$

Учитывая, что точка $z = a_{n+1}$ также является дополнительной ложной особенностью построенного уравнения по отношению к изначально заданным особым точкам $a_1, \dots, a_n$, получаем требуемую оценку. (В определении дополнительной ложной особенности требовалось, чтобы решения уравнения в ее окрестности были однозначными голоморфными функциями, а у нас они пока только мероморфны. Но сделав преобразование $y' = (z - a_{n+1})^N y$ неизвестной функции $y(z)$, где N – порядок наибольшего полюса решений построенного уравнения в точке a_{n+1} , получим фуксово уравнение с теми же особенностями и монодромией, решения которого будут уже голоморфны в окрестности точки $z = a_{n+1}$.) Теорема 2 доказана.

В случае такого представления (2), для которого проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение, оценка из доказанной выше теоремы 2 естественным образом улучшается и принимает вид $m \leq np(p-1)/2$ (поскольку представление реализуется фуксовой системой с заданными особенностями $a_1, \dots, a_n$). В частности, последняя оценка может быть получена для неприводимого представления χ , что хуже соотношения (17). Поэтому в строгом смысле теорема 2 не может быть названа обобщением соотношения (17) на случай произвольного представления, но является некоторым дополнением данного соотношения.

§ 5. Мероморфное приведение линейной системы

Задача о преобразовании системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности *иррегулярной* особой точки (т.е. особой точки, не являющейся регулярной) к биркгофовой стандартной форме состоит в следующем (особая точка обычно помещается в бесконечность).

Рассмотрим систему

$$z \frac{dy}{dz} = C(z)y, \quad C(z) = \sum_{n=-\infty}^r C_n z^n, \quad (18)$$

из p линейных дифференциальных уравнений в некоторой окрестности $O_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ иррегулярной особой точки ∞ ранга Пуанкаре r ($C_r \neq 0$).

Линейное преобразование

$$\tilde{y} = \Gamma(z)y \quad (19)$$

переводит систему (18) в систему

$$z \frac{d\tilde{y}}{dz} = \tilde{C}(z)\tilde{y}, \quad \tilde{C}(z) = z \frac{d\Gamma}{dz} \Gamma^{-1} + \Gamma C(z) \Gamma^{-1}. \quad (20)$$

Преобразование (19) выбирается либо *аналитическим* (матрица $\Gamma(z)$ голоморфно обратима в O_∞) и тогда говорят об *аналитической эквивалентности* систем (18) и (20), либо *мероморфным* (матрица $\Gamma(z)$ мероморфно обратима

в O_∞) и тогда говорят о *мероморфной эквивалентности* этих систем. Аналитическое преобразование не изменяет ранг Пуанкаре исходной системы, в то время как мероморфное преобразование может и повысить, и понизить ранг Пуанкаре.

Если матрица $\tilde{C}(z)$ коэффициентов преобразованной системы (20) имеет полиномиальный вид

$$\tilde{C}(z) = \tilde{C}_{r'} z^{r'} + \dots + \tilde{C}_0, \quad \tilde{C}_{r'} \neq 0, \quad (21)$$

и $r' \leq r$, то говорят, что система (20), (21) является *биркгофовой стандартной формой* исходной системы (18).

Аналитическое преобразование линейной системы к биркгофовой стандартной форме возможно не всегда. Контрпример был найден Ф. Гантмахером (см. [8]).

Система (18) называется *приводимой*, если с помощью преобразования (19) она может быть переведена в систему (20) с матрицей коэффициентов $\tilde{C}(z)$ блочно-верхнетреугольного вида

$$\tilde{C}(z) = \begin{pmatrix} C' & * \\ 0 & C'' \end{pmatrix} \quad (22)$$

(независимо от того, является преобразование аналитическим или мероморфным, можно показать, что если система (18) мероморфным преобразованием приводится к виду (22), то она приводится и аналитическим преобразованием к такому же блочно-верхнетреугольному виду). В противном случае система (18) называется *неприводимой*.

Одно из основных достаточных условий приведения линейной системы к биркгофовой стандартной форме с помощью аналитического преобразования было получено А. А. Болибрухом и состоит в следующем: *если система (18) неприводима, то она может быть аналитически преобразована к биркгофовой стандартной форме* (см. [2], [1], [3]).

Вопрос о возможности мероморфного преобразования линейной системы к биркгофовой стандартной форме до сих пор не решен. Известно, что ответ на этот вопрос положителен в размерностях $p = 2$ и $p = 3$, известны также различные достаточные условия положительного решения для произвольной размерности p (подробнее об этом можно узнать из обзорной статьи В. Бальзера [9]).

Система (18) с помощью мероморфного преобразования (19) всегда может быть приведена к полиномиальному виду (20), (21), но с большим рангом Пуанкаре r' . В этом параграфе мы получим некоторую оценку величины r' . Будем рассматривать только приводимые системы (поскольку неприводимая система всегда может быть аналитически преобразована к биркгофовой стандартной форме).

Можно считать, что матрица $C(z)$ коэффициентов системы (18) имеет блочно-верхнетреугольный вид

$$C(z) = \begin{pmatrix} C^1(z) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & C^m(z) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $C^1, \dots, C^m$ – неприводимые блоки размеров $p_1, \dots, p_m$ соответственно, $2 \leq m \leq p$. Согласно [10] такая система имеет *формальную фундаментальную матрицу* $\hat{Y}(z)$ вида

$$\hat{Y}(z) = \hat{F}(z) z^L e^{Q(z)}, \quad (24)$$

где $\hat{F}(z)$ – формальный (матричный) ряд Лорана (по $1/z$) с конечной главной частью, имеющий блочно-верхнетреугольный вид (23), и $\det \hat{F}(z)$ отличен от тождественно нулевого ряда; L – постоянная матрица блочно-верхнетреугольного вида (23) и действительные части собственных значений матрицы L лежат в полуинтервале $[0, 1)$; $Q(z)$ – диагональная матрица, на диагонали у которой расположены многочлены от $z^{1/s}$ (для некоторого натурального s) степени не выше r (по z).

Матрица $\hat{Y}(z)$ при формальной подстановке в систему (18) превращает ее в верное тождество (хотя ряд $\hat{F}(z)$ может иметь нулевое кольцо сходимости).

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующее утверждение технического характера.

ЛЕММА 3. Система (18), (23) с помощью мероморфного преобразования (19) может быть переведена в систему (20) такого же блочно-верхнетреугольного вида с рангом Пуанкаре не выше r и формальной фундаментальной матрицей (24), где место формального ряда Лорана $\hat{F}(z)$ занимает

$$\widehat{W}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n z^{-n}$$

– обратимый (т.е. $\det W_0 \neq 0$) формальный ряд Тейлора по $1/z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из аналога леммы Соважа (см. [11]) для случая формальных рядов следует соотношение

$$U(z) \hat{F}(z) = z^D \widehat{W}(z),$$

где $U(z)$ – верхнетреугольный (матричный) многочлен от z и $1/z$ ($\det U(z) \equiv 1$), D – диагональная целочисленная матрица, $\widehat{W}(z)$ – обратимый формальный (матричный) ряд Тейлора по $1/z$ (имеющий блочно-верхнетреугольный вид (23), поскольку $\widehat{W}(z) = z^{-D} U(z) \hat{F}(z)$). Искомое мероморфное преобразование задается верхнетреугольной матрицей $\Gamma(z) = z^{-D} U(z)$.

Ранг Пуанкаре преобразованной системы равен рангу Пуанкаре системы с фундаментальной матрицей $Y(z) = z^L e^{Q(z)}$ (поскольку формальное аналитическое преобразование $\tilde{y} = \widehat{W}^{-1}(z)y$ не меняет ранг Пуанкаре) и матрицей коэффициентов

$$C'(z) = z \frac{dY}{dz} Y^{-1} = z \frac{d}{dz} (z^L e^{Q(z)}) e^{-Q(z)} z^{-L} = L + z^L \left(z \frac{dQ}{dz} \right) z^{-L}.$$

Степень многочлена $z dQ/dz$ (вообще говоря, дробная) не превосходит r , а действительные части собственных значений матрицы L расположены в полуинтервале $[0, 1)$, поэтому старшая степень в разложении матрицы $C'(z)$ строго меньше $r + 1$. Но поскольку $C'(z)$ содержит только целые степени z , то эта степень не превосходит r . Лемма 3 доказана.

Задача приведения линейной системы к биркгофовой стандартной форме, так же как и проблема Римана–Гильберта, может быть исследована с помощью теории голоморфных векторных расслоений со связностями (см. [1], [3]). Мы применим основные методы указанных работ для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Система (18), (23) с помощью мероморфного преобразования (19) может быть переведена в систему (20) с матрицей коэффициентов $\tilde{C}(z)$ полиномиального вида (21), где

$$r' \leq 1 + r \max_{1 \leq j \leq m} p_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (18), имеющую такой же блочно-верхнетреугольный вид, как и матрица (23) коэффициентов системы. Тогда

$$Y(z) = T(z)z^E,$$

где

$$T(z) = \begin{pmatrix} T^1(z) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & T^m(z) \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2\pi i} \ln G = \begin{pmatrix} E^1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & E^m \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Матрица $T(z)$ однозначна и голоморфно обратима в $O_\infty \setminus \{\infty\}$, G – матрица монодромии системы (18) (в базисе из столбцов матрицы $Y(z)$), и собственные значения ρ^j матрицы E удовлетворяют условию

$$0 \leq \operatorname{Re} \rho^j < 1, \quad j = 1, \dots, p.$$

По системе (18) построим на сфере Римана голоморфное векторное расслоение F , имеющее координатное описание $F = (O_\infty, O_0 = \mathbb{C}, g_{\infty 0} = T(z))$. Матричные дифференциальные 1-формы

$$\omega_0 = \frac{E}{z} dz, \quad \omega_\infty = \frac{C(z)}{z} dz,$$

определенные в окрестностях O_0 и O_∞ соответственно, задают связность ∇ в расслоении F , поскольку в пересечении $O_0 \cap O_\infty = O_\infty \setminus \{\infty\}$ они удовлетворяют условию склейки (4):

$$\omega_\infty = \frac{C(z)}{z} dz = (dY)Y^{-1} = (dT)T^{-1} + T\left(\frac{E}{z} dz\right)T^{-1} = (dg_{\infty 0})g_{\infty 0}^{-1} + g_{\infty 0}\omega_0 g_{\infty 0}^{-1}.$$

Из вида (25) коцикла $g_{\infty 0}(z) = T(z)$ следует, что у расслоения F есть семейство подрасслоений $0 = F^0 \subset F^1 \subset \dots \subset F^m = F$,

$$F^j/F^{j-1} = (O_\infty, O_0 = \mathbb{C}, g_{\infty 0}^j = T^j(z)), \quad j = 1, \dots, m.$$

Матричные дифференциальные 1-формы $\omega_0^j = (E^j/z) dz$ и $\omega_\infty^j = (C^j(z)/z) dz$, определенные в окрестностях O_0 и O_∞ соответственно, задают связность ∇^j

в факторрасслоении F^j/F^{j-1} , построенном по неприводимой системе $z dy/dz = C^j(z)y$ размера p_j . Для типа расщепления $(k_1^j, \dots, k_{p_j}^j)$ этого расслоения выполняются неравенства ([2; предложение 4.5.1], см. также [1], [3])

$$0 \leq k_i^j - k_{i+1}^j \leq r, \quad i = 1, \dots, p_j - 1. \quad (26)$$

Ввиду леммы 3 можно считать, что формальная фундаментальная матрица $\hat{Y}(z)$ системы (18), (23) имеет вид

$$\hat{Y}(z) = \widehat{W}(z) z^L e^{Q(z)},$$

где $\widehat{W}(z)$ – обратимый (матричный) формальный ряд Тейлора (по $1/z$) блочно-верхнетреугольного вида (23), а матрицы L и $Q(z) = \text{diag}(Q^1(z), \dots, Q^m(z))$ – такие же, как в (24). Поэтому формальные фундаментальные матрицы $\hat{Y}^j(z)$ систем $z dy/dz = C^j(z)y$ могут быть представлены в виде

$$\hat{Y}^j(z) = \widehat{W}^j(z) z^{L^j} e^{Q^j(z)}, \quad j = 1, \dots, m$$

(через $\widehat{W}^j(z)$ и L^j мы обозначили диагональные блоки матриц $\widehat{W}(z)$ и L соответственно).

Далее, из формулы Лиувилля $d \ln \det \hat{Y}^j(z) = \text{tr } \omega_\infty^j$ вытекает соотношение

$$\text{res}_\infty \text{tr } \omega_\infty^j = \text{res}_\infty \left(\frac{d \det \widehat{W}^j}{\det \widehat{W}^j} + \frac{\text{tr } L^j}{z} dz + d \text{tr } Q^j \right) = -\text{tr } L^j.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{p_j} k_i^j = \deg F^j/F^{j-1} = \text{res}_0 \text{tr } \omega_0^j + \text{res}_\infty \text{tr } \omega_\infty^j = \text{tr } E^j - \text{tr } L^j,$$

и поскольку действительные части собственных значений матриц E^j и L^j лежат в полуинтервале $[0, 1)$, то

$$-p_j < \sum_{i=1}^{p_j} k_i^j < p_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Неравенства (26) и (27) влекут за собой неравенства

$$-\frac{p_j - 1}{2} r - 1 < k_{p_j}^j \leq \dots \leq k_1^j < \frac{p_j - 1}{2} r + 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Таким образом, для коэффициентов k_i^j типа расщепления любого из расслоений F^j/F^{j-1} получена общая оценка

$$|k_i^j| < 1 + \frac{r}{2} \left(\max_{1 \leq j \leq m} p_j - 1 \right). \quad (28)$$

Согласно определению эквивалентности векторных расслоений для коцикла $g_\infty^j(z)$ расслоения F^j/F^{j-1} выполнено матричное соотношение

$$H_\infty^j(z) g_\infty^j(z) = z^{-K_j} H_0^j(z), \quad j = 1, \dots, m,$$

где $K_j = \text{diag}(k_1^j, \dots, k_{p_j}^j)$, а матрицы H_∞^j и H_0^j голоморфно обратимы соответственно в O_∞ и O_0 . Поэтому, обозначив через $H_\infty(z)$ блочно-диагональную матрицу $H_\infty = \text{diag}(H_\infty^1, \dots, H_\infty^m)$, получим соотношение

$$H_\infty g_{\infty 0} = \begin{pmatrix} z^{-K_1} H_0^1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & z^{-K_m} H_0^m \end{pmatrix} = z^{-K} g'_{\infty 0}, \quad (29)$$

где $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_m)$, $g'_{\infty 0}(z)$ – голоморфно обратимый в $O_\infty \setminus \{\infty\}$ коцикл, эквивалентный единичному. Последнее означает, что матрица $g'_{\infty 0}$ может быть преобразована в единичную с помощью домножения слева на голоморфно обратимую в O_∞ матрицу и справа на голоморфно обратимую в O_0 матрицу. Это можно показать следующим образом.

Обозначим через $H_0(z)$ блочно-диагональную матрицу

$$H_0 = \text{diag}(H_0^1, \dots, H_0^m).$$

Тогда

$$g'_{\infty 0} H_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь на примере матрицы размера $p = 2$ покажем, что верхнетреугольный коцикл

$$\tilde{g}_{\infty 0}(z) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

эквивалентен единичному. Голоморфная в $O_\infty \cap O_0$ функция $a(z)$ может быть представлена в виде суммы $a(z) = a^-(z) + a^+(z)$ голоморфной в O_∞ функции $a^-(z)$ и голоморфной в O_0 функции $a^+(z)$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & -a^- \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае же верхнетреугольного с единицами на диагонали коцикла $\tilde{g}_{\infty 0}(z)$ произвольного размера p нужно, действуя аналогично, домножением слева на верхнетреугольные с единицами на диагонали голоморфные в O_∞ матрицы и справа на верхнетреугольные с единицами на диагонали голоморфные в O_0 матрицы последовательно превращать каждый столбец матрицы $\tilde{g}_{\infty 0}$ в соответствующий столбец единичной матрицы.

Итак, для коцикла $g'_{\infty 0}(z)$ получено разложение

$$g'_{\infty 0}(z) = G_\infty(z) G_0(z),$$

где G_∞ и G_0 – матрицы блочно-верхнетреугольного вида (23), голоморфно обратимые соответственно в O_∞ и O_0 . Поэтому вследствие (29)

$$G_\infty^{-1} z^K H_\infty g_{\infty 0} = G_0.$$

Последнее матричное соотношение означает, что существует линейная система

$$z \frac{dy}{dz} = C'(z)y, \quad (30)$$

заданная на всей сфере Римана и имеющая две особые точки: 0 и ∞ . При этом данная система аналитически эквивалентна в $O_0 = \mathbb{C}$ системе $dy = \omega_0 y$ (т.е. 0 – фуксова особая точка системы (30), поэтому матрица $C'(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$) и мероморфно эквивалентна в O_∞ системе $dy = \omega_\infty y$, т.е. исходной системе (18). Мероморфная эквивалентность в O_∞ задается линейным преобразованием с матрицей $\Gamma(z) = G_\infty^{-1} z^K H_\infty$, т.е. композицией трех преобразований, из которых первое и третье не меняет ранг Пуанкаре в ∞ . Таким образом, ранг Пуанкаре r' системы (30) в ∞ равен рангу Пуанкаре системы, полученной из системы (18) с помощью линейного преобразования с матрицей $\Gamma_2(z) = z^K$. Матрица $C'''(z)$ коэффициентов такой системы имеет вид

$$C''(z) = K + z^K C(z) z^{-K},$$

поэтому $r' = r + \max_{i,j} |k_i - k_j|$ (где k_i обозначают диагональные элементы матрицы K). Согласно оценке (28)

$$|k_i - k_j| \leq 1 + r \left(\max_{1 \leq j \leq m} p_j - 1 \right),$$

следовательно, матрица $C''(z)$ является многочленом степени

$$r' \leq 1 + r \max_{1 \leq j \leq m} p_j.$$

Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2 (А. Д. Брюно [12]). Система (18) с верхнетреугольной матрицей коэффициентов мероморфным преобразованием (19) может быть приведена к биркгофовой стандартной форме также верхнетреугольного вида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку матрица $C(z)$ коэффициентов системы (18) верхнетреугольна, то $\max_{1 \leq j \leq m} p_j = 1$ и из оценки (28) следует, что матрица K (из предыдущей теоремы) нулевая. Таким образом, приведение верхнетреугольной системы (18) к полиномиальному виду (21) осуществляется с помощью мероморфного преобразования (19) с верхнетреугольной матрицей $\Gamma(z) = G_\infty^{-1} H_\infty \Gamma_1$, не повышающего ранг Пуанкаре (Γ_1 – верхнетреугольная матрица из леммы 3, H_∞ – диагональная, G_∞ – верхнетреугольная матрицы из предыдущей теоремы). Следствие 2 доказано.

Список литературы

- [1] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000.
- [2] А. А. Болибрух, *21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем*, Тр. МИАН, **206**, Наука, М., 1994.
- [3] А. А. Болибрух, “Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами”, *Современные проблемы математики*, **1**, МИАН, М., 2003, 29–82.

- [4] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math., **163**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [5] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980.
- [7] M. Ohtsuki, “On the number of apparent singularities of a linear differential equation”, *Tokyo J. Math.*, **5**:1 (1982), 23–29.
- [8] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [9] В. Бальзер, “Проблема приведения Биркгофа”, *УМН*, **59**:6 (2004), 41–54.
- [10] W. Balser, A. Bolibruch, “Transformation of reducible equations to Birkhoff standard form”, *Ulmer Seminare – Funktionalanalysis und Differentialgleichungen*, **2** (1997), 73–81; <http://cantor.mathematik.uni-ulm.de/m5/balser/papers/baboli.pdf>.
- [11] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [12] А. Д. Брюно, “Мероморфная приводимость линейной треугольной системы ОДУ”, *Докл. РАН*, **371**:5 (2000), 587–590.

И. В. Вьюгин (I. V. Vyugin)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ilya_vyugin@mail.ru

Поступила в редакцию

27.09.2005

Р. Р. Гонцов (R. R. Gontsov)

Московский энергетический институт

E-mail: rgontsov@inbox.ru