Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Тужилин, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 4, 117–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:25:11

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

А. А. Тужилин

Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами

Работа продолжает исследование локально минимальных бинарных деревьев, затагивающих вершины правильных многоугольников. Развитая техника позволила существенно продвинуться в решении этой задачи.

Библиография: 45 названий.

Введение

Настоящая статья посвящена изучению локально минимальных плоских бинарных деревьев, затагивающих вершины правильных многоугольников. Минимальные деревья появляются при решении знаменитой проблемы Штейнера: *среди всех сетей (одномерных континуумов), затагивающих данное конечное множество точек плоскости, найти сеть наименьшей длины*. Как было отмечено в историческом обзоре из [17], где цитировались [44] и [45], простейший вариант этой проблемы возник еще в работах Ферма, а в современном виде она была сформулирована Ярником и Кесслером [18]. Название “проблема Штейнера” укоренилось благодаря популярности замечательной книги Куранта и Роббинса “Что такое математика”, в которой эта проблема была названа в честь Якоба Штейнера, занимавшегося, вообще говоря, близкой, но другой задачей. Тем не менее, подавляющее большинство специалистов пользуется терминологией, связанной с именем Штейнера, поэтому, вопреки справедливости, нам придется подчиниться традиции, чтобы не вносить путаницу. Отметим, что книга Куранта и Роббинса “Что такое математика” породила огромный интерес к проблеме Штейнера, о чем свидетельствует далеко не полный список литературы, см. [1]–[43].

В предыдущих статьях [33]–[37] А. О. Иванов и А. А. Тужилин построили полное описание локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей и применили созданную теорию к случаю, когда граница – множество вершин правильного многоугольника (в дальнейшем называемая *правильной границей*). Оказалось, что правильность границы является очень сильным условием, существенно снижающим количество возможных минимальных сетей даже по сравнению со случаем выпуклых границ.

Чтобы сформулировать основной результат данной работы, дадим следующие определения. Пусть M – произвольное конечное подмножество точек плоскости, а

Работа выполнена при частичной поддержке Национального центра научных исследований Франции, Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Комитета по развитию науки, технологии и экономики (FAPESP, файл 93/0248-7) штата Сан-Пауло, Бразилия. Работа в рамках последнего гранта проходила в Математическом институте (IMECC) университета штата Сан-Пауло в Кампинасе (UNICAMP).

Γ – произвольный плоский граф (такие графы мы называем *сетями*). Мы говорим, что сеть Γ *затягивает* M , или M является *границей сети* Γ , если M – подмножество множества вершин из Γ . Сеть, имеющая наименьшую длину среди всех сетей, затягивающих фиксированное множество M , называется *абсолютно минимальной*, а сеть, каждый малый фрагмент которой – абсолютно минимальная сеть, называется *локально минимальной* (строгое определение локальной минимальности см. ниже). Ясно, что абсолютно минимальные сети являются также и локально минимальными.

Легко описать локальную структуру локально минимальных сетей (см. ниже). Оказывается, ребра таких сетей являются отрезками, а угол между каждой парой ребер–отрезков, выходящих из одной вершины, больше или равен 120° , в частности, степень каждой вершины локально минимальной сети не превосходит 3. Кроме того, каждая вершина степени 1 является граничной, и если граница локально минимальной сети выпукла (т.е. лежит на границе своей выпуклой оболочки), то вершины степени 3 граничными не являются. Поэтому, если локально минимальная сеть без вершин степени 2 (т.е. локально минимальное бинарное дерево) обладает выпуклой границей, то эта граница состоит в точности из всех вершин степени 1.

Напомним, что плоские бинарные деревья можно описывать на двойственном языке, а именно с помощью триангуляций диагоналями плоских многоугольников. Треугольники таких триангуляций будем называть *ячейками*.

Пусть T – произвольная триангуляция диагоналями многоугольника W (такие триангуляции будем называть *диагональными*), и Δ – любая ее ячейка. Назовем Δ *крайней ячейкой*, если по меньшей мере две ее стороны являются сторонами W . Ячейка Δ называется *внутренней*, если ни одна из ее сторон не есть сторона из W . Если две ячейки пересекаются по стороне, то мы называем их *смежными* и говорим, что одна из них *примыкает* ко второй. Крайняя ячейка, примыкающая к внутренней, называется *наростом*, а триангуляция T без наростов называется *скелетом*. Если для каждой внутренней ячейки триангуляции T из всех примыкающих к ней наростов (если они есть) выбросить ровно один, то, как легко проверить, полученная триангуляция T' уже не будет содержать наростов, т.е. T' является скелетом, который называется *скелетом триангуляции* T . Таким образом, мы построили, вообще говоря, неоднозначное *разложение триангуляции* T *на скелет и наросты*.

Мы говорим, что T имеет *выпуклую минимальную реализацию*, если ее двойственный граф планарно эквивалентен некоторому локально минимальному бинарному дереву с выпуклой границей. В [33]–[37] для триангуляций T , обладающих выпуклой минимальной реализацией, были описаны все скелеты (оказалось, что они устроены достаточно просто), а также способы крепления к ним наростов, при которых полученные триангуляции по-прежнему будут обладать выпуклой минимальной реализацией.

Множество T' ячеек триангуляции T называется *связным*, если ограничение двойственного графа триангуляции T на T' является связным графом, т.е., в нашем случае, деревом. Пусть теперь T – произвольный скелет. Выбросим из T все внутренние ячейки и связные компоненты оставшегося множества T' назовем *линейными участками*. Если линейный участок содержит крайнюю ячейку, то назовем его *концом*, а если нет – то *перегородкой*. Построим плоский граф, называемый *кодом скелета* T , взяв в качестве вершин крайние и внутренние ячейки

скелета T , а в качестве ребер — линейные участки и общие ребра смежных внутренних ячеек.

Интересным следствием из [33]–[37] является тот факт, что *коды скелетов, имеющих выпуклую минимальную реализацию — это всевозможные плоские бинарные деревья с не более чем шестью вершинами степени 1. В частности, каждый такой скелет имеет не более шести концов, трех перегородок и четырех внутренних ячеек.*

Мы говорим, что триангуляция T имеет *правильную минимальную реализацию*, если ее двойственный граф планарно эквивалентен некоторому локально минимальному бинарному дереву с правильной границей. В [37], как следствие общей теории, были описаны все линейные скелеты (скелеты без внутренних ячеек) и скелеты с тремя концами, обладающие правильной минимальной реализацией.

В настоящей работе будут построены новые ограничения на топологии локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей и доказана следующая теорема несуществования, полностью описывающая скелеты с четырьмя концами, обладающие правильной минимальной реализацией. А именно, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Скелеты с четырьмя концами не имеют правильной минимальной реализации.*

Автор благодарен А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, а также А. О. Иванову за многолетнее плодотворное сотрудничество.

§ 1. Предварительные результаты

Приведем основные результаты, полученные в [33]–[37]. Для этого напомним необходимые определения из [33]–[37].

1.1. Минимальные сети.

Под *сетью* мы понимаем связное подмножество евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, представимое в виде плоского графа, ребра которого — гладкие регулярные кривые. *Длиной сети* называется сумма длин всех ребер этой сети. Ясно, что длина сети не зависит от ее представления плоским графом.

Часто мы будем рассматривать следующую граничную задачу. Фиксируем некоторое конечное множество M точек плоскости, и рассмотрим все сети, множество вершин которых содержит M . Про каждую такую сеть Γ будем говорить, что Γ *затягивает* M , или Γ имеет *границу* $\partial\Gamma = M$. Сеть Γ с границей M называется *абсолютно минимальной*, если ее длина — наименьшая среди длин всех сетей, затягивающих M .

Определим более широкий класс минимальных сетей, а именно, локально минимальные сети. Чтобы сформулировать понятие локальной минимальности, удобно ввести так называемые допустимые окрестности. Пусть P — произвольная точка сети Γ . *Допустимой окрестностью* точки P сети Γ называется замкнутая односвязная окрестность U этой точки такая, что

- окрестность U не содержит вершин сети Γ , отличных от P , если P — вершина;
- пересечение $\Gamma \cap \partial U$ сети Γ с границей ∂U окрестности U состоит из конечного числа точек;

– пересечение $\Gamma_U = \Gamma \cap \overline{U}$ сети Γ с замыканием $\overline{U}$ окрестности U состоит из кривых, каждая из которых соединяет точку P с некоторой точкой из $\Gamma \cap \partial U$.

Наделим множество Γ_U структурой плоского дерева, объявив вершинами все точки из $(\Gamma \cap \partial U) \cup \{P\}$, а ребрами – кривые в Γ_U , соединяющие эти точки. Полученное дерево Γ_U будем называть *локальной сетью с центром в точке P* . Определим *каноническую границу $\partial \Gamma_U$ локальной сети Γ_U* , включив в нее все вершины из $\Gamma \cap \partial U$, а также вершину P , если P – граничная вершина сети Γ .

Сеть Γ называется *локально минимальной*, если для любой ее точки P существует такая локальная сеть Γ_U с центром в P , которая является абсолютно минимальной сетью с канонической границей $\partial \Gamma_U$. Легко видеть, что каждая абсолютно минимальная сеть является также и локально минимальной. Так как мы собираемся изучать только локально минимальные сети, то в дальнейшем, для краткости, будем называть локально минимальные сети просто *минимальными*, опуская слово “локально”.

Следующее предложение описывает локальную структуру минимальных сетей. Это предложение, с небольшими изменениями формулировки, остается верным и в гораздо более общих предположениях, а именно, для сетей в произвольных римановых многообразиях, см. [38].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Сеть Γ с границей M минимальна, если и только если для одного из ее представлений имеют место следующие свойства:*

- все ребра сети – прямолинейные отрезки;
- угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше 120° ;
- все вершины степени 1 и 2 являются граничными.

Из предложения 1.1 вытекает, что степень каждой вершины минимальной сети не превосходит 3. В частности, если Γ – минимальная сеть с границей M , содержащей вершину v степени 3 из Γ , то сеть Γ' , отличающаяся от Γ лишь тем, что вершина v не считается граничной (сеть Γ' имеет границу $M \setminus \{v\}$), также является минимальной сетью. Это свойство часто позволяет ограничиться рассмотрением лишь тех минимальных сетей, границы которых состоят в точности из всех вершин степени 1 и 2.

Предложение 1.1 позволяет также доказать следующее замечательное свойство минимальных сетей, имеющее место и в случае минимальных поверхностей [30]–[32], [38].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Каждая минимальная сеть Γ с границей M содержится в выпуклой оболочке $\text{conv}(M)$ множества M . Каждая вершина степени 3 сети Γ является внутренней точкой в $\text{conv}(M)$.*

В настоящей работе рассматриваются только минимальные сети, являющиеся деревьями и не имеющие вершин степени 2. Из предложения 1.1 следует, что степени вершин таких сетей равны 1 или 3, т.е. эти сети являются бинарными деревьями или, как их еще называют, 2-деревьями. Более того, все ребра таких сетей суть прямолинейные отрезки, встречающиеся в вершинах степени 3 под равными углами величины 120° .

Кроме того, нас будут интересовать лишь минимальные 2-деревья, имеющие выпуклую границу. Предложение 1.2 влечет следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Если Γ – минимальная сеть с выпуклой границей, то ее вершины степени 3 – не граничные.

Из предложения 1.3 вытекает, что в случае, когда граница минимальной сети выпукла, эта граница состоит в точности из всех вершин степени 1 и 2, в частности, у минимальных 2-деревьев, затягивающих вершины выпуклых многоугольников, граница – это множество всех вершин степени 1.

В соответствии со сделанными замечаниями, для любого 2-дерева Γ (плоского или минимального), вершины степени 1 будем называть *граничными*, а вершины степени 3 – *внутренними*. Кроме того, если Γ – локально минимально, то внутренние вершины традиционно называют *точками Штейнера*, что мы иногда также будем делать. Далее, ребро из Γ , инцидентное граничной вершине, будем также называть *граничным*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине – *внутренним*.

1.2. Число вращения. Для изучения минимальных 2-деревьев очень полезным оказалось понятие числа вращения, введенное А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [33], к определению которого мы и переходим.

Рассмотрим произвольное плоское 2-дерево Γ , выберем некоторую пару (a, b) его ребер, и пусть γ – единственный путь в Γ , соединяющий эти ребра. Ориентируем путь γ от a к b , и пусть P – произвольная вершина степени 3 дерева Γ , лежащая внутри γ , т.е. не совпадающая ни с одной из его концевых вершин. Выберем допустимую окрестность U вершины P . Тогда пересечение $\partial U \cap \Gamma$ состоит из трех точек, которые мы обозначим через A_i , $i = 1, 2, 3$. Пусть a_1 – первое, и a_2 – последнее ребро из γ , инцидентное P , и пусть $A_i \in a_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим дугу δ замкнутой кривой ∂U , лежащую между A_1 и A_2 и содержащую A_3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если движение по дуге δ от A_1 к A_2 происходит по часовой стрелке, то будем говорить, что мы *поворачиваем направо в точке P* , и припишем P число -1 . В противном случае, скажем, что мы *поворачиваем налево в точке P* , и припишем P число $+1$. Число, приписанное вершине P , называется *твистингом вершины P ориентированного пути γ* . *Числом вращения $\text{tw}(a, b)$ упорядоченной пары (a, b) ребер 2-дерева Γ* называется сумма твистингов во всех внутренних вершинах пути γ . Положим, по определению, $\text{tw}(a, a) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числом вращения $\text{tw} \Gamma$ бинарного дерева Γ* называется максимум чисел вращения $\text{tw}(a, b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер из Γ .

Отметим, что $\text{tw}(a, b) = -\text{tw}(b, a)$, и $\text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, c) = \text{tw}(a, c)$ для любых ребер a, b и c из Γ , лежащих на одном пути в Γ . Кроме того, если $\text{tw} \Gamma = \text{tw}(a, b)$, то ребра a и b – граничные, т.е. инцидентны вершинам степени 1 (см. [33]–[38]).

Следующее утверждение является одним из ключевых в теории минимальных сетей с выпуклыми границами (см. [33]–[38]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Плоское 2-дерево Γ планарно эквивалентно некоторому минимальному 2-дереву с выпуклой границей тогда и только тогда, когда $\text{tw} \Gamma \leq 5$.

Для наглядности полезно ввести следующую терминологию. Если сеть Γ планарно эквивалентна некоторой минимальной сети, то будем говорить, что Γ имеет

минимальную реализацию или *M-реализацию*. Если Γ планарно эквивалентна минимальной сети с выпуклой границей, то скажем, что Γ имеет *выпуклую минимальную реализацию* или *СМ-реализацию*. Если же Γ планарно эквивалентна минимальной сети, граница которой — множество вершин правильного многоугольника (такие границы будем называть *правильными*), то говорим, что Γ обладает *правильной минимальной реализацией* или *RM-реализацией*.

Таким образом, выпуклой минимальной реализацией обладают те и только те плоские 2-деревья, число вращения которых не превосходит пяти.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат предложения 1.4 может быть обобщен как на случай минимальных 2-деревьев с произвольной границей, так и на случай взвешенных минимальных 2-деревьев (см. [39], [40]).

1.3. Диагональные триангуляции и паркеты; классификация минимальных 2-деревьев с выпуклой границей. Напомним, что плоские 2-деревья могут быть описаны на двойственном языке, а именно, на языке диагональных триангуляций плоских многоугольников. Пусть W — плоский n -угольник, и $T = \{t_i\}$ — некоторая его диагональная триангуляция, т.е. t_i , $i = 1, \dots, n-2$, — треугольники, каждый из которых образован некоторой тройкой из сторон и диагоналей n -угольника W , причем $W = \bigcup_i t_i$ и внутренности разных треугольников t_i не пересекаются; в частности, каждый треугольник t_i принадлежит W (вообще говоря, мы не предполагаем, что n -угольник W — выпуклый). Треугольники триангуляции T будем называть *ячейками*, причем ячейка, у которой не менее чем две стороны являются сторонами из W , называется *крайней*, а ячейка, ни одна сторона которой не совпадает со стороной из W — *внутренней*. Две ячейки называются *смежными* или *соседними*, если они пересекаются по стороне. Сторона ячейки t_i называется *граничной стороной триангуляции T* , если она является стороной многоугольника W , в противном случае, эта сторона называется *внутренней стороной триангуляции T* .

По каждой диагональной триангуляции T многоугольника W можно построить плоское 2-дерево Γ_T , называемое *двойственной сетью* этой триангуляции. Выберем в качестве *вершин сети Γ_T* по одной точке внутри каждой ячейки из T и по одной точке внутри каждой стороны многоугольника W . Две вершины сети Γ_T соединим *ребром* (вложенной гладкой регулярной кривой) тогда и только тогда, когда или обе они принадлежат одной ячейке t_i , или лежат внутри смежных ячеек t_i и t_j , при этом в первом случае ребро целиком лежит в t_i , а во втором — содержится в $t_i \cup t_j$. Естественно, ребра проведем таким образом, чтобы их внутренности не пересекались. Легко видеть, что двойственные сети планарно эквивалентных триангуляций также планарно эквивалентны. Кроме того, несложно проделать обратную операцию, т.е. по каждому плоскому 2-дереву Γ построить диагональную триангуляцию T , двойственная сеть которой планарно эквивалентна Γ .

Вершину двойственной сети Γ_T будем называть *граничной*, если она лежит на граничной стороне триангуляции T , и *внутренней* в противном случае. Таким образом, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между сторонами многоугольника W (для которого рассматривается диагональная триангуляция T) и граничными вершинами двойственной сети Γ_T . Кроме того, также имеется естественное взаимно однозначное соответствие между внутренними вершинами двойственной сети Γ_T и ячейками триангуляции T .

Ребро двойственной сети Γ_T будем называть *граничным*, если оно инцидентно граничной вершине этой сети, и *внутренним* в противном случае. Опять же, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между граничными ребрами двойственной сети Γ_T и сторонами многоугольника W . Также имеется естественное взаимно однозначное соответствие между внутренними ребрами двойственной сети Γ_T и диагоналями многоугольника W , порождающими триангуляцию T .

Именно описанные только что соответствия и будут иметься в виду в дальнейшем.

Если двойственная сеть диагональной триангуляции T обладает некоторым свойством, то мы, в дальнейшем, будем говорить, что сама триангуляция T обладает этим свойством. Так, например, совокупность ячеек из T называется *связной*, если пересечение двойственной сети Γ_T с этими ячейками связно. Или, скажем, число вращения сети Γ_T будем называть *числом вращения триангуляции T* . Также будем говорить, что диагональная триангуляция T имеет *минимальную реализацию* (соответственно, *выпуклую минимальную реализацию*, *правильную минимальную реализацию*), если такой реализацией обладает ее двойственная сеть.

Из предложения 1.4 вытекает, что для описания всех минимальных сетей с выпуклой границей достаточно расклассифицировать все диагональные триангуляции с числом вращения, не превосходящим 5. Множество всех таких триангуляций будем обозначать через $\mathcal{WP}_5$.

Пусть T – произвольная диагональная триангуляция, и Δ – некоторая крайняя ее ячейка. Ясно, что Δ смежна не более чем с одной ячейкой из T . Ячейку Δ назовем *наростом*, если смежная с Δ ячейка является внутренней. Диагональная триангуляция без наростов называется *скелетом*. Если для каждой внутренней ячейки Δ диагональной триангуляции T из всех наростов, примыкающих к Δ (если они есть), выбросить ровно один, то полученная диагональная триангуляция, как легко убедиться, является скелетом, который называется *скелетом триангуляции T* . Отметим, что такое *представление диагональной триангуляции в виде скелета и наростов* в общем случае неоднозначно. Отметим также, что скелет любой триангуляции из $\mathcal{WP}_5$ снова принадлежит $\mathcal{WP}_5$.

Оказывается, для триангуляций из $\mathcal{WP}_5$ скелеты устроены достаточно просто. В [33] сначала описываются все такие скелеты, а затем то, как можно к ним прикреплять наросты, не выходя при этом из класса $\mathcal{WP}_5$. Первый шаг в описании скелетов – это разложение их на линейные участки и узлы ветвления.

Пусть S – произвольный скелет (не обязательно из $\mathcal{WP}_5$). Связные компоненты множества внутренних ячеек скелета S называются *узлами ветвления*, а связные компоненты скелета S , из которого выброшены все внутренние ячейки, называются *линейными участками*. Линейный участок, содержащий крайнюю ячейку, называется *концом*, а не содержащий – *пергородкой*.

Построенное разбиение скелета S позволяет определить *код* этого скелета, как плоский граф, вершины которого соответствуют крайним и внутренним ячейкам из S , а ребра – линейным участкам и внутренним ребрам скелета S , по которым пересекаются смежные внутренние ячейки. Как будет показано ниже, код скелета из $\mathcal{WP}_5$ устроен достаточно просто.

Кроме того, используя код, мы будем переносить терминологию из теории графов на линейные участки и внутренние ячейки. Так, например, выраже-

ние “два конца смежны” означает, что соответствующие им ребра кода смежны. В качестве другого примера такого использования кода, дадим определение ребра крепления: внутреннее ребро скелета S , являющееся пересечением линейного участка и инцидентной ему внутренней ячейки, называется *ребром крепления* этого линейного участка. Ясно, что если скелет содержит внутренние ячейки, то каждый конец имеет ровно одно ребро крепления, а каждая перегородка — ровно два.

Следующее предложение полностью описывает все возможные узлы ветвления скелетов из $\mathcal{WP}_5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Узлы ветвления скелетов из $\mathcal{WP}_5$ могут быть ровно 5 типов, приведенных на рис. 1.*

Рис. 1. Узлы ветвления скелетов из $\mathcal{WP}_5$

Опишем теперь линейные участки скелетов из $\mathcal{WP}_5$. Чтобы это описание было наглядным, оказывается полезным рассматривать диагональные триангуляции специального вида, а именно, так называемые паркеты.

Диагональная триангуляция, все ячейки которой — правильные (конгруэнтные) треугольники, называется *паркетом*. Следующее предложение показывает, что при изучении минимальных 2-деревьев с выпуклой границей можно ограничиться паркетами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Каждое плоское 2-дерево с числом вращения, не превосходящим 5, планарно эквивалентно двойственной сети некоторого паркета.*

Итак, в дальнейшем всегда будем предполагать, что рассматриваемые диагональные триангуляции являются паркетами. Кроме того, для паркетов двойственную сеть удобно выбрать специальным образом: в качестве вершин такой двойственной сети возьмем центры ячеек и середины граничных сторон, а все ребра будем считать отрезками, соединяющими соответствующие вершины. *Именно такие 2-дерева мы и будем иметь в виду, говоря о двойственных сетях паркетов.* Отметим, что двойственная сеть каждого паркета является минимальной сетью с границей, состоящей из всех вершин степени 1.

Пусть S — скелет, и L — его линейный участок. Сейчас мы определим позвоночник линейного участка L , что позволит нам полностью описать линейные участки скелетов из $\mathcal{WP}_5$.

Проведем во всех некрайних ячейках скелета S их средние линии, соединяющие внутренние стороны этих ячеек. В крайних ячейках проведем средние линии, параллельные уже построенным в смежных ячейках. Все проведенные средние линии называются *позвонками*. На объединении всех позвонков введем структуру графа, объявив ребрами максимальные связные прямолинейные совокупности позвонков из не внутренних ячеек, а также все позвонки из внутренних ячеек. Полученный плоский граф называется *позвоночником скелета S* . Далее, пересечение позвоночника скелета S с каждым его линейным участком L называется *позвоночником линейного участка L* .

Следующее предложение [33] описывает все линейные участки скелетов из $\mathcal{WP}_5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Позвоночник каждого линейного участка L скелета из $\mathcal{WP}_5$ однозначно проектируется на прямую, параллельную некоторой стороне произвольной ячейки.*

Прямая из предложения 1.7 называется *направляющей линейного участка L* . Отметим, что, с точностью до параллельности, существуют ровно три прямые, каждая из которых параллельна какой-нибудь стороне произвольной ячейки. В дальнейшем, говоря о направляющих, будем отождествлять параллельные прямые, поэтому, например, имеет смысл говорить, что линейный участок обладает одной направляющей (т.е. все направляющие линейного участка параллельны). Принимая во внимание сделанные замечания и соглашение, отметим, что существует не более трех направляющих. Если линейный участок обладает тремя направляющими, то он называется *змеей*, если двумя – то *лестницей*, и, наконец, если одной – то *ломаной змеей* (см. рис. 2). Таким образом, описаны основные *структурные элементы* паркетов из $\mathcal{WP}_5$: наросты, узлы ветвления и линейные участки.

Рис. 2. Линейные участки скелетов из $\mathcal{WP}_5$

Опишем, как эти элементы крепятся друг к другу. Оказывается, каждый скелет из $\mathcal{WP}_5$ можно получить из скелетов специального канонического вида, выбрасывая из последних некоторое количество ячеек. Операция “выбрасывания” называется *редукцией*. Различаются редукции I-го и II-го типа. Пусть D – некоторый паркет. Редукция I-го типа состоит в разрезании паркeta D вдоль внутреннего ребра некоторой ячейки и отбрасывания одной из двух компонент. Ясно, что редукция I-го типа переводит паркет D в некоторый паркет, число вращения которого не больше числа вращения паркeta D . Чтобы описать редукцию II-го типа,

напомним, что каждое ребро двойственной сети, соединяющее вершины степени три, пересекает ровно одно внутреннее ребро некоторой ячейки паркета. Это задает соответствие между такими ребрами двойственной сети и внутренними ребрами паркета. Итак, редукция II-го типа состоит в следующем: выберем два внутренних ребра паркета D , таких что число вращения между соответствующими им ребрами двойственной сети равно нулю; разрежем паркет D вдоль этих ребер; выбросим ту из трех образованных компонент, которая пересекается с обоими оставшимися компонентами; с помощью параллельного переноса склеим оставшиеся две компоненты по ребрам разреза. Можно показать, что если $D \in \mathcal{WP}_5$, то описанная операция корректно определена (т.е. после сдвига полученные два паркета пересекаются только по ребрам разреза), и результирующий паркет имеет число вращения, не большее чем у D , в частности, он по-прежнему принадлежит $\mathcal{WP}_5$.

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему из [33], классифицирующую скелеты из $\mathcal{WP}_5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. *Каждый скелет из $\mathcal{WP}_5$ может быть получен кратным применением редукции к скелету одного из трех канонических типов, схема которых приведена на рис. 3, где три параллельные черточки обозначают ломаную змею, направляющая которой параллельна черточкам; две черточки, пересекающиеся под углом в 60° , обозначают лестницу с направляющими, параллельными черточкам; одна черточка соответствует змее, позвоночник которой параллелен черточке; и, наконец, кружок соответствует узлу ветвления, состоящему из одной ячейки.*

Рис. 3. Схема классифицирующих скелетов

Отметим, что из предложения 1.8 вытекает интересное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Коды скелетов из $\mathcal{WP}_5$ — это всевозможные плоские 2-дерева, каждое из которых имеет не более 6 вершин степени 1. В частности, скелет из $\mathcal{WP}_5$ содержит не более 6 концов, не более 3 перегородок и не более 4 внутренних ячеек (а, значит, не более 4 узлов ветвления).*

Ориентируем позвоночник каждого конца L скелета $S \in \mathcal{WP}_5$ в сторону крайней ячейки, принадлежащей этому концу (для S , не содержащего внутренних ячеек, существует две таких ориентации). Тогда направления ребер так ориентированного позвоночника назовем *направлениями конца L* . Ясно, что всего существует

не более шести различных направлений, образующих правильный шестиугольник, вписанный в единичную окружность направлений. Такой шестиугольник назовем *шестиугольником направлений*.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Каждый конец скелета S из $\mathcal{WP}_5$ имеет не более трех различных направлений, причем эти направления – последовательные. Множества направлений, соответствующие любым двум различным концам из S , не пересекаются.*

Если ориентировать границу скелета S , скажем, против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на множестве концов, а также ориентировать шестиугольник направлений против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на семействе множеств направлений концов, то оба возникших порядка будут согласованы: последовательные концы будут иметь последовательные множества направлений.

Так как мы в дальнейшем будем заниматься только скелетами, то теорему, описывающую возможные расположения наростов на скелетах паркетов из $\mathcal{WP}_5$, приводить не будем, а заинтересованного читателя вновь отсылаем к [33]–[38].

1.4. Минимальные 2-деревья с правильной границей. Приведем теперь результаты из [37], где изучались минимальные 2-деревья с правильной границей.

Пусть теперь S – скелет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий правильную минимальную реализацию или, короче, RM -реализацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Пусть S – произвольный скелет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий RM -реализацию. Тогда все концы скелета S – змеи.*

Скелет называется *линейным*, если он не содержит узлов ветвления. Из предложения 1.9 вытекает, что линейный скелет, имеющий RM -реализацию, necessarily является змеей. Оказывается, имеет место и обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Линейный скелет имеет RM -реализацию тогда и только тогда, когда он является змеей.*

В следующем предложении полностью описываются скелеты с тремя концами, допускающие RM -реализацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. *Скелет с тремя концами имеет RM -реализацию на правильном n -угольнике тогда и только тогда, когда $n = 6k + 3$, все концы скелета – змеи, состоящие из одинакового числа ячеек, и скелет инвариантен относительно поворота на 120° вокруг центра единственной содержащейся в нем внутренней ячейки.*

Назовем граничную сторону скелета *концевой*, если она пересекается с позвоночником. Граничное ребро двойственной сети скелета, приходящее на концевую сторону, и соответствующее ребро произвольной минимальной реализации этого скелета также назовем *концевыми*. Остальные граничные ребра двойственной сети и соответствующей минимальной реализации назовем *отростками*.

Пусть S – произвольный скелет, и Γ – некоторая его минимальная реализация, затягивающая множество M . Граничную вершину двойственной сети Γ_S , инцидентную концевому ребру, а также соответствующую вершину из M , назовем *концевыми*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. Пусть S – произвольный скелет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий RM -реализацию на правильном n -угольнике M . Пусть K и K' – две концевые вершины из M , соответствующие концам-змеям Z и Z' скелета S . Обозначим через k наименьшее число сторон n -угольника M между K и K' . Пусть угол между концами Z и Z' равен $\pi l/3$, где l может принимать значения 1, 2 или 3. Тогда

$$\left| k - \frac{nl}{6} \right| < 1.$$

Таким образом, если nl кратно 6, то $k = nl/6$; в противном случае k равно или $[nl/6]$, или $[nl/6] + 1$, где $[x]$ обозначает целую часть x .

Предложение 1.12 накладывает существенные ограничения на устройство скелетов из $\mathcal{WP}_5$, имеющих RM -реализацию. Пусть S – скелет из $\mathcal{WP}_5$. Выбросим из его границы все концевые ребра. Незамкнутые ломаные, являющиеся замыканиями связных компонент полученного множества, называются *боковинами* скелета S . Количество граничных ребер скелета S , входящих в боковину, называется *длиной* этой боковины. Количество же всех граничных ребер скелета S называется *длиной* его границы.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть S – произвольный скелет из $\mathcal{WP}_5$, и пусть n – длина его границы. Предположим, что S обладает RM -реализацией. Пусть B – произвольная боковина скелета S , пересекающаяся с концами-змеями Z и Z' . Обозначим через b длину боковины B , и пусть угол между концами Z и Z' равен $\pi l/3$. Тогда

- если nl кратно 6, то $b = nl/6 - 1$;
- если nl не кратно 6, то b равно или $[nl/6] - 1$, или $[nl/6]$, где $[x]$ обозначает целую часть x .

В настоящей работе мы докажем более точный вариант предложений 1.9 и 1.12 (см. теорему 2.1 и следствия из нее) и используем эту технику, а также критерий существования RM -реализации скелетов [37] (см. ниже), для доказательства следующей теоремы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Скелеты с четырьмя концами не имеют RM -реализации.*

Таким образом, для завершения описания скелетов, имеющих RM -реализацию, остается изучить случаи скелетов с пятью и шестью концами. Имея это в виду, мы не будем ограничиваться рассмотрением случая скелетов с четырьмя концами, формулируя, где это возможно, общие результаты.

§ 2. Длины боковин

В настоящем параграфе мы усилим предложение 1.12. На протяжении всего параграфа будем предполагать, что все рассматриваемые деревянные скелеты не являются линейными, т.е. имеют по крайней мере одну внутреннюю ячейку, и, значит, не менее трех концов.

Пусть S – скелет из $\mathcal{WP}_5$, обладающий RM -реализацией, и $\Gamma = \Gamma_S$ – его двойственная сеть. Обозначим через e и a концевое ребро и смежный с ним отросток

2-дерева Γ , соответствующие некоторому концу-змее Z скелета S . Будем рассматривать e и a как векторы, выходящие из общей для них внутренней точки сети Γ . Считая, что плоскость канонически ориентирована, дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индексом $\text{ind}(Z)$ конца Z назовем число, равное 1, если репер (a, e) положительно ориентирован, и -1 в противном случае.*

Пусть Z и Z' – концы-змеи скелета S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индексом $\text{ind}(Z, Z')$ упорядоченной пары (Z, Z') концов Z и Z' называется полуразность $\frac{1}{2}[\text{ind}(Z') - \text{ind}(Z)]$.*

Ясно, что индекс пары концов может принимать лишь три значения: -1 , 0 и 1 . В первом случае говорят, что концы *смотрят наружу*, во втором – что концы *смотрят в одну сторону*, и в третьем – что концы *смотрят внутрь*.

Пусть (Z, Z') – упорядоченная пара концов-змей скелета S . Углом от Z к Z' назовем величину дуги единичной окружности направлений, движение по которой от направления первого конца Z к направлению второго конца Z' происходит против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении. Также, для упорядоченной пары (K, K') вершин правильного многоугольника под *числом сторон от K к K'* будем понимать количество сторон в той из двух компонент между K и K' , движение по которой от K к K' порождает обход многоугольника против часовой стрелки.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть S – произвольный скелет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий RM -реализацию на правильном n -угольнике M . Пусть (K, K') – упорядоченная пара концевых вершин из M , соответствующая упорядоченной паре концов-змей (Z, Z') скелета S . Обозначим через k число сторон n -угольника M от K к K' . Пусть угол от конца Z к концу Z' равен $\pi l/3$. Тогда существует и единственно такое число a из интервала $(-1/2, 1/2)$, что число $\frac{nl}{6} + \frac{1}{2} \text{ind}(Z, Z') + a$ – целое. При этом*

$$k = \frac{nl}{6} + \frac{1}{2} \text{ind}(Z, Z') + a.$$

Таким образом,

- если $\text{ind}(Z, Z') = -1$, то nl не делится нацело на 6, и $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil$;
- если $\text{ind}(Z, Z') = 0$, то остаток r от деления nl на 6 не равен 3, и
если $0 \leq r \leq 2$, то $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil$,
если $4 \leq r \leq 5$, то $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil + 1$;
- если $\text{ind}(Z, Z') = 1$, то nl не делится нацело на 6, и $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil + 1$.

Пусть S – скелет, а B – произвольная его боковина. Так как мы предполагаем (см. выше), что скелет S не является линейным, то существует ровно два конца, Z и Z' , пересекающиеся с боковиной B . Более того, легко видеть, что $B \cap Z$ и

$B \cap Z'$ – связные фрагменты ломаной B , содержащие граничные для B ребра. Будем говорить, что боковина B порождена концами Z и Z' , а пересечения $B \cap Z$ и $B \cap Z'$ будем называть, соответственно, Z - и Z' -частями боковины B .

Далее, пусть, для определенности, при движении по границе скелета S против часовой стрелки мы проходим боковину B , начиная с ее Z -части и заканчивая на ее Z' -части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В сделанных выше предположениях индекс $\text{ind}(Z, Z')$ называется *индексом боковины B* и обозначается через $\text{ind}(B)$. Угол от конца Z к концу Z' называется *раствором боковины B* и обозначается $\text{ang}(B)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть S – произвольный скелет из $\mathcal{WA}_3$, и пусть n – длина его границы. Предположим, что S обладает RM -реализацией. Пусть B – произвольная боковина скелета S , b – ее длина, и $\text{ang}(B) = \pi l/3$ – ее раствор. Тогда

- если $\text{ind}(B) = -1$, то nl не делится на 6, и $b = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor - 1$;
- если $\text{ind}(B) = 0$, то остаток r от деления nl на 6 не равен 3, и
 если $0 \leq r \leq 2$, то $b = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor - 1$,
 если $4 \leq r \leq 5$, то $b = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor$;
- если $\text{ind}(B) = 1$, то nl не делится на 6, и $b = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor$.

Иными словами, если $nl = 6p + r$, где $p = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor$, а $0 \leq r \leq 5$, то

- при $r = 0$ индекс боковины B всегда равен 0, при $r = 3$ индекс боковины B никогда не равен 0, а при оставшихся r индекс боковины B может быть равен как 0, так и ± 1 ;
- при любом $r > 0$,
 если $\text{ind}(B) = -1$, то $b = p - 1$,
 если $\text{ind}(B) = 1$, то $b = p$;
- если $\text{ind}(B) = 0$, то
 при $0 \leq r \leq 2$ имеем $b = p - 1$,
 при $4 \leq r \leq 5$ имеем $b = p$.

Пусть e и e' – два концевых ребра скелета S . Тогда ломаные, полученные при замыкании связных компонент, на которые распадается граница скелета S после выбрасывании этих концевых ребер, называется *супербоковиной*. Пусть Z и Z' – концы скелета S такие, что $e \subset Z$ и $e' \subset Z'$. Будем говорить, что супербоковина B порождена концами Z и Z' , а пересечения $B \cap Z$ и $B \cap Z'$ будем называть, соответственно, Z - и Z' -частями супербоковины B .

Далее, пусть, для определенности, при движении по границе скелета S против часовой стрелки мы проходим супербоковину B , начиная с ее Z -части, и заканчивая на ее Z' -части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В сделанных выше предположениях индекс $\text{ind}(Z, Z')$ называется *индексом супербоковины B* и обозначается через $\text{ind}(B)$. Угол от конца Z к концу Z' называется *раствором супербоковины B* и обозначается $\text{ang}(B)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Утверждения следствия 2.1 имеют место и для супербоковин.*

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть Γ – некоторая RM -реализация скелета S на правильном n -угольнике M . Поддеревья в Γ , являющиеся реализациями концевых змей Z и Z' , обозначим теми же буквами.

Пусть O – центр окружности S^1 , описанной вокруг n -угольника M . Обозначим через l и l' лучи, выходящие из O и перпендикулярные отрезкам змей Z и Z' , соответственно. Пусть L и L' – точки пересечения лучей l и l' с окружностью S^1 . Легко видеть, что угловое расстояние между L и K , так же, как и угловое расстояние между L' и K' , отлично от нуля и строго меньше $\alpha = \pi/n$. Обозначим эти угловые расстояния, деленные на π/n , через δ и δ' , соответственно. Ясно, что $0 < \delta < 1$ и $0 < \delta' < 1$.

Отметим, что если $\text{ind}(Z) = 1$, то движение от L к K по меньшей дуге между ними происходит в положительном направлении, а если $\text{ind}(Z) = -1$ – то в отрицательном. Аналогичные рассуждения верны и для второго конца Z' . Поэтому, имеет место следующее соотношение:

$$\frac{2\pi}{n}k = \frac{\pi}{3}l + \frac{\pi}{n}(\delta' \text{ind}(Z') - \delta \text{ind}(Z)),$$

откуда

$$k = \frac{nl}{6} + \frac{(\delta' \text{ind}(Z') - \delta \text{ind}(Z))}{2}.$$

Положим $b = (\delta' \text{ind}(Z') - \delta \text{ind}(Z))/2$. Ясно, что значения функции b лежат на интервале $(0, 1)$, если $\text{ind}(Z, Z') = 1$, на интервале $(-1/2, 1/2)$, если $\text{ind}(Z, Z') = 0$, и, наконец, на интервале $(-1, 0)$, если $\text{ind}(Z, Z') = -1$. Поэтому b можно представить в виде $\text{ind}(Z, Z')/2 + a$, где $-1/2 < a < 1/2$. Легко видеть, что b однозначно определяется следующим условием:

$$\frac{nl}{6} + b \text{ является целым числом.} \quad (*)$$

Поэтому a также определяется однозначно. Таким образом, доказана первая часть теоремы.

Для доказательства второй части, заметим, что если $\text{ind}(Z, Z') = \pm 1$, и nl делится нацело на 6, то b лежит в пределах между 0 и $\text{ind}(Z, Z')$, и, поэтому, число $\frac{nl}{6} + b$ не может быть целым. Если же $nl = 6p + r$, $0 \leq r \leq 5$, и остаток r отличен от нуля, то $b = 1 - r/6$ при $\text{ind}(Z, Z') = 1$, и $b = -r/6$ при $\text{ind}(Z, Z') = -1$ удовлетворяют условию (*). Эти два решения можно записать в общем виде: $b = \text{ind}(Z, Z')/2 + 1/2 - r/6$, т.е. $a = 1/2 - r/6$. В обоих случаях имеем:

$$\begin{aligned} k &= \frac{nl}{6} + \frac{1}{2} \text{ind}(Z, Z') + \frac{1}{2} - \frac{r}{6} \\ &= p + \frac{r}{6} + \frac{1}{2} \text{ind}(Z, Z') + \frac{1}{2} - \frac{r}{6} \\ &= \left[\frac{nl}{6} \right] + \frac{1 + \text{ind}(Z, Z')}{2}, \end{aligned}$$

что равно $\left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor + 1$ при $\text{ind}(Z, Z') = 1$ и $\left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor$ при $\text{ind}(Z, Z') = -1$.

Пусть теперь $\text{ind}(Z, Z') = 0$. Теперь b может меняться в пределах от $-1/2$ до $1/2$. Ясно, что если, как и выше, положить $nl = 6p + r$, то при $r = 3$ не существует b , при котором $\frac{nl}{6} + b$ — целое. Если же $0 \leq r \leq 2$, то $b = -r/6$, а если $4 \leq r \leq 5$, то $b = 1 - r/6$. Таким образом, при $0 \leq r \leq 2$ имеем

$$k = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor + \frac{r}{6} - \frac{r}{6} = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor.$$

При $4 \leq r \leq 5$ получаем

$$k = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor + \frac{r}{6} + 1 - \frac{r}{6} = \left\lfloor \frac{nl}{6} \right\rfloor + 1.$$

Теорема полностью доказана.

§ 3. Перегородки второго уровня

В настоящем параграфе мы усилим предложение 1.9, распространив его на перегородки некоторого специального вида. Так как скелеты из $\mathcal{WP}_3$, линейные или с тремя концами, обладающие RM -реализацией, полностью описаны (см. выше), в дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что все рассматриваемые скелеты имеют не менее четырех концов.

Пусть S — скелет из $\mathcal{WP}_3$, обладающий RM -реализацией. Пусть Z_1 и Z_2 — два его конца-змеи, инцидентные внутренней ячейке Δ скелета S . Предположим, что направления концов Z_1 и Z_2 составляют угол в 60° .

В настоящем параграфе мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *В сделанных выше предположениях скелет S не имеет инцидентной Δ перегородки. Иными словами, внутренняя ячейка Δ входит в состав некоторого узла ветвления, состоящего не менее чем из двух ячеек.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3.1, опишем некоторые полезные свойства концов правильных минимальных реализаций скелетов из $\mathcal{WP}_3$.

Пусть S — скелет из $\mathcal{WP}_3$, и Γ — минимальное 2-дерево, являющееся правильной минимальной реализацией скелета S . В соответствии с предложением 1.9, все концы дерева Γ — змеи. Пусть Z — произвольный конец-змея из Γ . Обозначим через k концевое ребро, принадлежащее Z , а через k' — ребро крепления этого конца (напомним, см. § 1, что ребром крепления конца скелета называется внутреннее ребро скелета, по которому конец пересекается с инцидентной ему внутренней ячейкой; осталось воспользоваться соответствием между внутренними ребрами скелета и внутренними ребрами двойственной сети).

Пусть γ — путь в Γ , соединяющий k и k' . Ясно, что все точки Штейнера змеи Z лежат на γ , поэтому их можно линейно упорядочить. Ориентируем путь γ от k к k' , и обозначим последовательные точки Штейнера змеи Z через $s_1, \dots, s_p$. Отметим, что $p \geq 2$, так как S — скелет. Пусть k_i — отросток из Γ , инцидентный вершине s_i . Отметим, что все отростки k_i параллельны между собой. Пусть l_i — прямая, проходящая через отросток k_i . Тогда, для каждого $1 < i < p$ отросток

k_i лежит в полосе между прямыми l_{i-1} и l_{i+1} . В частности, если m_i обозначает точку из M , в которую приходит отросток k_i , то для $1 < i < p$ точка m_i также лежит в полосе между прямыми l_{i-1} и l_{i+1} .

Пусть m_0 – концевая вершина из M , в которую приходит концевое ребро k , и l_0 – прямая, проходящая через m_0 и параллельная отросткам k_i . Ясно, что как k_1 , так и m_1 лежат в полосе между l_0 и l_2 . Из приведенных выше рассуждений вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *В сделанных выше обозначениях, на каждой прямой l_i , $0 \leq i \leq p$, лежит ровно одна точка из множества M . Для каждого $0 < i < p$ в открытой полосе между прямыми l_{i-1} и l_{i+1} лежит ровно одна точка из множества M , причем эта точка является граничной вершиной сети Γ , инцидентной отростку k_i змеи Z .*

Пусть Π – замкнутая полуплоскость, ограниченная прямой l_p , такая что $m_0 \in \Pi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *В сделанных выше предположениях все вершины из M , лежащие в полуплоскости Π , инцидентны граничным ребрам дерева Γ , принадлежащим змее Z . Иными словами, все точки из множества M , попавшие в полуплоскость Π , затянуты змеей Z .*

Пусть l – прямая, параллельная отросткам змеи Z , проходящая через вершину из M , соседнюю с m_p и не инцидентную граничным ребрам змеи Z . Обозначим через Π открытую полуплоскость, ограниченную прямой l и содержащую концевую вершину m_0 змеи Z .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *В сделанных выше предположениях среди вершин из M , лежащих в полуплоскости Π , существует не более одной вершины, не инцидентной граничным ребрам дерева Γ , принадлежащим змее Z . Иными словами, все граничные вершины дерева Γ , попавшие в полуплоскость Π , за исключением, возможно, одной, затянуты змеей Z .*

Пусть, как и выше, $k' \subset Z$ обозначает ребро крепления. Пусть l' – прямая, проходящая через k' . Пусть Π – открытая полуплоскость, ограниченная прямой l' и содержащая концевую вершину m_0 конца Z . Имеет место следующая оценка.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. *В сделанных выше предположениях число вершин из M , попавших в полуплоскость Π и инцидентных ребрам конца Z , не меньше 2.*

Теперь все готово, чтобы доказать теорему 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Предположим противное, т.е. что имеется непустая перегородка, инцидентная узлу ветвления Δ . Пусть Δ' – ячейка этой перегородки, смежная с Δ . Будем обозначать теми же буквами соответствующие элементы RM -реализации Γ скелета S (см. рис. 4).

Так как ячейка Δ' – не внутренняя, то существует отросток k_a дерева Γ , выходящий из точки Штейнера, которая соответствует ячейке Δ' . Ясно, что k_a параллелен либо отросткам конца Z_1 , либо отросткам конца Z_2 . Пусть, для определенности, k_a параллелен отросткам конца Z_1 , и m_a – вершина из M , инцидентная k_a .

Рис. 4. Доказательство теоремы 3.1

Обозначим через k концевое ребро из Γ , а через m_0 — концевую вершину из M , соответствующую концу Z_1 . Пусть, как и выше, $k_1, \dots, k_p$ — последовательные отростки конца Z_1 , а m_i — вершина из M , в которую приходит отросток k_i . Ясно, что m_p и m_a — соседние вершины из M .

Проведем через m_a прямую l_a . Эта прямая, очевидно, параллельна отросткам змеи Z_1 . Обозначим через Π открытую полуплоскость, ограниченную прямой l_a и содержащую вершину m_0 . По утверждению 3.3 в полуплоскости Π содержится самое большое одна вершина из M , не инцидентная граничным ребрам змеи Z_1 .

Обозначим через k'' ребро крепления конца Z_2 , и через l'' — прямую, проходящую через k'' . Легко видеть, что k'' и, значит, l'' параллельны отросткам конца Z_1 . Кроме того, если l_p и l_a — прямые, проходящие через k_p и k_a , соответственно, то прямая l'' содержится в полосе между прямыми l_p и l_a .

Далее, пусть Π'' — открытая полуплоскость, ограниченная прямой l'' , такая что концевое ребро конца Z_2 содержится в Π'' . Легко видеть, что $\Pi'' \subset \Pi$. В силу утверждения 3.4 в полуплоскости Π'' лежит не менее 2 точек из M , инцидентных граничным ребрам змеи Z_2 . Но граничные ребра концов Z_1 и Z_2 инцидентны различным вершинам из множества M . Это противоречие и заканчивает доказательство теоремы 3.1.

§4. Скелеты с четырьмя концами. I

В настоящем параграфе мы применим приведенные выше результаты для описания скелетов с четырьмя концами, которые могли бы иметь RM -реализацию.

Пусть существует скелет S с четырьмя концами, имеющий RM -реализацию на правильном n -угольнике M . Предположим сначала, что S имеет непустую перегородку. Тогда, по теореме 3.1 направления его концов, инцидентных одному и тому же узлу ветвления, составляют угол в $2\pi/3$. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. *Не существует скелета S с четырьмя концами, который имел бы RM -реализацию, однако направления каждой пары его соседних концов составляли бы угол в $2\pi/3$ (рис. 5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть Z и Z' — два конца скелета S , инцидентных одной и той же внутренней ячейке, а B — боковина, порожденная Z и Z' , и b — длина боковины B . По следствию 1.3 имеем или $b = \lfloor n/3 \rfloor$, или

Рис. 5. Скелеты этого типа не имеют RM -реализации

$b = \lfloor n/3 \rfloor - 1$, т.е. $b \geq \lfloor n/3 \rfloor - 1$.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 4.1. Пусть Z – конец-змея скелета S . Обозначим через B_Z и B'_Z боковины конца Z , т.е. пересечение соответствующих боковин скелета S с границей конца Z . Тогда длины боковин B_Z и B'_Z отличаются друг от друга не более чем на 1.

Пусть $B_Z = B \cap Z$, $B_{Z'} = B \cap Z'$, а B'_Z и $B'_{Z'}$ – оставшиеся боковины концов Z и Z' , соответственно. Обозначим длины этих четырех боковин через b_Z , $b_{Z'}$, b'_Z и $b'_{Z'}$, соответственно. Ясно, что $b = b_Z + b_{Z'}$, поэтому $b_Z + b_{Z'} \geq \lfloor n/3 \rfloor - 1$ (см. рис. 5).

Из леммы 4.1 вытекает, что $b'_Z \geq b_Z - 1$ и $b'_{Z'} \geq b_{Z'} - 1$, поэтому получаем следующее неравенство

$$b'_Z + b'_{Z'} \geq \lfloor n/3 \rfloor - 3. \quad (*)$$

Следовательно, концы Z и Z' вместе затягивают не менее

$$\lfloor n/3 \rfloor - 1 + \lfloor n/3 \rfloor - 3 + 2 = 2\lfloor n/3 \rfloor - 2 \quad (**)$$

вершин из множества M .

Аналогичные рассуждения верны и для пары концов, инцидентных другому узлу ветвления. Поэтому все четыре конца скелета S затягивают не менее $4\lfloor n/3 \rfloor - 4$ точек из множества M . Однако, при $n \geq 21$ имеем: $4\lfloor n/3 \rfloor - 4 > n$, противоречие.

Отметим, что так как каждый конец затягивает не менее трех вершин из M , то осталось доказать утверждение теоремы для $12 \leq n \leq 20$. Для этого заметим, что в нашем случае для одного из концов Z и Z' , скажем для Z , длина боковины b'_Z не меньше длины боковины b_Z , т.е. $b'_Z \geq b_Z$, а для другого из этих концов, для Z' , имеет место противоположное неравенство: $b'_{Z'} \leq b_{Z'}$. Поэтому неравенство (*) можно уточнить: $b'_Z + b'_{Z'} \geq \lfloor n/3 \rfloor - 2$, следовательно, все четыре конца затягивают не менее $4\lfloor n/3 \rfloor - 2$, что больше n при $n \geq 12$, $n \neq 14$.

Если же $n = 14$, то $4\lfloor n/3 \rfloor - 2 = n$, поэтому все вершины из M затянуты концами, значит S не имеет перегородок. Более того, $b = b_Z + b_{Z'}$ обязано равняться $\lfloor n/3 \rfloor - 1 = 3$, а $b'_Z + b'_{Z'} - \lfloor n/3 \rfloor - 2 = 2$, поэтому конец Z обязан состоять из 2 ячеек, в то время как Z' – из трех ячеек. Аналогично для двух оставшихся концов.

Итак, мы получаем скелет с одним узлом ветвления, симметричный относительно центра этого узла ветвления, и с однозначно определенными длинами концов. Существует ровно один такой скелет (с точностью до симметрии). Легко видеть, что $\text{ind}(B) = 1$, поэтому по следствию 2.1 длина b этой боковины равна $[n/3] = 4$, противоречие.

Теорема 4.1 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Скелет с четырьмя концами, имеющий RM -реализацию, не содержит перегородок, поэтому он имеет ровно один узел ветвления.*

Из теоремы 4.1 и следствия 4.1 вытекает, что имеется ровно два типа скелетов S с четырьмя концами, которые могли бы иметь RM -реализацию:

- (1) углы между направлениями концов, выходящих с одной внутренней ячейки, равны $\pi/3$;
- (2) для одной пары концов, выходящих с одной внутренней ячейки, угол между их направлениями равен $\pi/3$, а для другой пары — $2\pi/3$.

Скелеты этих обоих типов имеют ровно один узел ветвления (рис. 6).

Рис. 6. Два типа возможных скелетов

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть S — скелет с четырьмя концами, обладающий RM -реализацией (относящийся к одному из двух типов, см. выше). Пусть Z и W — его концы, имеющие противоположные направления, а Z' и W' — два оставшихся конца. Тогда концы Z' и W' состоят из одинакового числа ячеек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что концы Z и Z' выходят из одной внутренней ячейки.

Пусть Δ_Z и Δ'_Z — первые две ячейки конца Z , считая от узла ветвления, а Δ_W и Δ'_W — первые две ячейки конца W , также считая от узла ветвления. Ясно, что прямые l_Z, l'_Z, l_W и l'_W , проведенные через отростки RM -реализации Γ скелета S , соответствующие отросткам из построенных четырех ячеек, параллельны между собой, и каждая из них содержит ровно одну вершину из множества M . Если упорядочить построенные четыре прямые так: l'_Z, l_Z, l_W, l'_W , то в полосе между произвольными последовательными прямыми не будет лежать никакая другая прямая

Рис. 7. Концы Z' и W' имеют одинаковую длину

из этого семейства. Кроме того, как в открытой полосе между l'_Z и l_Z , так и в открытой полосе между l_W и l'_W нет вершин из множества M (рис. 7).

Пусть K и L – концевые вершины из M , соответствующие концам Z и W . Эти вершины разбивают окружность S^1 , описанную вокруг M , на две дуги: δ и δ' . Ясно, что отростки, соответствующие ячейкам Δ'_Z и Δ_W , приходят на одну и ту же из этих дуг, скажем, на δ . Отростки же, соответствующие Δ_Z и Δ'_W , приходят на другую дугу, δ' . Кроме того, легко видеть, что конец Z' затягивает вершины из M , лежащие на δ , тогда как конец W' затягивает вершины из M , попавшие на δ' . При этом, все вершины из M , затянутые концом Z' , – это в точности все вершины из M , лежащие на δ в открытой полосе между прямыми l'_Z и l_W . Аналогично, все вершины из M , затянутые концом W' , – это в точности все вершины из M , лежащие на δ' в открытой полосе между прямыми l_Z и l'_W .

Напомним, что в полосе между параллельными прямыми, пересекающими окружность, лежат две дуги этой окружности, имеющие одинаковую величину. Пусть Π – открытая полоса между l_Z и l_W . Так как l_Z проходит ровно через одну вершину из M , и эта вершина лежит на δ' , а l_W также проходит ровно через одну вершину из M , и эта вершина лежит на δ , заключаем, что на открытых дугах $\delta \cap \Pi$ и $\delta' \cap \Pi$ лежат одинаковые количества точек из M . Эти количества мы обозначим через k .

Так как в открытой полосе между l'_Z и l_Z нет точек из M , и единственная точка из M , лежащая на l_Z , принадлежит δ' , то на части дуги δ , попавшей в открытую полосу между прямыми l'_Z и l_W , также лежит k точек. Аналогично, количество точек из M , лежащих на дуге δ' в открытой полосе между l_Z и l'_W , также равно k . Таким образом, концы Z' и W' затягивают одинаковые количества вершин из M , т.е. эти концы состоят из одинакового числа ячеек (напомним, что мы отождествляем концы скелета и соответствующие поддеревья в RM -реализации). Предложение 4.1 доказано.

Рассмотрим первую возможность.

ТЕОРЕМА 4.2. *Не существует скелета S с четырьмя концами, который обладал бы RM -реализацией, однако для каждой пары его концов, инцидентных одной и той же внутренней ячейке, их направления составляли бы угол в $\pi/3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Из теоремы 3.1 вытекает, что у S нет перегородки, поэтому S имеет ровно один узел ветвления.

Заметим, что концы скелета S так же, как и в теореме 4.1, можно разбить на две пары, составленные из концов, идущих под углом в $2\pi/3$ (на сей раз концы, формирующие каждую из этих пар, уже не выходят с одной внутренней ячейки). Ровно те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 4.1, примененные к таким парам концов скелета S , показывают, что при $n \geq 21$ теорема 4.2 имеет место. Таким образом, нам осталось рассмотреть случаи $12 \leq n \leq 20$.

Для этого воспользуемся сначала предложением 4.1. Пусть Z' и Z — концы из S , выходящие из одной внутренней ячейки, W — конец из S , имеющий противоположное направление концу Z , и W' — конец, противоположно направленный с Z' . Из предложения 4.1 вытекает, что как концы Z и W , так и концы Z' и W' состоят из одинакового числа ячеек. В частности, n должно быть четно. Таким образом, теорема доказана для всех нечетных n .

Для разбора оставшихся четных n обозначим через B боковину, порожденную концами Z' и Z , а через B' — боковину, порожденную Z и W' . Обозначим через b длину боковины B , а через b' длину боковины B' . Отметим, что раствор боковины B равен $\pi/3$, а раствор боковины B' равен $2\pi/3$.

Пусть $n = 12$. Тогда, очевидно, существует ровно один скелет S . Ясно, что $\text{ind}(B) = 1$. Но по следствию 2.1 n не должно делиться на 6, противоречие.

Пусть $n = 14$. Так как длины противоположно направленных концов равны между собой, существует, с точностью до симметрии, ровно одна возможность. Без ограничения общности, будем предполагать, что концы Z и W состоят из трех ячеек. Тогда $b = 2$. Ясно, что $\text{ind}(B) = 0$. Но по следствию 2.1 $b = [14/6] - 1 = 1$, противоречие.

Пусть $n = 16$. Возникает две возможности: или концы Z' и Z состоят из одинакового числа ячеек, равного 3, или, для определенности, Z' состоит из 2 ячеек, а Z — из 4. В первом случае $b = 2$, но $\text{ind}(B) = -1$, поэтому $b = [16/6] - 1 = 1$, противоречие. Во втором случае $b = 3$, но $\text{ind}(B) = 1$, и $b = [16/6] = 2$, противоречие.

Пусть $n = 18$. Легко видеть, что при любом выборе длин концов имеем $\text{ind}(B) = 0$ и $b = 3$. Но $b = [18/6] - 1 = 2$, противоречие.

И последний случай, $n = 20$. Возникает две возможности: оба конца Z' и Z состоят из четного числа ячеек, или оба эти конца состоят из нечетного числа ячеек. В первом случае $b = 4$, однако $\text{ind}(B) = 1$, поэтому $b = [20/6] = 3$, противоречие. Во втором случае $b = 3$, но $\text{ind}(B) = -1$, значит $b = [20/6] - 1 = 2$, противоречие.

Теорема 4.2 полностью доказана.

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно, пусть S — скелет, имеющий RM -реализацию и такой, что для одной пары его концов, скажем, для Z' и Z , выходящих с одной внутренней ячейки, угол между их направлениями равен $\pi/3$, а для другой пары, W' и W , — $2\pi/3$. Будем считать, что угол между направлениями концов Z и W' равен $\pi/3$. Ясно, что концы Z и W имеют противоположные направления (см. рис. 8).

Обозначим через B и B' боковины, порожденные парами концов (Z, Z') и (Z', W) , соответственно. Также обозначим через C и C' боковины, порожденные, соответственно, парами концов (W, W') и (W', Z) . Отметим, что концы из каждой пары встречаются последовательно при обходе границы скелета S в положительном направлении. Обозначим через b, b', c и c' длины боковин B, B', C

Рис. 8. Восемь возможных распределений четности концов

и C' , соответственно. Для удобства образуем вектор β длин боковин, положив $\beta = (b, b'c, c')$.

Пусть x – количество ячеек, составляющих конец Z , а y – количество ячеек конца Z' , равное в силу предложения 4.1 количеству ячеек конца W' , и, наконец, z – количество ячеек конца W . образуем вектор ν длин концов, положив $\nu = (x, y, z)$.

Легко видеть, что при любом выборе x и y , индекс одной из пар (Z, Z') и (W', Z) равен ± 1 , а другой – 0. Поэтому в силу следствия 2.1, если $n = 6p + r$, $0 \leq r \leq 5$, то $r \neq 0$ и $r \neq 3$.

Рассмотрим восемь возможных случаев, в зависимости от четностей x , y и z (рис. 8).

Пусть x и y – четны (рис. 8, случаи (1, 2)). Тогда $\text{ind}(B) = 1$, поэтому $b = \lfloor n/6 \rfloor$. Но $c' = b = \lfloor n/6 \rfloor$, а $\text{ind}(C') = 0$, значит, по следствию 2.1 или $r = 4$, или $r = 5$.

Пусть z – четно. Тогда $\text{ind}(B') = -1$, поэтому $b' = \lfloor n/3 \rfloor - 1$. Но $c = b' = \lfloor n/3 \rfloor - 1$, а $\text{ind}(C) = 0$, значит, по следствию 2.1 остаток от деления $2r$ на 6 меньше 3. Следовательно, $r = 4$. Итак, имеем: $n = 6p + 4$, $\beta = (p, 2p, 2p, p)$. Если $x = 2t$, то $y = 2(p-t)$ и $z = 2(p+t)$, таким образом, имеем: $\nu = (2t, 2(p-t), 2(p+t))$.

Пусть z – нечетно. Тогда $\text{ind}(C) = -1$, поэтому $c = \lfloor n/3 \rfloor - 1$. Но $b' = c + 1 = \lfloor n/3 \rfloor$, а $\text{ind}(B') = 0$, значит, остаток от деления $2r$ на 6 больше 3. Следовательно, $r = 5$. Итак, имеем: $n = 6p + 5$, $\beta = (p, 2p + 1, 2p, p)$. Если $x = 2t$, то $y = 2(p-t)$ и $z = 2(p+t) + 1$, таким образом, имеем: $\nu = (2t, 2(p-t), 2(p+t) + 1)$.

Пусть x – четно, а y – нечетно (рис. 8, случаи (3, 4)). Тогда $\text{ind}(C') = -1$, поэтому $c' = \lfloor n/6 \rfloor - 1$. Но $b = c' = \lfloor n/6 \rfloor - 1$, а $\text{ind}(B) = 0$, значит, или $r = 1$, или $r = 2$.

Пусть z – четно. Тогда $\text{ind}(C) = 1$, поэтому $c = \lfloor n/3 \rfloor$. Но $b' = c = \lfloor n/3 \rfloor$, а $\text{ind}(B') = 0$, значит, остаток от деления $2r$ на 6 больше 3. Следовательно, $r = 2$. Итак, имеем: $n = 6p + 2$, $\beta = (p-1, 2p, 2p, p-1)$. Если $x = 2t$, то $y = 2(p-t) - 1$ и $z = 2(p+t)$, таким образом, имеем: $\nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t))$.

Пусть z – нечетно. Тогда $\text{ind}(B') = 1$, поэтому $b' = \lfloor n/3 \rfloor$. Но $c = b' - 1 = \lfloor n/3 \rfloor - 1$, а $\text{ind}(C) = 0$, значит, остаток от деления $2r$ на 6 меньше 3. Следовательно, $r = 1$. Итак, имеем: $n = 6p + 1$, $\beta = (p-1, 2p, 2p-1, p-1)$. Если $x = 2t$, то $y = 2(p-t) - 1$ и $z = 2(p+t) - 1$, таким образом, имеем: $\nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t) - 1)$.

Пусть x – нечетно, а y – четно (рис. 8, случаи (5, 6)). Тогда $\text{ind}(C') = 1$, поэтому

$c' = [n/6]$. Но $b = c' - 1 = [n/6] - 1$, а $\text{ind}(B) = 0$, значит, или $r = 1$, или $r = 2$.

Пусть z — четно. Тогда $\text{ind}(B') = -1$, поэтому $b' = [n/3] - 1$. Но $c = b' = [n/3] - 1$, а $\text{ind}(C) = 0$, значит, остаток от деления $2r$ на 6 меньше 3. Следовательно, $r = 1$. Итак, имеем: $n = 6p + 1$, $\beta = (p - 1, 2p - 1, 2p - 1, p)$. Если $x = 2t + 1$, то $y = 2(p - t) - 2$ и $z = 2(p + t)$, таким образом, имеем: $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t))$.

Пусть z — нечетно. Тогда $\text{ind}(C) = -1$, поэтому $c = [n/3] - 1$. Но $b' = c + 1 = [n/3]$, а $\text{ind}(B') = 0$, значит, остаток от деления $2r$ на 6 больше 3. Следовательно, $r = 2$. Итак, имеем: $n = 6p + 2$, $\beta = (p - 1, 2p, 2p - 1, p)$. Если $x = 2t + 1$, то $y = 2(p - t) - 2$ и $z = 2(p + t) + 1$, таким образом, имеем: $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1)$.

И, наконец, пусть x и y — нечетны (рис. 8, случаи (7, 8)). Тогда $\text{ind}(B) = -1$, поэтому $b = [n/6] - 1$. Но $c' = b + 1 = [n/6]$, а $\text{ind}(C') = 0$, значит, или $r = 4$, или $r = 5$.

Пусть z — четно. Тогда $\text{ind}(C) = 1$, поэтому $c = [n/3]$. Но $b' = c = [n/3]$, а $\text{ind}(B') = 0$, значит, остаток от деления $2r$ на 6 больше 3. Следовательно, $r = 5$. Итак, имеем: $n = 6p + 5$, $\beta = (p - 1, 2p + 1, 2p + 1, p)$. Если $x = 2t + 1$, то $y = 2(p - t) - 1$ и $z = 2(p + t) + 2$, таким образом, имеем: $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2)$.

Пусть z — нечетно. Тогда $\text{ind}(B') = 1$, поэтому $b' = [n/3]$. Но $c = b' - 1 = [n/3] - 1$, а $\text{ind}(C) = 0$, значит, остаток от деления $2r$ на 6 меньше 3. Следовательно, $r = 4$. Итак, имеем: $n = 6p + 4$, $\beta = (p - 1, 2p + 1, 2p, p)$. Если $x = 2t + 1$, то $y = 2(p - t) - 1$ и $z = 2(p + t)$, таким образом, имеем: $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1)$.

Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть S — скелет с четырьмя концами, имеющий RM -реализацию на правильном n -угольнике. Пусть Z , Z' , W и W' — его последовательные концы, причем как первые два из них, так и последние два выходят из одной внутренней ячейки. Пусть углы между концами в парах (Z, Z') и (W', Z) равны $\pi/3$, а между концами в парах (Z', W) и (W, W') равны $2\pi/3$. Тогда S имеет ровно один узел ветвления, концы Z' и W' состоят из одинакового числа ячеек, и остаток от деления n на 6 не равен 0 и 3.

Более того, если $\beta = (b, b', c, c')$ — вектор длин боковин скелета S , порожденных, соответственно, парами (Z, Z') , (Z', W) , (W, W') и (W', Z) , а $\nu = (x, y, z)$ — вектор длин концов, где x , y и z равны количествам ячеек, составляющих, соответственно, концы Z , Z' и W , то возможны лишь следующие случаи:

при $n = 6p + 1$

- $\beta = (p - 1, 2p, 2p - 1, p - 1)$ и $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t) - 1)$;
- $\beta = (p - 1, 2p - 1, 2p - 1, p)$ и $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t))$;

при $n = 6p + 2$

- $\beta = (p - 1, 2p, 2p, p - 1)$ и $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t))$;
- $\beta = (p - 1, 2p, 2p - 1, p)$ и $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1)$;

при $n = 6p + 4$

- $\beta = (p, 2p, 2p, p)$ и $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t))$;

$$- \beta = (p-1, 2p+1, 2p, p) \text{ и } \nu = (2t+1, 2(p-t)-1, 2(p+t)+1);$$

при $n = 6p + 5$

$$- \beta = (p, 2p+1, 2p, p) \text{ и } \nu = (2t, 2(p-t), 2(p+t)+1);$$

$$- \beta = (p-1, 2p+1, 2p+1, p) \text{ и } \nu = (2t+1, 2(p-t)-1, 2(p+t)+2).$$

Таким образом, для доказательства основной теоремы нам осталось убедиться в том, что скелеты, перечисленные в теореме 4.3, также не имеют RM -реализации. Для этого мы воспользуемся критерием существования RM -реализации, полученным в [37], который мы сформулируем в следующем параграфе.

§ 5. Критерий существования RM -реализации

Предложение 1.3 и его усиленный вариант – теорема 2.1, позволили нам существенно сократить число скелетов из $\mathcal{WP}_5$ с четырьмя концами, претендующих на существование RM -реализации. Однако, этих утверждений оказывается недостаточно для окончательной проверки существования RM -реализации. В теореме 4.3 приведен полный список скелетов с четырьмя концами, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1, однако, как мы увидим ниже, ни один из них не имеет правильной минимальной реализации.

С аналогичной ситуацией мы уже сталкивались при описании всех скелетов с тремя концами, имеющих RM -реализацию, см. [37], [38]. Пользуясь слабым ограничением из предложения 1.3 на длины концов, мы получили 20 серий скелетов с тремя концами, из которых, как выяснилось при более тонкой проверке, лишь одна серия обладает RM -реализацией (предложение 1.11). Для этой проверки мы доказали в [37] критерий существования правильной минимальной реализации нелинейных скелетов, которым воспользуемся и в этот раз. Этот критерий основан на хорошо известном алгоритме Мелзака [20]. Напомним, в чем заключается этот алгоритм.

Пусть на плоскости фиксировано некоторое конечное множество M . Рассмотрим произвольное 2-дерево G , у которого множество вершин степени 1 совпадает с M . Цель алгоритма Мелзака – выяснить, существует ли плоское 2-дерево Γ , затягивающее M и эквивалентное (как граф) 2-дереву G . (Хванг в [15] показал, что если сеть Γ существует, то она единственна и может быть построена за линейное время. Фактически, Хванг предъявил улучшенный алгоритм Мелзака.)

Алгоритм Мелзака распадается на две части, *прямой* и *обратный ход*. При работе прямого хода перестраивается множество M и 2-дерево G . На i -ом шаге прямого хода получаются множество M_i и 2-дерево G_i такие, что M_i содержит на одну вершину меньше, чем M_{i-1} , а G_i – на два ребра меньше, чем G_{i-1} ; при этом M_i совпадает с множеством вершин степени 1 из G_i . Прямой ход работает до тех пор, пока во множестве M_i не останется ровно две точки, и поэтому 2-дерево G_i будет состоять ровно из одного ребра.

Более конкретно, если G_{i-1} состоит более чем из одного ребра, то среди его вершин степени 1, т.е. в M_{i-1} , можно выбрать пару вершин, скажем (a_i, b_i) , смежных с одной и той же вершиной v_i степени 3 (такую пару вершин, а также инцидентные этим вершинам два ребра, мы называем *усами*). Построим на вершинах a_i и b_i правильный треугольник одним из двух возможных способов и обозначим через c_i третью вершину этого треугольника. Тогда, множество M_i получается из M_{i-1}

заменой точек a_i и b_i на c_i . Если (e_i, e'_i) – усы в G_{i-1} соответствующие (a_i, b_i) (оба эти ребра инцидентны некоторой вершине v_i из G_{i-1}), то 2-дерево G_i получается из G_{i-1} выбрасыванием ребер e_i и e'_i и отождествлением вершины v_i с точкой c_i . Отметим, что Хванг [15] понял, как на i -ом шаге можно выбрать усы (a_i, b_i) , для которых, исходя из геометрии множества M_{i-1} , один из двух возможных правильных треугольников $a_i b_i c_i$ откидывается a priori.

Идея алгоритма Мелзака состоит в том, что 2-дерево G обладает минимальной реализацией на M тогда и только тогда, когда при некотором выборе правильных треугольников $a_i b_i c_i$ каждое 2-дерево G_i имеет минимальную реализацию Γ_i на M_i . При этом сеть Γ_{i-1} получается из сети Γ_i следующим образом.

Пусть $c_i \in M_i$ – та вершина степени 1 сети Γ_i , которая получилась на i -ом шаге прямого хода как третья вершина правильного треугольника $a_i b_i c_i$, $a_i, b_i \in M_{i-1}$. Обозначим через d_i единственную смежную с c_i вершину из Γ_i . Тогда необходимо выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned} &\text{точка } d_i \text{ одновременно лежит во внутренности угла } a_i c_i b_i \\ &\text{и вне окружности } S_i^1, \text{ описанной вокруг треугольника } a_i b_i c_i. \end{aligned} \quad (*)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что интервал $c_i d_i$ пересекается с окружностью S_i^1 в некоторой точке s_i , лежащей внутри угла $a_i c_i b_i$, и углы между отрезками $s_i d_i$, $s_i a_i$ и $s_i b_i$ равны между собой, т.е. эти отрезки составляют друг с другом углы величины 120° .

Так вот, сеть Γ_{i-1} получается из сети Γ_i заменой ребра $c_i d_i$ на три ребра: $d_i s_i$, $s_i a_i$ и $s_i b_i$. Отметим, что отрезок $d_i s_i$ принадлежит отрезку $d_i c_i$, т.е., фактически, мы “укорачиваем” ребро $d_i c_i$ до отрезка $d_i s_i$, и из вершины s_i выпускаем усы $(s_i a_i, s_i b_i)$. Описанная только что процедура называется *шагом обратного хода* алгоритма Мелзака.

В действительности, если последовательность правильных треугольников $a_i b_i c_i$ выбрана неправильно, или 2-дерево G не имеет минимальной реализации, затягивающей M , то на некотором шаге обратного хода условие (*) выполнено не будет. Если же условие (*) выполняется на каждом шаге обратного хода, и построенная в результате совокупность отрезков образует сеть (эти отрезки пересекаются только по своим концевым вершинам), то полученная сеть и будет искомой локально минимальной сетью Γ , затягивающей M и эквивалентной G .

Отметим, что в нашем случае, т.е. когда граница M искомой минимальной сети выпукла, в реализации прямого хода алгоритма Мелзака можно однозначно определить, какой из двух правильных треугольников $a_j b_j c_j$ можно не выбирать. Для этого достаточно построить плоское 2-дерево G' , эквивалентное G и целиком лежащее в выпуклой оболочке множества M (что с точностью до планарной эквивалентности можно сделать единственным образом). Если минимальная сеть Γ существует, то в силу предложения 1.2 она будет планарно эквивалентна G' . Однако у G' уже определены числа вращения для всех упорядоченных пар ребер, и, пользуясь эквивалентностью, можно задать число вращения для любой упорядоченной пары ребер 2-дерева G . Осталось заметить, что если e_j, e'_j и f_j – ребра из G_{j-1} , инцидентные одной вершине v , и (e_j, e'_j) – усы, инцидентные, соответственно, паре граничных вершин (a_j, b_j) из M_{j-1} , то третья вершина c_j того правильного треугольника из прямого хода алгоритма Мелзака, который можно *заведомо отбросить*, имеет вид $a_j e^{i\pi/3 \text{tw}(e_j, f_j)} + b_j e^{-i\pi/3 \text{tw}(e'_j, f_j)}$. Здесь мы воспользовались

комплексной записью точек плоскости и сформулированной в следующем параграфе леммой 6.2.

Применим теперь идеи, лежащие в основе алгоритма Мелзака, к случаю правильных границ. Отметим, что каждый конец скелета, так же, как и каждый нарост паркета, содержит усы. Пусть S – скелет из $\mathcal{WP}_3$, имеющий (правильную) минимальную реализацию Γ на правильном многоугольнике M . Так как случай скелетов без узлов ветвления полностью разобран в предложении 1.10, в дальнейшем везде будем предполагать, что S содержит хотя бы одну ячейку ветвления.

Пусть Z – произвольный конец скелета S . Обозначим через Γ_Z конец в Γ , соответствующий Z . Будем последовательно применять к Γ_Z шаг прямого хода алгоритма Мелзака до тех пор, пока не исчерпаем весь конец Γ_Z . В результате мы перестроим границу M , заменив в ней все вершины, зятые концом Γ_Z , на соответствующую одну вершину. Также мы перестроим скелет S , отрезав от него конец Z . Проведем эту операцию для всех концов Z_i скелета S . Перестроенные множество M и скелет S называются *остовами*, соответственно, *границы* M и *скелета* S .

В силу сделанных выше замечаний остоу скелета S должен иметь минимальную реализацию на остове границы M . Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Тем не менее, в [37] были обнаружены некоторые дополнительные условия на минимальную реализацию остоу скелета S , выполнение которых гарантирует существование минимальной реализации скелета S на множестве M . Перейдем к подробностям.

Пусть k – концевое ребро из Γ_Z , и k' – ребро крепления конца Γ_Z . Обозначим через γ единственный путь в Γ , соединяющий k и k' , и ориентируем его от k к k' . Напомним, что по предложению 1.9 Γ_Z является змеей. Далее, ясно, что все точки Штейнера змеи Γ_Z лежат на γ , и ориентация пути γ порождает на них естественный порядок. Обозначим последовательные точки Штейнера из Γ_Z через $s_1, \dots, s_p$, а инцидентные им отростки змеи Γ_Z – через $a_1, \dots, a_p$. Далее, обозначим через m_i точку из M , инцидентную a_i , а через m_0 – точку из M , инцидентную k .

Применим к концу-змее Γ_Z прямой ход алгоритма Мелзака. Для этого построим правильные треугольники $h_{i-1}m_ih_i$, $1 \leq i \leq p$, где $h_0 = m_0$, а вектор $h_{i-1}h_i$ получается из вектора $h_{i-1}m_i$ поворотом на угол $(-1)^{i+(1+\text{ind}(Z))/2}\pi/3$. Из правильности границы M вытекает замечательное свойство вершин h_k (см. [37]): вершины h_{2i+1} с нечетными номерами лежат на луче h_O , который получается из луча m_0m_1 поворотом на угол $(-1)^{1+(1+\text{ind}(Z))/2}\pi/3$ вокруг точки m_0 , а вершины h_{2i} с четными номерами – на луче h_E , который получается из луча h_O поворотом вокруг точки m_0 на угол $(-1)^{1+(1+\text{ind}(Z))/2}(\pi/3 + \alpha)$, где $\alpha = \pi/n$. Треугольник $h_{p-1}m_ph_p$ называется *главным характеристическим треугольником конца-змеи* Z , а точка h_p – его главной вершиной. Наконец, обозначим через u_O и u_E лучи, выходящие из точки $h_0 = m_0$ и противоположенные лучам h_O и h_E , соответственно. Меньший из углов, ограниченных этими лучами, называется *характеристическим углом конца-змеи* Z и обозначается через $U(Z)$ (рис. 9).

Как было показано в [37], конец Γ_Z может зятывать лишь те вершины из M , которые лежат вне характеристического угла $U(Z)$. Поэтому, как легко видеть, каждый конец скелета S , имеющего RM -реализацию, содержит не более $2\lfloor n/3 \rfloor - 1$ ячеек (напомним, что скелет S предполагается нелинейным, т.е. содержащим ячей-

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Если i нечетно, то $d_i = [m_i, m_{i+1}] \cap u_E$, а если i четно, то $d_i = [m_i, m_{i+1}] \cap u_O$.

Таким образом, конец d_i характеристической дуги обязан лежать на отрезке $[m_i, m_{i+1}]$.

Определим теперь важное понятие, играющее центральную роль в критерии RM -реализации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Замкнутое подмножество единичного круга, ограниченное дугой $m_{p-1}m_0m_p$ окружности S^1 , отрезками $m_{p-1}d_{p-1}$ и $m_p d_p$, а также характеристической дугой D_p конца-змеи Z , называется *концевой областью конца-змеи Z с началом в точке m_0* и обозначается через $E(Z, m_0)$ (рис. 11).

Рис. 11. Концевая область $E(Z, m_0)$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что определенные выше понятия характеристического угла, главного характеристического треугольника, H -допустимого угла, характеристической дуги и концевой области конца змеи Z можно ввести для произвольного регулярного скелета S , не обязательно имеющего RM -реализацию.

Пусть сначала S – произвольная диагональная триангуляция, ∂S – множество всех граничных ребер из S , n – количество ребер из ∂S , M – произвольное подмножество плоскости, состоящее из n точек, и G_S – двойственная сеть триангуляции S . Пусть $\pi: \partial S \rightarrow M$ – произвольное взаимно однозначное соответствие. Отображение π назовем *граничным*. Ясно, что π порождает естественное взаимно однозначное соответствие (которое мы обозначим той же буквой) между множеством ∂G_S граничных вершин из G_S и множеством M .

Пусть Γ_S – некоторая минимальная сеть с границей M , планарно эквивалентная G_S посредством эквивалентности τ . Иными словами, Γ_S – минимальная реализация триангуляции S (сети G_S) на множестве M . Ограничение эквивалентности τ на множество граничных вершин сети G_S задает очевидным образом граничное отображение из ∂G_S , а, значит, и из ∂S в M . Полученные граничные отображения также обозначим через τ и назовем *граничными отображениями, порожденными минимальной реализацией Γ_S* .

Пусть $\pi: \partial S \rightarrow M$ – произвольное граничное отображение. Мы говорим, что минимальная реализация Γ_S *уважает граничное отображение π* , если порожденное этой реализацией граничное отображение τ совпадает с π . Кроме того,

мы скажем, что *существует минимальная реализация для данного граничного отображения* $\pi: \partial S \rightarrow M$, если можно найти минимальную реализацию Γ_S на M , уважающую π .

Пусть теперь M — выпуклый n -угольник (точнее, множество вершин некоторого выпуклого n -угольника), Γ_S — минимальная реализация диагональной триангуляции S на M , и τ — порожденное Γ_S граничное отображение. Ориентируем ∂S и границу $\partial \text{conv}(M)$ многоугольника M в одном и том же направлении, например, против часовой стрелки. Легко видеть, что отображение τ удовлетворяет следующему свойству: оно переводит последовательные ребра из ∂S в последовательные точки из M . Это свойство является мотивацией следующего определения. Произвольное граничное отображение π из ∂S во множество M вершин выпуклого многоугольника назовем *правильным*, если оно переводит последовательные ребра из ∂S в последовательные точки из M .

Итак, каждое граничное отображение τ , порожденное минимальной реализацией Γ_S триангуляции S на выпуклом многоугольнике M , является правильным. Более того, если M — правильный n -угольник, то минимальная реализация триангуляции S на M существует или не существует одновременно для всех правильных граничных отображений.

Пусть теперь S — произвольный регулярный скелет, граница ∂S которого состоит из n ребер, и M — правильный n -угольник, вписанный в единичную окружность S^1 . Фиксируем некоторое правильное граничное отображение $\pi: \partial S \rightarrow M$. Пусть Z — один из концов скелета S . Используя граничное отображение π , упорядочим вершины из M , соответствующие граничным ребрам конца S , точно так же, как мы сделали это выше. Дословно повторяя проделанные построения, мы определим все “характеристические объекты” (характеристический угол конца Z и т. д.) и в этом случае.

Рассуждения, приводимые ниже, используют именно это определение характеристических объектов, не апеллируя к Γ_Z .

Построенные выше концевые области регулярного скелета S обладают важным свойством, сформулированным в следующей лемме (см. [38]).¹

ЛЕММА 5.1. *Концевые области концов-змей регулярного скелета попарно не пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z_1 — произвольный конец-змея регулярного скелета S , и пусть p — длина змей Z_1 (т.е. количество ячеек, составляющих Z). Предположим, что фиксировано некоторое правильное граничное отображение. Обозначим через m_0 ту вершину правильного многоугольника, которая соответствует концевому ребру из Z_1 . Рассмотрим концевую область $E(Z_1, m_0)$. Обозначим через b_1 ту часть границы концевой области, которая не лежит на окружности S^1 . Несложно проверить, что b_1 целиком лежит в угле $m_{p-1}m_pm_{p+1}$. Напомним, что при этом все вершины n -угольника, лежащие на замкнутой дуге $m_{p-1}m_0m_p$, должны соответствовать граничным ребрам конца-змей Z_1 .

Пусть Z_2 — некоторый другой конец-змея из S . Вершины n -угольника, соответствующие граничным ребрам из Z_2 при граничном отображении, обозначим через n_i , и пусть q — длина конца-змей Z_2 . Очевидно, дуги $m_{p-1}m_0m_p$ и $n_{q-1}n_0n_q$

¹Мы не включили в [38] известное нам тогда громоздкое доказательство этой леммы из экономии места. Здесь мы приведем эскиз более короткого доказательства.

не пересекаются. Из сказанного выше вытекает, что если углы $m_{p-1}m_pm_{p+1}$ и $n_{q-1}n_qn_{q+1}$ не пересекаются, то и концевые области $E(Z_1, m_0)$ и $E(Z_2, n_0)$ не пересекаются. Пересекаться же эти углы могут лишь если $m_{p-1} = n_{q+1}$, и $m_{p+1} = n_{q-1}$. Последнее, как нетрудно видеть, означает, что предпоследние, если считать от концевых ячеек, отростки концов Z_1 и Z_2 приходят в соседние вершины правильного многоугольника – в точки m_{p-1} и n_{q-1} . Из геометрии паркетов легко видеть, что такое возможно только если концы-змеи Z_1 и Z_2 инцидентны одной и той же внутренней ячейке, а направления этих концов составляют угол в 60° . Разберем этот последний случай.

Поскольку угол между направлениями концов Z_1 и Z_2 равен 60° , угол между отростком конца Z_1 , выходящим из m_{p-1} и ориентированным к точке Штейнера, и отростком конца Z_2 , выходящим из n_{q-1} и ориентированным к точке Штейнера, составляет 120° . Поэтому угол между отрезками m_pm_{p-1} и $m_{p-1}n_q$ и угол между отрезками m_pm_{p+1} и $m_{p+1}n_q$ не меньше чем $120^\circ - 2\alpha$, где $\alpha = \pi/n$.

Далее, по предложению 5.1 характеристическая дуга D_p^1 конца-змеи Z_1 пересекается с отрезком $m_{p-1}m_p$, поэтому имеет смысл говорить об угле между этим отрезком и дугой D_p^1 . Покажем, что угол между характеристической дугой D_p^1 конца-змеи Z_1 и отрезком $m_{p-1}m_p$ не превосходит $\pi/3$. Действительно, характеристическая дуга D_p^1 – это дуга окружности, описанной вокруг главного характеристического треугольника $h_{p-1}m_ph_p$ конца-змеи Z_1 . Угол между D_p^1 и m_pm_{p-1} равен, очевидно, половине угловой величины дуги $\overline{D}_p^1$, отсеченной от этой окружности отрезком $m_{p-1}m_p$ и содержащей D_p^1 . Но дуга $\overline{D}_p^1$ ограничена точкой m_p и не содержит других вершин правильного треугольника $h_{p-1}m_ph_p$, поэтому угловая величина дуги $\overline{D}_p^1$ меньше $2\pi/3$, что и требовалось.

Аналогично, угол между характеристической дугой D_q^2 конца-змеи Z_2 и отрезком $n_{q-1}n_q$ также не превосходит $\pi/3$.

Выпустим теперь из точки m_{p-1} внутрь угла $m_pm_{p-1}n_q$ луч r под углом $\pi/3$ к вектору $m_{p-1}m_p$, и пусть l – прямая, содержащая r . Из сказанного выше вытекает, что концевая область $E(Z_1, m_0)$ целиком лежит в полуплоскости, ограниченной прямой l и содержащей m_0 (в этой полуплоскости лежит отрезок $m_{p-1}m_p$ и дуга D_p^1). Концевая область $E(Z_2, n_0)$, в свою очередь, целиком лежит во второй полуплоскости, ограниченной прямой l (в этой полуплоскости лежат отрезки $n_{q+1}n_q$ и n_qn_{q-1}). Поэтому концевые области $E(Z_1, m_0)$ и $E(Z_2, n_0)$ не пересекаются. Лемма доказана.

Построим для каждого конца-змеи скелета S концевую область с началом в соответствующей точке из M (напомним, что правильное граничное отображение π предполагается фиксированным).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область, полученная из единичного круга после выбрасывания всех концевых областей, соответствующих концам-змеям скелета S , называется *характеристической областью* и обозначается через $W(S)$.

Выбросим теперь из скелета S все его концы-змеи. Полученный паркет называется *остовом скелета* S и обозначается через S' . Далее, выбросим из множества M все точки, которые при граничном отображении π соответствуют граничным ребрам концов-змеи скелета S , и к полученному множеству добавим главные вершины главных характеристических треугольников этих концов. Полученное

в результате множество называется *остовом множества M* и обозначается через M' . Ясно, что граничное отображение π порождает граничное отображение π' , устанавливающее взаимно однозначное соответствие между граничными ребрами паркета S' и точками остова M' следующим образом. На тех граничных ребрах из S' , которые являются одновременно и граничными ребрами скелета S , отображение π' совпадает с π , а оставшиеся граничные ребра из S' , которые, очевидно, совпадают с ребрами крепления концов-змей скелета S , отображение π' переводит в главные вершины главных характеристических треугольников соответствующих концов. В [38] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть S – регулярный скелет из $\mathcal{W}\mathcal{P}$. Пусть, кроме того, фиксировано некоторое правильное граничное отображение π множества граничных ребер скелета S на множество вершин M правильного многоугольника. Тогда RM -реализация скелета S существует, если и только если существует минимальная реализация Γ' остова S' скелета S , затягивающая остов M' множества M по граничному отображению π' , такая что*

- (1) *граничные ребра сети Γ' , инцидентные главным вершинам главных характеристических треугольников концов-змей скелета S , лежат в соответствующих H -допустимых углах;*
- (2) *все точки Штейнера сети Γ' лежат в характеристической области $W(S)$ скелета S .*

§6. Скелеты с четырьмя концами. II

В настоящем параграфе мы используем критерий из теоремы 5.1 для завершения начатого в §4 доказательства основной теоремы. Напомним, что для этого в силу теоремы 4.3 осталось убедиться в отсутствии RM -реализации у регулярных скелетов, вошедших в серии из теоремы 4.3.

Прежде всего отметим, что во всех интересующих нас восьми случаях остов соответствующего скелета S состоит из двух ячеек, а остов множества вершин правильного n -угольника – из четырех точек – главных вершин главных характеристических треугольников концов-змей скелета S . Поэтому нам необходимо построить соответствующие четырехугольники, затянуть их минимальным 2-деревом соответствующей топологии, и, если такое дерево существует, проверить, удовлетворяет ли оно свойствам (1) и (2) теоремы 5.1.

Предположим для определенности, что узел ветвления скелета S расположен на плоскости так, как показано на рис. 12. (Оставшаяся вторая возможность получается из этой отражением плоскости.)

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие переобозначения. Последовательные концы Z, Z', W, W' скелета S будем обозначать, соответственно, через Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ; длину боковины, пересекающей с двумя последовательными концами Z_i и Z_j , обозначим через b_{ij} , а длину конца Z_i – через z_i . Далее, мы, как и выше, предполагаем, что правильное граничное отображение фиксировано, и обозначим через k_i те точки из множества M вершин правильного многоугольника, которые соответствуют концевым ребрам скелета S . Главную вершину главного характеристического треугольника конца Z_i обозначим через H_i . Таким образом, остов M' множества M имеет вид: $M' = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.

Рис. 12. Скелеты из теоремы 4.3

Найдем точки H_i . Будем проводить вычисления в комплексной форме, отождествляя точки плоскости $\mathbb{R}^2$ с соответствующими комплексными числами. При этом будем предполагать, что центр единичной окружности, в которую вписан правильный многоугольник, совпадает с началом координат, а точка k_3 – с единицей (см. рис. 13). Обозначим через ℓ_i расстояние от концевой вершины k_i до соответствующей главной вершины H_i главного характеристического треугольника. Напомним, что через α мы обозначаем величину π/n . Тогда нетрудно вычислить, что:

$$\begin{aligned} H_1 &= e^{-2i(b_{12}+b_{23})\alpha} (1 + \ell_1 e^{-i(\pi/6+e(z_1)\alpha)}), \\ H_2 &= e^{-2ib_{23}\alpha} (1 + \ell_2 e^{i(\pi/6+e(z_2)\alpha)}), \\ H_3 &= 1 + \ell_3 e^{-i(\pi/6+e(z_3)\alpha)}, \\ H_4 &= e^{2ib_{34}\alpha} (1 + \ell_4 e^{-i(\pi/6+e(z_4)\alpha)}), \end{aligned}$$

где $e(z)$ – функция четности, равная 0, если z четно, и 1, если z нечетно. Расстояние от концевой вершины k некоторого конца-змеи до главной вершины главного характеристического треугольника этого конца вычислено нами в [37]. А именно, имеет место следующая лемма.

Рис. 13. Остов $M' = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$

ЛЕММА 6.1. Пусть Z – некоторый конец-змея скелета S , состоящий из p ячеек. Обозначим через k соответствующую концевую вершину и через H – главную вершину главного характеристического треугольника конца Z . Тогда расстояние ℓ от k до H может быть вычислено так:

$$\ell = \frac{2}{\sin \alpha} \sin\left(\left[\frac{p+1}{2}\right]\right) \sin\left(\left[\frac{p+2}{2}\right]\right),$$

где $\alpha = \pi/n$, а через $[z]$ обозначена целая часть числа z .

Нам нужно построить на множестве M' реализацию Γ' двойственной сети остова S' скелета S . Это минимальное 2-дерево имеет две точки Штейнера, одна из которых, скажем s , должна быть соседней с вершинами H_1 и H_2 , а другая, s' – с вершинами H_3 и H_4 . Условие (1) теоремы 5.1 состоит в том, что граничные ребра сети Γ' должны лежать в соответствующих H -допустимых углах концов-змей скелета S . Чтобы проверить выполнение этого условия, мы построим для каждого граничного ребра с помощью алгоритма Мелзака линию Симпсона, содержащую это ребро, и проверим, лежит ли она в соответствующем H -допустимом угле. Мы проделали эту работу с помощью пакета *Mathematica*[®] для нескольких пробных значений $n = 6m + r$ и установили, что если остаток r равен 1 или 4, то условие (1) теоремы 5.1 не выполняется для граничного ребра сети Γ' , инцидентного вершине H_4 , а если остаток r равен 2 или 5, то для граничного ребра, инцидентного вершине H_2 . Этот компьютерный эксперимент подсказал нам, что достаточно проверять условие (1) теоремы 5.1 только для указанных случаев.

Для вычисления линий Симпсона нам понадобится следующая очевидная лемма.

ЛЕММА 6.2. Пусть A и B – две произвольные точки на стандартно ориентированной плоскости. Тогда вершина C правильного треугольника ABC такого, что репер, составленный из векторов AB и AC , имеет положительную ориентацию, может быть найдена так:

$$C = e^{-i\pi/3}A + e^{i\pi/3}B.$$

Воспользуемся этой леммой для вычисления линий Симпсона, содержащих граничные ребра сети Γ' , инцидентные вершинам H_2 и H_4 . Обозначим через σ_2 и σ_4 векторы с началом, соответственно, в точках H_2 и H_4 , и концами – в оставшихся точках этих линий Симпсона. Тогда имеем пару противоположенных векторов:

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= H_4 - H_2 + e^{-i\pi/3}(H_1 - H_3), \\ \sigma_4 &= H_2 - H_4 + e^{-i\pi/3}(H_3 - H_1).\end{aligned}$$

Пусть α_i обозначает H -допустимый угол с вершиной в H_i . Напомним, что угол α_i по определению ограничен лучом $H_i k_i$ и его образом при повороте на $\pm\alpha$ вокруг точки H_i , где выбор знака зависит от индекса конца Z_i , или, что равносильно, от его четности. Обозначим через n_i единичный вектор, сонаправленный с $H_i k_i$, а через n_i^α – единичный вектор, сонаправленный с другой стороной угла α_i .

Для проверки того, лежит ли линия Симпсона σ_i в H -допустимом угле α_i с вершиной в H_i , можно рассмотреть определители δ_i и δ_i^α матриц, один из столбцов которых составлен из координат вектора σ_i , а другой – из координат вектора n_i и n_i^α , соответственно. При правильном выборе порядка столбцов получим условие: $\delta_i > 0$ и $\delta_i^\alpha > 0$. В нашем случае эти определители удобно вычислять в комплексной форме в соответствии со следующей леммой.

ЛЕММА 6.3. Пусть z и w – произвольные комплексные числа. Тогда число $\operatorname{Im}(\bar{z}w)$, где чертой обозначено комплексное сопряжение, совпадает с определителем матрицы, составленной из векторов-столбцов z и w .

Из геометрии паркетов S и из леммы 6.3 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 6.4. Для того чтобы концевое ребро минимальной реализации Γ' остова скелета S , инцидентное граничной вершине H_2 , лежало в H -допустимом угле конца Z_2 , необходимо, чтобы число $\delta_2 = \operatorname{Im}(\bar{\sigma}_2 n_2)$ было положительным.

Для того чтобы концевое ребро минимальной реализации Γ' остова скелета S , инцидентное граничной вершине H_4 , лежало в H -допустимом угле конца Z_4 , необходимо, чтобы число $\delta_4^\alpha = \operatorname{Im}(\bar{\sigma}_4 n_4^\alpha)$ было положительным.

Отметим, что в лемме 6.4 можно сформулировать еще 6 аналогичных утверждений, однако, как показывает компьютерный эксперимент, для завершения доказательства основной теоремы достаточно проверить невыполнение именно тех двух условий из леммы 6.4.

Вычислим δ_2 и δ_4^α . Для этого запишем сначала векторы n_2 и n_4^α . Имеем:

$$n_2 = -e^{i(-2b_{23}\alpha + \pi/6 + e(z_2)\alpha)} \quad \text{и} \quad n_4^\alpha = -e^{i(2b_{34}\alpha - \pi/6 - e(z_4)\alpha + \alpha)}.$$

Вычислим δ_2 для каждого из регулярных скелетов, вошедших в список теоремы 4.3 для $n = 6p + 1$ и $n = 6p + 4$, и δ_4^α – для каждого из регулярных скелетов из теоремы 4.3 для $n = 6p + 2$ и $n = 6p + 5$. Поскольку каждая из восьми серий теоремы 4.3 зависит от двух параметров – p и t , мы получим восемь функций от p и t . Мы покажем, что каждая из полученных восьми функций отрицательна при всех допустимых парах (p, t) . Выпишем эти функции. Пусть, как и выше, $\nu = (z_1, z_2, z_3)$ и $\alpha = \pi/n$.

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t) - 1), 1 \leq t \leq p-2, p \geq 3$.

$$\begin{aligned} \delta_2 = 2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{6} & \left(\sin \alpha \sin \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{6} \right. \\ & \left. - \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{6} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} + 2\alpha t \right) - \cos \frac{\alpha}{6} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - 2\alpha t \right) \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2t + 1, 2(p-t) - 2, 2(p+t)), 1 \leq t \leq p-2, p \geq 3$.

$$\begin{aligned} \delta_2 = 2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{6} & \left(\cos \frac{\alpha}{6} + \cos \left(\frac{5\alpha}{6} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \alpha - \cos \frac{\alpha}{6} \cos \left(\frac{2\alpha}{3} + 2\alpha t \right) \right. \\ & \left. - \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{6} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t \right) \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t)), 1 \leq t \leq p-2, p \geq 3$.

$$\begin{aligned} \delta_4^\alpha = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) & - \sqrt{3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + \csc \alpha \left(\sin \frac{4\alpha}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t \right) \right. \\ & \left. - \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t \right) \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\delta_4^\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cos\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + \csc \alpha \left(\frac{3}{2} \sin \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{5\alpha}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t)), 1 \leq t \leq p - 1, p \geq 2$.

$$\delta_2 = \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(4 \cos \frac{\alpha}{3} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \alpha - 2 \sin\left(\frac{2\alpha}{3} - \alpha t\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \alpha t\right) - \sqrt{3} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\delta_2 = \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(1 - 2 \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \alpha - \cos\left(\frac{2\alpha}{3} + 2\alpha t\right) - \sqrt{3} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t) + 1), 1 \leq t \leq p - 1, p \geq 2$.

$$\delta_4^\alpha = \frac{1}{2} - \cos \frac{2\alpha}{3} - \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \csc \alpha \left(\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{3} + \cos \frac{2\alpha}{3} \sin \alpha - \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\delta_4^\alpha = -\cos \frac{\alpha}{3} + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \csc \alpha \left(\sin \frac{\alpha}{3} + \cos \frac{\alpha}{3} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Отметим, что ограничения на t и p вытекают из требования, в соответствии с которым рассматриваемый паркет является скелетом, т.е. каждый его конец состоит не менее чем из двух ячеек.

Легко видеть, что каждая из только что выписанных функций может быть представлена в виде $A \cos(B + 2\alpha t)$, где A и B — функции, зависящие только от α , т.е. не зависящие от t . Поэтому, при фиксированном α , на каждом отрезке величины меньше чем $\pi/(2\alpha)$ (последняя величина равна половине периода для $A \cos(B + 2\alpha t)$) каждая такая функция имеет не более одного экстремума. Мы покажем, что при каждом допустимом α (напомним, что $\alpha = \pi/n$, а на n имеются естественные ограничения, вытекающие из ограничений на p) рассматриваемые функции или монотонны по t , или на области изменения параметра t имеют локальный минимум. Иными словами, эти функции не могут иметь локального максимума в области изменения параметра t .

Для этого вычислим вторую производную по t от каждой из этих функций. Оказывается, эти вторые производные неотрицательны, что и доказывает отсутствие локальных максимумов. Ниже приведен список искомых вторых производных.

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t) - 1), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} - 2\alpha t\right) + \sqrt{3} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t)), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(\cos\left(\frac{2\alpha}{3} + 2\alpha t\right) + \sqrt{3} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t)), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc \alpha \left(-\sqrt{3} \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) + 2 \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc \alpha \left(-\sqrt{3} \cos\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) + 2 \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t)), 1 \leq t \leq p - 1, p \geq 2$.

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} - 2\alpha t\right) + \sqrt{3} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(\cos\left(\frac{2\alpha}{3} + 2\alpha t\right) + \sqrt{3} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t) + 1), 1 \leq t \leq p - 1, p \geq 2$.

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc \alpha \left(-\sqrt{3} \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) + 2 \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2), 1 \leq t \leq p - 2, p \geq 3$.

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc \alpha \left(-\sqrt{3} \cos\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) + 2 \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

Легко видеть, что каждая из этих вторых производных неотрицательна при любых допустимых α и t , что и требовалось.

Таким образом, каждая исследуемая функция δ_2 и δ_4^α принимает наибольшее значение на концах отрезка изменения параметра t . Оказывается, это наибольшее значение достигается на правом конце отрезка. Обозначим через ε_2 (через ε_4^α) разность между значениями соответствующей функции δ_2 (функции δ_4^α) на правом и левом концах отрезка изменения параметра t . Оказывается, все эти функции ε_2 и

ε_4^α неотрицательны при всех допустимых α . Приведем список функций ε_2 и ε_4^α во всех интересующих нас случаях.

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t) - 1), 0 < \alpha \leq \pi/19$.

$$\varepsilon_2 = 4 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{6} \cos \frac{\alpha}{6} \sin \left(\frac{19\alpha}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \left(\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{6} + \sin \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t)), 0 < \alpha \leq \pi/19$.

$$\varepsilon_2 = 4 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{6} \cos \frac{\alpha}{6} \sin \left(\frac{19\alpha}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \left(-\sqrt{3} \sin \frac{5\alpha}{6} + \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t)), 0 < \alpha \leq \pi/20$.

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc \alpha \cos \left(\frac{10\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \left(-\sqrt{3} + 2 \cos \alpha \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1), 0 < \alpha \leq \pi/20$.

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc \alpha \cos \left(\frac{10\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \left(-\sqrt{3} \cos \alpha + 2 \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t)), 0 < \alpha \leq \pi/16$.

$$\varepsilon_2 = 8 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{8\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1), 0 < \alpha \leq \pi/22$.

$$\varepsilon_2 = 2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \sin \left(\frac{11\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \left(-\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{3} + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t) + 1), 0 < \alpha \leq \pi/17$.

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{17\alpha}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \left(-\sqrt{3} + 2 \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2), 0 < \alpha \leq \pi/23$.

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{23\alpha}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \left(-\sqrt{3} + 2 \sin \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Несложно показать, что каждая из этих функций неотрицательна при всех допустимых α . Приведем пример доказательства, скажем, для первого случая. Ясно, что $\sqrt{3} \sin(\alpha/6) + \sin(3\alpha/2 - \pi/6)$ является возрастающей функцией при $0 < \alpha \leq \pi/19$, поэтому

$$\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{6} + \sin \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \leq \left(\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{6} + \sin \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \Big|_{\alpha=\pi/19} \approx -0.224378 < 0.$$

Кроме того, $\sin(19\alpha/6 - \pi/6) \leq 0$ при $0 < \alpha \leq \pi/19$, откуда немедленно вытекает неотрицательность функции ε_2 для первого случая. Неотрицательность остальных функций доказывается аналогично.

Итак, нам осталось проверить, что каждая из рассматриваемых функций δ_2 и δ_4^α , в которую вместо параметра t подставлено его максимальное допустимое значение (полученные функции мы обозначим через φ_2 и φ_4^α соответственно), при всех допустимых α принимает лишь отрицательные значения.

Приведем список функций φ_2 и φ_4^α в интересующих нас случаях.

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2(p-2), 3, 4p-5), 0 < \alpha \leq \pi/19$.

$$\begin{aligned} \varphi_2 = 2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} & \left(\cos \frac{\alpha}{6} \cos \alpha + \sin \alpha \sin \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \right. \\ & \left. - \cos \frac{\alpha}{6} \left(-\cos \left(\frac{14\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\frac{10\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2(p-2) + 1, 2, 4p-4), 0 < \alpha \leq \pi/19$.

$$\begin{aligned} \varphi_2 = 2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} & \left(\cos \frac{\alpha}{6} + \cos \left(\frac{5\alpha}{6} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \alpha \right. \\ & \left. + \cos \frac{\alpha}{6} \left(-\cos \left(\frac{11\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2(p-2), 3, 4p-4), 0 < \alpha \leq \pi/20$.

$$\begin{aligned} \varphi_4^\alpha = \csc \alpha \sin \frac{2\alpha}{3} & \left(\cos \frac{8\alpha}{3} - 2 \cos \frac{2\alpha}{3} \cos \frac{8\alpha}{3} \right. \\ & \left. - 2 \cos \frac{7\alpha}{3} \cos \left(\frac{5\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\frac{4\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2(p-2) + 1, 2, 4p-3), 0 < \alpha \leq \pi/20$.

$$\begin{aligned} \varphi_4^\alpha = \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} & \left(-2 \cos \alpha \cos \left(\frac{7\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \right. \\ & \left. - \sqrt{3} \cos \left(\frac{8\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2(p-1), 2, 4p-2), 0 < \alpha \leq \pi/16$.

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} & \left(4 \cos \frac{\alpha}{3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \alpha \right. \\ & \left. + \sqrt{3} \sin \left(\frac{7\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \sin \left(\frac{4\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{7\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2(p-2) + 1, 3, 4p-3), 0 < \alpha \leq \pi/22$.

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} & \left(-2 \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \alpha \right. \\ & \left. + \sqrt{3} \sin \left(\frac{10\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \sin \left(\frac{7\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2(p-1), 2, 4p-1), 0 < \alpha \leq \pi/17$.

$$\varphi_4^\alpha = 2 \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(-\cos \frac{\alpha}{3} \cos(3\alpha) + \cos \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin \frac{\alpha}{6} \sin \frac{\alpha}{2} - \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \sin(3\alpha) \right).$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2(p-2) + 1, 3, 4p-2), 0 < \alpha \leq \pi/23$.

$$\varphi_4^\alpha = \csc \alpha \sin \frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cos\left(\frac{11\alpha}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\alpha}{6} \sin\left(\frac{5\alpha}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin \frac{4\alpha}{3} \sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

Покажем, что эти функции φ_2 и φ_4^α отрицательны при всех допустимых α . Для этого, очевидно, достаточно показать, что последний множитель каждой из этих функций меньше нуля. Соответствующие последние множители функций φ_2 и φ_4^α обозначим через ψ_2 и ψ_4^α . Рассмотрим каждый из восьми случаев.

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2(p-2), 3, 4p-5), 0 < \alpha \leq \pi/19$.

$$\begin{aligned} \psi_2 &< \left(\cos \frac{\alpha}{6} \cos \alpha \right) \Big|_{\alpha=0} + \left(\sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \right) \Big|_{\alpha=\pi/19} \\ &\quad - \cos \frac{\alpha}{6} \Big|_{\alpha=\pi/19} \left(-\cos\left(\frac{14\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{10\alpha}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &\approx -0.854484 < 0. \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 1, \nu = (2(p-2) + 1, 2, 4p-4), 0 < \alpha \leq \pi/19$. Отметим сначала, что

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{6} \left(-\cos\left(\frac{11\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \right) \\ = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{23\alpha}{6} - \frac{\pi}{3}\right) \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{13\alpha}{6} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{5\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

и все четыре функции в правой части равенства монотонно убывают при $0 < \alpha \leq \pi/19$, поэтому эта часть функции ψ_2 ограничена сверху своим значением в точке $\alpha = 0$, т.е. при $0 < \alpha \leq \pi/19$ имеем:

$$\cos \frac{\alpha}{6} \left(-\cos\left(\frac{11\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \right) < -2.$$

С другой стороны, оставшаяся часть функции ψ_2 , т.е.

$$\cos \frac{\alpha}{6} + \cos\left(\frac{5\alpha}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \alpha,$$

меньше 2, откуда и вытекает, что $\psi_2 < 0$ при $0 < \alpha \leq \pi/19$.

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2(p - 2), 3, 4p - 4), 0 < \alpha \leq \pi/20$.

$$\begin{aligned} \psi_4^\alpha &< \cos \frac{8\alpha}{3} \Big|_{\alpha=0} - \left(2 \cos \frac{2\alpha}{3} \cos \frac{8\alpha}{3} \right) \Big|_{\alpha=\pi/20} \\ &\quad - \left(2 \cos \frac{7\alpha}{3} \cos \left(\frac{5\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} + \sqrt{3} \cos \left(\frac{4\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \Big|_{\alpha=\pi/20} \\ &\approx -0.169804 < 0. \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 2, \nu = (2(p - 2) + 1, 2, 4p - 3), 0 < \alpha \leq \pi/20$.

$$\psi_4^\alpha < \psi_4^\alpha \Big|_{\alpha=0} = -1 < 0.$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2(p - 1), 2, 4p - 2), 0 < \alpha \leq \pi/16$.

$$\begin{aligned} \psi_2 &< \left(4 \cos \frac{\alpha}{3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} \sin \alpha \Big|_{\alpha=\pi/16} \\ &\quad + \left(\sqrt{3} \sin \left(\frac{7\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \sin \left(\frac{4\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{7\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &\approx -0.324187 < 0. \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 4, \nu = (2(p - 2) + 1, 3, 4p - 3), 0 < \alpha \leq \pi/22$.

$$\psi_2 < \psi_2 \Big|_{\alpha=0} = -1 < 0.$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2(p - 1), 2, 4p - 1), 0 < \alpha \leq \pi/17$.

$$\begin{aligned} \psi_4^\alpha &< - \left(\cos \frac{\alpha}{3} \cos(3\alpha) \right) \Big|_{\alpha=\pi/17} + \cos \frac{\alpha}{2} \Big|_{\alpha=0} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \Big|_{\alpha=\pi/17} \\ &\quad - \left(\sin \frac{\alpha}{6} \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \sin(3\alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &\approx -0.270831 < 0. \end{aligned}$$

Случай $n = 6p + 5, \nu = (2(p - 2) + 1, 3, 4p - 2), 0 < \alpha \leq \pi/23$.

$$\psi_4^\alpha < \psi_4^\alpha \Big|_{\alpha=0} = -1 < 0.$$

Таким образом, основная теорема полностью доказана.

Мы надеемся, что с помощью техники, развитой в настоящей работе, задача описания скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию, может быть решена полностью, т.е. могут быть также разобраны случаи скелетов с пятью и шестью концами.

Список литературы

1. *Clark R. C.* Communication networks, soap films and vectors // *Phys. Ed.* 1981. V. 16. P. 32–37.
2. *Cockayne E. J.* On the Steiner problem // *Canad. J. Math.* 1967. V. 10. P. 431–450.
3. *Dijkstra E. W.* A note on two problems with connection with graphs // *Numer. Math.* 1959. V. 1. №5. P. 269–271.
4. *Du D. Z., Hwang F. K.* A New Bound for the Steiner Ratio // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. V. 278. №1. P. 137–148.
5. *Du D. Z., Hwang F. K.* A Proof of Gilbert–Pollak's Conjecture on the Steiner Ratio // *DIMACS Technical Report.* 1990. №90–72.
6. *Du D. Z., Hwang F. K.* An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert–Pollak's Conjecture on the Steiner Ratio // *Proc. of the 31st annual symp. on found. of comp. science,* 1990.
7. *Du D. Z., Hwang F. K., Chao S. C.* Steiner minimal trees for points on a circle // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1985. V. 95. №4. P. 613–618.
8. *Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F.* Steiner minimal trees for points on a zig-zag lines // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. V. 278. №1. P. 149–156.
9. *Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F.* Steiner minimal trees for Regular Polygons // *Disc. and Comp. Geometry.* 1987. V. 2. P. 65–84.
10. *Du D. Z., Hwang F. K., Yao E. N.* The Steiner ratio conjecture is true for five points // *J. Combin. Th. Ser. A38.* 1985. P. 230–240.
11. *Du D. Z., Hwang F. K., Song G. D., Ting G. T.* Steiner minimal trees on sets of four points // *Discr. and Comp. Geometry.* 1987. V. 2. P. 401–414.
12. *Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S.* Some *NP*-complete geometric problems // *Eighth Annual Symp. on Theory of Comput,* 1976. P. 10–22.
13. *Gilbert E. N., Pollak H. O.* Steiner minimal trees // *SIAM J. Appl. Math.* 1968. V. 16. №1. P. 1–29.
14. *Hildebrandt S., Tromba A.* Mathematics and optimal form. New York: An imprint of Scientific American Books, Inc., 1984.
15. *Hwang F. K.* A linear time algorithm for full Steiner trees // *Oper. Res. Letter.* 1986. V. 5. P. 235–237.
16. *Hwang F. K., Weng J. F.* Hexagonal coordinate Systems and Steiner minimal trees // *Disc. Math.* 1986. V. 62. P. 49–57.
17. *Hwang F. K., Richards D., Winter P.* The Steiners Tree Problem. Elsevier Science Publishers (to appear).
18. *Jarník V., Kössler M.* O minimalnich grafeth obeahujicich n danijch bodu // *Cas. Pest. Mat. a Fys.* 1934. V. 63. P. 223–235.
19. *Kruskal J. B.* On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1956. V. 7. P. 48–50.
20. *Melzak Z. A.* On the problem of Steiner // *Canad. Math. Bull.* 1960. V. 4. P. 143–148.
21. *Melzak Z. A.* Companion to concrete mathematics. New York: Wiley-Interscience, 1973.
22. *Pollak H. O.* Some remarks on the Steiner problem // *J. Combin. Thy. Ser. A24.* 1978. P. 278–295.
23. *Preparata F., Shamos M.* Computational Geometry. An introduction. New York: Springer-Verlag, 1985.
24. *Prim R. C.* Shortest connecting networks and some generalizations // *BSTJ.* 1957. V. 36. P. 1389–1401.
25. *Rubinstein J. H., Thomas D. A.* The Steiner ratio conjecture for six points // *J. Combin. Thy. Ser. A58.* 1989. P. 54–77.
26. *Shamos M. I.* Computational Geometry Ph. D. Thesis: Dept. of Comput. Sci. Yale Univ., 1978.
27. *Smith W. D.* How to find Steiner minimal trees in Euclidean *d*-space // *Algoritmica* (to appear).
28. *Емеличев В. А. и др.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
29. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.

30. *Фоменко А. Т.* Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984.
31. *Фоменко А. Т.* Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982.
32. *Тужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
33. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Решение задачи Штейнера для выпуклых границ // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 207–208.
34. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // Матем. сб. 1991. Т. 182. №12. С. 1813–1844.
35. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. 1992. Т. 47. №2. С. 53–115.
36. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* The Steiner problem for convex boundaries, I: general case // Adv. Soviet Math. 1993. V. 15. P. 15–92.
37. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* The Steiner problem for convex boundaries, II: the regular case // Adv. Soviet Math. 1993. V. 15. P. 93–131.
38. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. N.W., Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
39. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Топологии локально минимальных плоских бинарных деревьев // УМН. 1994. Т. 49. №6. С. 191–192.
40. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Взвешенные минимальные бинарные деревья // УМН. 1995. №3. С. 155–156.
41. *Иванов А. О., Истаков И. В., Тужилин А. А.* Минимальные сети на правильных многоугольниках: реализация линейных паркетов // Вестник МГУ. Сер. матем. 1993. №6. С. 77–80.
42. *Иванов А. О., Птицына И. В., Тужилин А. А.* Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах // Матем. сб. 1992. Т. 183. №12. С. 3–44.
43. *Шклянюк И. В.* Одномерная проблема Плато на поверхностях // Вестник МГУ. Сер. матем. 1989. №3. С. 8–11.
44. *Kuhn H. W.* Steiner's problem revisited // In the book Studies in Optimization. Ser. Studies in Math / ed. G. B. Dantzig, B. C. Eaves. V. 10. Math. Assoc. Amer., 1975. P. 53–70.
45. *Zacharias M.* Encyklopädie der Mathematischen // Wissenschaften. V. III AB9.