Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Гаркави, В. А. Медведев, С. Я. Хавинсон, О существовании наилучшего равномерного приближения функции нескольких переменных суммой функций меньшего числа переменных, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 5, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:02:38

УДК 517.5

А. Л. Гаркави, В. А. Медведев, С. Я. Хавинсон

О существовании наилучшего равномерного приближения функции нескольких переменных суммой функций меньшего числа переменных

Пусть заданы отображения φ_i множества X на множества X_i , $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$. Вещественная функция f на X приближенно представляется в виде $g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_n \circ \varphi_n$, где g_i – вещественная функция на X_i . При некоторых ограничениях на отображения φ_i доказано существование наилучшего равномерного приближения в трех случаях. В первом случае функция f и приближающие суммы ограничены, функции g_i могут быть неограниченными. Во втором случае функции f и g_i ограничены. В третьем случае f и g_i непрерывны, X и X_i – метрические компакты, отображения φ_i непрерывны.

Библиография: 11 названий.

Введение

В работе изучаются условия проксиминальности подпространств сумм суперпозиций в пространстве ограниченных или непрерывных функций с равномерной метрикой. Напомним, что множество V из метрического пространства W называется *проксиминальным*, если для $\forall w \in W$ в V существует ближайший к w элемент. Через $B(T)$ будем обозначать пространство ограниченных вещественных функций на произвольном множестве T ; в $B(T)$ определена обычная $\sup$ -норма. Изучаемые нами задачи для ограниченных функций состоят в следующем. Заданы произвольные непустые множества $X, X_1, \dots, X_n$ и отображения $\varphi_i: X \rightarrow X_i$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$. В пространстве $B(X)$ рассматриваются два подпространства:

$$B_0(X) = \{g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_n \circ \varphi_n : g_i \in B(X_i), i = 1, \dots, n\}, \quad (1)$$

$$B_1(X) = \{g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_n \circ \varphi_n\}, \quad (2)$$

где g_i – произвольные (не обязательно ограниченные) вещественные функции на X_i , $i = 1, \dots, n$, но такие, что $g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_n \circ \varphi_n \in B(X)$. Требуется указать условия, которые надо наложить на множества X, X_i и на отображения φ_i , $i = 1, \dots, n$, чтобы подпространство $B_0(X)$, соответственно, $B_1(X)$ было проксиминальным в $B(X)$.

Перейдем к постановке задачи для непрерывных функций. Через $C(T)$ будем обозначать пространство непрерывных вещественных функций с равномерной нормой на произвольном компакте T (компактном хаусдорфовом пространстве). Пусть теперь X, X_i – компакты, $\varphi_i: X \rightarrow X_i$ – непрерывные отображения, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$. В пространстве $C(X)$ рассматривается подпространство

$$C_0(X) = \{g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_n \circ \varphi_n : g_i \in C(X_i), i = 1, \dots, n\}, \quad (3)$$

и ищутся условия на X , $\{X_i\}$, $\{\varphi_i\}$, чтобы подпространство $C_0(X)$ было проксимальным. Полученные в работе условия проксимальности $C_0(X)$ предполагают, что $X \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ или $X \subset X_1 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1}$, где X_{n+1} — еще один компакт. Первое включение можно считать выполненным, когда отображение $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): X \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ разделяет точки пространства X . В этом случае образ $\varphi(X)$ можно отождествить с X , а отображение φ_i можно истолковать как проектирование из X в X_i .

Существует, однако, естественная ситуация, когда приходится считать, что $X \subset X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$, хотя, по-прежнему, аппроксимация ведется в подпространстве (3), где в устройстве каждой функции из $C_0(X)$ задействованы только первые n проекций φ_i . Пусть X — компактное множество в $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$. Тогда $C(X)$ состоит из функций $f(t_1, \dots, t_p)$, непрерывных на X . Составим из переменных $t_1, \dots, t_p$ наборы $x_i = (t_{i1}, \dots, t_{ip_i})$, $i = 1, \dots, n$, $p_i < p$, $n \geq 2$. Считаем, что каждый такой набор не включает в себя целиком никакой другой из них. Пусть φ_i — отображение, которое каждому $x = (t_1, \dots, t_p) \in X$ ставит в соответствие $x_i = \varphi_i(x) = (t_{i1}, \dots, t_{ip_i}) \in \mathbb{R}^{p_i}$, и $X_i = \varphi_i(X)$. Если любая из переменных $t_1, \dots, t_p$ входит хотя бы в один из наборов x_i , то отображение $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): X \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ есть гомеоморфизм, и мы можем считать, что $X \subset X_1 \times \cdots \times X_n$. Однако, если среди $t_1, \dots, t_p$ имеются такие переменные, которые не вошли ни в один набор x_i , $i = 1, \dots, n$, то приходится ввести еще один набор x_{n+1} , состоящий из всех координат $t_1, \dots, t_p$, не вошедших в наборы x_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда отображение $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}): X \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1}$ будет гомеоморфизмом, и мы можем считать, что $X \subset X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$, но аппроксимация по-прежнему ведется подпространством (3). В соответствующей теореме (теорема 3) мы предусматриваем обе возможности.

История вопроса такова. В работе [1] Дилиберто и Страус рассмотрели задачу равномерной аппроксимации функции $f(x, y)$, непрерывной на прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ с непрерывными слагаемыми и доказали, среди других фактов, существование наилучшего приближения $\varphi^*(x) + \psi^*(y)$. (Отметим, что изучаемая в [1] аппроксимационная задача возникла в связи с вопросом экономного размещения информации в небольшой памяти существовавших тогда компьютеров.) В этой работе сделана попытка рассмотрения задачи с большим, чем два, числом переменных, но соответствующая теорема существования не приводится. Более того, разработанный авторами для случая двух переменных естественный алгоритм последовательного приближения к наилучшей аппроксимирующей сумме, который они “по аналогии” распространяют на произвольное число переменных, оказывается при $n > 2$ неверным [2], [3].

Та же задача аппроксимации функций двух переменных независимо изучалась А. Н. Колмогоровым, В. И. Арнольдом, С. А. Смоляком и Ю. П. Офманом. Их результаты изложены в работе [4]. В частности, в [4] содержится доказанная А. Н. Колмогоровым теорема существования, совпадающая с теоремой существования из [1]. Дано также обобщение этой теоремы на функции n переменных в параллелепипеде и начато исследование аппроксимации $f(x, y)$ не на прямоугольнике, а на некотором множестве X , лежащем в прямоугольнике. Эта задача существенно сложнее, так как геометрия X оказывает решающее воздействие на наличие или отсутствие свойства проксимальности у

подпространства $C_0(X) = \{\varphi(x) + \psi(y)\}$ в $C(X)$. Для выяснения условий, обеспечивающих проксиминальность $C_0(X)$, в [4] введены геометрические понятия креста и планки. Горизонтальная планка множества X – это такое сечение X прямой $y = y_0$, что проекция этого сечения на ось Ox совпадает с проекцией всего множества X . Аналогично определяется вертикальная планка. Конечно, планки у X не обязательно существуют. Если же обе планки существуют, то их объединение дает крест. В [4] сделана попытка доказать, что если X имеет крест, то всякая функция $f(x, y)$ на X , удовлетворяющая условию Липшица, имеет наилучшее приближение $\varphi^*(x) + \psi^*(y)$, причем φ^* и ψ^* также удовлетворяют условию Липшица. Приводится и n -мерная версия этой теоремы, использующая соответствующее обобщение понятий планок и креста.

Как отметил В. П. Моторный [5], [6], наличие креста не обеспечивает справедливости сформулированного факта. В [5] и [6] это условие заменено другим, более жестким. Последнее также использует наличие крестов, но уже “локальных”. В свою очередь, в работах [5], [6] имеется ряд неточностей, связанных, в частности, с тем, что автор не делает различия между подпространствами типа (1) и типа (2). В связи с этим в [7] был приведен пример компакта $X \subset \mathbb{R}^2$ и функции $f \in C(X)$, которая не имеет наилучшего приближения ни в $C_0(X)$, ни в $B_0(X)$, хотя $f(x, y) = \varphi_0(x) + \psi_0(y)$, где φ_0 и ψ_0 непрерывны во всех точках X , кроме одной (и неограниченны). Отображения φ_1, φ_2 в указанном примере являются проектированиями на оси координат. В работе [8] показано, что наличие креста у X гарантирует проксиминальность $B_0(X)$ в $B(X)$ ($n = 2$).

В настоящей работе установлены три теоремы. Теорема 1 содержит геометрические условия, которые обеспечивают проксиминальность $B_1(X)$ в $B(X)$, теоремы 2 и 3 излагают условия, обеспечивающие проксиминальность $B_0(X)$ в $B(X)$ и $C_0(X)$ в $C(X)$, соответственно. В первых двух теоремах топологическая природа основных множеств несущественна: важны лишь их комбинаторно-геометрические свойства. В третьей теореме, трактующей о непрерывных функциях, мы предполагаем множества метрическими компактами, а отображения φ_i – непрерывными. Существует и вариант теоремы 3, относящийся к произвольным компактным хаусдорфовым пространствам, но мы его не излагаем, чтобы избежать дополнительных длиннот (здесь вместо метрики следует использовать равномерные структуры в основных множествах X_i).

Геометрическим инструментом в теоремах 1 и 2 служит понятие “цепей” различных типов. При $n = 2$ введенное понятие r -цепи совпадает с понятием молнии. Последнее понятие ввел В. И. Арнольд в знаменитой работе [9], в которой была решена тринадцатая проблема Гильберта. Последнее понятие широко использовалось и в работах по аппроксимации функций двух переменных (см., например, [4], [7]). В теореме 3 дополнительно используется еще одно геометрическое понятие: понятие (i, δ) -максимального сечения, находящееся в родстве с понятием локальной планки. Возможно использование обобщений понятия планки и для получения условий проксиминальности $B_0(X)$ в $B(X)$, отличных от условий теоремы 2, причем упомянутые условия и условия теоремы 2 не содержат одно другого. Результат будет опубликован в другой работе одного из авторов настоящей статьи.

§1. Случай ограниченных функций

Введем понятия и обозначения, необходимые для формулировки и доказательства теорем 1 и 2. Определим в X несколько отношений эквивалентности. Точки x, y называются *эквивалентными по r_i* , $i = 1, \dots, n$, если $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$. Точки x, y называются *эквивалентными по r^i* , $i = 2, \dots, n$, если $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$ для $j = 1, \dots, i-1$. Отношения r^2 и r_1 совпадают. Назовем *r -цепью длины m* последовательность точек $x^1, \dots, x^m$, в которой любые две точки с соседними номерами находятся в одном из отношений r_i (возможно, не единственном). Для $i = 2, \dots, n$ назовем *R_i -цепью длины m* последовательность точек $x^1, \dots, x^m$, в которой любые две точки с соседними номерами находятся в отношении r_i или r^i . Первая и последняя точки цепи любого типа называются концами цепи. Одна точка считается цепью любого типа, концы которой совпадают с этой точкой, а длина равна 1. Будем говорить, что цепь соединяет свои концы. Цепь называется неприводимой, если не существует цепи того же типа и с теми же концами, но меньшей длины. В неприводимой цепи все точки различны и каждое последующее отношение отличается от предыдущего. Две точки называются *эквивалентными по R_i (по r)*, если их можно соединить R_i -цепью (соответственно, r -цепью).

Класс эквивалентности по R_i (по r) называется *R_i -классом (r -классом)*. Если точки находятся в отношении R_i , то они находятся и в отношении r . Поэтому каждый R_i -класс целиком содержится в некотором r -классе. Введенные понятия цепей имеют особенно простой смысл, когда $X \subset \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n$ — координаты точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, а $\varphi_i(x) = x_i$, т.е. $\varphi_i(x)$ — проекция точки x на i -ю координатную ось. Тогда r -цепь состоит из вершин ломаной, каждое звено которой параллельно одной из координатных гиперплоскостей. Звенья ломаной не обязательно содержатся в X , но вершины принадлежат X . Точки R_i -цепи в таком случае являются вершинами ломаной, каждое звено которой ортогонально i -й координатной оси или параллельно координатной плоскости, содержащей оси с номерами $i, i+1, \dots, n$.

Известно [10], что пространство $B(X)$ сопряжено к пространству $l_1(X)$. Следовательно, пространство $l_1(X)$ определяет на $B(X)$ слабую $*$ -топологию. В тексте будут встречаться линейные функционалы на $B(X)$ вида $Lf = \mu_1 f(x^1) + \dots + \mu_s f(x^s)$, где $x^1, \dots, x^s$ — любые фиксированные точки из X , $\mu_1, \dots, \mu_s$ — заданные вещественные числа, f — произвольная функция из $B(X)$. Эти функционалы непрерывны в слабой $*$ -топологии. В доказательстве теоремы 1 существенно, что Lf имеет смысл и в случае, когда f — неограниченная функция. Обозначим через l_0 множество всех функционалов указанного вида.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для $n > 2$ каждый r -класс содержит конечное число R_i -классов, $i = 3, \dots, n$. Тогда $B_1(X)$ замкнуто в слабой $*$ -топологии и, следовательно, каждая функция из $B(X)$ имеет наилучшее приближение в $B_1(X)$. Если $n = 2$, то заключение теоремы верно без каких-либо ограничений на классы эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через G_i график отношения r_i , $i = 1, \dots, n$, т.е. множество пар (x, y) таких, что $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. В каждом r -классе E отметим точку $x^1 = x^1(E)$. Произвольную точку $x \in E$ соединим с точкой x^1 одной неприводимой r -цепью $x^1, \dots, x^m = x$, которую назовем отмеченной. Пусть $f \in B_1(X)$. Запишем f в виде $f = h_1 + h_2$, где функции

$h_i, i = 1, 2$, удовлетворяют условию: $h_i(x) = h_i(y)$, если $(x, y) \in G_i$. Обозначим $a_1 = h_1(x^1), a_2 = h_2(x^1)$. Точки x^p и x^{p+1} находятся в некотором отношении r_{i_p} , $p = 1, \dots, m-1$. При переходе из точки x^p в точку x^{p+1} значение функции h_i не изменяется, если $i_p = i$. Если $i_p \neq i$, то $h_i(x^{p+1}) - h_i(x^p) = f(x^{p+1}) - f(x^p)$, так как $f = h_1 + h_2$. Для каждой точки $x \in X$ имеем:

$$h_1(x) = a_1 + \sum_{i_p=2} (f(x^{p+1}) - f(x^p)), \quad (4)$$

$$h_2(x) = a_2 + \sum_{i_p=1} (f(x^{p+1}) - f(x^p)). \quad (5)$$

Числа a_1 и a_2 зависят от r -класса, которому принадлежит x . Обозначим через $A_{1x}f$ и $A_{2x}f$ суммы, стоящие в правых частях (4) и (5), не включая в них a_1 и a_2 . Если фиксировать x , то A_{1x} и A_{2x} — функционалы из l_0 . Для $(x, y) \in G_i$ верно равенство $h_i(x) = h_i(y)$, которое равносильно равенству $(A_{ix} - A_{iy})f = 0$. Таким образом, если $f \in B_1(X)$, то

$$(A_{ix} - A_{iy})f = 0, \quad (x, y) \in G_i, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Пусть теперь $f \in B(X)$ и f удовлетворяет равенствам (6). Докажем, что $f \in B_1(X)$. Для каждого r -класса E выберем числа a_1, a_2 так, чтобы $a_1 + a_2 = f(x^1)$, где $x^1 = x^1(E)$. Определим на X две функции h_1 и h_2 следующим образом. Положим $h_1(x^1) = a_1, h_2(x^1) = a_2$. Для остальных точек x значения функций h_i зададим равенствами (4), (5), используя в каждом r -классе отмеченные цепи. В силу (4), (5) и выбора a_1, a_2 верно равенство $f = h_1 + h_2$. Из (6) следует $h_i(x) = h_i(y)$, если $(x, y) \in G_i$. Поэтому $f \in B_1(X)$. Следовательно, $B_1(X)$ состоит из тех и только тех функций $f \in B(X)$, которые удовлетворяют равенствам (6). Так как функционалы $A_{ix} - A_{iy}$ непрерывны в слабой $*$ -топологии, то $B_1(X)$ замкнуто в этой топологии.

Пусть $n > 2$. Предположим сначала, что X состоит из одного r -класса. Для $i = 3, \dots, n$ обозначим через $E_{i1}, \dots, E_{ik_i}$ R_i -классы, объединение которых равно X . В каждом классе E_{ij} отметим одну точку x_{ij} . Зафиксируем i . Если $x \in X$, то $x \in E_{ij}$ при некотором j . Соединим x с x_{ij} одной неприводимой R_i -цепью $x^1 = x_{ij}, x^2, \dots, x^m = x$, которую назовем отмеченной. Мы сохраняем обозначения $x^1, \dots, x^m$, которые использовались в доказательстве для $n = 2$, но теперь точки x^p могут быть другими. Обозначим через A множество тех значений p , для которых точки x^p и x^{p+1} отмеченной цепи находятся в отношении r^i . Если $m = 1$, то $A = \emptyset$. В векторном пространстве D всех вещественных функций g на X определим линейный оператор $A_i: D \rightarrow D$, полагая

$$(A_i g)(x) = \sum_{p \in A} (g(x^{p+1}) - g(x^p)).$$

Правая часть этого равенства зависит от x , поскольку отмеченная R_i -цепь зависит от x . Определим таким способом A_i для всех $i = 3, \dots, n$. Для произвольного линейного оператора $L: D \rightarrow D$ и фиксированного $x \in X$ через L_x будем обозначать функционал, определяемый равенством $L_x f = (L f)(x)$.

Возьмем функцию $f \in B_1(X)$. Запишем ее в виде $f = h_1 + \dots + h_n$, где функции h_i удовлетворяют условию: $h_i(x) = h_i(y)$, если $(x, y) \in G_i$. Обозначим $a_{ij} = h_i(x_{ij})$, $i = 3, \dots, n$, $j = 1, \dots, k_i$. Если $x \in E_{nj}$, то аналогично (4), (5) получим

$$h_n(x) = a_{nj} + A_{nx}f. \quad (7)$$

Если $3 \leq i < n$ и $x \in E_{ij}$, то

$$h_i(x) = a_{ij} + A_{ix}(f - h_{i+1} - \dots - h_n). \quad (8)$$

Перепишем (7) и (8) в другом виде. Обозначим через f_{ij} характеристическую функцию класса E_{ij} . Тогда

$$h_n = \sum_{j=1}^{k_n} a_{nj} f_{nj} + A_n f, \quad (9)$$

$$h_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_{ij} + A_i(f - h_{i+1} - \dots - h_n), \quad (10)$$

$i = 3, \dots, n$. Для функций h_1 и h_2 напомним равенства, аналогичные (10). Для этого повторим с некоторыми изменениями вывод (4), (5). В случае $n = 2$ отношения r и R_2 совпадают. Этого совпадения нет, если $n > 2$. Отметим в каждом R_2 -классе E точку $x^1 = x^1(E)$. Каждую точку $x \in E$ соединим с этой точкой x^1 одной неприводимой R_2 -цепью $x^1, \dots, x^m = x$, которую назовем отмеченной. Точки x^p и x^{p+1} находятся в некотором отношении r_{i_p} , где $i_p = 1$ или $i_p = 2$, $p = 1, \dots, m-1$. Определим следующим образом линейные операторы A_1 и A_2 . Для произвольной функции $g \in D$ положим

$$(A_1 g)(x) = \sum_{i_p=2} (g(x^{p+1}) - g(x^p)),$$

$$(A_2 g)(x) = \sum_{i_p=1} (g(x^{p+1}) - g(x^p)).$$

Если сумма не содержит слагаемых, то она считается равной нулю. Определим функции a_1 и a_2 на X равенствами $a_i(x) = h_i(x^1(E))$, если x принадлежит R_2 -классу E , $i = 1, 2$. Тогда аналогично (4), (5)

$$h_1 = a_1 + A_1(f - h_3 - \dots - h_n), \quad (11)$$

$$h_2 = a_2 + A_2(f - h_3 - \dots - h_n). \quad (12)$$

Подставим выражение (9) для h_n в (10) при $i = n-1$. Полученное новое выражение для h_{n-1} и выражение (9) для h_n подставим в (10) при $i = n-2$ и т.д. В итоге, для $i = 3, \dots, n$ получим

$$h_i = \sum_{s=3}^n \sum_{j=1}^{k_s} a_{sj} g_{sj}^i + L_i f, \quad (13)$$

где g_{sj}^i – функции на X , не зависящие от выбора f , L_i – линейные операторы. Операторы L_i определяются индуктивно равенствами: $L_n = A_n$, $L_i = A_i - A_i(L_{i+1} + \dots + L_n)$. Аналогично (13), получим

$$h_1 = a_1 + \sum_{s=3}^n \sum_{j=1}^{k_s} a_{sj} g_{sj}^1 + L_1 f, \quad (14)$$

$$h_2 = a_2 + \sum_{s=3}^n \sum_{j=1}^{k_s} a_{sj} g_{sj}^2 + L_2 f, \quad (15)$$

где $L_1 = A_1 - A_1(L_3 + \dots + L_n)$, $L_2 = A_2 - A_2(L_3 + \dots + L_n)$, функции g_{sj}^1 и g_{sj}^2 не зависят от выбора f .

Рассмотрим все пары $(x, y) \in G_i$, $i = 1, \dots, n$. Для таких (x, y) верны равенства $h_i(x) = h_i(y)$. Следовательно,

$$\sum_{s=3}^n \sum_{j=1}^{k_s} a_{sj} (g_{sj}^i(x) - g_{sj}^i(y)) = (L_{iy} - L_{ix})f, \quad (16)$$

если $(x, y) \in G_i$, $i = 1, \dots, n$. Равенства (16) не содержат a_1, a_2 , так как функции a_1, a_2 постоянны на R_2 -классах. Будем рассматривать равенства (16) как систему уравнений относительно всех a_{ij} . Расположим все a_{ij} в виде строки, которую обозначим через a . Тогда $a \in \mathbb{R}^k$, где $k = k_3 + \dots + k_n$. Отметим каждое уравнение (16) индексом α так, чтобы разным уравнением соответствовали разные индексы. По существу, в роли α берется тройка (i, x, y) . Система (16) примет вид

$$(b_\alpha, a) = L_\alpha f, \quad \alpha \in I, \quad (17)$$

где $b_\alpha \in \mathbb{R}^k$, L_α – линейный функционал. Функционалы L_α принадлежат l_0 . Действительно, $A_{ix} \in l_0$ для любых i и $x \in X$. Отсюда следует, что $(A_i A_j)_x \in l_0$ для любых i, j и $x \in X$. По индукции легко получить, что $L_{ix} - L_{iy} \in l_0$, т.е. $L_\alpha \in l_0$. Выделим из (17) подсистему с максимальным набором линейно независимых векторов b_α :

$$(b_\alpha, a) = L_\alpha f, \quad \alpha \in I_0. \quad (18)$$

Неизвестные a_{ij} , коэффициенты при которых в (18) составляют невырожденную матрицу, назовем главными. Остальные a_{ij} назовем свободными. Если в (17) все b_α равны нулю, то все a_{ij} свободные, $I_0 = \emptyset$. Мы не обсуждаем возможность такого случая, так как это не имеет значения для доказательства теоремы. Выразим из (18) все a_{ij} через свободные неизвестные, используя, например, формулы Крамера. Получим:

$$a_{ij} = l_{ij} f + l'_{ij}(a), \quad i = 3, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad (19)$$

где $l_{ij} \in l_0$, $l'_{ij}(a)$ – линейное выражение от a , в котором коэффициенты при главных a_{ij} равны нулю. Для свободных a_{ij} равенства (19) превращаются, конечно, в тождества $a_{ij} = a_{ij}$. Равенства (17) являются следствием равенств (18). Подставим выражения (19) в равенства (17), не вошедшие в (18). Полученные таким

способом равенства будут выполняться для произвольных значений свободных неизвестных, т.е. не будут содержать никакого a_{ij} . Если перенести правую часть налево, то полученные равенства примут вид

$$l_\alpha f = 0, \quad \alpha \in I \setminus I_0, \quad (20)$$

где $l_\alpha \in l_0$.

Пусть теперь $f \in B(X)$ и f удовлетворяет равенствам (20). Докажем, что $f \in B_1(X)$. Будем строить функции h_i следующим образом. Зададим a_{ij} равенствами (19), приравняв свободные неизвестные к нулю. Для $i = 3, \dots, n$ зададим функции h_i равенствами (13). Выберем функции a_1, a_2 так, чтобы они были постоянными на каждом R_2 -классе E и чтобы выполнялись равенства $a_1(x^1) + a_2(x^1) = f(x^1) - h_3(x^1) - \dots - h_n(x^1)$ для $x^1 = x^1(E)$. Зададим функции h_1, h_2 равенствами (11), (12) или, что то же самое, равенствами (14), (15). В силу (11), (12) и выбора функций a_1, a_2 верно равенство $h_1 + h_2 = f - h_3 - \dots - h_n$. Тогда $f = h_1 + \dots + h_n$. Из (19) и (20) следует (17). Поэтому верны равенства (16), которые означают, что $h_i(x) = h_i(y)$ для $(x, y) \in G_i$. Следовательно, $f \in B_1(X)$. Если X состоит из более чем одного r -класса, то равенства (20) для функции $f \in B_1(X)$ можно вывести на каждом r -классе отдельно. В той части доказательства, где строятся функции h_i в предположении, что $f \in B(X)$ и f удовлетворяет равенствам (20), построение h_i тоже можно осуществить на каждом r -классе отдельно и объединить результаты построения по всем r -классам. Опять получится, что $f \in B_1(X)$. Следовательно, $B_1(X)$ состоит из тех и только тех ограниченных функций f , которые удовлетворяют равенствам (20). Так как функционалы l_α непрерывны в слабой $*$ -топологии, то $B_1(X)$ замкнуто в этой топологии. Отсюда, в свою очередь, следует, что каждая функция из $B(X)$ имеет наилучшее приближение в $B_1(X)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторого натурального числа N длины неприводимых R_i -цепей не превосходят N , $i = 2, \dots, n$. В случае $n > 2$ предположим также, что для $i = 3, \dots, n$ каждый r -класс содержит не более N R_i -классов. Тогда $B_1(X) = B_0(X)$ и каждая функция из $B(X)$ имеет наилучшее приближение в $B_0(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование наилучшего приближения будет следовать из равенства $B_1(X) = B_0(X)$ и теоремы 1. Пусть $n = 2$ и $f \in B_1(X)$. Тогда $f = h_1 + h_2$, $h_i(x) = h_i(y)$, если $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, $i = 1, 2$. Представление f суммой указанного вида не единственно. Возьмем те функции h_i , построение которых описано сразу после (6). Потребуем дополнительно, чтобы $a_1 = a_2$. Тогда $|a_i| \leq \frac{1}{2}|f|$. Отмеченные цепи, использованные при выводе (4) и (5), неприводимые. Поэтому $|A_{ix}f| \leq N|f|$, $i = 1, 2$. Тогда h_1 и h_2 — ограниченные функции. Следовательно, $B_1(X) = B_0(X)$.

Пусть $n > 2$ и $f \in B_1(X)$. Предположим сначала, что X состоит из одного r -класса. Как и выше, представление f в виде $h_1 + \dots + h_n$ не единственно. Возьмем функции h_i , построение которых описано после (20). Из неприводимости отмеченных цепей и из предположений теоремы следует $|A_i| \leq N$, $i = 1, \dots, n$, если операторы A_i рассматривать на $B(X)$. Отсюда и из индуктивного определения операторов L_i следует $|L_i| \leq N_1 = N_1(n, N)$. Последнее равенство означает, что

N_1 можно определить по n и N . Характеристические функции f_{ij} имеют значения 0 или 1. Построение функций g_{st}^q по характеристическим функциям f_{ij} можно осуществить методом индукции. Полное изложение этой индукции излишне. Достаточно заметить, что из оценки $|A_i| \leq N$ следует оценка $|g_{st}^q| \leq N_2 = N_2(n, N)$. Кроме того, все значения функций g_{st}^q целые.

Далее, система (17) отличается от (16) только обозначениями. Поэтому $|L_\alpha f| \leq 2N_1|f|$, а координаты вектора $b_\alpha \in \mathbb{R}^k$ целые и не превосходят $2N_2$. Тогда базисный определитель системы уравнений (18) по модулю не меньше единицы. Число уравнений в (18) не превосходит $k = k_3 + \dots + k_n \leq (n-2)N$. Нетрудно оценить определители, используемые в формулах Крамера при переходе от (18) к (19) и получить оценку $|l_{ij}f| \leq N_3|f|$, $N_3 = N_3(n, N)$. Так как мы приравняли к нулю свободные неизвестные, то $|a_{ij}| \leq N_3|f|$ для всех a_{ij} . Для $i = 3, \dots, n$ из (13) получим $|h_i| \leq N_4|f|$, $N_4 = N_4(n, N)$. При построении h_1 и h_2 дополнительно потребуем, чтобы $a_1 = a_2$. Тогда $|a_i| \leq \frac{1}{2}|f - h_3 - \dots - h_n|$. В итоге, для всех $i = 1, \dots, n$ получается оценка вида $|h_i| \leq N_5|f|$, $N_5 = N_5(n, N)$. Следовательно, $f \in B_0(X)$. Если X состоит из более чем одного r -класса, то построим функции h_i изложенным способом на каждом r -классе отдельно, а затем объединим результаты построения. Мы получим функции h_i , определенные на всем X . Они удовлетворяют условиям: $f = h_1 + \dots + h_n$ и $h_i(x) = h_i(y)$, если $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$. Кроме того, функции h_i ограничены, поскольку число N_5 определяется по n и N одинаково для всех r -классов. Тогда $f \in B_0(X)$. Следовательно, $B_1(X) = B_0(X)$. Теорема доказана.

§ 2. Случай непрерывных функций

Мы предполагаем теперь, что X — компактное подмножество произведения $X_1 \times \dots \times X_n$ или произведения $X_1 \times \dots \times X_{n+1}$, где каждый множитель X_i является метрическим компактом. Отображение φ_i есть проектирование на X_i . Проектирование φ_i рассматривается только для точек из X . Это следует иметь в виду, когда используется символ φ_i^{-1} . Если $x_i \in X_i$, то множество $\varphi_i^{-1}(x_i)$ называется сечением множества X в точке x_i . Пусть $F \subset X_i$ для некоторого $i \leq n$. Будем говорить, что F имеет i -максимальное сечение, если существует точка $x_{0i} \in F$, обладающая свойством: для любой точки $y \in \varphi_i^{-1}(F)$ найдется точка $x \in \varphi_i^{-1}(x_{0i})$ такая, что $\varphi_j(y) = \varphi_j(x)$ для $j \neq i$. Другими словами, для каждого $y_i \in F$ проекция сечения $\varphi_i^{-1}(y_i)$ на произведение всех X_j , $j \neq i$, содержится в проекции сечения $\varphi_i^{-1}(x_{0i})$ на это же произведение. Пусть $1 < i \leq n$, если $X \subset X_1 \times \dots \times X_n$, и $1 < i \leq n$, если $X \subset X_1 \times \dots \times X_n \times X_{n+1}$. Зададим $\delta > 0$. Будем говорить, что множество $F \subset X_i$ имеет (i, δ) -максимальное сечение, если существует точка $x_{0i} \in F$, обладающая свойством: для любой точки $y \in \varphi_i^{-1}(F)$ найдется точка $x \in \varphi_i^{-1}(x_{0i})$ такая, что $\varphi_j(y) = \varphi_j(x)$ для $j < i$, и $\rho_j(\varphi_j(y), \varphi_j(x)) < \delta$ для $j > i$. Здесь ρ_j обозначает расстояние между указанными точками в пространстве X_j . В случае $X \subset X_1 \times \dots \times X_n$ и $F \subset X_n$ будем также говорить, что F имеет (n, δ) -максимальное сечение, если F имеет n -максимальное сечение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для каждого $x_i \in X_i$, $i = 2, \dots, n$, и любого $\delta > 0$ найдется положительное $\delta_0 < \delta$ такое, что замкнутая δ_0 -окрестность точки x_i имеет (i, δ) -максимальное сечение. Тогда каждая функция из $C(X)$ имеет наилучшее приближение в $C_0(X)$, которое одновременно является наилучшим приближением в $B_0(X)$.

Доказательству теоремы предположим следующую лемму.

ЛЕММА. *Если выполняется предположение теоремы 3, то для всех $i = 2, \dots, n$ число R_i -классов конечно, и длины неприводимых R_i -цепей имеют конечную верхнюю грань.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим одно из значений $i = 2, \dots, n$. Для каждой точки $x_i \in X_i$ найдется замкнутый шар с центром в x_i , который имеет $(i, 1)$ -максимальное сечение. Так как X_i компактно, то можно выделить конечное число таких шаров $S_1, \dots, S_q$, которые покрывают X_i . Пусть $x_{1i}, \dots, x_{qi}$ — точки из X_i , в которых шары $S_1, \dots, S_q$ имеют $(i, 1)$ -максимальные сечения. Обозначим $D_p = \varphi_i^{-1}(S_p)$, $p = 1, \dots, q$. Пусть точки y, z принадлежат некоторому D_p . Тогда в X найдутся точки u, v такие, что $\varphi_i(u) = \varphi_i(v) = x_{pi}$, $\varphi_j(u) = \varphi_j(y)$, $\varphi_j(v) = \varphi_j(z)$ для $j = 1, \dots, i-1$. Точки y, u находятся в отношении r^i . Точки u, v находятся в отношении r_i . Точки v, z находятся в отношении r^i . Таким образом, точки y, z соединены R_i -цепью длины 4. Следовательно, D_p целиком содержится в некотором R_i -классе. Так как объединение всех D_p равно X , то каждый R_i -класс есть объединение некоторых D_p . Поэтому число R_i -классов конечно. В каждом множестве D_p отметим одну точку x^p . Если D_p и D_s содержатся в одном R_i -классе, то точки x^p и x^s можно соединить R_i -цепью некоторой длины m_{ps} . Пусть точки y и z эквивалентны по R_i . Тогда $y \in D_p, z \in D_s$ для некоторых p, s . Если $p = s$, то точки y и z можно соединить, как уже доказано, R_i -цепью длины 4. Если $p \neq s$, то соединим точку y с точкой x^p , точку x^p с точкой x^s и точку x^s с точкой z R_i -цепями, длины которых, соответственно, равны 4, m_{ps} и 4. В результате точки y и z будут соединены R_i -цепью длины $6 + m_{ps}$. Отсюда следует, что длины неприводимых R_i -цепей не превосходят $6 + \max m_{ps}$, где максимум берется по тем парам p, s , для которых D_p, D_s содержатся в одном R_i -классе. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Проведем доказательство теоремы для случая $X \subset X_1 \times \dots \times X_{n+1}$, которое с незначительными изменениями справедливо и для случая $X \subset X_1 \times \dots \times X_n$. Пусть $f \in C(X)$. По лемме и по теореме 2 функция f имеет наилучшее приближение $g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_n \circ \varphi_n$ в $B_0(X)$. Применим индукцию. Предположим, что для некоторого $i \geq 2$ найдены непрерывные функции $g_{i+1}^*, \dots, g_n^*$ такие, что сумма

$$g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_i \circ \varphi_i + g_{i+1}^* \circ \varphi_{i+1} + \dots + g_n^* \circ \varphi_n \quad (21)$$

является наилучшим приближением функции f в $B_0(X)$. Если $i = n$, то в (21) подразумевается сумма $g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_n \circ \varphi_n$. Будем искать непрерывную функцию g_i^* такую, что если в сумме (21) заменить g_i на g_i^* , то сумма останется наилучшим приближением функции f в $B_0(X)$. Для $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in X$ обозначим $h(x) = f(x) - g_{i+1}^*(x_{i+1}) - \dots - g_n^*(x_n)$, $g(x) = g_1(x_1) + \dots + g_{i-1}(x_{i-1})$, $F(x) = h(x) - g(x)$. Если $i = n$, то $h(x) = f(x)$. Обозначим через d расстояние от f до $B_0(X)$. Для всех $x \in X$ имеем

$$F(x) - d \leq g_i(x_i) \leq F(x) + d. \quad (22)$$

Из (22) следует, что

$$F(y) - F(z) \leq 2d \quad \text{если} \quad \varphi_i(z) = \varphi_i(y). \quad (23)$$

Зафиксируем x_i и зададим $\varepsilon > 0$. Так как функция h непрерывна, а пространство X компактно, то функция h равномерно непрерывна. Поэтому существуют число $\delta > 0$ и замкнутый шар U с центром x_i в пространстве X_i такие, что верно неравенство

$$|h(u) - h(v)| < \varepsilon, \quad (24)$$

если точки $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$ и $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ из X удовлетворяют условиям: $u_i \in U$, $v_i \in U$, $u_j = v_j$ для $j < i$, и $\rho_j(u_j, v_j) < \delta$ для $j > i$. В силу предположения теоремы 3 можно считать, что U имеет в некоторой точке $x_{0i} \in U(i, \delta)$ -максимальное сечение. Возьмем произвольную окрестность V точки x_i . Обозначим $S(x_i, V) = \sup F(y)$, $I(x_i, V) = \inf F(z)$, где $\sup$ и $\inf$ берутся по точкам y, z из $\varphi_i^{-1}(V)$. Положим $S(x_i) = \inf S(x_i, V)$ и $I(x_i) = \sup I(x_i, V)$, где $\inf$ и $\sup$ берутся по всем окрестностям V точки x_i . Докажем, что

$$S(x_i) - I(x_i) \leq 2d. \quad (25)$$

Возьмем в качестве V внутренность U_0 шара U . Пусть точки $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ и $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ принадлежат $\varphi_i^{-1}(U_0)$. Тогда в X найдутся точки $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$ и $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ такие, что $u_i = v_i = x_{0i}$, $u_j = y_j$, $v_j = z_j$ для $j < i$, и $\rho_j(u_j, y_j) < \delta$, $\rho_j(v_j, z_j) < \delta$ для $j > i$. Из (24) следуют неравенства $|h(u) - h(y)| < \varepsilon$ и $|h(v) - h(z)| < \varepsilon$. Так как $g(u) = g(y)$ и $g(v) = g(z)$, то $|F(u) - F(y)| < \varepsilon$ и $|F(v) - F(z)| < \varepsilon$. Из (23) следует $F(u) - F(v) \leq 2d$, так как $\varphi_i(u) = \varphi_i(v)$. Тогда $F(y) - F(z) < 2d + 2\varepsilon$. Поэтому $S(x_i, U_0) - I(x_i, U_0) \leq 2d + 2\varepsilon$. Отсюда $S(x_i) - I(x_i) \leq 2d + 2\varepsilon$. Так как ε сколь угодно мало, то верно неравенство (25). Следовательно, $S(x_i) - d \leq I(x_i) + d$.

Значения $S(x_i)$ и $I(x_i)$ определены для всех точек $x_i \in X_i$. Нетрудно проверить, что функция S полунепрерывна сверху, а функция I полунепрерывна снизу. По теореме Катетова о разделении полунепрерывных функций [11] существует непрерывная функция g_i^* на X_i , удовлетворяющая неравенствам $S(x_i) - d \leq g_i^*(x_i) \leq I(x_i) + d$ для всех $x_i \in X_i$. Тогда $F(x) - d \leq g_i^*(x_i) \leq F(x) + d$. Это означает, что сумма $g_1 \circ \varphi_1 + \dots + g_{i-1} \circ \varphi_{i-1} + g_i^* \circ \varphi_i + \dots + g_n^* \circ \varphi_n$ есть наилучшее приближение функции f в $B_0(X)$. По индукции получим наилучшее приближение $g_1 \circ \varphi_1 + g_2^* \circ \varphi_2 + \dots + g_n^* \circ \varphi_n$ для f в $B_0(X)$, где функции $g_2^*, \dots, g_n^*$ непрерывны. Обозначим теперь $F = f - g_2^* \circ \varphi_2 - \dots - g_n^* \circ \varphi_n$. В отличие от предыдущих выкладок функция F на этот раз непрерывна. Поэтому замену g_1 на непрерывную функцию можно осуществить проще. Положим $S(x_1) = \sup F(y)$ и $I(x_1) = \inf F(z)$, где $\sup$ и $\inf$ берутся по точкам y, z из сечения $\varphi_1^{-1}(x_1)$. Применяя доказательство от противного, легко убедиться, что функция S полунепрерывна сверху, а функция I полунепрерывна снизу. Используя снова теорему Катетова, получим искомую непрерывную функцию g_1^* . Теорема доказана.

Приведем несколько простых примеров, иллюстрирующих теорему 3. Пусть X — конечное объединение параллелепипедов в $\mathbb{R}^p$, ребра которых параллельны координатным осям, $p \geq 2$. Положим $x_1 = t_1, \dots, x_n = t_n$, $x_{n+1} = (t_{n+1}, \dots, t_p)$, $2 \leq n \leq p$, где $t_1, \dots, t_p$ — координаты произвольной точки из X . При $n = p$ переменная x_{n+1} отсутствует. Если x_i — координата некоторой точки из X , $2 \leq i \leq n$, то любая достаточно малая замкнутая окрестность точки x_i в проекции множества X на i -ю координатную ось имеет i -максимальное сечение в самой точке x_i .

Очевидно, что i -максимальное сечение является также (i, δ) -максимальным сечением для той же окрестности при любом $\delta > 0$. Поэтому предположение теоремы 3 выполняется. Пусть теперь X — шар в пространстве $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$. Определим переменные $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ так же, как и в предыдущем примере. Если x_i — координата некоторой точки из X , $2 \leq i \leq n$, то любая замкнутая окрестность точки x_i имеет i -максимальное сечение в той точке этой окрестности, где i -я координата имеет наименьший модуль (предполагается, что координаты центра шара равны нулю). Поэтому предположение теоремы 3 снова выполняется. Следующий пример показывает, что использование понятия (i, δ) -максимального сечения вместо i -максимального сечения существенно. Возьмем в качестве X множество в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$, заданное неравенствами $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $-3 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$. Если x_3 — координата точки из X , то любая замкнутая окрестность точки x_3 на оси Ox_3 имеет 3-максимальное сечение. Если x_2 — координата некоторой точки из X , то никакая замкнутая окрестность точки x_2 на оси Ox_2 не имеет 2-максимального сечения. Однако для любого $\delta > 0$ найдется сколь угодно малая замкнутая окрестность точки x_2 , которая имеет $(2, \delta)$ -максимальное сечение в самой точке x_2 . Свойства множества X относительно координаты x_1 аналогичны. В этом примере предположение теоремы 3 выполняется как при $n = 2$, так и при $n = 3$.

Возможно, что условие теоремы 3 можно ослабить, но полностью его опустить нельзя, как показывает упомянутый во введении пример из работы [7]. В этом примере компактное множество X на плоскости Oxy одномерно. Нетрудно построить пример с аналогичными свойствами, где X является замкнутой ограниченной областью на плоскости Oxy .

Список литературы

1. *Diliberto S. P., Straus E. G.* On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables // *Pacif. J. Math.* 1951. V. 1. № 1. P. 195–210.
2. *Aumann G.* Approximation by step functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1963. V. 14. № 3. P. 477–482.
3. *Медведев В. А.* Опровержение одной теоремы Дилиберто и Страуса // *Матем. заметки.* 1992. Т. 51. № 4. С. 78–80.
4. *Офман Ю. П.* О наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1961. Т. 25. № 2. С. 239–252.
5. *Моторный В. П.* К вопросу о наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1963. Т. 27. № 6. С. 1211–1214.
6. *Моторный В. П.* К вопросу о наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ // *Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.* Баку: АН Аз. ССР, 1965. С. 66–72.
7. *Хавинсон С. Я.* Чебышевская теорема для приближения функций двух переменных суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1969. Т. 33. № 4. С. 650–666.
8. *Хавинсон С. Я.* О представлении и приближении функций двух переменных линейными суперпозициями // *Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве.* М.: МИСИ, 1987. С. 89–92.
9. *Арнольд В. И.* О функциях трех переменных // *ДАН СССР.* 1957. Т. 114. № 4. С. 679–681.
10. *Дэй М. М.* Линейные нормированные пространства. М.: ИЛ, 1961.
11. *Katetov M.* On real functions in topological spaces // *Fund. Math.* 1951. V. 38. P. 85–91.